Peatükk 1

Funktsioonid ja nendega seotud mõisted

1.1 Reaalarvud ja Arvtelg. Absoluutväärtuse mõiste. Reaalarvudest koosnevad hulgad.

Enne arvu mõiste käsitlemist toome sisse mõned hulkadega seotud tähised.

Hulk (tavalises mõttes) koosneb elementidest (e hulga liikmetest), kusjuures elemendid ei kordu ja nende järjestus ei ole kindlaks määratud. Hulga tähistamiseks eraldame vaadeldavad elemendid komadega ja piiritleme hulga loogeliste sulgudega. Näiteks $\{0, 7, 5\}$ on elementidest 0, 7 ja 5 koosnev hulk. Hulk võib olla antud ka keerulisemal kujul. Näiteks $\{x^2 \parallel x = 1, 2, 3\}$ on hulk, mille elemendid on arvutatavad valemiga x^2, kusjuures x võib omandada väärtusi 1, 2 ja 3. Viimase hulga võib muidugi panna kirja ka ekvivalentsel kujul $\{1, 4, 9\}$.

Peale tavaliste hulkade kasutame edaspidi ka järjestatud hulki. *Järjestatud hulk* koosneb samuti elementidest, kuid selles hulgas on iga kahe elemendi kohta on võimalik öelda, kumb neist on eelnev, kumb järgnev. Tavalise hulga ja järjestatud hulga eristamiseks lepime kokku, et viimase tähistamisel kasutame loogeliste sulgude asemel ümarsulgi. Peale selle lubame järjestatud hulga elementidel ka korduda. Näiteks $(-1, 1, -1, 1, \ldots)$ on järjestatud hulk, milles -1-le järgneb 1, sellele omakorda -1 jne.

Naturaalarvude hulk on $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ ja täisarvude hulk on $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Täisarvude baasil defineerime ratsionaalarvud. Ratsionaalarvuks nimetatakse kahe täisarvu p ja q jagatist p/q, kusjuures $q \neq 0$. Ratsionaalarvude hulga tähis on $\mathbb{Q}$. Seega, lühidalt kirjutades $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \parallel p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$. Iga ratsionaalarvu saab esitada kas lõpliku või lõpmatu perioodilise kümnendmurruna.

Lõpmatuid mitteperioodilisi kümnendmurde nimetatakse irratsionaalarvudeks. Irratsionaalarvude hulga tähis on $\mathbb{I}$. Üks ja sama arv ei saa olla samaaegselt nii ratsionaal- kui ka irratsionaalarv. Seetõttu ei oma ratsionaalarvude ja irratsionaalaarvude hulgad ühisosa, st $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$.

Ratsionaalarvud ja irratsionaalarvud kokku moodustavad reaalarvude hulga. Reaalarvude hulga tähis on $\mathbb{R}$. Seega $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

Arvtelje mõiste. *Arvteljeks* nimetatakse sirget, millel on valitud nullpunkt, pikkusühik ja positiivne suund. Kasutades neid kolme parameetrit, saab arvtelje punktidele seada vastavusse reaalarvud. Tõepoolest, nullpunktist ühe ühiku võrra positiivses suunas paikneb punkt, mis vastab arvule 1, poole ühiku võrra negatiivses suunas paikneb punkt, mis vastab arvule $-1/2$ jne. Võib väita, et igale arvtelje punktile vastab üks ja ainult üks reaalarv ja vastupidi: igale reaalarvule vastab üks ja ainult üks arvtelje punkt. Öeldu põhjal saab reaalarvud samastada sirge (arvelje) punktidega.

Olgu tasandil antud kaks arvtelge, mis on ristuvad oma nullpunktides. Need moodustavad tasandil nn koordinaatteljestiku. Tasandi punkti ristkoordinaatideks nimetatakse selle punkti ristprojektsioone koordinaatttelgedele. Igale tasandi punktile vastab üks ja ainult üks ristkoordinaatidest moodustatud arvupaar ja vastupidi: igale arvupaarile vastab üks ja ainult üks tasandi punkt. Matemaatikas tähistatakse tavaliselt ühel ristuvatest koordinaattelgedest olevat olevat arvu x-ga ja teisel koordinaatteljel oleval arvu y-ga. Sel juhul on tegemist xy-teljestikuga ja me saame rääkiga tasandil asuva punkti x- ja y-koordinaatidest.

Absoluutväärtuse mõiste. Reaalarvu a absoluutväärtuseks nimetatakse järgmist mittenegatiivset reaalarvu:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{kui} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{kui} \quad a < 0 \,. \end{cases}$$

Reaalarvu a absoluutväärtust $|a|$ võib tõlgendada kui punkti a ja nullpunkti vahelist kaugust arvteljel.

Üldisemalt: punktide a ja b vaheline kaugus arvteljel võrdub arvuga $|a - b|$.

Absoluutväärtuse omadused:

1. $|-a| = |a|$
2. $|ab| = |a|\,|b|$
3. $|a + b| \leq |a| + |b|$
4. $|a - b| \geq \big|\,|a| - |b|\,\big|$

Vahemikud, poollõigud ja lõigud. Defineerime järgmised reaalarvudest koosnevad hulgad:

lõplik vahemik $(a, b) = \{x \,\|\, a < x < b\}$,

lõplikud poollõigud $[a, b) = \{x \,\|\, a \leq x < b\}$,

$(a, b] = \{x \,\|\, a < x \leq b\}$,

lõplik lõik $[a, b] = \{x \,\|\, a \leq x \leq b\}$,

lõpmatud vahemikud $(a, \infty) = \{x \,\|\, a < x < \infty\}$,

$$(-\infty, b) = \{x \,\|\, -\infty < x < b\},$$
$$(-\infty, \infty) = \mathbb{R},$$
lõpmatud poolõigud $[a, \infty) = \{x \,\|\, a \leq x < \infty\}$,
$$(-\infty, b] = \{x \,\|\, -\infty < x \leq b\}.$$

Vahemikke, poollõike ja lõike nimetame edaspidi ka *pidevateks hulkadeks*. Punktid neis hulkades paiknevad üksteise kõrval lõpmata tihedalt.

Tõkestatud hulgad. Reaalarvudest koosnevat hulka $\mathcal{A}$ nimetatakse *tõkestatuks*, kui leidub lõplik vahemik (c, d) nii, et $\mathcal{A} \subset (c, d)$.

Tõkestatud hulgad on *näiteks* kõik lõplikud vahemikud (a, b), lõigud $[a, b]$ ja poollõigud $[a, b)$, $(a, b]$. Tõkestamata hulgad on aga näiteks lõpmatud vahemikud $(-\infty, a)$, (a, ∞) ja lõpmatud poollõigud $(-\infty, a]$, $[a, \infty)$.

1.2 Jäävad ja muutuvad suurused. Funktsiooni mõiste ja esitusviisid.

Jäävad ja muutuvad suurused. Suurust, mis võib omandada erinevaid arvulisi väärtusi, nimetatakse *muutuvaks suuruseks* ehk *muutujaks*. Suurust, mille arvuline väärtus ei muutu, nimetatakse *jäävaks suuruseks*. Näiteks ühtlase liikumise korral on kiirus jääv suurus ja läbitud teepikkus muutuv suurus. Samas mitteühtlase liikumise korral on ka kiirus muutuv suurus. Seega võib konkreetne suurus olla ühes protsessis jääv kuid teises protsessis muutuv. On olemas ka suurusi, mis igas olukorras on jäävad. Neid suurusi nimetatakse absoluutseteks konstantideks. Näiteks võib tuua ringjoone ümbermõõdu ja läbimõõdu suhte π, gaasi universaalkonstandi $R = 8.314 \frac{J}{mool \cdot K}$, valguse kiiruse $c = 3 \cdot 10^5 \frac{km}{s}$ jne.

Muutumispiirkonna mõiste. Muutuva suuruse kõigi võimalike väärtuste hulka nimetatakse selle suuruse *muutumispiirkonnaks*. Näiteks aine temperatuur Celsiuse kraadides võib teoreetiliselt omada kõiki väärtusi, mis on suuremad või võrdsemad kui absoluutne miinimum $-273.15°C$. Seega on temperatuuri muutumispiirkond lõpmatu poollõik $[-273.15; \infty)$.

Funktsiooni mõiste. Olgu antud 2 muutuvat suurust x ja y. *Funktsiooniks* (ehk üheseks funktsiooniks) nimetatakse kujutist, mis seab suuruse x igale väärtusele tema muutumispiirkonnast vastavusse suuruse y ühe kindla väärtuse. Muutujat x nimetatakse seejuures *sõltumatuks muutujaks* ehk *argumendiks* ja muutujat y *sõltuvaks muutujaks*.

Matemaatikas on levinud funktsiooni tähised $f, g, u, v, \varphi, \psi$ jne.

Olgu antud funktsioon f, mille argumendiks on x ja sõltuvaks muutujaks y. Muutuja y väärtust, milleks funktsioon f kujutab argumendi x, nimetatakse *funktsiooni f väärtuseks* kohal x ja tähistatakse sümboliga $f(x)$. Seega võime kirjutada seose

$$y = f(x)\,, \tag{1.1}$$

mis väljendab muutuja y "seotust" argumendiga x funktsiooni f kaudu. Seost (1.1) nimetatakse *funktsiooni võrrandiks.*

Mõnikord kasutatakse funktsiooni ja sõltuva muutuja tähistamiseks ühte ja sama sümbolit. Sellisel juhul omab võrrand (1.1) kuju $y = y(x)$.

Argumendi x muutumispiirkonda nimetatakse funktsiooni f *määramispiirkonnaks.* Määramispiirkonna tähisena kasutame edaspidi sümbolit X. Hulka, mis koosneb kõigist väärtustest, mis funktsioon võib omandada, nimetatakse selle funktsiooni *väärtuste hulgaks.* Tähistame väärtuste hulka sümboliga Y. Seega

$$Y = \{f(x) \,||\, x \in X\}.$$

Mitmene funktsioon. *Mitmeseks funktsiooniks* nimetatakse kujutist, mis seab suuruse x igale väärtusele tema muutumispiirkonnast vastavusse teatud hulga suuruse y väärtusi, kusjuures leidub vähemalt üks x väärtus, millele vastab mitu y väärtust. Argumendi, sõltuva muutuja, määramispiirkonna ja väärtuste hulga mõisted on mitmese funktsiooni korral analoogilised vastavate mõistetega ühese funktsiooni korral.

NB! Käesolevas konspektis tähendab mõiste "funktsioon" ilma täiendita "mitmene" alati ühest funktsiooni.

Funktsiooni esitusviisid. Graafik.

1. *Esitusviis tabeli kujul.* Funktsiooni argumendi võimalikud väärtused esitatakse tabeli ühes reas (veerus) ja neil vastavad funktsiooni väärtused tabeli teises reas (veerus). On võimalik vaid siis, kui funktsiooni argumendil on lõplik arv väärtusi.

2. *Analüütiline esitusviis.* Funktsioon esitatakse valemi kujul. Kui vaja, lisatakse ka määramispiirkonna kirjeldus.

   Näiteks avaldis
   $$y = x^2\,, \quad x \in [0,1]$$
   kirjeldab funktsiooni, mille määramispiirkonnaks on lõik $[0, 1]$ ja iga x korral sellelt lõigult arvutatakse argumendile x vastavad funktsiooni väärtused $f(x)$ vastavalt valemile $f(x) = x^2$.

   Analüütiliselt antud funktsiooni *loomulikuks määramispiirkonnaks* nimetatakse argumendi kõigi nende väärtuste hulka mille korral funktsiooni avaldis on täielikult määratud.

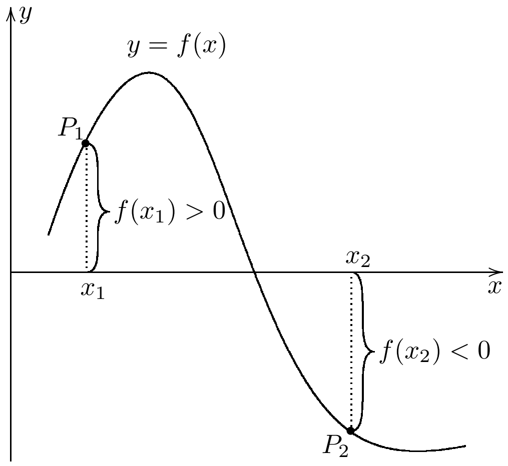
   Näiteks ülaltoodud funktsioon $y = x^2$, $x \in [0, 1]$ ei ole antud oma loomulikus määramispiirkonnas. Selle funktsiooni loomulik määramispiirkond on $X = \mathbb{R}$.

3. *Graafiline esitusviis.* Funktsioon esitatakse graafikuna tasandil ristkoordinaadistikus.

Olgu antud funktsioon f, mille argument on x, sõltuv muutuja y ja määramispiirkond X. Kanname tasandile ristuvad x- ja y-teljed. Vaatleme tasandil hulka G, mis koosneb punktidest $P(x, f(x))$, mille esimene koordinaat x omandab kõik väärtused määramispiirkonnas X. Seda hulka nimetatakse funtsiooni f *graafikuks.*

Tabeli kujul antud funktsiooni määramispiirkond koosneb lõplikust arvust argumendi väärtustest ja tema graafik koosneb lõplikust arvust isoleeritud punktidest. Kui funktsiooni määramispiirkonnaks on pidev hulk (so vahemik, lõik või poollõik), siis on tema graafikuks teatav joon (nagu nt Joonisel 1.1).

Funktsiooni graafiku punkti $P(x, f(x))$ teist koordinaati $f(x)$ võib tõlgendada punkti P "kõrgusena" x- telje suhtes. Kui $f(x) > 0$, siis on graafiku "kõrgus" positiivne, st graafik paikneb ülalpool x-telge. Kui aga $f(x) < 0$, siis on "kõrgus" negatiivne, st graafik jääb x-teljest allapoole (vt Joonis 1.1).



Joonis 1.1

Suvaline y-teljega paralleelne sirge saab (ühese!) funktsiooni graafikut lõigata maksimaalselt ühes punktis. Tõepoolest: kui leiduks y-teljega paralleelne sirge, mis lõikaks graafikut mitmes punktis, siis oleks funktsiooni graafikul vaadeldavas kohas mitu "kõrgust", seega oleks ka funktsioonil ühe argumendi korral mitu väärtust. Ühesel funktsioonil ei saa aga mitut väärtust olla.

Juhul, kui vaadeldav funktsioon on mitmene, siis eksisteerib vähemalt üks y-teljega paralleleelne sirge, mis lõikab funktsiooni graafikut mitmes punktis.

Näiteid. Praktikas esineb rohkesti füüsikaliste jm suuruste sõltuvust ajast t, nt aine osakese vm läbitud teepikkus $S = S(t)$, kiirus $v = v(t)$. Termodünaamikas jälgitakse rõhu P sõltuvust temperatuurist T, seega on tegemist funktsiooniga $P = P(T)$. Vedeliku voolamisel mitteühtlase läbimõõduga torus on vedeliku kiirus osades punktides suurem kui teistes punktides, seega sõltub kiirus v ruumikoordinaadist x, ja meil on tegemist funktsiooniga $v = v(x)$. Mitmesed funktsioonid esinevad sageli olukorras, kus protsessi erinevad faasid on toodud samas teljestikus. Näitena olgu toodud Carnot protsess (vt jooniseid aadressil https://en.wikipedia.org/wiki/Carnot_cycle , graafikutel on kaks rõhu väärtust etteantud ruumala korral). Näiteid mitmeste funktsioonide kohta tuuakse allpool veel.

1.3 Funktsioonide liigid. Konstantne funktsioon. Astme-, eksponent- ja trigonomeetrilised funktsioonid.

Paaris- ja paaritud funktsioonid. Funktsiooni f nimetatakse *paarisfunktsiooniks*, kui iga $x \in X$ korral kehtib võrdus $f(-x) = f(x)$. Paarisfunktsiooni graafik on sümmeetriline y-telje suhtes.

Funktsiooni f nimetatakse *paarituks funktsiooniks*, kui iga $x \in X$ korral kehtib võrdus $f(-x) = -f(x)$. Paaritu funktsiooni graafik on sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes.

Perioodilised funktsioonid. Funktsiooni f nimetatakse *perioodiliseks*, kui leidub konstant $C > 0$ nii, et iga $x \in X$ korral kehtib võrdus $f(x + C) = f(x)$. Väikseimat sellist konstanti C nimetatakse funktsiooni f *perioodiks*. Perioodilise funktsiooni graafik kordub perioodi C järel.

Näiteks kehtivad võrdused $\sin(x + C) = \sin x$, kusjuures konstant C võib omada väärtusi 2π, 4π, 6π jne. Väikseim C väärtus on 2π. Järelikult on funktsioon $y = \sin x$ perioodiline, kusjuures periood on 2π.

Kasvavad ja kahanevad funktsioonid. Olgu D funktsiooni f määramispiirkonna alamhulk. Valime hulgast D kaks suvalist arvu x_1 ja x_2 nii, et kehtib võrratus

$$x_1 < x_2.$$

Kui funktsiooni f rakendamisel argumentidele x_1 ja x_2 võrratuse märk ei muutu, st

$$f(x_1) < f(x_2),$$

siis on f *kasvav* hulgas D. Kui aga funktsiooni f rakendamisel argumentidele x_1 ja x_2 võrratuse märk muutub vastupidiseks, st

$$f(x_1) > f(x_2),$$

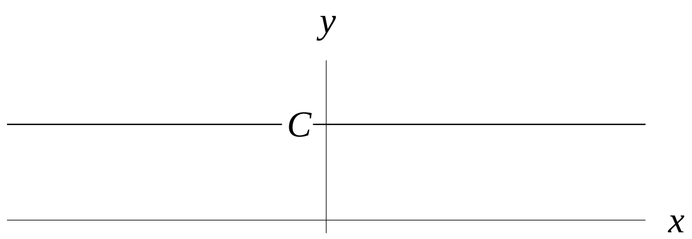
siis on f *kahanev* hulgas D. Kasvamispiirkonnas funktsiooni graafik tõuseb, kahanemispiirkonnas aga langeb.

Konstantne funktsioon. Astme- ja eksponent- ja trigonomeetrilised funktsioonid. Käesolevas alamparagrahvis alustame põhiliste elementaarfunktsioonide loetlemist ja omaduste kirjeldamist.

Konstantne funktsioon $y = C$. Ilmselt selle funktsiooni korral

$$X = \mathbb{R} \quad \text{ja} \quad Y = \{C\}.$$

Graafik on selline:



Joonis 1.2: konstantne funktsioon $y = C$

Astmefunktsioon on funktsioon järgmisel kujul

$$y = x^a,$$

kus a on nullist erinev konstantne astendaja.

Näiteks funktsioonid $y = x$, $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \sqrt{x}$ on astmefunktsioonid.

Eksponentfunktsioon on funktsioon järgmisel kujul:

$$y = a^x\,,$$

kus astme alus a on konstantne ja rahuldab võrratust $a > 0$. Lisaks sellele võrratusele eeldame veel, et $a \neq 1$, sest $a = 1$ korral saame konstantse funktsiooni $y = 1^x = 1$.

Eksponentfunktsiooni määramispiirkond ja väärtuste hulk on järgmised:

$$X = \mathbb{R} \quad \text{ja} \quad Y = (0, \infty).$$

Graafik on juhtudel $a > 1$ ja $0 < a < 1$ kvalitatiivselt erinev (vt joonised 1.4 ja 1.5 tagapool). Nagu graafikutelt nähtub, on funktsioon $y = a^x$ kasvav kogu oma määramispiirkonnas, kui $a > 1$ ja kahanev kogu oma määramispiirkonnas, kui $0 < a < 1$.

Näiteid eksponentfunktsioonidest: $y = e^x$, $y = 10^x$, $y = 2^x$, $y = e^{-x}$ (viimane on ekvivalentselt esitatav kujul $y = (\frac{1}{e})^x$).

Trigonomeetrilised funktsioonid

$$y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = \tan x \ \text{ ja } \ y = \cot x$$

radiaanides antud argumendiga x. Määramispiirkonnad ja väärtuste hulgad on järgmised:

$$\begin{aligned}
y = \sin x : &\quad X = \mathbb{R},\, Y = [-1, 1]\,, \\
y = \cos x : &\quad X = \mathbb{R},\, Y = [-1, 1]\,, \\
y = \tan x : &\quad X = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)}{2}\pi \,||\, k \in \mathbb{Z} \right\},\, Y = \mathbb{R}\,, \\
y = \cot x : &\quad X = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \,||\, k \in \mathbb{Z}\},\, Y = \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Graafikud leiab lugeja joonistelt 1.8 - 1.11 tagapool. Funktsioonid $y = \sin x$ ja $y = \cos x$ on perioodilised perioodiga 2π ning $y = \tan x$ ja $y = \cot x$ perioodiga π. Funktsioonid $y = \sin x$, $y = \tan x$ ja $y = \cot x$ on paaritud ning $y = \cos x$ paaris.

1.4 Pöördfunktsiooni mõiste. Logaritmfunktsioon. Arkusfunktsioonid.

Üksühese funktsiooni mõiste. Olgu antud (ühene) funktsioon $y = f(x)$. Vastavalt funktsiooni definitsioonile on tegemist kujutisega, mis seab igale argumendi x väärtusele oma määramispiirkonnast vastavusse ühe kindla y väärtuse. Vaatleme nüüd teatud kitsamat erijuhtu. Nimelt eeldame, et ka argument x funktsiooni väärtuse $f(x)$ kaudu üheselt määratud. See tähendab, et iga y korral hulgast Y leidub ainult üks x nii, et valitud y on selle x-i kujutiseks. Kui see on nii, siis öeldakse, et funktsioon f on *üksühene*. Üksühese funktsiooni korral on võrrand $y = f(x)$ muutuja x suhtes üheselt lahenduv.

Näiteks kuupfunktsioon $y = x^3$ on üksühene. Iga y korral leidub ainult üks x nii, et valitud y on selle x-i kuup. Arv 8 on ainult ühe arvu (so 2) kuup, arv -27 on ainult ühe arvu (so -3) kuup jne. Lahendades võrrandi $y = x^3$ muutuja x suhtes saame argumendi x esituse y kaudu: $x = \sqrt[3]{y}$. Seevastu ruutfunktsioon $y = x^2$ ei ole üksühene. Iga $y > 0$ korral leidub kaks x-i nii, et valitud y on mõlema x-i ruut. Arv 4 nii -2 kui 2 ruut. Võrrandi $y = x^2$ lahendamisel saame kaks funktsiooni $x = \sqrt{y}$ ja $x = -\sqrt{y}$ ehk ühe kahese funktsiooni $x = \pm\sqrt{y}$.

Mitte-üksühese funktsiooni saab muuta üksüheseks määramispiirkonna sobiva kitsendamise teel.

Näiteks kui kitsendada funktsiooni $y = x^2$ loomulik määramispiirkond $X = \mathbb{R}$ poollõiguks $[0, \infty)$, siis muutub see funktsioon üksüheseks ja x avaldub valemiga $x = \sqrt{y}$.

Funktsiooni üksühesust saab kindlaks teha ka graafiku abil. Kui suvaline x-teljega paralleelne sirge läbib funktsiooni graafikut maksimaalselt ühes punktis, siis on see funktsioon üksühene.

Nii on see *näiteks* kuupfunktsiooni $y = x^3$ graafikuga. Seevastu ruutfunktsiooni $y = x^2$ graafikut (parabooli) läbib x-teljega paralleelne ja selle telje peal asuv sirge kahes punktis. Nagu märkisime, ei ole viimasel juhul tegemist üksühese funktsiooniga. Funktsiooni $y = x^2$ määramispiirkonna kitsendamine poollõiguks $[0, \infty)$ lõikab ära parabooli vasaku haru ja suvaline x-teljega paralleelne sirge läbib järelejäänud parempoolset haru maksimaalselt ühes punktis.

Üksühese funktsiooni pöördfunktsioon. Üksühese funktsiooni $y = f(x)$ *pöördfunktsiooniks* nimetatakse kujutist, mis seab igale $f(x)$-le funktsiooni väärtuste hulgast vastavusse x-i. Pöördfunktsiooni avaldise saame, kui lahendame võrrandi $y = f(x)$ muutuja x suhtes. Pöördfunktsioonis funktsiooni argument ja sõltuv muutuja vahetavad oma kohad. See tähendab, et kui funktsiooni f argumendiks on x ja sõltuvaks muutujaks y, siis funktsiooni f pöördfunktsiooni argumendiks on y ja sõltuvaks muutujaks x. Samuti vahetavad pöördfunktsioonis kohad esialgse funktsiooni määramispiirkond ja väärtuste hulk.

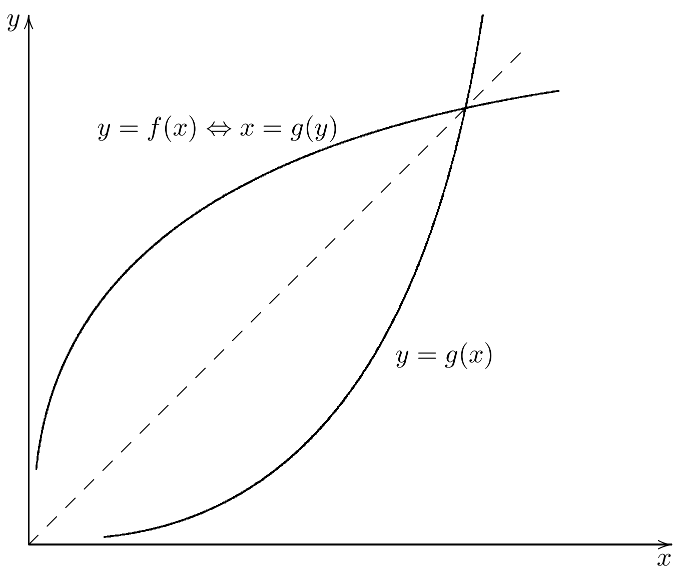
Näiteks funktsiooni $y = x^3$ pöördfunktsioon on $x = \sqrt[3]{y}$, funktsiooni $y = x^2$, $x \in [0, \infty)$, pöördfunktsioon on $x = \sqrt{y}$, funktsiooni $y = \frac{1}{x}$ pöördfunktsioon on $x = \frac{1}{y}$.

Olgu $x = g(y)$ üksühese funktsiooni $y = f(x)$ pöördfunktsioon. Siis funktsioonid f ja g kompenseerivad teineteist järgmises mõttes. Fikseerime mingi x väärtuse ja arvutame $f(x)$. Seejärel arvutame $g[f(x)]$, st funktsioon g kohal $f(x)$. Tulemusena saame esialgse x väärtuse tagasi. Samuti arvutades antud y kaudu $f[g(y)]$ saame y väärtuse tagasi. Need seosed saab kirjutada kujul

$$g[f(x)] = x\,, \quad f[g(y)] = y\,. \tag{1.2}$$

Kui g of funktsiooni f pöördfunktsioon, siis f on funktsiooni g pöördfunktsioon.

Näiteks rakendades funktsioonile $y = x^3$ tema pöördfunktsiooni saame võrduse $\sqrt[3]{x^3} = x$ ja rakendades funktsioonile $x = \sqrt[3]{y}$ tema pöördfunktsiooni saame $[\sqrt[3]{y}]^3 = y$.



Joonis 1.3

Funktsiooni $y = f(x)$ ja tema pöördfunktsiooni $x = g(y)$ graafikud kattuvad xy-teljestikus. See on nii sellepärast, et funktsioonid $y = f(x)$ ja $x = g(y)$ määravad ühed ja samad arvupaarid (x, y), seega ka ühed ja samad tasandi punktid $P(x, y)$. Erinevus neis kahes funktsioonis seisneb ainult selles, et f seab x-le vastavusse y-i, kuid g seab y-le vastavusse x-i.

Kui aga pöördfunktsiooni $x = g(y)$ avaldises muutujate x ja y kohad vahetada, st esitada ta kujul $y = g(x)$, siis selle funktsiooni graafik peegeldub üle sirge $y = x$. Seega on funktsioonide $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ graafikud sümmeetrilised sirge $y = x$ suhtes (joonis 1.3).

Logaritmfunktsioon. Arkusfunktsioonid. Jätkame eelmises paragrahvis alustatud põhiliste elementaarfunktsioonide loetelu mõnede oluliste pöördfunktsioonidega.

Logaritmfunktsioon.
Eksponentfunktsioon $y = a^x$ on üksühene ning seega on ta pöördfunktsioon ühene. Eksponentfunktsiooni $y = a^x$ pöördfunktsioon on logaritmfunktsioon

$$x = \log_a y\,,$$

kus a on logaritmi alus. Vastavalt valemitele (1.2) kehtivad seosed

$$\log_a[a^x] = x \quad \text{ja} \quad a^{\log_a y} = y.$$

Kuna pöördfunktsiooni võtmisel määramispiirkond ja väärtuste hulk vahetavad oma kohad, siis lähtudes eksponentfunktsioonist (vt §1.3) näeme, et funktsiooni $y = \log_a x$ määramispiikond ja väärtuste hulk on vastavalt

$$X = (0, \infty) \quad \text{ja} \quad Y = \mathbb{R}.$$

Graafik on juhtudel $a > 1$ ja $0 < a < 1$ erinev (joonised 1.6 ja 1.7). Võrreldes graafikuid joonistel 1.4 - 1.7 näeme, et $y = \log_a x$ graafik on $y = a^x$ graafiku peegeldus sirge $y = x$ suhtes.

Arkusfunktsioonid.
Trigonomeetriliste funktsioonide pöördfunktsioonid on nn. arkusfunktsioonid. Peamine probleem trigonomeetriliste funktsioonide pööramisel on see, et nad ei ole terves oma määramispiirkonnas üksühesed. Tõepoolest, vaadeldes trigonomeetriliste funktsioonide graafikuid joonistel 1.8 - 1.11 näeme, et x-teljega paralleelsed sirged võivad neid graafikuid lõigata paljudes punktides.

Nagu eelnevalt nägime, on mitte-üksühene funktsioon võimalik muuta üksüheseks määramispiirkonna sobiva kitsendamise teel. Vaatleme seda protseduuri iga trigonomeetrilise funktsiooni korral eraldi.

Arkussiinus. Funktsioon $y = \sin x$ ei ole üksühene, sest ühele $\sin x$ väärtusele vastab lõpmata palju x väärtusi. Näiteks x-telg lõikab siinuse graafikut lõpmata arvus erinevates punktides (vt joonis 1.8). Funktsiooni $y = \sin x$ pööramisel kitsendatakse tema määramispiirkond kokkuleppeliselt lõiguks $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, st jäetakse vaatluse alt välja kogu $\sin x$ osa, mille korral $x \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Vaadeldes lõigul

$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ paiknevat siinuse graafiku osa näeme, et suvaline x-teljega paralleelne sirge lõikab seda maksimaalselt ühes punktis. Seega on funktsioon

$$y = \sin x, \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

üksühene. Selle funktsiooni pöördfunktsiooni nimetatakse arkussiinuseks ja tähistatakse $x = \arcsin y$. Kehtivad seosed

$$\arcsin[\sin x] = x \quad \text{ja} \quad \sin[\arcsin y] = y. \tag{1.3}$$

Kuna pöördfunktsiooni võtmisel määramispiirkond ja väärtuste hulk vahetavad oma kohad, siis arkussiinuse määramispiirkond ja väärtuste hulk on

$$X = [-1, 1], \;\; Y = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

Graafik on kujutatud Joonisel 1.12. Tegemist on lõigul $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ paikneva siinuse graafiku lõike peegeldusega üle sirge $y = x$.

Arkuskosinus. Funktsiooni $y = \cos x$, mis ei ole samuti üksühene kogu arvteljel, pööramisel kitsendatakse tema määramispiirkond lõiguks $[0, \pi]$. Sellel lõigul on ta üksühene (joonis 1.9). Funktsiooni

$$y = \cos x, \;\; x \in [0, \pi]$$

pöördfunktsioon kannab nimetust arkuskosinus ja seda tähistatakse $x = \arccos y$. Kehtivad valemid

$$\arccos[\cos x] = x \quad \text{ja} \quad \cos[\arccos y] = y.$$

Arkuskosinuse määramispiirkond ja väärtuste hulk on

$$X = [-1, 1], \;\; Y = [0, \pi].$$

Graafik on kujutatud Joonisel 1.13. Tegemist on lõigul $[0, \pi]$ paikneva kosinuse graafiku lõike peegeldusega üle sirge $y = x$.

Arkustangens. Funktsiooni $y = \tan x$, mis ei ole samuti üksühene, pööramisel võetakse aluseks tema kitsend vahemikku $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Antud vahemikus asub tangensi nn põhiharu. Funktsiooni

$$y = \tan x, \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

pöördfunktsioon kannab nimetust arkustangens ja seda tähistatakse $x = \arctan y$. Kehtivad valemid

$$\arctan[\tan x] = x \quad \text{ja} \quad \tan[\arctan y] = y.$$

Arkustangensi määramispiirkond ja väärtuste hulk on

$$X = \mathbb{R}, \;\; Y = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

Graafik on kujutatud Joonisel 1.14. Tegemist on tangensi põhiharu peegeldusega üle sirge $y = x$.

Arkuskotangens. Funktsiooni $y = \cot x$ pööramisel kitsendatakse ta vahemikku $(0, \pi)$, kus asub tema põhiharu. Funktsiooni

$$y = \cot x, \quad x \in (0, \pi)$$

pöördfunktsioon on arkuskotangens ja seda tähistatakse $x = \operatorname{arccot} y$. Kehtivad valemid

$$\operatorname{arccot}[\cot x] = x \quad \text{ja} \quad \cot[\operatorname{arccot} y] = y.$$

Arkuskotangensi määramispiirkond ja väärtuste hulk on

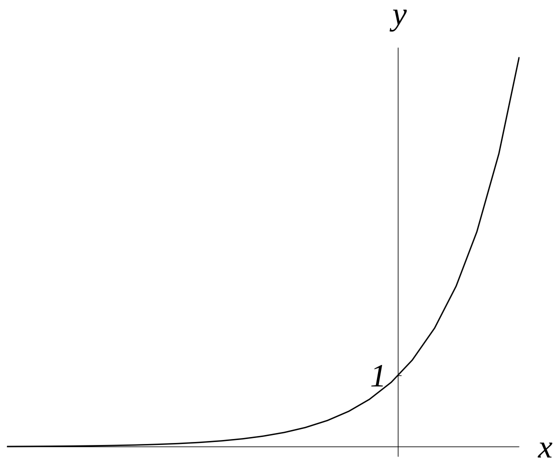
$$X = \mathbb{R}, \quad Y = (0, \pi)\,.$$

Graafik on kujutatud Joonisel 1.15. Tegemist on kotangensi põhiharu peegeldusega üle sirge $y = x$.

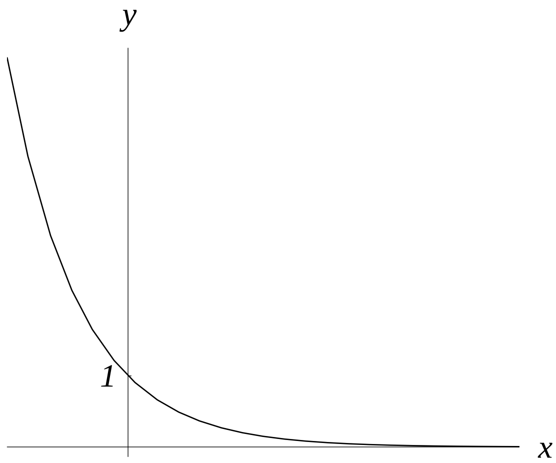
Pöördfunktsioon funktsioonist, mis ei ole üksühene. Olgu vaadeldav funktsioon $y = f(x)$ oma määramispiirkonnaga X ja väärtuste hulgaga Y küll ühene, kuid mitte üksühene. Funktsiooni f *pöördfunktsiooniks* nimetatakse kujutist, mis igale $y \in Y$ seab vastavusse kõigi selliste $x \in X$ hulga, mille korral kehtib võrdus $f(x) = y$.

Ühese, kuid mitte üksühese funktsiooni pöördfunktsioon on mitmene. Selliste funktsioonide *näideteks* on terves oma määramispiirkonnas antud trigonomeetriliste funktsioonide pöördfunktsioonid ehk "suure algustähega" arkusfunktsioonid. Täpsemalt: terves määramispiirkonnas antud funktsioonide $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$ ja $y = \cot x$ pöördfunktsioonid on vastavalt $x = \operatorname{Arcsin} y$, $x = \operatorname{Arccos} y$, $x = \operatorname{Arctan} y$ ja $x = \operatorname{Arccot} y$.

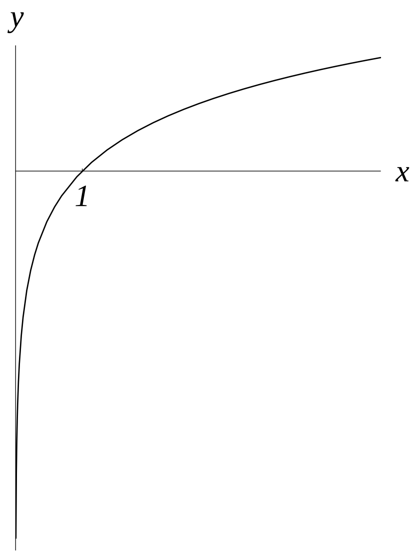
Arvutame näiteks Arcsin 0. Kuna kõigi selliste x hulk, mille korral $\sin x$ võrdub nulliga, on $\{k\pi \,||\, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$, siis saamegi $\operatorname{Arcsin} 0 = \{k\pi \,||\, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$.



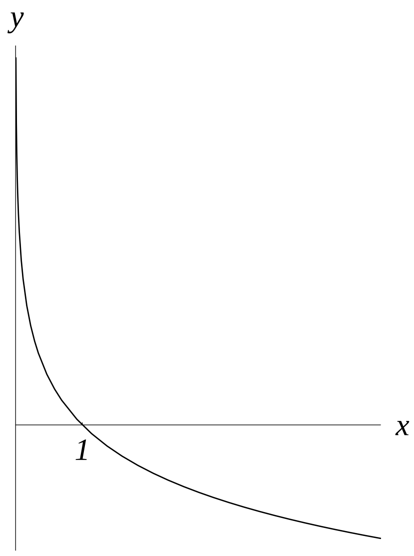
Joonis 1.4: $y = a^x$ kui $a > 1$



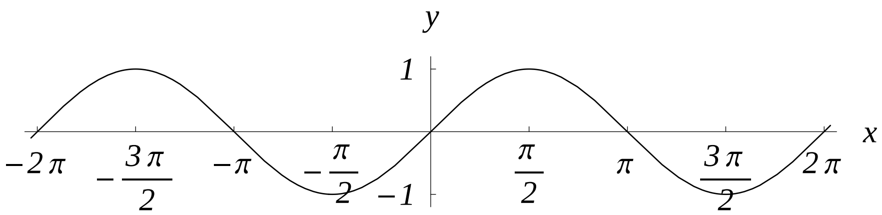
Joonis 1.5: $y = a^x$ kui $0 < a < 1$



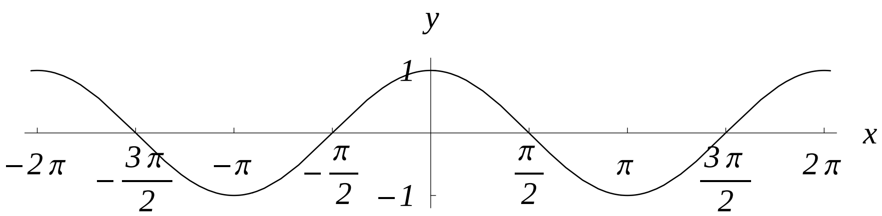
Joonis 1.6: $y = \log_a x$ kui $a > 1$



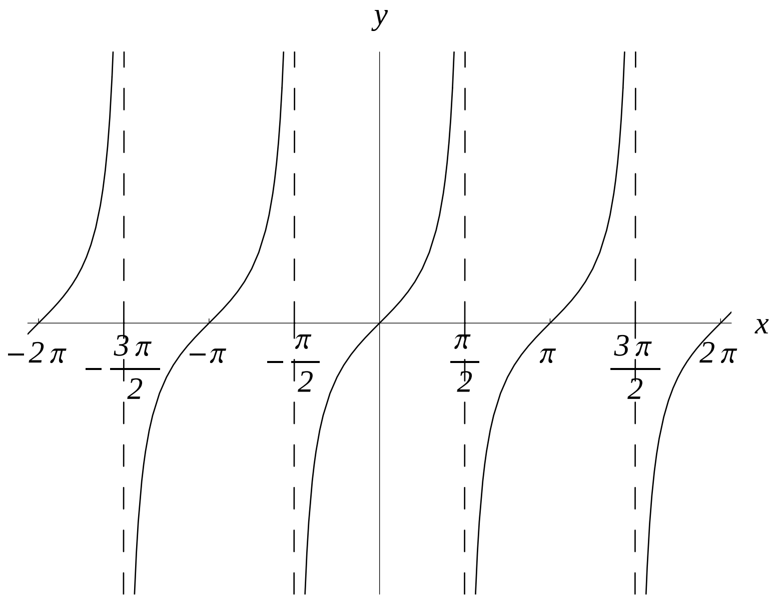
Joonis 1.7: $y = \log_a x$ kui $0 < a < 1$



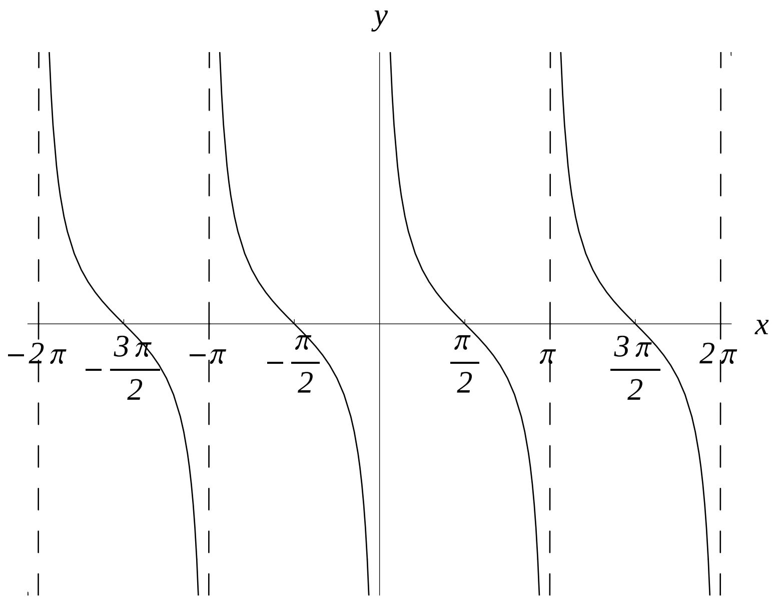
Joonis 1.8: $y = \sin x$



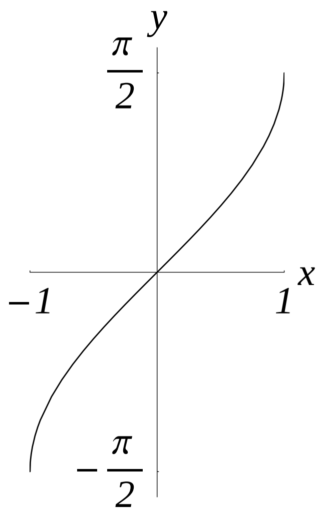
Joonis 1.9: $y = \cos x$



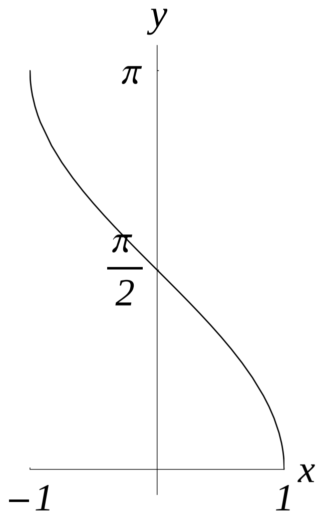
Joonis 1.10: $y = \tan x$



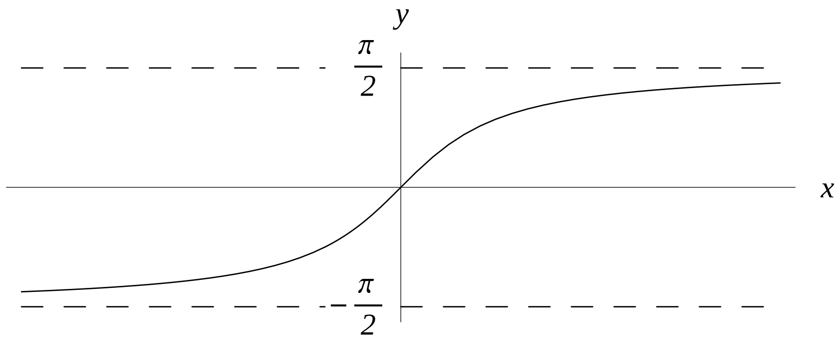
Joonis 1.11: $y = \cot x$



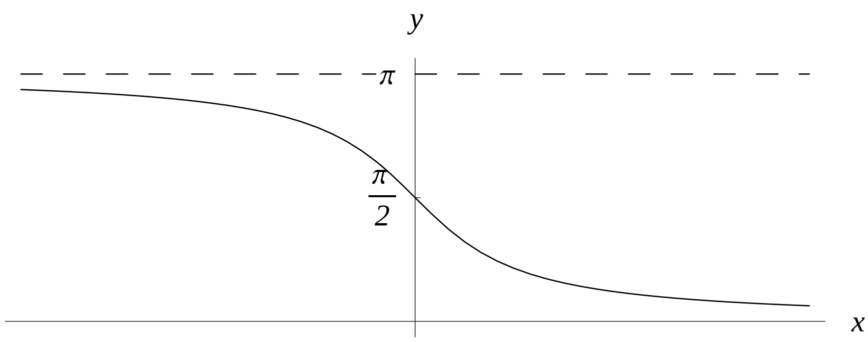
Joonis 1.12: $y = \arcsin x$



Joonis 1.13: $y = \arccos x$



Joonis 1.14: $y = \arctan x$



Joonis 1.15: $y = \operatorname{arccot} x$

1.5 Tehted funktsioonidega. Elementaarfunktsiooni mõiste. Mõned olulised elementaarfunktsioonid.

Algebralised tehted funktsioonidega. Olgu antud kaks funktsiooni: $y = f(x)$ ja $y = g(x)$. Funktsioonide f ja g summa on defineeritud kui kujutis, mis seab muutujale x vastavusse muutuja y väärtuse valemiga $y = f(x) + g(x)$. Funktsioonide f ja g summa loomulik tähis on $f+g$. Seega kehtib f ja g summa puhul seos

$$y = (f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

Analoogiliselt defineeritakse ka funktsioonide f ja g vahe $y = (f-g)(x) = f(x) - g(x)$, korrutis $y = (fg)(x) = f(x)g(x)$ ja jagatis $y = (\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Näiteks funktsioonide $f(x) = x^2$ ja $g(x) = \sin x$ korral $(f+g)(x) = x^2 + \sin x$, $(f-g)(x) = x^2 - \sin x$, $(fg)(x) = x^2 \sin x$ ja $(\frac{f}{g})(x) = \frac{x^2}{\sin x}$,

Liitfunktsiooni mõiste. Olgu antud kaks funktsiooni: $y = f(x)$ ja $z = g(y)$. Funktsioon f seab muutujale x vastavusse muutuja y ja funktsioon g seab muutujale y vastavusse muutuja z. Asendades suuruse y funktsiooni g avaldises $f(x)$-ga saame uue funktsiooni, mis seab muutujale x vastavusse muutuja z, kusjuures x ja z vaheline seos on antud valemiga $z = g[f(x)]$. Tegemist on komponentide f ja g baasil defineeritud *liitfunktsiooniga*. Tähistame seda funktsiooni sümboliga $g \circ f$. Seega

$$z = (g \circ f)(x) = g[f(x)].$$

Näiteks komponendid $y = x^2$ ja $z = \sin y$ annavad liitfunktsiooni $z = \sin(x^2)$, komponendid $y = \tan x$ ja $z = \frac{1}{y}$ annavad liitfunktsiooni $z = \frac{1}{\tan x}$, komponendid $y = \tan x$, $z = \frac{1}{y}$ ja $u = \sqrt{z}$ annavad liitfunktsiooni $u = \sqrt{\frac{1}{\tan x}}$.

Elementaarfunktsiooni mõiste. *Põhiliste elementaarfunktsioonide* hulka arvatakse kokkuleppeliselt järgmised funktsioonid: $y = C$, $y = x^a$, $y = a^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$, $y = \log_a x$, $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctan x$ ja $y = \operatorname{arccot} x$.

Elementaarfunktsiooniks nimetatakse funktsiooni, mis on saadud põhilistest elementaarfunktsioonidest lõpliku arvu aritmeetiliste tehete (so liitmiste, lahutamiste, korrutamiste, jagamiste) ja liitfunktsioonide moodustamise teel.

Näiteid. Elementaarfunktsioon $y = 5 + 7\tan x - \frac{e^x}{\cos x}$ on moodustatud põhilistest elementaarfunktsioonidest $y = 5$, $y = 7$, $y = \tan x$, $y = e^x$ ja $y = \cos x$ lõpliku arvu aritmeetiliste tehetega.

Elementaarfunktsioon $y = \arcsin(3^x)$ on põhiliste elementaarfunktsioonide $y = 3^x$ ja $y = \arcsin x$ liitfunktsioon.

Elementaarfunktsioon $y = \sqrt{2^{\arccos x} + \frac{3}{\tan^2 x} - 4}$ on saadud põhilistest elementaarfunktsioonidest $y = 2^x$, $y = \arccos x$, $y = 3$, $y = \tan x$, $y = x^2$, $y = 4$ ja

$y = x^{1/2}$ lõpliku arvu aritmeetiliste tehete ja liitfunktsioonide moodustamisega.

Mõned olulised elementaarfunktsioonid. Elementaarfunktsioonide hulka kuuluvad *polünoomid* ja *ratsionaalfunktsioonid*.

n- astme *polünoom* on defineeritud avaldisega

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \,,$$

kus $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ on konstandid ja $a_n \neq 0$.

Näiteks konstantne funktsioon $y = C$, lineaarne funktsioon $y = ax + b$, ruutfunktsioon $y = ax^2 + bx + c$, kuupfunktsioon $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ on polünoomid.

Ratsionaalfunktsioon on kahe polünoomi jagatis

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{m-1} x^{m-1} + b_m x^m} \,.$$

Märgime, et ratsionaalfunktsiooni lugejas ja nimetajas esinevate polünoomide astmed n ja m võivad olla erinevad.

Näiteks $y = \frac{2x^2 - 3x + 5}{4x + 3}$, $y = \frac{3}{x - 5}$ on ratsionaalfunktsioonid.

Polünoomid ja ratsionaalfunktsioonid leiavad laialdast kasutamist mitmetel teadusaladel ja inseneerias. Paljud füüsikalised jm seaduspärasused on antud kas lineaarsel kujul (1. astme polünoom) või keerukamatel juhtudel teise, kolmanda jne astme polünoomidena. Näiteks Bernoulli võrrand $h = \frac{P}{\rho g} + \frac{v^2}{2g}$ on geodeetilise kõrguse h ruutfunktsioon voolu kiiruse v suhtes, Hooke'i seadus $\sigma = C\epsilon$ annab lineaarse seose pinge σ ja deformatsiooni vahel, mittelineaarsetes pinge-deformatsiooni mudelites kasutatakse valdavalt ruutseost $\sigma = C_1\epsilon + C_2\epsilon^2$, van der Waalsi võrrand (vt §1.6) sisaldab kuuppolünoomi muutuja V_m suhtes jne.

Polünoome ja ratsionaalfunktsioone rakendatakse ka funktsioonide lähendamisel. Näiteks tabeli kujul antud funktsiooni graafik koosneb üksikutest punktidest tasandil. Graafiku jätkamisel pidevaks jooneks kasutatakse polünoome.

Matemaatikas ja selle rakendustes kasutatakse palju nn *hüperboolseid trigonomeetrilisi funktsioone.* Nendeks on

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad - \text{ hüperboolne siinus}\,,\\
\operatorname{ch} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad - \text{ hüperboolne kosinus}\,,\\
\operatorname{th} x &= \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad - \text{ hüperboolne tangens}\,,\\
\operatorname{cth} x &= \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad - \text{ hüperboolne kotangens}\,.
\end{aligned}$$

Tegemist on taas elementaarfunktsioonidega. Märgime, et nende funktsioonide tähistused võivad varieeruda: sh, ch, th ja cth asemel kasutatakse ka tähiseid sinh, cosh, tanh ja coth. Graafikud on toodud joonistel 1.18 - 1.21.

Mõiste hüperboolne trigonomeetriline funktsioon tuleneb nende funktsioonidega seotud geomeetriast. Nimelt kirjeldab tavalise siinuse ja kosinuse kaudu antud süsteem

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t\,,\ t\in\mathbb{R} \end{cases}$$

ellipsit pootelgedega a ja b (Joonis 1.16), kuid hüperboolse siinuse ja kosinuse kaudu antud süsteemid

$$\begin{cases} x = R\,\mathrm{ch}\,t \\ y = R\,\mathrm{sh}\,t\,,\ t\in\mathbb{R} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -R\,\mathrm{ch}\,t \\ y = R\,\mathrm{sh}\,t\,,\ t\in\mathbb{R} \end{cases}$$

hüperbooli paremat ja vasakut haru (Joonis 1.17).

Mitteelementaarsetest funktsioonidest. Kõik funktsioonid ei ole elementaarfunktsioonid. Mitteelementaarsete funktsioonide hulka kuuluvad nn *kõrgemad transtsendentsed funktsioonid*, mis on tuletatavad põhilistest elementaarfunktsioonidest lõpmatu arvu tehete abil.

Näiteks tõenäosus, et normaaljaotusega $\mathcal{N}(0,\frac{1}{2})$ juhusliku suuruse väärtus paikneb lõigus $[-x,x]$ avaldub valemiga $p([-x,x]) = \mathrm{erf}(x)$, kus erf on Gaussi vea funktsioon. Tegemist on kõrgema transtsendentse funktsiooniga.

Elementaarsed ei ole ka funktsioonid, mis on erinevatel määramispiirkonna osadel defineeritud erinevate valemitega. Näiteks

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{kui } x<0, \\ x-1, & \text{kui } x\geq 0 \end{cases}$$

ei ole elementaarfunktsioon.

1.6 Täiendavat materjali funktsioonide kohta.

Ilmutatud ja ilmutamata funktsioonid. Analüütiliselt antud funktsioon võib olla kas ilmutatud või ilmutamata kujul. Funktsiooni $y = f(x)$ *ilmutatud kujuks* on võrrand, mille vasakul pool on y ja paremal pool avaldis, mis võib sisaldada muutujat x, kuid mitte muutujat y. Näiteks $y = x^2 - x$.

Funktsiooni $y = f(x)$ *ilmutamata kujuks* on võrrand, mis sisaldab x ja y läbisegi, st võrrand

$$F(x,y) = 0\,, \tag{1.4}$$

kus F on mingi x ja y sisaldav avaldis. Näiteks $x^2 - \sin y + y = 0$.

Ilmutamata kujul antud funktsiooni ilmutamiseks tuleb lahendada võrrand (1.4) muutuja y suhtes. Kui sellel võrrandil on mitu lahendit, siis defineerib ta mitmese funktsiooni.

Näiteid. Vaatleme võrrandit

$$y^3\cos x - 3 = 0\,. \tag{1.5}$$

Lahendades selle võrrandi muutuja y suhtes saame avaldise $y = \sqrt[3]{\frac{3}{\cos x}}$. Viimane ongi võrrandiga (1.5) antud funktsiooni ilmutatud kuju.

Vaatleme võrrandit

$$x^2 + y^2 = 1 . \tag{1.6}$$

Kui me lahendame selle võrrandi y suhtes, saame kaks lahendit: $y = -\sqrt{1-x^2}$ ja $y = \sqrt{1-x^2}$. Seega määrab võrrand (1.6) ilmutamata kujul kahese funktsiooni $y = \pm\sqrt{1-x^2}$.

Van der Waalsi võrrand

$$\bigl(P + \frac{a}{V_m^2}\bigr)(V_m - b) = RT \tag{1.7}$$

kirjeldab ideaalse gaasi molaarruumala V_m ilmutamata kujul. Avades sulud ja korrutades V_m^2-ga saame $PV_m^3 - (Pb+RT)V_m^2 + aV_m - ab = 0$. Seega tuleb funktsiooni ilmutamiseks lahendada kuupvõrrand. Sõltuvalt kordajate väärtusest on võrrandil üks või kolm lahendit. Võrrand määrab ilmutamata kujul kas ühese või kolmese funktsiooni.

Vektorid. Mitmemõõtmeline ruum. Mitmemuutuja funktsioon. n reaalarvust koosnevat järjestatud hulka

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

nimetatakse n-mõõtmeliseks *vektoriks.* Kõigi n-mõõtmeliste vektorite hulka nimetatakse *n-mõõtmeliseks ruumiks* ja tähistatakse $\mathbb{R}^n$.

Kahemõõtmeline vektor $\vec{x} = (x, y)$ on interpreeritav kui koordinaatide alguspunktist (0,0) punkti koordinaatidega (x, y) suunatud sirglõik. Samasugune geomeetriline tõlgendus on ka kolmemõõtmelisel vektoril $\vec{x} = (x, y, z)$.

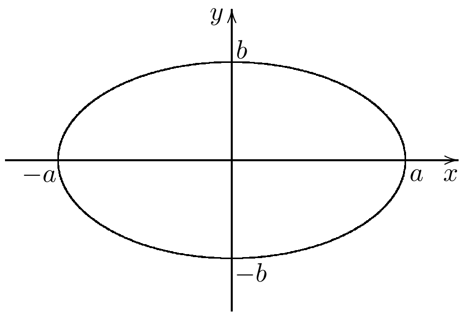
Olgu antud $n + 1$ muutuvat suurust $x_1, \ldots, x_n$ ja u. Kujutist, mis seab vektori $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ igale väärtusele teatud hulgast $X \subseteq \mathbb{R}^n$ vastavusse muutuja u ühe kindla väärtuse nimetatakse (üheseks) *n- muutuja funktsiooniks.* Muutujaid $x_1, \ldots x_n$ nimetatakse seejuures funktsiooni *argumentideks*, muutujat *u sõltuvaks muutujaks* ja hulka X funktsiooni *määramispiirkonnaks.*

Olgu antud n- muutuja funktsioon f, mille argumentideks on $x_1, \ldots, x_n$ ja sõltuvaks muutujaks u. Muutuja u väärtust, milleks funktsioon f kujutab argumentide vektori $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, nimetatakse funktsiooni *f väärtuseks* kohal $\vec{x}$ ja tähistatakse sümboliga $f(x_1, \ldots, x_n)$ või $f(\vec{x})$. Seega võime kirjutada seose

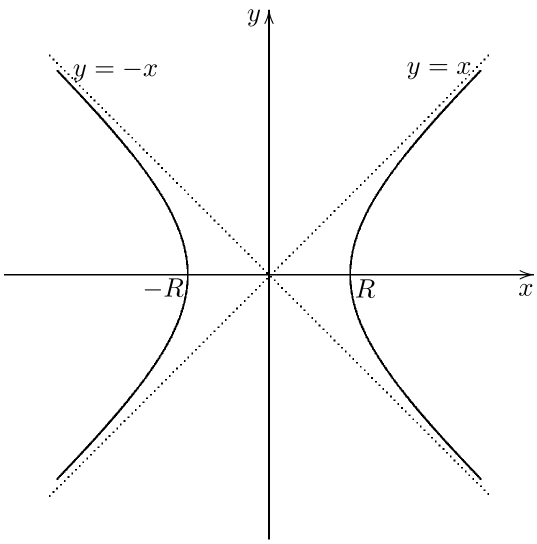
$$u = f(x_1, \ldots x_n) \quad \text{ehk} \quad u = f(\vec{x}).$$

Seda seost nimetatakse *funktsiooni f võrrandiks.*

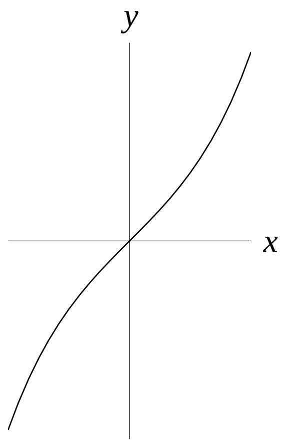
Näiteks gaasi difusiooni või konvektsiooni korral on gaasi rõhk P erinevates ruumi punktides erinev. Seega sõltub P ruumimuutujatest x, y ja z ehk on kolmemuutuja funktsioon $P = P(x, y, z)$.



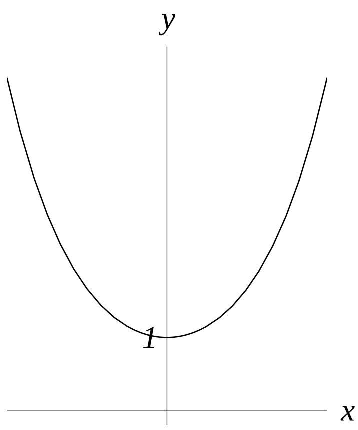
Joonis 1.16



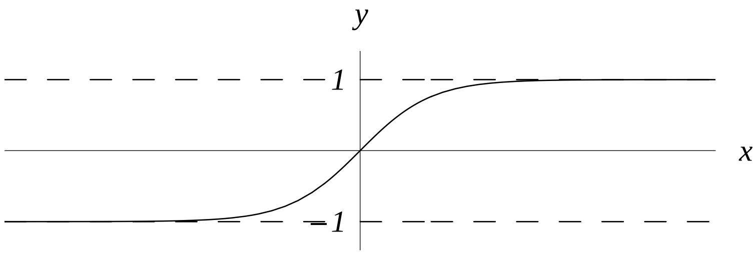
Joonis 1.17



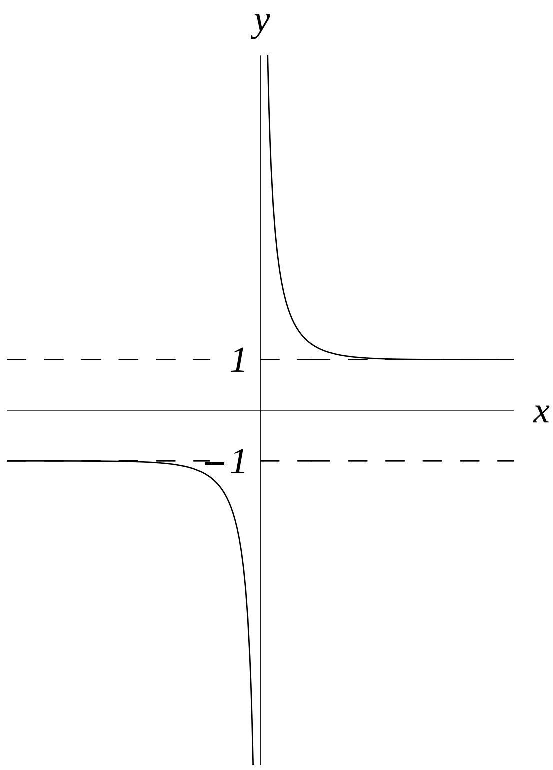
Joonis 1.18: $y = \operatorname{sh} x$



Joonis 1.19: $y = \operatorname{ch} x$



Joonis 1.20: $y = \operatorname{th} x$



Joonis 1.21: $y = \operatorname{cth} x$