Prof. Dr. Daniel Grieser
Karsten Fritzsch 25.6.2009

Siebtes Übungsblatt zur Globalen Analysis

V sei immer ein n-dimensionaler reeller Vektorraum mit Skalarprodukt $g = \langle\ ,\ \rangle$. g bzw. $\langle\ ,\ \rangle$ bezeichne ebenfalls das induzierte Skalarprodukt auf V^* und auf allen $\bigwedge^k V^*$.

1) **(Formeln für $\langle\ ,\ \rangle$ und $*$)**

i) Zeigen Sie die Formel $\langle v^1 \wedge \cdots \wedge v^k, w^1 \wedge \cdots \wedge w^k \rangle = \det(\langle v^i, w^j \rangle)_{i,j=1,\ldots,k}$.
Folgern Sie, dass für eine beliebige Basis $e_1, \ldots, e_n$ von V mit dualer Basis $e^1, \ldots, e^n$ von V^* die Formel

$$\langle e^I, e^J \rangle = g^{IJ}$$

(mit $|I| = |J| = k$) gilt, wobei g^{IJ} der I,J-Minor der Matrix $(g^{ij})_{i,j=1\ldots,n}$, $g^{ij} := \langle e^i, e^j \rangle$ ist, d.h. g^{IJ} ist die Determinante der $k \times k$ Untermatrix, die aus den durch I indizierten Zeilen und den durch J indizierten Spalten besteht.

ii) Sei V zusätzlich orientiert. Finden Sie eine Formel für den Hodge $*$ Operator bzgl. einer beliebigen (nicht notwendig orthogonalen) Basis von V.

(6 Punkte)

2) **($*$-Operator und orthogonales Komplement)**
Eine k-Form $\omega \in \bigwedge^k V^*$ heißt *zerlegbar*, wenn sie sich als $\omega = \nu^1 \wedge \cdots \wedge \nu^k$ für 1-Formen $\nu^1, \ldots, \nu^k \in V^*$ schreiben lässt.

i) Zeigen Sie, dass $\nu^1, \ldots, \nu^k \in V^*$ genau dann linear unabhängig sind, wenn

$$\nu^1 \wedge \cdots \wedge \nu^k \neq 0.$$

ii) Sei V orientiert. Zeigen Sie, dass damit auch auf dem 1-dimensionalen Vektorraum $\bigwedge^n V^*$ eine Orientierung definiert ist.
Genauer: Ein Element $\omega \in \bigwedge^n V^*$ heiße positiv, wenn es sich als $\omega = \nu^1 \wedge \cdots \wedge \nu^n$ für eine positive Basis $(\nu^1, \ldots, \nu^n)$ von V^* schreiben lässt. Zeigen Sie, dass dies wohldefiniert (also von der Wahl der positiven Basis unabhängig) ist und eine Orientierung von $\bigwedge^n V^*$ definiert.
Bemerkung: $d\,\mathrm{vol} \in \bigwedge^n V^*$ ist das eindeutige positive Element der Norm 1.

iii) (In dieser Teilaufgabe braucht V nicht orientiert zu sein.) Einer zerlegbaren Form $\omega = \nu^1 \wedge \cdots \wedge \nu^k$ der Norm 1 ordnen wir einen orientierten Unterraum $W_\omega \subset V^*$ wie folgt zu:

$$W_\omega := \mathrm{span}(\nu^1, \ldots, \nu^k),$$

und die Orientierung von W_ω ist so gewählt, dass $(\nu^1, \ldots, \nu^k)$ eine positive Basis ist.
Zeigen Sie, dass dadurch eine Bijektion von der Menge der zerlegbaren k-Formen der Norm 1 auf die Menge der k-dimensionalen orientierten Unterräume von V^* definiert wird.
(Hinweis: Sie müssen zunächst nachprüfen, dass W_ω wohldefiniert ist, d.h. nicht von der Wahl der Darstellung von ω als $\omega = \nu^1 \wedge \cdots \wedge \nu^k$ abhängt. Verwenden Sie $d\,\mathrm{vol}$ auf W für die Umkehrabbildung.)

iv) Sei V orientiert. Zeigen Sie, dass $W_{*\omega} = (W_\omega)^\perp$ mit geeigneter Orientierung von $(W_\omega)^\perp$ gilt. Wie muss diese Orientierung gewählt werden?

(12 Punkte)

3) **(Eigenwerte der Hodge-Laplace-Operatoren)**
Sei
$$\mathcal{C} : \ldots \to C^{k-1} \to C^k \to C^{k+1}$$
ein Kokettenkomplex (mit Abbildung d), wobei die C^k endlich-dimensionale reelle Vektorräume mit Skalarprodukten $\langle\ ,\ \rangle$ sind.

Sei $\Delta_k : C^k \to C^k$ der Hodge-Laplace-Operator. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $E^k_\lambda := \ker(\Delta_k - \lambda) \subset C^k$. Das heißt, falls $E^k_\lambda \neq 0$, so ist λ Eigenwert von Δ_k mit Eigenraum E^k_λ.

Der Satz von Hodge sagt, dass $E^k_0 \cong H^k(\mathcal{C})$. Hier soll es um die anderen Eigenwerte gehen.

Im Folgenden sei also immer $\lambda \neq 0$. Sei
$$E^k_{\lambda,d} = E^k_\lambda \cap \operatorname{im} d, \quad E^k_{\lambda,\delta} = E^k_\lambda \cap \operatorname{im} \delta.$$
(In Worten: exakte bzw. koexakte Eigenformen.)

i) Zeigen Sie $E^k_\lambda = E^k_{\lambda,d} \oplus E^k_{\lambda,\delta}$.

ii) Zeigen Sie, dass für jedes k und $\lambda \neq 0$ die Einschränkung der Abbildung $d : C^k \to C^{k+1}$ auf $E^k_{\lambda,\delta}$ ein Isomorphismus
$$d : E^k_{\lambda,\delta} \to E^{k+1}_{\lambda,d}$$
ist, dessen Umkehrung durch $\frac{1}{\lambda}\delta : E^{k+1}_{\lambda,d} \to E^k_{\lambda,\delta}$ gegeben ist.

iii) Folgern Sie im Fall $0 \to C^0 \to C^1 \to C^2 \to 0$ (ein Kokettenkomplex, nicht notwendig eine kurze exakte Sequenz!), dass für die 'nicht-Null-Spektren'
$$\sigma^k_{\neq 0} := \{\text{Eigenwerte} \neq 0 \text{ von } \Delta_k\}$$
gilt, dass
$$\sigma^1_{\neq 0} = \sigma^0_{\neq 0} \cup \sigma^2_{\neq 0}.$$

Bemerkung: Dieselben Resultate gelten auf kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeiten M. Im Fall $\dim M = 2$, M orientiert ist zusätzlich leicht zu zeigen, dass $*$ einen Isomorphismus $E^0_{\lambda,\delta} \to E^2_{\lambda,d}$ definiert, und zusammen mit iii) folgt, dass die Eigenwerte von Δ_0 schon die Eigenwerte (ungleich Null) von Δ_1, Δ_2 bestimmen. In höheren Dimensionen ist dies nicht so.

(6 Punkte)

Abgabe: Bis 10.7. in der Übung.