3. Differenciálszámítás

3.1. A differenciálhatóság fogalma, geometriai jelentése, deriválási szabályok

Tanulási cél: megismerni a differenciálhatóság fogalmát, begyakorolni az érintő felírást és a linearizált használatát. Megismerkedni a deriválási szabályokkal és begyakorolni használatukat a derivált függvény meghatározására.

Követelmények

Ön akkor sajátította el megfelelően a tananyagot, ha

- ismeri a differencia és differenciálhányados fogalmát,
- ismeri a deriválhatóság fogalmát,
- ismeri a derivált függvény fogalmát,
- ismeri az elemi függvények deriváltjait
- fel tudja írni adott pontbeli érintő egyenletét,
- fel tudja írni adott meredekségű érintő egyenletét,
- fel tudja írni adott ponton átmenő érintő egyenletét,
- képes az érintő felhasználásával közelítő értékek kiszámolására.

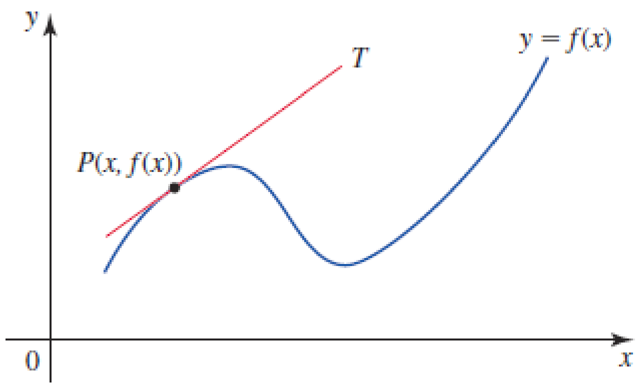
Kulcsfogalmak

- differencia és differenciálhányados
- deriválhatóság
- derivált függvény
- érintő, linearizált

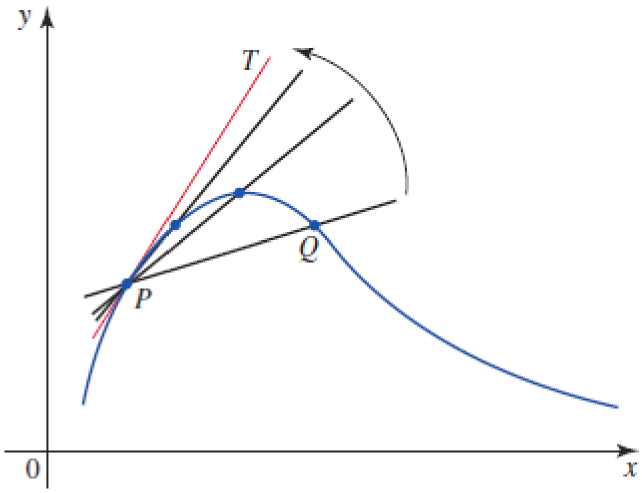
Elméleti összefoglaló

Azt szokták mondani, hogy semmi sem állandó csak a változás. Valóban, a minket körülvevő világban minden folyamatosan átalakul, minden sok minden mással kapcsolatban van, azoktól függ. Ezeknek a viszonyoknak a felderítése a természettudományok fő feladata. A különféle függések egyik matematikai modellje a **függvény** fogalma. A változások sok jellemzője közül az egyik nagyon fontos a változás „sebessége”. A gyorsan változó folyamatok veszélyt hordozhatnak magukban azáltal, hogy nem adnak időt a reagálásra. A változások gyorsaságát a matematika a **derivált** fogalmával ragadja meg.

Az analízis fejlődése, amint az gyakran máskor is előfordult, szorosan kötődött problémák megoldásához. A mi esetünkben az egyik ilyen probléma az **érintő** meghatározása volt.

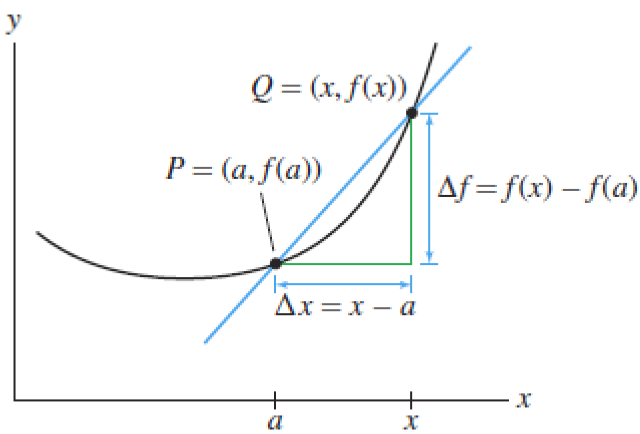


A fenti ábrán egy $f(x)$ függvény grafikonját és annak a $P(x, f(x))$ pontban megrajzolt „érintőjét” látjuk. Érezzük, hogy az $f(x)$ függvény megadása és a P pont lerögzítése meghatározza az ábrán pirossal jelölt egyenest. Ennek az egyenesnek is $y = mx + b$ az egyenlete, csak az a kérdés, hogy az m meredekség és a b konstans hogyan függ az $f(x)$ függvénytől és a $P(x, f(x))$ ponttól.



Ez az ábra azt mutatja, hogy az érintő a szelők határhelyzetének tekinthető: a P és Q pontokon átmenő szelő egyre „közelebb” van az érintőhöz, ahogy a Q pont egyre közelebb kerül P-hez. Ezek motiválják a következő definíciókat.

Legyen $a, x \in D_f$ az f függvény értelmezési tartományának két különböző elem, és tekintsük az f függvény grafikonján a $P(a, f(a))$ és a $Q(x, f(x))$ pontokat.



Definíció: Az $a \in D_f$ és $x \in D_f$ helyekhez tartozó **különbségi hányados** vagy **differencia hányados** a

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

tört.

Tevékenység: Írjuk fel az $f(x) = x^2$ függvény $a = 1$ és x helyekhez tartozó különbségi hányadosát.

Definíció: Ha az $a \in D_f$ helyen **létezik** és **véges** az a és x helyekhez tartozó különbségi hányadosnak a

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

határértéke, akkor az f függvény **differenciálható** az $a \in D_f$ helyen. Ekkor a fenti határérték értékét $f'(a)$ jelöli, és ezt az $a \in D_f$ helyhez tartozó **differenciálhányadosnak** hívjuk, így tehát

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Ha létezik $f'(a)$, akkor a fenti határérték létezése miatt, és azért, mert $f(a)$ is létezik, az a hely csak belső pontja lehet a D_f -nek.

Definíció: Azt az f' függvényt, amelyik az f függvény értelmezési tartományának azokban az a pontjaiban van értelmezve, ahol az f függvény differenciálható, és minden ilyen helyen az értéke az a -beli $f'(a)$ differenciálhányados, az f függvény **derivált függvényének** hívjuk.

A derivált függvény értelmezési tartomány tehát részhalmaza az eredeti függvény értelmezési tartományának.

A differenciálhányados segítségével az érintő problémája már megoldható.

Definíció: Ha f differenciálható az $a \in D_f$ helyen, akkor az f grafikonjához a $P(a, f(a))$ pontban húzható érintő **meredeksége** $f'(a)$, és az **érintő egyenes egyenlete**

$$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a) = \underset{m}{f'(a)} \cdot x + \underbrace{f(a) - a \cdot f'(a)}_{b}.$$

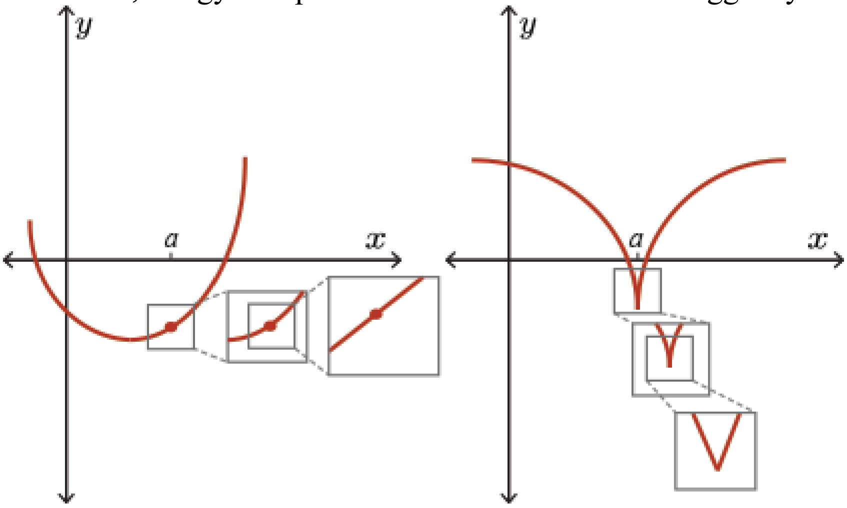
Ebből látható, hogy $f'(a) = 0$ esetén az érintő vízszintes, $f'(a) > 0$ esetén az érintő emelkedő egyenes, vagyis az a hely közelében a függvény növekszik, és $f'(a) < 0$ esetén pedig az érintő süllyedő egyenes, vagyis az a hely közelében a függvény csökken.

Tevékenység: Keressünk olyan elemi függvényt, amelynek minden érintője süllyedő.

Az érintő egyenes tekinthető egy lineáris $g(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$ függvény grafikonjának. Ezt a g függvényt hívjuk az **f függvény a-beli linearizáltjának**. Elég egy pillantást vetni egy függvényt és annak egy érintőjét mutató ábrára, hogy világos legyen: a linearizált jól közelíti az érintési pontban a függvényt. Sőt, bármilyen bonyolult is az f függvény, egy nagyon egyszerű lineáris függvény szolgáltatja ezt a jó közelítést. Ez lehetőséget ad függvényértékek közelítő meghatározására.

Tétel: Ha az f függvény differenciálható a-ban, akkor folytonos is a-ban.

Sőt, ennél több is igaz. Az a pontbeli differenciálhatóság azt jelenti, hogy a függvény grafikonja sima az a pont környékén, nincs szakadása és nincs töréspontja. Ha közelről nézzük a grafikont, akkor az egyenesnek tűnik. Az alábbi ábrasor ezt szemlélteti egy a pontban differenciálható, és egy az a pontban nem differenciálható függvény esetén:



Az analízisben a fő célunk, hogy egy függvényről a hozzárendelési utasítás ismeretében minél több információt megismerjünk. Ki fog derülni, hogy ebben a fő segédeszköz a derivált függvény. Az f' derivált függvény vizsgálatával az eredeti f függvény számos, minket érdeklő tulajdonsága felderíthető. (Például a növekedés vagy fogyás, maximális vagy minimális értékek, a grafikon görbülésének jellege, stb.)

Tehát mindenek előtt arra van szükség, hogy minél több függvény derivált függvényét egyszerűen és gyorsan elő tudjuk állítani.

Az analízisben olyan függvényekkel foglalkozunk, amelyek az elemi függvényekből épülnek fel a különböző műveletek segítségével. Ebből is látható, hogy a későbbiekben az elemi függvények deriváltjainak alapvető jelentőségük lesz. A következő táblázatban megadjuk az elemi függvények deriváltjait.

$f(x)$	$f'(x)$
$f(x)=c$, ahol $c\in\mathbb{R}$ konstans $D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=0$ $D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$, n pozitív egész $D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$ $D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=x^{-n}$, n pozitív egész $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$f'(x)=-nx^{-n-1}$ $D_{f'}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$f(x)=\frac{1}{x}$, $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$f(x)=-\frac{1}{x^2}$, $D_{f'}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$f(x)=\sqrt[n]{x}$, n páros pozitív egész $D_f=[0,\infty)$	$f'(x)=\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ $D_{f'}=(0,\infty)$
$f(x)=\sqrt[n]{x}$, n páratlan pozitív egész $D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ $D_{f'}=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$
$f(x)=x^\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$ $D_f=(0,\infty)$	$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$ $D_{f'}=(0,\infty)$
$f(x)=\sqrt{x}$ $D_f=[0,\infty)$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $D_{f'}=(0,\infty)$
$f(x)=e^x$, $D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=e^x$, $D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=\ln x$ $D_f=(0,\infty)$	$f'(x)=\frac{1}{x}$ $D_{f'}=(0,\infty)$
$f(x)=a^x$, $a>0$ $D_f=(0,\infty)$	$f'(x)=a^x\cdot\ln a$ $D_f=(0,\infty)$
$f(x)=\log_a x$, $a>0$ $D_f=(0,\infty)$	$f'(x)=\frac{1}{x\cdot\ln a}$ $D_f=(0,\infty)$
$f(x)=\sin x$, $D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=\cos x$, $D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=\cos x$, $D_f=\mathbb{R}$	$f(x)=-\sin x$, $D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=\mathrm{tg}\ x$ $D_f=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$	$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$ $D_{f'}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$
$f(x)=\mathrm{ctg}\ x$ $D_f=\mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$	$f'(x)=-\frac{1}{\sin^2 x}$ $D_{f'}=\mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$

$f(x)=\arcsin x$ $D_f=[-1,1]$	$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $D_{f'}=(-1,1)$
$f(x)=\arccos x$ $D_f=[-1,1]$	$f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $D_{f'}=(-1,1)$
$f(x)=\mathrm{arctg}\ x$ $D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ $D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=\mathrm{arcctg}\ x$ $D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=-\frac{1}{1+x^2}$ $D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=\mathrm{sh}\ x:=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ $D_f=\mathbb{R}$	$f(x)=\mathrm{ch}\ x$ $D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=\mathrm{ch}\ x:=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ $D_f=\mathbb{R}$	$f(x)=\mathrm{sh}\ x$ $D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=\mathrm{th}\ x:=\frac{\mathrm{sh}\ x}{\mathrm{ch}\ x}$ $D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$ $D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=\mathrm{cth}\ x:=\frac{\mathrm{ch}\ x}{\mathrm{sh}\ x}$ $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$f'(x)=-\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$ $D_{f'}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$f(x)=\mathrm{arsh}\ x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ $D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ $D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=\mathrm{arch}\ x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ $D_f=[1,\infty)$	$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ $D_{f'}=(1,\infty)$
$f(x)=\mathrm{arth}\ x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ $D_f=(-1,1)$	$f'(x)=\frac{1}{1-x^2}$ $D_{f'}=(-1,1)$
$f(x)=\mathrm{arcth}\ x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ $D_f=(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$	$f'(x)=\frac{1}{1-x^2}$ $D_f=(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

Kidolgozott feladatok:

1. feladat: Írjuk fel az $f(x)=x^2$ függvénynek az $a=1$ és az $x\in\mathbb{R}$ helyekhez tartozó különbségi hányadosát.

Megoldás: Mivel az f függvény értelmezési tartománya $\mathbb{R}$, létezik a fenti különbségi hányados, és:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=x+1.$$

A különbségi hányadosnak általában kiszámoljuk a határértékét, így azt célszerű a legegyszerűbb formában felírni.

2. feladat: Számoljuk ki az $f(x)=\sqrt{x}$ függvény $a=4$ helyhez tartozó differenciálhányadosát.

Megoldás: Tudjuk, hogy $D_f=[0,\infty)$, aminek a 4 belső pontja, és

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{4}}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{1}{4},$$

így tehát $f'(4)=\frac{1}{4}$.

3. feladat: Hol veszi fel a nulla értéket az $f(x)=x-x^2$ függvény deriváltja.

Megoldás: Először elkészítjük a derivált függvényt. Legyen $a\in D_f$ tetszőleges valós szám. Mivel $D_f=\mathbb{R}$ ez egyben belső pontja is D_f-nek. Ekkor

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x-x^2-\left(a-a^2\right)}{x-a}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)-\left(x^2-a^2\right)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)-(x+a)(x-a)}{x-a}=$$

$$=\lim_{x\to a}\left(1-(x+a)\right)=1-2a.$$

Mivel ez tetszőleges a számra igaz, azt kaptuk, hogy $f'(x)=1-2x$, és a derivált függvény is az egész valós számok halmazán van értelmezve.

$f'(x)=0$, ha $x=\frac{1}{2}$, tehát a derivált függvény egyedül az $\frac{1}{2}$ helyen veszi fel a nulla értéket.

4. feladat: Határozzuk meg az $f(x)=\frac{1}{x}$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: A függvényünk értelmezési tartománya $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, aminek minden pontja belső pont. Legyen $a \in D_f$ tetszőleges, ekkor

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{a - x}{ax}}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{-(x - a)}{ax(x - a)} = \lim_{x \to a} \frac{-1}{ax} = -\frac{1}{a^2}.$$

Ebből az következik, hogy $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, és $D_{f'} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, ugyan az, mint a D_f.

5. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{x}$ derivált függvényét.

Megoldás: Most a $D_f = [0, \infty)$, aminek a 0 nem belső pontja, itt tehát f biztosan nem deriválható. Ha azonban $0 \neq a \in D_f$, azaz a pozitív szám, akkor

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\left(\sqrt{x} + \sqrt{a}\right)\left(\sqrt{x} - \sqrt{a}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Tehát $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ és $D_{f'} = (0, \infty)$.

Az előző két feladatban szereplő függvények elemi függvények. Az elemi függvények deriváltjait tartalmazó táblázatban lévő deriváltak közül néhányat hasonlóan lehetne levezetni. A többséghez azonban további nevezetes határértékek tételek és egyéb tételek is szükségesek lennének.

6. feladat: Írjuk fel az $f(x) = x^2$ függvény grafikonjának érintőjét az $a = 3$ helyen.

Megoldás: Határozzuk meg a függvény értékét az $a = 3$ helyen: $f(a) = f(3) = 9$. Az érintési pont koordinátái tehát $(3, 9)$.

Meghatározzuk $f'(a) = f'(3)$ értékét: az $a = 3$ belső pontja a $D_f = \mathbb{R}$-nek, és

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(x + a)(x - a)}{x - a} = \lim_{x \to a} (x + a) = 2a.$$

A differenciálhányados értéke az $a = 3$ helyen, azaz a keresett érintő meredeksége:

$$m = f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$$

Helyettesítsünk ezután az érintőt megadó $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ képletbe.

$$y = 6(x - 3) + 9$$

A műveletek elvégzése után kapjuk, hogy az érintő egyenlete: $y = 6x - 9$.

7. feladat: Írjuk fel az $f(x) = x^2 - 2x - 2$ függvény $a = 2$-beli érintőjének egyenletét.

Megoldás: Helyettesítsük a függvénybe a megadott $a = 2$ értéket:
$f(a) = f(2) = 2^2 - 2\cdot 2 - 2 = -2$. Az érintő tehát a $(2,-2)$ pontban érinti a függvény grafikonját.
A meredekség meghatározásához szükségünk van a derivált függvényre. (Valójában most is elég lenne $f'(2)$ értéke, de azt kiszámolni nem sokkal egyszerűbb, mint meghatározni a derivált függvényt, és venni annak 2-ben a helyettesítési értékét.) Az $a = 2$ belső pontja a $D_f = \mathbb{R}$-nek, és

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x^2-2x-2-\left(a^2-2a-2\right)}{x-a} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{\left(x^2-a^2\right)-\left(2x-2a\right)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\left(x+a\right)\left(x-a\right)-2\left(x-a\right)}{x-a} = \lim_{x\to a}\left(\left(x+a\right)-2\right) = 2a-2.$$

A derivált függvény tehát $f'(x) = 2x - 2$.
Helyettesítsünk ebbe $a = 2$-t, így megkapjuk a meredekséget:

$$m = f'(2) = 2\cdot 2 - 2 = 2$$

Részeredményeinket írjuk be az érintő $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ képletébe:

$$y = 2\left(x-2\right) + (-2).$$

Végezzük el a műveleteket, és így megkapjuk az érintő egyenletének alábbi alakját:

$$y = 2x - 6.$$

8. feladat: Írjuk fel az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény $m = 2$ meredekségű érintőjének egyenletét.

Megoldás: Most az érintőt nem azzal határozzuk meg, hogy melyik pontban érinti a grafikont, hanem azzal, hogy mennyi a meredeksége. Mivel az érintő felírásához szükség van az érintési pont két koordinátájára, először ezeket kell meghatározni.

Tudjuk, hogy a derivált függvény $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Azt az $a > 0$ számot keressük, amelyre a meredekség, azaz $f'(a)$ éppen 2. Ehhez megoldjuk az

$$\frac{1}{2\sqrt{a}} = 2$$

egyenletet a-ra: a fenti képletből $\sqrt{a} = \dfrac{1}{4}$, amiből $a = \dfrac{1}{16}$. Tehát valójában az $a = \dfrac{1}{16}$-beli érintőről van szó. Mivel $f\left(\dfrac{1}{16}\right) = \dfrac{1}{4}$, az érintési pont két koordinátája $\left(\dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{4}\right)$. Az érintő $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ képletébe helyettesítve

$$y = 2\left(x - \frac{1}{16}\right) + \frac{1}{4},$$

rendezve

$$y = 2x + \frac{1}{8}.$$

9. feladat: Írjuk fel az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ függvénynek az $y = 4x - 9$ egyenesre merőleges érintőjének egyenletét.

Megoldás: Ismét az a helyzet, hogy nem ismerjük az érintési pont első koordinátáját. Azt meg kell határoznunk. Az érintő meredekségéről van információnk, hiszen, ha a keresett érintő merőleges a megadott $m^* = 4$ meredekségű egyenesre, akkor a meredeksége $m = -\frac{1}{4}$.
Ehhez arra kell emlékezni, hogy a síkon két egyenes akkor merőleges egymásra, ha a meredekségeik szorzata -1. Így tehát azt az $a \neq 0$ számot keressük, amelyre $f'(a) = -\frac{1}{4}$.

Tudjuk, hogy $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, így az alábbi egyenletet kell megoldanunk:

$$-\frac{1}{a^2} = -\frac{1}{4},$$

amiből $a^2 = 4$, azaz $a = \pm 2$, két megoldást kaptunk, tehát két ilyen érintő is van.

Ha az érintési pont első koordinátája $a = 2$, akkor az érintési pont második koordinátája $f(2) = \frac{1}{2}$, és ennek az első érintőnek az egyenlete

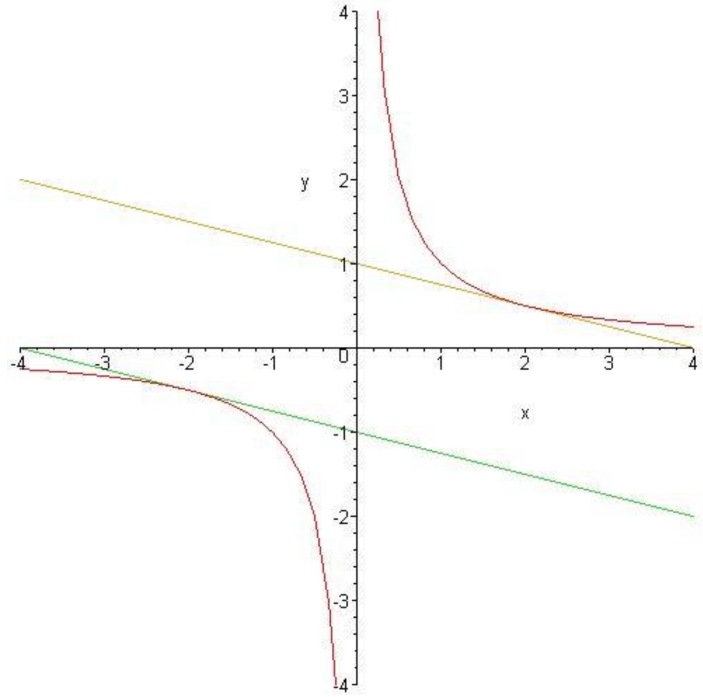
$$y = -\frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{x}{4} + 1.$$

Ha az érintési pont első koordinátája $a = -2$, akkor az érintési pont második koordinátája $f(-2) = -\frac{1}{2}$, és ennek a második érintőnek az egyenlete:

$$y = -\frac{1}{4}(x-(-2)) + \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$y = -\frac{x}{4} - 1.$$



A fenti ábrán a függvényünket és a két érintőjét láthatjuk.

10. feladat: Írjuk fel az $f(x) = x^2$ függvénynek azt az érintőjét, amelyik átmegy a $Q(-1, -3)$ ponton.

Megoldás: Ismét az érintési pont meghatározásával kell kezdenünk. Tudjuk, hogy az érintő egyenlete

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

szerkezetű, ha figyelembe vesszük f képletét is, akkor, mivel $f'(x) = 2x$,

$$y = 2a(x-a) + a^2.$$

Azt az a számot, vagy azokat az a számokat keressük, amelyekre ez az egyenes átmegy a Q ponton. Elvégezve az $x = -1$, $y = -3$ helyettesítést és rendezve

$$-3 = 2a(-1-a) + a^2$$

$$-3 = -2a - a^2$$

$$a^2 + 2a - 3 = 0.$$

Megoldva a kapott másodfokú egyenlete a-ra két értéket kapunk: $a = 1$ vagy $a = -3$.

Az $a = 1$-beli érintő egyenlete az $y = 2a(x-a) + a^2$ képletből

$$y = 2(x-1) + 1$$

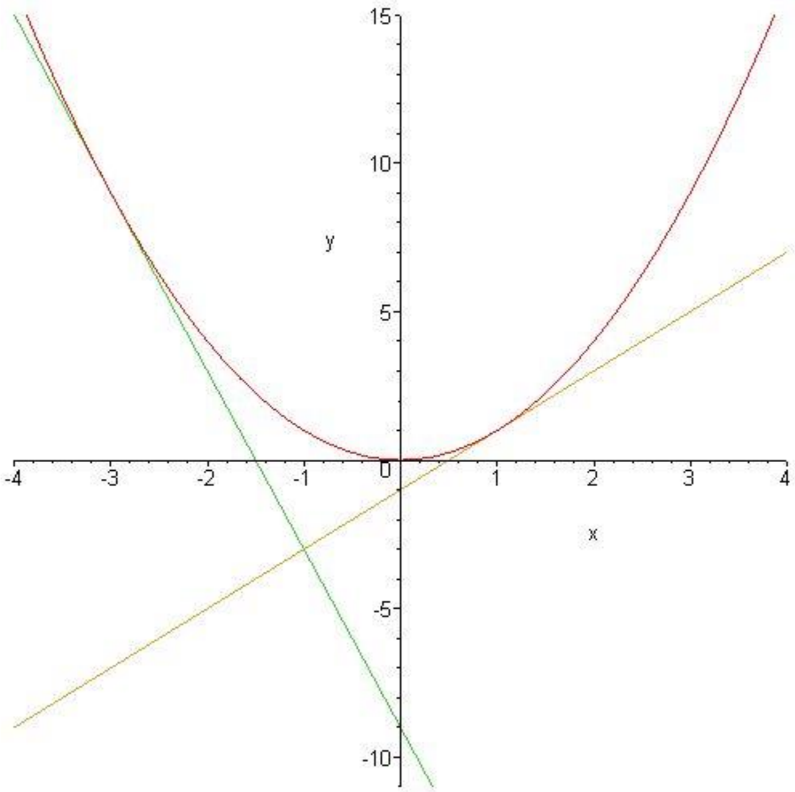
$$y = 2x - 1.$$

Ugyanígy az $a = -3$-beli érintő egyenlete

$$y = -6(x-(-3)) + 9 = -6(x+3) + 9$$

$$y = -6x - 9.$$

A függvényünket és a két érintőjét mutatja az alábbi ábra.



11. feladat: Az $f(x)=\sqrt[3]{x}$ függvény alkalmas linearizáltját felhasználva számoljuk ki közelítően $\sqrt[3]{8.12}$ értékét.

Megoldás: A linearizált az érintési pont közelében közelít jól. A 8 közel van 8.12-höz, ezért az $f(x)=\sqrt[3]{x}$ függvény $a=8$-beli linearizáltját fogjuk használni $\sqrt[3]{8.12}$ közelítő értékének kiszámolására.

Szükségünk van az érintési pont második koordinátájára is: $f(a)=f(8)=\sqrt[3]{8}=2$, az érintési pont tehát $(8,2)$. Mivel $f'(x)=\left(\sqrt[3]{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$, azt kapjuk, hogy a meredekség $f'(a)=f'(8)=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{8^2}}=\frac{1}{12}$. Így az $a=8$-beli linearizált

$$g(x)=\frac{1}{12}(x-8)+2=\frac{x}{12}+\frac{4}{3}$$

Ennek a függvénynek a 8.12 helyen vett értékével közelíthető $\sqrt[3]{8.12}$. Azt kapjuk, hogy:

$$\sqrt[3]{8.12}\approx g(8.12)=\frac{8.12}{12}+\frac{4}{3}=2.01.$$

Ha ezek után számológéppel is kiszámoljuk $\sqrt[3]{8.12}$-t, akkor a 2.009950413 értéket kapjuk. Látható, hogy a linearizált felhasználásával kapott közelítésünk meglehetősen pontos.

12. feladat: Alkalmas linearizáltat felhasználva számoljuk ki közelítően $\sin(33°)$ értékét.

Megoldás: Az analízisben a trigonometrikus függvények argumentumát radiánban kell megadni. Ezért először a 33°-ot átszámoljuk radiánra az $x_{rad} = \frac{\pi}{180} x_{fok}$ képletet használva. De mivel a 33° radiánban megadott értékéhez közeli a érték is kell, hogy fel tudjuk írni az ottani linearizáltat, az átírást a következőképp csináljuk:

$$33^\circ = 30^\circ + 3^\circ = \frac{\pi}{180}(30+3) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{60} = \frac{11\pi}{60} = 0.576,$$

(a radián mértékegységet nem írjuk ki). Innen már látjuk, hogy, mivel $\frac{\pi}{60}$ kicsi, az $f(x) = \sin x$ függvény $a = \frac{\pi}{6}$-beli linearizáltját használhatjuk a közelítéshez. Mivel $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ és $f'(x) = \cos x$, a meredekség $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ezután már felírhatjuk a linearizált képletét:

$$g(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3} \cdot \pi}{12}.$$

Ezután a keresett közelítő érték:

$$\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) \approx g\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{11\pi}{6} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3} \cdot \pi}{12} = 0.5453449841.$$

Ha számológéppel számoljuk $\sin(33^\circ)$-ot, akkor a 0.544639035 értéket kapjuk. Látható, hogy a közelítésünk most is elég pontos.

13. feladat: Hol metszi az $f(x) = x^2 - 8x + 19$ függvény $a = 5$-beli érintője az x tengelyt?

Megoldás: Először felírjuk az érintő egyenletét. Mivel $f(a) = f(5) = 4$, az érintési pont az $(5,4)$ koordinátájú pont. Szükségünk van $f'(5)$ értékére. Mivel f nem elemi függvény még nem ismerjük a deriváltját. Később a derivált függvény egy adott helyen vett értékét mindig úgy fogjuk kiszámolni, hogy meghatározzuk a derivált függvényt, és vesszük annak a szóban forgó helyettesítési értékét. Ehhez azonban a deriválási szabályok ismeretére van szükség, ami a következő fejezet témája. Ezért most a definíciót használva számoljuk ki $f'(5)$ értékét:

$$f'(5) = \lim_{x \to 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} =$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 8x + 19 - 4}{x - 5} = \lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 8x + 15}{x - 5} =$$

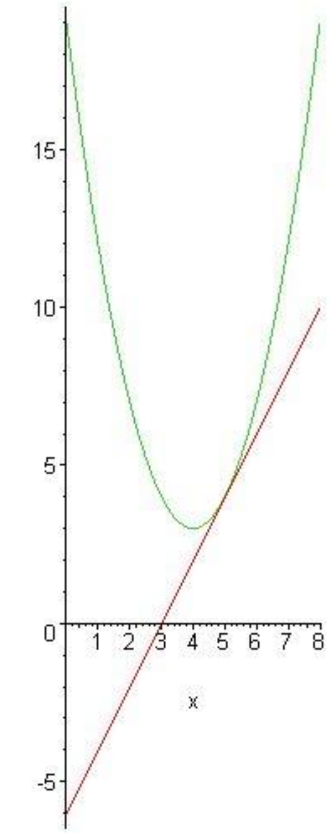
$$= \lim_{x \to 5} \frac{(x-3)(x-5)}{x - 5} = \lim_{x \to 5}(x - 3) = 2,$$

így az érintő meredeksége $m = f'(a) = f'(5) = 2$.
Ezek felhasználásával az érintő egyenlete:

$$y = f'(a)(x - a) + f(a) =$$

$$= 2(x - 5) + 4 = 2x - 6.$$

Az $y = 2x - 6$ egyenes ott metszi az x tengelyt, ahol az $y = 0$. A $2x - 6 = 0$ egyenletből $x = 3$. Tehát az $f(x) = x^2 - 8x + 19$ függvény $a = 5$-beli érintője az $(3,0)$ koordinátájú pontban metszi az x tengelyt. Az alábbi ábrán a függvényünket és az érintőjét láthatjuk.



14. feladat: Hol metszi az $f(x)=\sqrt{x+3}$ függvény $a=-2$-beli érintője az x és az y tengelyt?

Megoldás: Úgy, mint az előző feladatban, az érintő egyenletének felírásával kezdünk. Mivel $f(-2)=1$, az érintési pont $(-2,1)$. Ezen kívül az érintő felírásához $f'(-2)$ értékére van szükségünk, amit most is a definíció alapján határozunk meg. (f összetett függvény, deriválásával a következő fejezetben foglalkozunk.)

$$f'(-2)=\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{x+3}-1}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{\left(\sqrt{x+3}-1\right)\left(\sqrt{x+3}+1\right)}{(x+2)\left(\sqrt{x+3}+1\right)}=$$

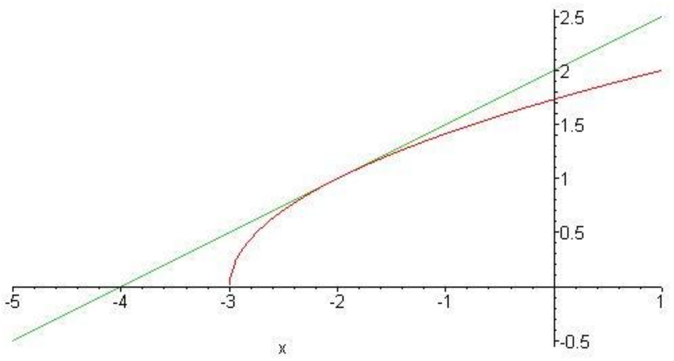
$$=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)}{(x+2)\left(\sqrt{x+3}+1\right)}=\lim_{x\to-2}\frac{1}{\left(\sqrt{x+3}+1\right)}=\frac{1}{2}.$$

Az érintő meredeksége tehát $m=f'(a)=f'(-2)=\frac{1}{2}$. Ezeket felhasználva az érintő egyenlete

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x-(-2)\right)+1=\frac{x}{2}+2.$$

Az $y=0$ egyenletből, azaz az $\frac{x}{2}+2=0$ egyenletből $x=-4$, vagyis az érintő az x tengelyt a $(-4,0)$ koordinátájú pontban metszi. Az y tengellyel való metszéspontot megkapjuk, ha az érintő $y=\frac{x}{2}+2$ képletében az x helyére nullát írunk, így $y=2$ adódik, tehát az érintő az y tengelyt a $(0,2)$ koordinátájú pontban metszi. A függvényünket és az érintőjét mutatja az alábbi ábra.



Ellenőrző kérdések:

1. kérdés: Mi az $f(x)=\frac{3}{x}$ függvény $x_0=2$-beli érintőjének egyenlete?

$y=-\frac{3}{2}x+3$

$y=\frac{3}{4}x+3$

$y=-\frac{3}{4}x+3$ (X)

$y=-\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}$

2. kérdés: Mi az $f(x)=e^x+x$ függvény $x_0=0$-beli érintőjének egyenlete?

$y=2x+1$ (X)

$y=x+2$

$y=2x-1$

$y=ex+1$

3. kérdés: Mi az $f\left(x\right)=\frac{1}{x^2}$ függvény $m=-2$ meredekségű érintőjének egyenlete?

$y=-x+2$
$y=-x+2$
$y=-2x+3$ (X)
$y=-2x+4$

4. kérdés: Határozzuk meg az $f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ függvény $x_0=4$-beli linearizáltját, és ezt felhasználva adjuk meg $\frac{1}{\sqrt{5}}$ közelítő értékét.

A linearizált $y=-\frac{1}{4}x+\frac{55}{32}$, s ebből $\frac{1}{\sqrt{5}}\approx 0.46875$.

A linearizált $y=-\frac{1}{4}x+\frac{27}{16}$, s ebből $\frac{1}{\sqrt{5}}\approx 0.4375$.

A linearizált $y=-\frac{1}{16}x+\frac{25}{32}$, s ebből $\frac{1}{\sqrt{5}}\approx 0.46875$.

A linearizált $y=-\frac{1}{16}x+\frac{3}{4}$, s ebből $\frac{1}{\sqrt{5}}\approx 0.4375$. (X)

5. kérdés: Határozzuk meg az $f\left(x\right)=\ln x$ függvény $x_0=e$-beli linearizáltját, és ezt felhasználva adjuk meg $\ln 3$ közelítő értékét 4 tizedesre kerekítve.

A linearizált $y=\frac{x}{2e}+\frac{1}{2}$, s ebből $\ln 3\approx 1.0518$.

A linearizált $y=\frac{x}{e}$, s ebből $\ln 3\approx 1.1036$. (X)

A linearizált $y=\frac{2x}{e}-1$, s ebből $\ln 3\approx 1.2073$.

A linearizált $y=\frac{x}{4e}+\frac{3}{4}$, s ebből $\ln 3\approx 1.0259$.

Elméleti összefoglaló

Amikor meghatározzuk egy függvény derivált függvényét úgy is gondolhatunk erre a folyamatra, mint egy új függvényműveletre, amelyik az eredeti $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ függvényből elkészíti az $\mathrm{f}'(\mathrm{x})$ derivált függvényt. És sokszor hasznos így, függvényműveletként gondolni a deriválásra. Persze ekkor rögtön adódik a kérdés, hogy ennek az új függvényműveletnek mi a kapcsolata a korábban megismert függvényműveletekkel. Ezeket a kapcsolatokat megfogalmazó tételeket hívjuk **deriválási szabályoknak**. Ebben a leckében megismerkedünk a deriválási szabályokkal, és begyakoroljuk a derivált függvény ezeken alapuló meghatározását. Ez sokkal gyorsabb és egyszerűbb, mint a definíció alkalmazása, és nagyon fontos lesz a későbbiek során.

Tétel: Legyen c tetszőleges konstans, az f függvény pedig differenciálható az x helyen, ekkor a $c \cdot f$ függvény is differenciálható az x helyen, és

$$\left(c \cdot f(x)\right)' = c \cdot f'(x).$$

Úgy szoktunk hivatkozni erre a tételre, hogy a konstans szorzó deriváláskor kiemelhető.

Tétel: Legyen az f és a g függvény differenciálható az x helyen, ekkor a az $f+g$ függvény is differenciálható az x helyen, és

$$\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x).$$

Ennek a tételnek a tömör megfogalmazása az, hogy összeg tagonként deriválható. A tétel nem csak két függvény, hanem tetszőleges számú, véges sok függvény összegének deriválásakor is érvényben marad: ha az f_1, f_2, $\ldots f_n$ függvények mindegyike differenciálható az x helyen, akkor az $f_1+f_2+\ldots+f_n$ függvény is differenciálható az x helyen, és

$$\left(f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)\right)' = f_1'(x)+f_2'(x)+\ldots+f_n'(x).$$

Ezekből a tételekből könnyen következik, hogy f és a g függvény differenciálható az x helyen, ekkor a az $f-g$ függvény is differenciálható az x helyen, és

$$\left(f(x)-g(x)\right)' = f'(x)-g'(x).$$

Sőt, a legáltalánosabban ezek a tételek így fogalmazhatók meg egy tételben: ha az f_1, f_2, $\ldots f_n$ függvények mindegyike differenciálható az x helyen, c_1, c_2, $\ldots c_n$ pedig tetszőleges konstansok, akkor $c_1 \cdot f_1 + c_2 \cdot f_2 + \ldots + c_n \cdot f_n$ függvény is differenciálható az x helyen, és

$$\left(c_1 \cdot f_1(x)+c_2 \cdot f_2(x)+\ldots+c_n \cdot f_n(x)\right)' = c_1 \cdot f_1'(x)+c_2 \cdot f_2'(x)+\ldots+c_n \cdot f_n'(x).$$

Ezek a tételek együtt azt jelentik, hogy **a deriválás lineáris művelet**.

Tétel: Legyen az f és a g függvény differenciálható az x helyen, ekkor az $f \cdot g$ függvény is differenciálható az x helyen, és

$$\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Ez a tétel is általánosítható, például három tényező esetén így néz ki:

$$\left(f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x).$$

Figyeljük meg, hogy mivel az összeadás és a szorzás kommutatív művelet, az eddigi képletek nem változnak, ha azokban a függvényeket tetszőleges sorrendben írjuk.

Az osztás nem kommutatív művelet, ezért a törtfüggvény deriválására vonatkozó képlet nem is szimmetrikus a számlálóban és a nevezőben.

Tétel: Legyen az f és a g függvény differenciálható az x helyen, és $g(x) \neq 0$, Ekkor a az $\dfrac{f}{g}$ függvény is differenciálható az x helyen, és

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}.$$

A legfontosabb deriválási szabály az összetett függvény deriválási szabálya, ezt használjuk a leggyakrabban.

Tétel: Legyen az f függvény differenciálható az x helyen, a g függvény differenciálható az $f(x)$ helyen. Ekkor a $g \circ f$ függvény is differenciálható az x helyen, és

$$\left(g(f(x))\right)' = g'(f(x)) \cdot f'(x)\,.$$

Természetesen ez is általánosítható többtényezős kompozíciókra. Három tényező esetén a tétel a következő: ha az f függvény differenciálható az x helyen, a g függvény differenciálható az $f(x)$ helyen, a h függvény pedig differenciálható a $g(f(x))$ helyen, akkor a $h \circ g \circ f$ függvény is differenciálható az x helyen, és

$$\left(h(g(f(x)))\right)' = h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x)\,.$$

Ezt, és az előző tételt is, **láncszabálynak** hívják.

A függvény inverzének a képzése is tekinthető függvényműveletnek, így persze van az inverz függvény deriválására vonatkozó tétel is. A gyakorlatban azonban ezt ritkán alkalmazzuk, helyette elkészítjük az inverz függvényt, és alkalmazzuk a korábbi deriválási szabályokat.

Egy f függvény f' deriváltja maga is egy függvény. Amennyiben ez deriválható, akkor tekinthetjük ennek a deriváltját, amit f'' fog jelölni, és ezt f **második deriváltjának** hívjuk. Ennek deriváltja f harmadik deriváltja, és így tovább. Ezeknek a magasabb rendű deriváltaknak fontos szerepe van a felsőbb matematikában.

Kidolgozott feladatok

A következő feladatokban csak a derivált függvény képletének az előállításával foglalkozunk, és nem vizsgáljuk annak értelmezési tartományát. Fel fogjuk használni az elemi függvények korábban már megismert deriváltjait.

15. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = 5x^4$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Az f függvény egy konstans és egy hatványfüggvény szorzata, ezért a konstans szorzó a deriválás művelete élé kiemelhető:

$$f'(x) = \left(5x^4\right)' = 5\left(x^4\right)' = 5\left(4x^3\right) = 20x^3\,.$$

16. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = x^2 + \ln x$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Az f függvény kéttagú összeg, amit tagonként deriválhatunk, így:

$$f'(x) = \left(x^2 + \ln x\right)' = \left(x^2\right)' + \left(\ln x\right)' = 2x + \frac{1}{x}.$$

17. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \sin x - \cos x$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: $f'(x) = \left(\sin x\right)' - \left(\cos x\right)' = \cos x - \left(-\sin x\right) = \cos x + \sin x$.

18. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = x^3 - 3\sqrt{x} + 2e^x + \dfrac{3}{x}$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Felhasználjuk, hogy a deriválás lineáris, a gyököt és a törtet pedig felírjuk hatványként, így minden derivált könnyen felismerhető elemi függvény deriváltja lesz:

$$f'(x) = \left(x^3 - 3\sqrt{x} + 2e^x + \frac{3}{x}\right)' = \left(x^3\right)' - 3\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' + 2\left(e^x\right)' + 3\left(x^{-1}\right)' =$$

$$= 3x^2 - 3\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) + 2e^x + 3\left(-x^{-2}\right) =$$

$$= 3x^2 - \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} + 2e^x - \frac{3}{x^2}.$$

Deriváláskor gyakori, hogy a törteket és a gyököket hatványokként kezeljük.

19. feladat: Határozzuk meg az $f(t) = (2t-1)^2$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Végezzük el a négyzetre emelést. Ekkor kapjuk, hogy $f(t) = 4t^2 - 41 + 1$. Ezt felhasználva

$$f'(t) = \left(4t^2 - 4t + 1\right)' = 4\left(t^2\right) - 4(t)' + (1)' = 8t - 4.$$

Később ezt a függvény a szorzatfüggvény és az összetett függvény deriválási szabályát felhasználva is deriválni fogjuk.

20. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = 2^x - \ln 2 - \sqrt[4]{x^3}$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Persze majd tagonként fogunk deriválni, de először a negyedik gyököt hatványként írjuk fel. Azután vegyük figyelembe, hogy $\ln 2$ konstans, így a deriváltja 0, és nem $\frac{1}{2}$.

$$f'(x) = \left(2^x - \ln 2 - \sqrt[4]{x^3}\right)' = \left(2^x\right)' - (\ln 2)' - \left(x^{\frac{3}{4}}\right)' =$$

$$= 2^x \ln 2 - \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}},$$

felhasználva az a^x és az x^α elemi függvények deriváltjait.

Ellenőrző kérdések:

6. kérdés: Mi az $f(x)=3x^4$ függvény derivált függvénye?

$3x^3$.

$12x^4$.

$12x^3$ (X).

$34x^3$.

7. kérdés: Mi az $f(t)=\frac{1}{t}-\mathrm{ctg}t$ függvény derivált függvénye?

$\ln t-\frac{1}{\sin^2 t}$.

$-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{\sin^2 t}$ (X).

$-\frac{1}{t^2}-\frac{1}{\sin^2 t}$.

$\frac{1}{t^2}-\mathrm{tg}t$.

8. kérdés: Mi az $f(x)=e^{x+1}-\frac{2}{\sqrt{x}}$ függvény derivált függvénye?

$e^{x+1}-\frac{1}{\sqrt{x^3}}$.

$e^{x+1}-4\sqrt{x}$.

$ee^x-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

$ee^x+\frac{1}{\sqrt{x^3}}$ (X).

9. kérdés: Mi az $f(x)=x^3-2\cdot 3^x-4x^{2.1}$ függvény derivált függvénye?

$3x^2-2x\cdot 3^{x-1}-8.2x^{1.1}$.

$3x^2-2\cdot 3^{x-1}\ln 3-8.2x^{1.1}$.

$3x^2-2\cdot 3^{x-1}\ln 3-8.2x^{1.1}$.

$3x^2-2\cdot 3^x\ln 3-8.2x^{1.1}$ (X).

10. kérdés: Mi az $f(x)=2\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt[3]{x}}-x^{-2}$ függvény derivált függvénye?

$\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}+\frac{2}{x^3}$ (X).

$\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}-\frac{2}{x^3}$.

$\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}+\frac{2}{x^3}$.

$\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}+\frac{3}{x^2}$.

Kidolgozott feladatok:

21. feladat: Határozzuk meg az $f(t)=(2t-1)^2$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: A függvényünk így is írható: $f(t)=(2t-1)(2t-1)$. Így, a szorzatfüggvény deriválási szabálya alapján

$$f'(t)=(2t-1)'(2t-1)+(2t-1)(2t-1)'=2(2t-1)+(2t-1)2=$$
$$=8t-4.$$

22. feladat: Határozzuk meg az $f(x)=(x^2+x)(1-2x^2)$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Mivel a függvényünk szorzatfüggvény, alkalmazhatjuk a szorzatfüggvény deriválási szabályát:

$$f'(x)=(x^2+x)'(1-2x^2)+(x^2+x)(1-2x^2)'=$$
$$=(2x+1)(1-2x^2)+(x^2+x)(-4x)=$$
$$=1+2x-6x^2-8x^3,$$

De eljárhatunk úgy is, hogy először elvégezzük a függvényünket definiáló képletben a szorzást: $f(x)=x+x^2-2x^3-2x^4$. Ezután deriválás szempontjából már egyszerűbb a helyzet.

$$f'(x)=(x+x^2-2x^3-2x^4)'=(x)'+(x^2)'-2(x^3)'-2(x^4)'=$$
$$=1+2x-6x^2-8x^3.$$

Természetesen ugyanaz a végeredmény, mint az előbb. Látjuk, gyakran előfordul, hogy egy deriválás több úton is elvégezhető.

A továbbiakban az összegek deriváltját, ha a tagok már elemi függvények, a deriválások kijelölése nélkül, közvetlenül felírjuk.

23. feladat: Határozzuk meg az $f(x)=\left(3x-\sqrt{x}\right)\left(e^x+1\right)$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Most nem célszerű elvégezni a beszorzást, mert a keletkezett szorzatok nem egyszerűsíthetők, és így kétszer is alkalmazni kéne a szorzatfüggvény deriválási szabályát.

$$f'(x)=\left(3x-\sqrt{x}\right)'\left(e^x+1\right)+\left(3x-\sqrt{x}\right)\left(e^x+1\right)'=$$
$$=\left(3-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\left(e^x+1\right)+\left(3x-\sqrt{x}\right)e^x.$$

Felmerül, hogy az utolsó képletben el kell-e végezni a beszorzásokat. Amikor csak az a feladat, hogy határozzuk meg egy függvény derivált függvényét, a deriválások elvégzése után nem fogjuk a lehetséges összevonásokat elvégezni. Ez így gyorsabb és egyszerűbb. Később, amikor a derivált függvénnyel további számításokat fogunk végezni, más lesz a helyzet.

24. feladat: Határozzuk meg az
$f(x)=\left(\operatorname{tg} x+\sin 30-x\right)\left(\sqrt[3]{x}-2^x\right)$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Először is a $\sin 30$ egy konkrét szám, konstans, és a 30 radiánban értendő; az analízisben a trigonometrikus függvények argumentuma mindig radián van megadva. Így $\sin 30\approx$-0.9880316241, és nem 0.5, amennyi a 30° szinusza. Tehát $\sin 30$ deriváltja nulla, továbbá

$$f'(x)=\left(\operatorname{tg}x+\sin 30-x\right)'\left(\sqrt[3]{x}-2^x\right)+\left(\operatorname{tg}x+\sin 30-x\right)\left(\sqrt[3]{x}-2^x\right)'=$$

$$=\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x}-2^x\right)+\left(\operatorname{tg}x+\sin 30-x\right)\left(\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}-2^x\ln 2\right).$$

25. feladat: Határozzuk meg az $f(x)=x^2\cdot \operatorname{shx}\cdot \lg x$ függvény derivált függvényét.
Megoldás: A függvényünk három tényezős szorzat, de már ismerjük egy ilyen függvény deriváltjára vonatkozó képletet, az alapján

$$f'(x)=(x^2\cdot \operatorname{shx}\cdot \lg x)'=\left(x^2\right)'\cdot \operatorname{shx}\cdot \lg x+x^2\cdot\left(\operatorname{shx}\right)'\cdot \lg x+x^2\cdot \operatorname{shx}\cdot\left(\lg x\right)'=$$

$$=2x\cdot \operatorname{shx}\cdot \lg x+x^2\cdot \operatorname{chx}\cdot \lg x+x^2\cdot \operatorname{shx}\cdot\frac{1}{x\cdot \ln 10}.$$

26. feladat: Határozzuk meg az $f(x)=\left(xe^x+1\right)\left(x+\operatorname{arctg}x\right)$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Ebben a feladatban elkerülhetetlen a szorzatfüggvény deriválási szabályának többszöri alkalmazása. Figyeljük meg, ahogyan először csak kijelöljük a szükséges deriválásokat.

$$f'(x)=\left(xe^x+1\right)'\left(x+\operatorname{arctg}x\right)+\left(xe^x+1\right)\left(x+\operatorname{arctg}x\right)'=$$

$$=\left(xe^x\right)'\left(x+\operatorname{arctg}x\right)+\left(xe^x+1\right)\left(x+\operatorname{arctg}x\right)'=$$

$$=\left(\left(x\right)'e^x+x\left(e^x\right)'\right)\left(x+\operatorname{arctg}x\right)+\left(xe^x+1\right)\left(x+\operatorname{arctg}x\right)'.$$

Ezután már könnyen elvégezhetjük a kijelölt deriválásokat, és azt kapjuk, hogy

$$f'(x)=\left(e^x+xe^x\right)\left(x+\operatorname{arctg}x\right)+\left(xe^x+1\right)\left(1+\frac{1}{1+x^2}\right).$$

Ellenőrző kérdések:

11. kérdés: Mi az $f(x)=x\left(\sin x+1\right)$ függvény derivált függvénye?

$\sin x+x\cos x$.
$\cos x+1+x\cos x$.
$\sin x+x+x\cos x$
$\sin x+1+x\cos x$ (X).

12. kérdés: Mi az $f(x)=\left(x^2-2x\right)\left(1-3x^2\right)$ függvény derivált függvénye?

$-12x^3+18x^2-2x-2$.
$-12x^3+18x^2+2x-2$ (X).
$-12x^3+18x^2+2x+2$.
$-18x^3+12x^2+2x-2$.

13. kérdés: Mi az $f(x)=\left(\ln x-x\right)\left(x-\ln x\right)$ függvény derivált függvénye?

$2-\frac{2\ln x}{x}-2x+2\ln x$ (X).

$2-\frac{\ln x}{x}-2x+2\ln x$.

$2-\frac{2\ln x}{x}-2x+\ln x$.

$2-\frac{2\ln x}{x}-x+2\ln x$.

14. kérdés: Mi az $f(x)=\left(\sqrt{x}+2\right)\left(x^2-1\right)$ függvény derivált függvénye?

$\frac{5\sqrt{x^3}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}+4x$ (X).

$\frac{5\sqrt{x^3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{x}}+4x$.

$\frac{5\sqrt{x^3}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}+2x$.

$\frac{5\sqrt{x^3}}{2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}-4x$.

15. kérdés: Mi az $f(x)=(2x+1)x^4(1-x^2)$ függvény derivált függvénye?

$4x^3+10x^4+6x^5-14x^6$.

$4x^3+10x^4-6x^5+14x^6$.

$4x^3+10x^4-6x^5-14x^6$ (X).

$4x^3-10x^4-6x^5-14x^6$.

16. kérdés: Mi az $f(x)=(3x-1)(x\ln x+2)$ függvény derivált függvénye?

$6x\ln x-\ln x+5+2x$

$6x\ln x-\ln x+5+3x$ (X).

$6x\ln x-\ln x-5+3x$.

$6\ln x-x\ln x+5+3x$.

Kidolgozott feladatok:

27. feladat: Határozzuk meg az $f(x)=\frac{2x}{3x+1}$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: A törtfüggvény deriválási szabályát kell alkalmazni:

$$f'(x)=\left(\frac{2x}{3x+1}\right)'=\frac{(2x)'(3x+1)-(2x)(3x+1)'}{(3x+1)^2}=$$

$$=\frac{2(3x+1)-(2x)3}{(3x+1)^2}=\frac{2}{(3x+1)^2}.$$

Figyeljük meg, hogy a számlálóban elvégeztük az összevonásokat, de a nevezőben a négyzetre emelést nem, ezt máskor sem fogjuk elvégezni, csak ha egytagú a nevező, így jobban kezelhető a kapott formula.

28. feladat: Határozzuk meg az $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{x}+1}$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: A konstans számlálójú törteket, mint hamarosan látni fogjuk, gyakran célszerűbb összetett függvényként deriválni. De persze lehet törtként is, mint most is.

$$f'(x)=\left(\frac{3}{\sqrt{x}+1}\right)'=\frac{(3)'\left(\sqrt{x}+1\right)-3\left(\sqrt{x}+1\right)'}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}=$$

$$=\frac{0\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)-3\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}=\frac{-3}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)^2}.$$

Általában is

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)'=\frac{-g'(x)}{g^2(x)}.$$

29. feladat: Számoljuk ki $f'(1)$ értékét, ha $f(x)=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{x+1}{x^2}$.

Megoldás: Először meghatározzuk f derivált függvényét, majd vesszük annak a helyettesítési értékét az 1 helyen. Hogy ne kelljen kétszer alkalmazni a tört deriválási szabályt közös nevezőre hozzuk a függvényünk: $f(x)=\dfrac{x^2+(x+1)^2}{(x+1)x^2}=\dfrac{2x^2+2x+1}{x^3+x^2}$. Most már a derivált

$$f'(x)=\left(\frac{2x^2+2x+1}{x^3+x^2}\right)'=\frac{\left(2x^2+2x+1\right)'\left(x^3+x^2\right)-\left(2x^2+2x+1\right)\left(x^3+x^2\right)'}{\left(x^3+x^2\right)^2}=$$

$$=\frac{(4x+2)\left(x^3+x^2\right)-\left(2x^2+2x+1\right)\left(3x^2+2x\right)}{\left(x^3+x^2\right)^2}=$$

$$=\frac{4x^4+2x^3+4x^3+2x^2-\left(6x^4+6x^3+3x^2+4x^3+4x^2+2x\right)}{\left(x^3+x^2\right)^2}=$$

$$=\frac{-2x^4-4x^3-5x^2-2x}{x^4\left(x+1\right)^2}=\frac{-2x^3-4x^2-5x-2}{x^3\left(x+1\right)^2}.$$

Ebből pedig $f'(1)=-\dfrac{13}{4}$.

30. feladat: Számoljuk ki $g'(2)$ értékét ha $f(2)=-1$, $f'(2)=2$, és $g(x)=\dfrac{2x+1}{f(x)}$.

Megoldás: A g deriváltjával kezdünk:

$$g'(x)=\left(\frac{2x+1}{f(x)}\right)'=\frac{(2x+1)'\,f(x)-(2x+1)f'(x)}{f^2(x)}=\frac{2f(x)-(2x+1)f'(x)}{f^2(x)}$$

Ebből pedig, x helyére 2 -t írva, a keresett $g'(2)$ helyettesítési értékre kapjuk, hogy

$$g'(2) = \frac{2(-1) - 5 \cdot 2}{(-1)^2} = -12.$$

31. feladat: Legyen $h(x) = \frac{f(x)+1}{g(x)-1}$. Számoljuk ki $h'(1)$ értékét, ha $f(1) = 1$, $f'(1) = 2$ és $g(1) = -2$, $g'(1) = -1$.

Megoldás: Mivel $h'(x) = \left(\frac{f(x)+1}{g(x)-1}\right)' = \frac{f'(x) \cdot (g(x)-1) - (f(x)+1) \cdot g'(x)}{(g(x)-1)^2}$, azt kapjuk, hogy

$$h'(1) = \frac{2(-3) - 2(-1)}{(-3)^2} = -\frac{4}{9}.$$

Ellenőrző kérdések:

17. kérdés: Mi az $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ függvény derivált függvénye?

$\frac{-2}{(x+1)^2}$

$\frac{2}{x^2+1}$

$\frac{2}{x^2-1}$

$\frac{2}{(x+1)^2}$ (X)

18. kérdés: Mi az $f(x) = \frac{-2}{1-\sqrt{x}}$ függvény derivált függvénye?

$-\frac{1}{\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)^2}$ (X)

$-\frac{\sqrt{x}}{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}$

$\frac{x}{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}$

$\frac{1}{\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)^2}$

19. kérdés: Mennyi $f'(0)$ értéke, ha $f(x)=\dfrac{x}{e^x+x}$?

0
1 (X)
-1
2

20. kérdés: Mennyi $g'(1)$ értéke ha $f(1)=1$, $f'(1)=2$, és $g(x)=\dfrac{f(x)}{f(x)+x}$.

$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$ (X)
$-\frac{1}{4}$
$\frac{3}{4}$

21. kérdés: Legyen $h(x)=\dfrac{f(x)+x}{g(x)+1}$. Számoljuk ki $h'(1)$ értékét, ha $f(1)=1$, $f'(1)=2$ és $g(1)=2$, $g'(1)=2$.

$\frac{5}{9}$ (X)
$\frac{4}{9}$
$-\frac{4}{9}$
$-\frac{5}{9}$

Kidolgozott feladatok:

32. feladat: Határozzuk meg az $h(t)=\left(2t-1\right)^2$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Vegyük észre, hogy $h(t)$ összetett függvény: $h(t)=g(f(t))$, ha $f(t)=2t-1$ és $g(t)=t^2$. Ezzel a választással $f'(t)=2$, $g'(t)=2t$. Ezért az összetett függvény deriválási szabály alapján

$$\begin{aligned} h'(t) &= \left(g(f(t))\right)' = g'(f(t))\cdot f'(t) = \\ &= 2\cdot f(t)\cdot 2 = 2\cdot\left(2t-1\right)\cdot 2 = 8t-4. \end{aligned}$$

33. feladat: Határozzuk meg az $h(x)=\sqrt{1-x^2}$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: $h(x)$ most is összetett függvény, hiszen $h(x)=g(f(x))$, ha $f(x)=1-x^2$, és $g(x)=\sqrt{x}$. Tudjuk, hogy $f'(x)=-2x$ és $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Így tehát

$$h'(x)=\left(g(f(x))\right)'=g'(f(x))\cdot f'(x)=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{f(x)}}\cdot\left(-2x\right)=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

34. feladat: Határozzuk meg az $h(x)=\sin\left(x^2-x\right)$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: $h(x)$ ismét $h(x)=g(f(x))$ szerkezetű összetett függvény az $f(x)=x^2-x$, $g(x)=\sin x$ választással. Mivel $f'(x)=2x-1$ és $g'(x)=\cos x$, azt kapjuk, hogy

$$h'(x)=\left(g(f(x))\right)'=g'(f(x))\cdot f'(x)=$$
$$=\cos(f(x))\cdot\left(2x-1\right)=\cos\left(x^2-x\right)\cdot\left(2x-1\right).$$

35. feladat: Határozzuk meg az $h(x)=\ln\left(x+\sqrt{x}\right)$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Most $h(x)=g(f(x))$, ha $f(x)=x+\sqrt{x}$ és $g(x)=\ln x$. De mint tudjuk $f'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{x}}$, továbbá $g'(x)=\frac{1}{x}$. Ezeket felhasználva

$$h'(x)=\left(g(f(x))\right)'=g'(f(x))\cdot f'(x)=$$
$$=\frac{1}{f(x)}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=\frac{1}{x+\sqrt{x}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right).$$

36. feladat: Határozzuk meg az $h(x)=\frac{1}{\left(x^3-\frac{2}{x}\right)^2}$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Ahogy említettük, a konstans számlálójú törteket célszerűbb összetett függvényként deriválni. Ennek érdekében átírjuk a függvényünket

$$h(x)=\frac{1}{\left(x^3-\frac{2}{x}\right)^2}=\left(x^3-\frac{2}{x}\right)^{-2}$$

alakba. Innen leolvasható, hogy $h(x)=g(f(x))$ szerkezetű összetett függvény az $f(x)=x^3-\frac{2}{x}$, $g(x)=x^{-2}$ választással. Ekkor $f'(x)=3x^2+\frac{2}{x^2}$, és $g'(x)=-2\cdot x^{-3}=-\frac{2}{x^3}$.
Ezek alapján

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) =$$
$$= -\frac{2}{(f(x))^3} \cdot \left(3x^2 + \frac{2}{x^2}\right) =$$
$$= -\frac{2}{\left(x^3 - \frac{2}{x}\right)^3} \cdot \left(3x^2 + \frac{2}{x^2}\right).$$

37. feladat: Legyen $h(x) = \left(x^2 - 2x\right)^{12}$. Milyen x-re lesz $h'(x) = 0$?

Megoldás: Az összetett függvény deriválási szabályát addig célszerű gyakorolni, hogy a kompozíció tényezőinek felírására már ne is legyen szükség. Most például a következőt kapjuk:

$$h'(x) = \left(\left(x^2 - 2x\right)^{12}\right)' = 12\left(x^2 - 2x\right)^{11} \cdot \left(x^2 - 2x\right)' =$$
$$= 12\left(x^2 - 2x\right)^{11} \cdot (2x - 2).$$

Most még kicsit átalakítjuk $h'(x)$ képletét, hogy a gyökeit könnyen leolvashassuk.

$$h'(x) = 12\left(x^2 - 2x\right)^{11} \cdot (2x - 2) =$$
$$12\left(x(x - 2)\right)^{11} \cdot 2 \cdot (x - 1) =$$
$$= 24x^{11}(x - 2)^{11}(x - 1).$$

Mivel egy szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője az, azt kapjuk, hogy $h'(x) = 0$, ha $x = 0$, vagy $x = 2$, vagy $x = 1$. Mivel a h függvény mindenütt értelmezve van, mind a három szám megoldás. (A nulla és a kettő tizenegyszeres gyök, az egy egyszeres.)

38. feladat: Legyen $h(x) = \ln^2\left(x^2 - 1\right)$. Milyen x-re lesz $h'(x) = 0$?

Megoldás: Kezdjük a derivált függvénnyel. Mivel

$$h'(x) = 2\ln\left(x^2 - 1\right) \cdot \left(\ln(x^2 - 1)\right)' =$$
$$= 2\ln\left(x^2 - 1\right) \cdot \frac{1}{x^2 - 1} \cdot \left(x^2 - 1\right)' = 2\ln\left(x^2 - 1\right) \cdot \frac{1}{x^2 - 1} \cdot 2x = 4x\frac{\ln\left(x^2 - 1\right)}{x^2 - 1}.$$

Tudjuk, hogy $\ln 1 = 0$, így ennek a szorzatnak három gyöke van: a $-\sqrt{2}$, a nulla és a $\sqrt{2}$. De azt is tudjuk, hogy a derivált függvény értelmezési tartománya, a definíció alapján, az eredeti függvény értelmezési tartományának részhalmaza. Akkor is, ha a derivált képletének lehetséges legbővebb értelmezési tartománya ennél bővebb.
Mivel a h függvény nincs értelmezve a nullában, ezért a feladat kérdésére az a válasz, hogy $h'(x) = 0$, ha $x = \pm\sqrt{2}$.

39. feladat: Határozzuk meg az $s(x) = \sqrt{\ln\left(1 - 2x^3\right)}$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Ez a függvény egy háromszorosan összetett függvény: $s(x)=h(g(f(x)))$, ha $h(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\ln x$, és $f(x)=1-x^3$. Ezeknek a deriváltja rendre:

$$h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},\qquad g'(x)=\frac{1}{x},\qquad f'(x)=-3x^2.$$

A láncszabály alapján $s'(x)=h'(g(f(x)))\cdot g'(f(x))\cdot f'(x)$. Vegyük azt is figyelembe, hogy, leolvasva az s képletéről, $g(f(x))=\ln\left(1-x^3\right)$. Ezek alapján:

$$\begin{aligned}s'(x)&=h'(g(f(x)))\cdot g'(f(x))\cdot f'(x)=\\&=\frac{1}{2\sqrt{g(f(x))}}\cdot\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=\\&=\frac{1}{2\sqrt{\ln\left(1-x^3\right)}}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot\left(-3x^2\right).\end{aligned}$$

Figyeljük meg, hogy az utolsó képletben zárójelbe tettük a $-3x^2$ tényezőt. Ha ezt nem tettük volna, és a pontot sem írtuk volna ki, amit amúgy nem is kötelező, a képlet hibás lenne.

40. feladat: Határozzuk meg az $s(x)=\sin\left(\sqrt{e^x-x}\right)$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Most is egy háromszorosan összetett függvénnyel van dolgunk, persze újra a láncszabályt fogjuk alkalmazni. Mivel $\left(\sin x\right)'=\cos x$, $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, és végül $\left(e^x-x\right)'=e^x-1$, kapjuk, hogy

$$s'(x)=\cos\left(\sqrt{e^x-x}\right)\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{e^x-x}}\right)\cdot\left(e^x-1\right).$$

41. feladat: Legyen $f(x)=-2x^3+x^2-6x-3$. Határozzuk meg $f''(x)$-et.

Megoldás: Először meghatározzuk az $f'(x)$ derivált függvényt.

$$\begin{aligned}f'(x)&=\left(-2x^3+x^2-6x-3\right)'=\\&=-6x^2+2x-6.\end{aligned}$$

Ezt felhasználva

$$\begin{aligned}f''(x)&=\left(f'(x)\right)'=\\&=\left(-6x^2+2x-6\right)'=\\&=-12x+2.\end{aligned}$$

42. feladat: Legyen $f(x)=x^2\cos(2x)$. Határozzuk meg $f''(x)$-et.

Megoldás: Most, a szorzat deriválási szabályát alkalmazva,

$$f'(x) = \left(x^2 \cos(2x)\right)' =$$

$$= \left(x^2\right)' \cos(2x) + x^2 \left(\cos(2x)\right)' =$$

$$= 2x\cos(2x) + x^2\left(-\sin(2x)\cdot 2\right) =$$

$$= 2x\cos(2x) - 2x^2\sin(2x).$$

Ez alapján, még kétszer alkalmazva a szorzat deriválási szabályát, és elvégezve a lehetséges összevonásokat

$$f''(x) = \left(2x\cos(2x) - 2x^2\sin(2x)\right)' =$$

$$= (2x)'\cos(2x) + 2x\left(\cos(2x)\right)' - \left[\left(2x^2\right)'\sin(2x) + 2x^2\left(\sin(2x)\right)'\right] =$$

$$= 2\cos(2x) + 2x\left(-\sin(2x)\cdot 2\right) - \left[4x\sin(2x) + 2x^2\cos(2x)\cdot 2\right] =$$

$$= 2\cos(2x) - 4x\sin(2x) - 4x\sin(2x) - 4x^2\cos(2x) =$$

$$= \left(2 - 4x^2\right)\cos(2x) - 8x\sin(2x).$$

Ellenőrző kérdések:

22. kérdés: Mi az $h(x) = (1-3x)^3$ függvény derivált függvénye?

$-9(1-3x)^2$ (X)

$-9(1-3x)^3$

$9(1-3x)^2$

$-9(1-3x)$

23. kérdés: Mi az $h(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ függvény derivált függvénye?

$\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$

$\dfrac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x}}$

$\dfrac{x-1}{2\sqrt{x^2-2x}}$

$\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$ (X)

24. kérdés: Mi az $h(x)=\cos(1-\sin x)$ függvény derivált függvénye?

$(1-\cos x)\sin(x-\sin x)$

$(1-\cos x)\sin(x+\sin x)$

$-(1-\cos x)\sin(x-\sin x)$ (X)

$(1+\cos x)\sin(x-\sin x)$

25. kérdés: Mi az $h(x)=\ln\left(\frac{1}{x}-x\right)$ függvény derivált függvénye?

$\frac{-\frac{1}{x^2}-1}{\frac{1}{x}-x}$ (X)

$\frac{\frac{1}{x^2}-1}{\frac{1}{x}-x}$

$\frac{-\left(\frac{1}{x^2}-1\right)}{\frac{1}{x}-x}$

$\frac{-\left(-\frac{1}{x^2}-1\right)}{\frac{1}{x}-x}$

26. kérdés: Mi az $h(x)=\frac{-1}{xe^x-x^2}$ függvény derivált függvénye?

$\frac{-e^x-xe^x+2x}{\left(xe^x-x^2\right)^2}$ (X)

$-\frac{e^x-xe^x+2x}{\left(xe^x-x^2\right)^2}$

$$\frac{-e^x - xe^x - 2x}{\left(xe^x - x^2\right)^2}$$

$$\frac{-xe^x + 2x}{\left(xe^x - x^2\right)^2}$$

27. kérdés: Legyen $h(x) = \left(2x^3 + 3x^2\right)^3$. Milyen x-re lesz $h'(x) = 0$?

$-1,\ 0,\ \frac{3}{2}$

$-\frac{3}{2},\ -1,\ 0$ (X)

$0,\ 1,\ \frac{3}{2}$

$-\frac{3}{2},\ 0,\ 1$

28. kérdés: Legyen $h(x) = \frac{2x}{x^2+1}$. Milyen x-re lesz $h'(x) = 0$?

$-1,\ 1$ (X)

$-1,\ 0$

$0,\ 1$

$-1,\ 0,\ 1$

29. kérdés: Mi az $s(x) = \cos^2\left(x^2\right)$ függvény derivált függvénye?

$-4\cos\left(x^2\right)\sin^2\left(x\right)\cdot x$

$-4\cos^2\left(x\right)\sin\left(x^2\right)\cdot x$

$-4\cos\left(x^2\right)\sin\left(x^2\right)\cdot x$ (X)

$-2\cos\left(x^2\right)\sin\left(x^2\right)\cdot x$

30. kérdés: Mi az $s(x)=e^{\sqrt{x^2-1}}$ függvény derivált függvénye?

$$\frac{e^{\sqrt{x^2-1}}}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{x^2e^{\sqrt{x^2-1}}}{2\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{xe^{\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{x^2-1}}$$ (X)

$$\frac{xe^{\sqrt{x^2-1}}}{2\sqrt{x^2-1}}$$

31. kérdés: Legyen $f(x)=xe^{-x}$. Mi f második deriváltja?

$\left(x^2+4x-2\right)e^{-x}$

$\left(x^2-4x+2\right)e^{-x}$ (X)

$\left(x^2-4x-2\right)e^{-x}$

$\left(x^2+4x+2\right)e^{-x}$

32. kérdés: Legyen $f(x)=\left(x^2+1\right)\cdot\sqrt[4]{x^3}$. Mi f második deriváltja?

$\frac{1}{16}\left(77x^2-3\right)\cdot x^{-\frac{5}{4}}$ (X)

$16\left(77x^2-3\right)\cdot x^{-\frac{5}{4}}$

$\frac{1}{16}\left(77x^2+3\right)\cdot x^{-\frac{5}{4}}$

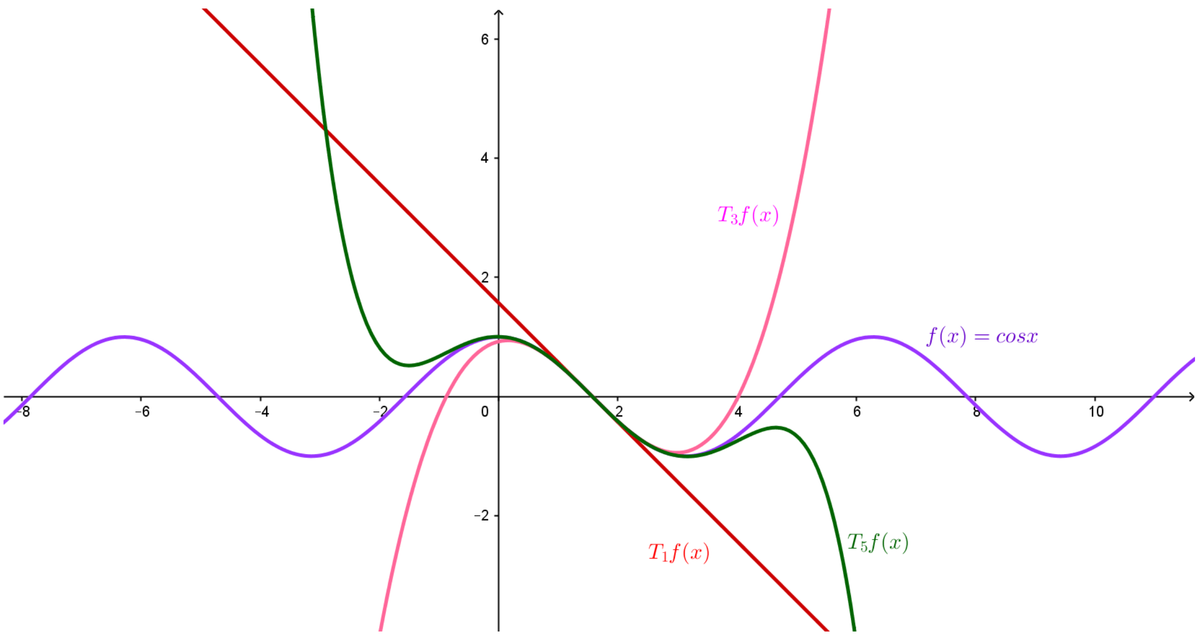
$\frac{1}{16}\left(77x^2-3\right)\cdot x^{\frac{5}{4}}$

3. Differenciálszámítás

3.2. Taylor polinomok és a L'Hospital-szabály

Tanulási cél: Megismerni a Taylor- és Maclaurin polinom fogalmát, és ezek alkalmazását közelítő értékek kiszámolására, valamint egy újabb, hatékony határértékszámítási módszer, a L'Hospital-szabály megismerése, és alkalmazásának elsajátítása egyszerűbb esetekben.

Elméleti összefoglaló:
Sokszor találkozunk a gyakorlatban olyan bonyolult függvényekkel, melyekkel a számolás nehézkes. Ilyenkor érdemes a bonyolult függvényt egyszerűbbel közelíteni, amely valamilyen értelemben jól közelíti az eredetit. Célszerűnek tűnik a hatványfüggvényekkel való közelítés, mivel azokkal könnyű dolgozni.
Egy függvény lineáris közelítésére egy adott pont környezetében már láttunk példát egy függvény adott pontjába húzott érintő egyenese kapcsán.
A lineáris közelítésnél (érintő egyenesnél) jobb közelítést nyerhetünk egy adott pont környezetében magasabbfokú polinomokkal. Erre mutat példát a következő ábra, melyen a $\cos x$ függvényt közelítettük első-, harmad-, ötödfokú polinommal a $\frac{\pi}{2}$ környezetében.



1. ábra: A $\cos x$ függvény közelítése első-, harmad-, ötödfokú polinommal a $\frac{\pi}{2}$ környezetében

Definíció: Ha az f függvény deriváltja folytonos az $a \in D_f$ helyen, akkor azt mondjuk, hogy f az a helyen **folytonosan differenciálható**.

Definíció: Legyen az f olyan függvény, mely értelmezett az $a \in \mathbb{R}$ rögzített hely egy környezetében, s ott n-szer folytonosan differenciálható. Ekkor a

$$T_n f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)\cdot(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)\cdot(x-a)^2 + . \quad . \quad . + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)\cdot(x-a)^n$$

polinomot az f függvény a helyen vett n -edfokú **Taylor-polinom**jának nevezzük.

(A nulladik derivált magát a függvényt jelenti, azaz $f^{(0)}(a) = f(a)$, és $0! = 1$.)

Észrevehetjük, hogy az elsőfokú Taylor-polinom pontosan az f függvény a helyen vett érintő egyenesének egyenletét adja: $T_1 f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)\cdot(x-a) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a)$. (Az érintő egyenes egyenletét lásd Matematika 1. tárgy Differenciálszámítás bevezetése című leckében.)

A Taylor-polinom közelíti az eredeti függvényt. Minél közelebb van x az a -hoz, és minél magasabb a polinom rendje, a közelítés általában annál jobb.

Ha $a = 0$, azaz a függvényt $a = 0$ környezetében közelítjük, akkor **Maclaurin-polinom**ról beszélünk.

$$M_n f(x) = f(0) + \frac{1}{1!} f'(0)\cdot(x-0) + \frac{1}{2!} f''(0)\cdot(x-0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\cdot(x-0)^n =$$

$$= f(0) + \frac{1}{1!} f'(0)\cdot x + \frac{1}{2!} f''(0)\cdot x^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\cdot x^n$$

Kidolgozott feladatok:

1. feladat: Írjuk fel az $f(x) = e^{-2x}$ függvény másodfokú Maclaurin-polinomját!

Megoldás: A megoldásban induljunk el a Maclaurin-polinom definíciójából, miszerint egy függvény n -edfokú Maclaurin-polinomjának nevezzük, a 0 helyen vett n -edfokú Taylor-polinomot, mely az alábbi módon írható fel.

$$M_n f(x) = f(0) + \frac{1}{1!} f'(0)\cdot x + \frac{1}{2!} f''(0)\cdot x^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\cdot x^n$$

Mivel feladatunkban másodfokú polinomot kell felírnunk, így $n = 2$, s így a polinomban csupán három tag fog szerepelni.

$$M_2 f(x) = f(0) + \frac{1}{1!} f'(0)\cdot x + \frac{1}{2!} f''(0)\cdot x^2$$

Természetesen a konkrét Maclaurin-polinom felírásához meg kell határoznunk a képletben szereplő $f(0)$, $f'(0)$ és $f''(0)$ értékeket.

Elsőként helyettesítsük a függvénybe a 0 -t.

$$f(0) = e^{-2\cdot 0} = e^0 = 1$$

Ezután állítsuk elő a függvény deriváltját, és határozzuk meg a derivált helyettesítési értékét is a 0 helyen.

$$f'(x) = e^{-2x}\cdot(-2) = -2e^{-2x}$$

A deriválás során ne feledkezzünk el arról, hogy összetett függvényt deriválunk, így a külső függvény deriválása után szoroznunk kell még a belső függvény deriváltjával is.

Hajtsuk végre a 0 behelyettesítését.

$$f'(0) = -2e^{-2\cdot 0} = -2e^{0} = -2$$

Állítsuk elő a második deriváltat.

$$f''(x) = -2e^{-2x} \cdot (-2) = 4e^{-2x}$$

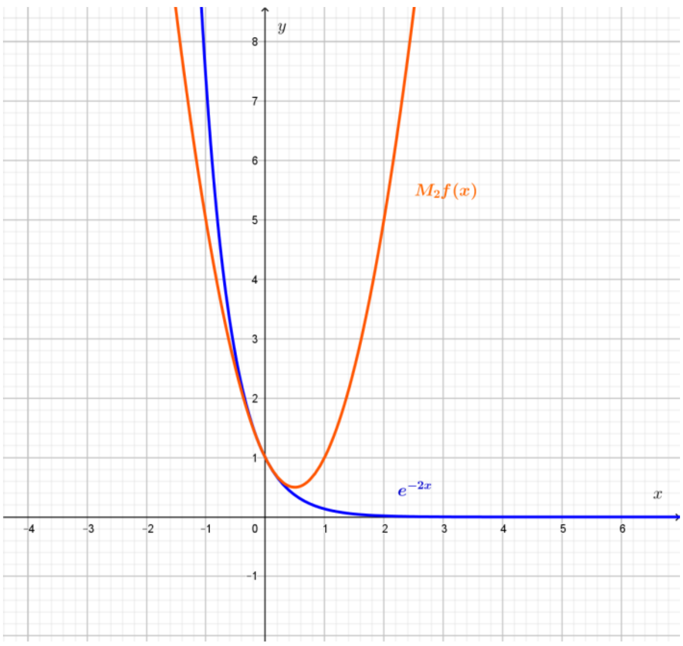
Helyettesítsük ebbe is a 0 -t.

$$f''(0) = 4e^{-2\cdot 0} = 4e^{0} = 4$$

Utolsó lépésként helyettesítsük be a meghatározott $f(0)$, $f'(0)$ és $f''(0)$ értékeket a másodfokú Maclaurin-polinom képletébe. A behelyettesítés után határozzuk meg a faktoriálisok értékét, és egy-egy tagban szorozva a konstansokat, hozzuk egyszerűbb alakra a polinomot.

$$M_2 f(x) = 1 + \frac{1}{1!} \cdot (-2) \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot 4 \cdot x^2 = 1 + \frac{1}{1} \cdot (-2) \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot x^2 =$$
$$= 1 - 2x + 2x^2$$

Az alábbi ábra jól szemlélteti, hogy milyen módon közelíti az eredeti függvényt a számolt másodfokú Maclaurin polinom.



2. ábra: Az $f(x) = e^{-2x}$ függvény másodfokú Maclaurin-polinommal való közelítése

2. feladat: Írjuk fel az $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ függvény másodfokú Maclaurin-polinomját!

Megoldás: Itt is elindulhatunk a másodfokú Maclaurin-polinom definíciójából.

$$M_2 f(x) = f(0) + \frac{1}{1!} f'(0) \cdot x + \frac{1}{2!} f''(0) \cdot x^2$$

Most is elő kell állítanunk az $f(0)$, $f'(0)$ és $f''(0)$ értékeket.

Helyettesítsük be elsőként a függvénybe a 0-t.

$$f(0) = \sqrt[3]{0+1} = 1$$

Ezután állítsuk elő a függvény deriváltját. A deriválás előtt célszerű átalakítani a függvényt. A gyök helyett írjunk törtkitevős hatványt.

$$f(x) = \sqrt[3]{x+1} = (x+1)^{\frac{1}{3}}$$

Ebből az alakból már egyszerű a deriválás.

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}$$

Helyettesítsük be a deriváltba a 0-t.

$$f'(0) = \frac{1}{3}(0+1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}$$

Állítsuk elő a második deriváltat is.

$$f''(x) = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)(x+1)^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9}(x+1)^{-\frac{5}{3}}$$

Határozzuk meg a második derivált 0 helyen vett helyettesítési értékét.

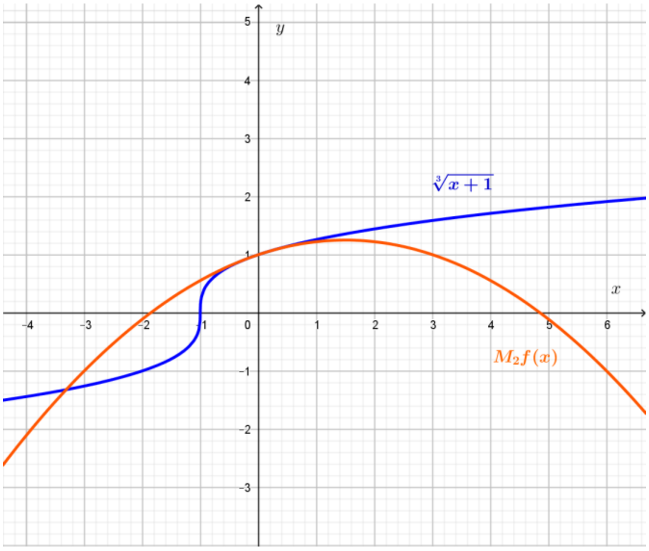
$$f''(0) = -\frac{2}{9}(0+1)^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9}$$

Végül a meghatározott $f(0)$, $f'(0)$ és $f''(0)$ értékeket helyettesítsük be a másodfokú Maclaurin-polinom képletébe. A behelyettesítés után hozzuk egyszerűbb alakra a polinomban az együtthatókat.

$$M_2 f(x) = 1 + \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{3} \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot \left(-\frac{2}{9}\right) \cdot x^2 = 1 + \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{3} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{9}\right) \cdot x^2 =$$

$$= 1 + \frac{1}{3} x - \frac{1}{9} x^2$$

A másodfokú Maclaurin polinommal való közelítést szemlélteti a következő ábra.



3. ábra: Az $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$ függvény másodfokú Maclaurin-polinommal való közelítése

3. feladat: Határozzuk meg az $f(x)=\dfrac{1}{3-2x}$ függvény harmadfokú Maclaurin-polinomját!

Megoldás: Induljunk ki a Maclaurin-polinom definíciójából.

$$M_3f(x)=f(0)+\frac{1}{1!}f'(0)\cdot x+\frac{1}{2!}f''(0)\cdot x^2+\frac{1}{3!}f'''(0)\cdot x^3$$

Állítsuk elő a szükséges deriváltakat, és határozzuk meg a függvény, valamint a deriváltak értékét a nulla helyen. A deriválások egyszerűbbek ha a függvényt átalakítjuk, mert akkor tört helyett összetett függvényünk lesz.

$$f(x)=\frac{1}{3-2x}=(3-2x)^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad f(0)=3^{-1}=\frac{1}{3}$$

$$f'(x)=(-1)\cdot(3-2x)^{-2}\cdot(-2)=2\cdot(3-2x)^{-2} \qquad \Rightarrow \qquad f'(0)=2\cdot 3^{-2}=\frac{2}{9}$$

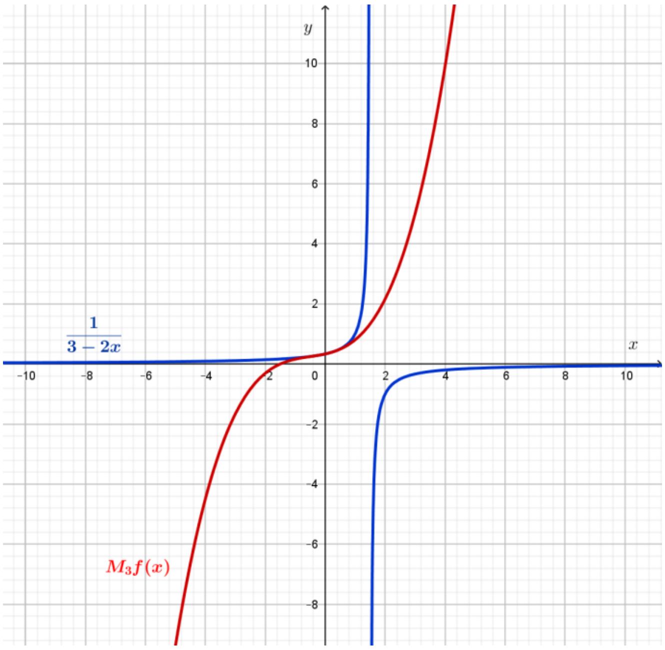
$$f''(x)=(-4)\cdot(3-2x)^{-3}\cdot(-2)=8\cdot(3-2x)^{-3} \qquad \Rightarrow \qquad f''(0)=8\cdot 3^{-3}=\frac{8}{27}$$

$$f'''(x)=(-24)\cdot(3-2x)^{-4}\cdot(-2)=48\cdot(3-2x)^{-4} \qquad \Rightarrow \qquad f'''(0)=48\cdot 3^{-4}=\frac{48}{81}$$

A kapott értékeket helyettesítsük be a polinomba.

$$M_3f(x)=\frac{1}{3}+\frac{1}{1!}\cdot\frac{2}{9}x+\frac{1}{2!}\cdot\frac{8}{27}x^2+\frac{1}{3!}\cdot\frac{48}{81}x^3=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}x+\frac{4}{27}x^2+\frac{8}{81}x^3$$

A közelítést a következő ábra szemlélteti.



4. ábra: Az $f(x)=\dfrac{1}{3-2x}$ függvény harmadfokú Maclaurin-polinommal való közelítése

4. feladat: Írjuk fel az $f(x)=\sin 2x$ függvény $a=\dfrac{\pi}{4}$ helyen vett másodfokú Taylor-polinomját!

Megoldás: A definícióból indulunk el, mely szerint az $f(x)$ függvény a helyen vett n-edfokú Taylor-polinomja a következő:

$$T_n f(x)=f(a)+\frac{1}{1!}f'(a)\cdot(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)\cdot(x-a)^2+\dots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)\cdot(x-a)^n.$$

Mivel másodfokú polinom a kérdés, így $n=2$.

$$T_2 f(x)=f(a)+\frac{1}{1!}f'(a)\cdot(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)\cdot(x-a)^2$$

Annyiban változik tehát csak a dolgunk az előzőekhez képest, hogy nem a 0 helyen kell meghatároznunk a függvény, valamint első és második deriváltjának értékét, hanem az $a=\dfrac{\pi}{4}$ helyen.

Helyettesítsünk először a függvénybe.

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$$

Állítsuk elő a függvény deriváltját. Figyeljünk oda, mert összetett függvényről van szó, ne felejtsünk el szorozni a belső függvény deriváltjával.

$$f'(x)=\cos 2x\cdot 2=2\cos 2x$$

Helyettesítsünk most a deriváltba is.

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\frac{\pi}{2}=0$$

Ezután deriváljunk még egyszer.

$$f''(x)=2(-\sin 2x)\cdot 2=-4\sin 2x$$

A második deriváltba is helyettesítsük be az $a=\frac{\pi}{4}$ értéket.

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-4\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)=-4\sin\frac{\pi}{2}=-4$$

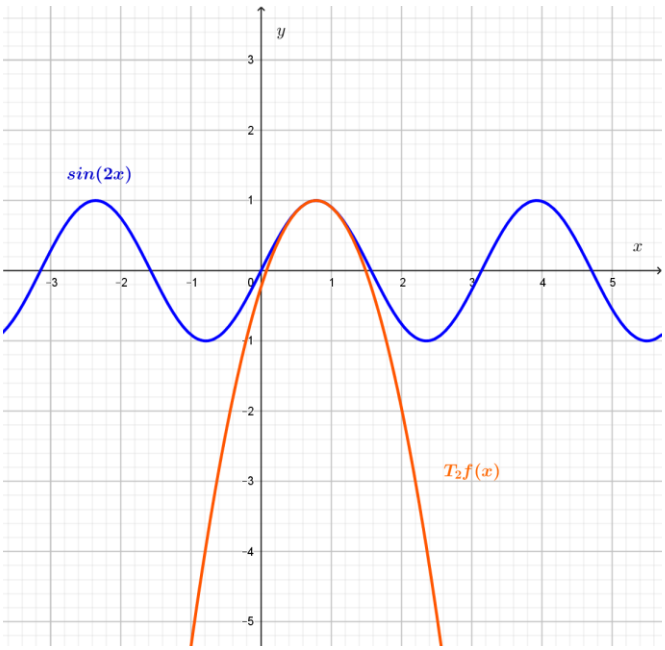
Az előzőekben meghatározott $f(a)$, $f'(a)$ és $f''(a)$ értékeket írjuk be a Taylor-polinom képletébe, s egyben helyettesítsünk a helyére is.

$$T_2 f(x)=1+\frac{1}{1!}\cdot 0\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2!}\cdot(-4)\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2$$

Végül hozzuk egyszerűbb alakra a polinom együtthatóit.

$$T_2 f(x)=1+\frac{1}{2}\cdot(-4)\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2=1-2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2$$

A szemléltetést a következő ábra segíti.



5. ábra: Az $f(x)=\sin 2x$ függvény másodfokú Taylor-polinommal való közelítése az $a=\frac{\pi}{4}$ környezetében

5. feladat: Írjuk fel az $f(x)=\ln 3x$ függvény $a=\frac{1}{3}$ helyen vett másodfokú Taylor-polinomját!

Megoldás: Most is a másodfokú Taylor-polinom definícióját használjuk fel.

$$T_2 f(x)= f(a)+\frac{1}{1!}f'(a)\cdot(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)\cdot(x-a)^2$$

Határozzuk meg a polinomban szereplő, egyelőre ismeretlen $f(a)$, $f'(a)$ és $f''(a)$ értékeket.

Helyettesítsük elsőként a függvénybe az $a=\frac{1}{3}$-ot.

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=\ln\left(3\cdot\frac{1}{3}\right)=\ln 1=0$$

Deriváljuk a függvényt.

$$f'(x)=\frac{1}{3x}\cdot 3=\frac{1}{x}$$

Helyettesítsünk be a deriváltba is a helyére $\frac{1}{3}$-ot.

$$f'\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{\frac{1}{3}}=3$$

Állítsuk elő a második deriváltat.

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}$$

Helyettesítsük a második deriváltba is az $a=\frac{1}{3}$-ot.

$$f''(x)=-\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}=-9$$

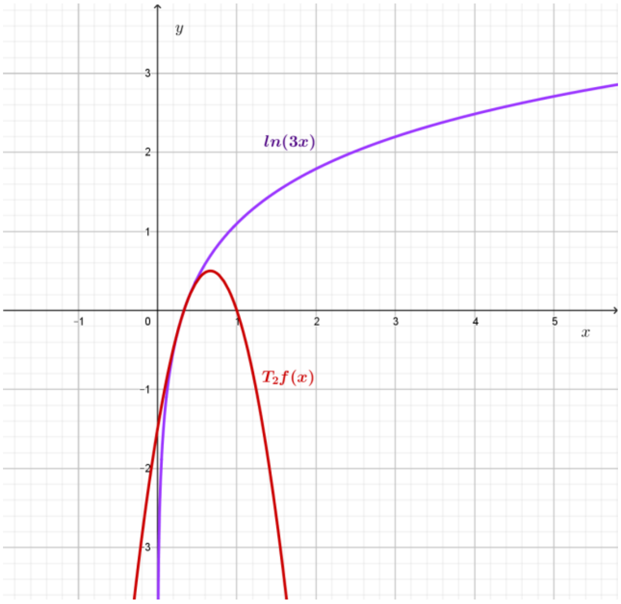
Majd a Taylor-polinom képletében helyettesítsünk a, $f(a)$, $f'(a)$ és $f''(a)$ helyére.

$$T_2 f(x)=0+\frac{1}{1!}\cdot 3\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2!}\cdot(-9)\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right)^2$$

Végül írjuk egyszerűbb alakban a polinom együtthatóit.

$$T_2 f(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right) - \frac{9}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right)^2$$

Jelen esetben a Taylor polinommal való közelítést a következő ábra szemlélteti.



6. ábra: Az $f(x) = \ln 3x$ függvény másodfokú Taylor-polinommal való közelítése az $a = \dfrac{1}{3}$ környezetében

6. feladat: Írjuk fel az $f(x) = x^3 - 5x^2 + x + 20$ függvény $a = 3$ hely körüli harmadfokú Taylor-polinomját!

Megoldás: Induljunk ki a Taylor-polinom definíciójából, eszerint

$$T_3 f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a) \cdot (x-a) + \frac{1}{2!} f''(a) \cdot (x-a)^2 + \frac{1}{3!} f'''(a) \cdot (x-a)^3$$

Ebben a sorban kell most a helyére 3-at helyettesítenünk.

$$T_3 f(x) = f(3) + \frac{1}{1!} f'(3) \cdot (x-3) + \frac{1}{2!} f''(3) \cdot (x-3)^2 + \frac{1}{3!} f'''(3) \cdot (x-3)^3$$

Ehhez először az $f(3)$, $f'(3)$, $f''(3)$, $f'''(3)$ értékeket kell meghatároznunk és behelyettesítenünk.

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + x + 20 \quad \Rightarrow \quad f(3) = 3^3 - 5 \cdot 3^2 + 3 + 20 = 5$$

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 1 \quad \Rightarrow \quad f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 10 \cdot 3 + 1 = -2$$

$$f''(x) = 6x - 10 \quad \Rightarrow \quad f''(3) = 6 \cdot 3 - 10 = 8$$

$$f'''(x) = 6 \quad \Rightarrow \quad f'''(3) = 6$$

Tehát

$$T_3 f(x) = 5 + \frac{1}{1!}(-2)(x-3) + \frac{1}{2!}8(x-3)^2 + \frac{1}{3!}6(x-3)^3 = 5 - 2(x-3) + 4(x-3)^2 + (x-3)^3$$

Ha elvégeznénk a hatványozásokat és összevonnánk az azonos fokszámú tagokat, természetesen visszakapnánk az eredeti polinomot, ezzel tudnánk ellenőrizni a megoldást.

7. feladat: Melyik az a harmadfokú polinom, melyre a következők igazak: $p(0)=3, \quad p'(0)=-1, \quad p''(0)=-6, \quad p'''(0)=12$?

Megoldás: Mivel a függvény és deriváltjainak értéke a nulla helyen adott és a polinom harmadfokú, ezért a harmadfokú Maclaurin-polinom felírásából indulunk ki.

$$p(x) = p(0) + \frac{1}{1!}p'(0)\cdot x + \frac{1}{2!}p''(0)\cdot x^2 + \frac{1}{3!}p'''(0)\cdot x^3.$$

Nincs más dolgunk, mint a függvény és a derivált megadott értékeit behelyettesíteni.

$$p(x) = 3 + \frac{1}{1!}(-1)x + \frac{1}{2!}(-6)x^2 + \frac{1}{3!}12x^3 = 3 - x - 3x^2 + 2x^3$$

Ha a tagokat a szokott sorrendben írjuk, akkor $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 3$.

8. feladat: Hogyan határozhatjuk meg $\frac{1}{\sqrt[10]{e}}$ közelítő értékét, ha csak négy alapműveletes számológépünk van?

Megoldás: Mivel $\frac{1}{\sqrt[10]{e}} = e^{-0.1}$, ezért a feladatot úgy is megfogalmazhatjuk, hogy adjuk meg közelítőleg az $f(x) = e^x$ függvény $x_0 = -0.1$ helyen vett helyettesítési értékét. Mivel a -0.1 "közel van" a nullához, ezért az $f(x)$ függvény egy tetszőleges fokszámú Maclaurin-polinomjának segítségével határozhatjuk meg a közelítő értéket. Vegyük ezen függvény másodfokú Maclaurin-polinomját, melybe majd x helyére a megadott x_0 értéket kell behelyettesítenünk.

$$f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f(0) = e^0 = 1$$

$$f'(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(0) = e^0 = 1$$

$$f''(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f''(0) = e^0 = 1$$

Ebből

$$M_2 f(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2$$

$$e^{-0.1} \approx 1 + \frac{1}{1!}(-0.1) + \frac{1}{2!}(-0.1)^2 = 1 - 0.1 + 0.005 = 0.905.$$

Minél minél magasabbfokú polinomot veszünk figyelembe, a közelítő érték annál pontosabb lesz.

Ha például a harmadfokú Maclaurin-polinomba helyettesítünk, akkor

$$e^{-0.1} \approx 1 + \frac{1}{1!}(-0.1) + \frac{1}{2!}(-0.1)^2 + \frac{1}{3!}(-0.1)^3 = 1 - 0.1 + 0.005 - 0.00016 = 0.9049$$

Ha a negyedfokú polinomba, akkor

$$e^{-0.1} \approx 1 + \frac{1}{1!}(-0.1) + \frac{1}{2!}(-0.1)^2 + \frac{1}{3!}(-0.1)^3 + \frac{1}{4!}(-0.1)^4 =$$

$$= 1 - 0.1 + 0.005 - 0.0001\dot{6} + 0.0000041\dot{6} = 0.9048375.$$

Ha nem csak négy alapműveletes számológépünk van, akkor egy lépésben kaphatunk közelítő értéket, s így $e^{-0.1} \approx 0.904837418$. Amint látható a negyedfokú polinomból kapott érték már 6 tizedesjegyre pontos. Ha ennél is pontosabb értékre van szükség, további tagokat figyelembe véve tetszőleges pontosság érhető el.

9. feladat: Adjunk közelítést $\cos 0.1$-re , ha csak négy alapműveletes számológépünk van.
Megoldás: A feladatot úgy is megfogalmazhatjuk, hogy adjuk meg közelítőleg az $f(x)=\cos x$ függvény $x_0=0.1$ helyen vett helyettesítési értékét. Mivel a 0.1 "közel van" a nullához, ezért az $f(x)$ függvény egy tetszőleges fokszámú Maclaurin-polinomjának segítségével határozhatjuk meg a közelítő értéket.

$$f(x)=\cos x \quad\Rightarrow\quad f(0)=\cos 0=1$$
$$f'(x)=-\sin x \quad\Rightarrow\quad f'(0)=-\sin 0=0$$
$$f''(x)=-\cos x \quad\Rightarrow\quad f''(0)=-\cos 0=-1$$

Ebből

$$M_2 f(x)=1+\frac{0}{1!}x+\frac{-1}{2!}x^2=1-\frac{1}{2}x^2$$

$$\cos 0.1\approx 1-\frac{1}{2}(0.1)^2=0.99500$$

Ha nem csak négy alapműveletes számológépünk van, akkor egy lépésben kaphatunk közelítő értéket, s így $\cos 0.1\approx 0.995004$. Amint látható a másodfokú polinomból kapott érték már 5 tizedesjegyre pontos.

Ellenőrző kérdések:

1. kérdés: Melyik az $f(x)=\dfrac{1}{5-2x}$ függvény harmadfokú Maclaurin-polinomja?

$\frac{1}{5}+\frac{2}{25}x+\frac{4}{125}x^2+\frac{8}{625}x^3$ (X)

$\frac{1}{5}-\frac{2}{25}x+\frac{4}{125}x^2-\frac{8}{625}x^3$

$\frac{1}{5}+\frac{2}{25}x+\frac{4}{125}x^2+\frac{16}{625}x^3$

$\frac{1}{5}-\frac{2}{25}x+\frac{4}{125}x^2-\frac{16}{625}x^3$

2. kérdés: Melyik az $f(x)=\sin^2 x-\cos^2 x$ negyedfokú Maclaurin-polinomja?

$1-2x^2+\frac{1}{3}x^4$

$-1+2x^2-\frac{1}{3}x^4$

$1-2x^2+\frac{2}{3}x^4$

$-1+2x^2-\frac{2}{3}x^4$ (X)

3. kérdés: Az alábbiak közül melyik az $f(x)=\cos^2 x$ negyedfokú Maclaurin-polinomja?

$1-x^2+\frac{1}{3}x^4$

$1-2x^2+\frac{1}{3}x^4$

$1-x^2+\frac{2}{3}x^4$

$1-2x^2+\frac{2}{3}x^4$ (X)

4. kérdés: Az alábbi függvények közül melyik az $f(x)=2x^3-11x^2+17x-2$ függvény $a=2$ hely körüli harmadfokú Taylor-polinomja?

$f(x)=4-(x-2)+3(x-2)^2+2(x-2)^3$

$f(x)=4-3(x-2)+(x-2)^2+2(x-2)^3$ (X)

$f(x)=2-3(x-2)+4(x-2)^2+2(x-2)^3$

$f(x)=2-4(x-2)+3(x-2)^2+2(x-2)^3$

5. kérdés: Melyik az a harmadfokú $p(x)$ polinom, melyre a következők igazak: $p(0)=5,\quad p'(0)=-3,\quad p''(0)=4,\quad p'''(0)=18$?

$p(x)=5x^3-3x^2+4x+18$

$p(x)=5x^3-3x^2+2x+3$

$p(x)=18x^3+4x^2-3x+5$

$p(x)=3x^3+2x^2-3x+5$ (X)

6. kérdés: Ha $\sqrt{e}$ közelítő értékét az $f(x)=e^x$ függvény harmadfokú Maclaurin-polinomjából számoljuk, akkor mit kapunk?

$1.6443\dot{6}$

$1.6458\dot{3}$ (X)

$1.6465\dot{3}$

$1.6481\dot{6}$

7. kérdés: Ha $\sin 0.1$ értékét az $f(x)=\sin x$ harmadfokú Maclaurin-polinomjából számoljuk, akkor mit kapunk?

$0.1001\dot{6}$

$0.0998\dot{3}$ (X)

0.0017453283

$-0.1001\dot{6}$

Elméleti összefoglaló:

Korábban foglalkoztunk már határértékszámítási feladatokkal. Gyakran találkozhatunk olyan határértékszámítási problémákkal, melyek nem oldhatóak meg a korábban tanult módszerekkel, így például a $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\infty}{\infty}$ típusú határértékek, valamint az ezekre visszavezethetőek. Ezen típusok meghatározására ad hatékonyt módszert a L'Hospital-szabály.

Tegyük fel, hogy a

$\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ határérték $\dfrac{\infty}{\infty}$ vagy $\dfrac{0}{0}$ típusú,

és c egy környezetében, esetleg c-től eltekintve, f is és g is differenciálható, továbbá $g(x)\neq 0$ és $g'(x)\neq 0$.

Ha a $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték létezik és véges, akkor az is teljesül, hogy

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

A c jelölhet egy véges értéket, valamint mindkét végtelent is.

A tétel rövid és pontatlan megfogalmazása: a tört limesze a deriváltak hányadosának a limeszével egyenlő.
Fontos, hogy csak határozatlan alakú határértékek kiszámolására próbáljuk a tételt alkalmazni, különben hibás eredményt ad.

Előfordulhat olyan eset, amikor a szabály egyszeri alkalmazása nem elegendő, mert a deiváltak hányadosa újra határozatlan alakot ad. Ekkor (ha a feltételek teljesülnek) újra alkalmazhatjuk a L'Hospital-szabályt. Ilyenkor az újabb deriválás előtt célszerű a lehetséges egyszerűsítéseket elvégezni.

A feladatmegoldások során először mindig megvizsgáljuk, hogy milyen típusú határértékről van szó. A $\dfrac{0}{0}$ vagy $\dfrac{\infty}{\infty}$ típusú határozatlan esetekben közvetlenül alkalmazható a L'Hospital-szabály. Ezen túlmenően foglalkozunk „$0\cdot\infty$" típusú határértékekkel, melyekre bizonyos átalakítások után a szabály alkalmazható.

Ha az $f(x)\cdot g(x)$ szorzat, (a szóbanforgó helyen) „$0\cdot\infty$ " típusú, akkor az

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}},$$

vagy az

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$$

formulák valamelyikét felhasználva, a kérdéses határérték átalakítható $\dfrac{\infty}{\infty}$, vagy $\dfrac{0}{0}$ típusúvá, aztán alkalmazható a L'Hospital-szabály.
Gyakran a kétféle átírási lehetőség közül csak az egyik használható. Azzal érdemes először próbálkozni, amelyik a deriválás szempontjából egyszerűbbnek tűnik.

Kidolgozott feladatok

10. feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\ln x}$ határértéket.

Megoldás: Most egy $\dfrac{\infty}{\infty}$ típusú határértékkel van dolgunk, így a L'Hospital-szabályt közvetlenül tudjuk alkalmazni. Ennek érdekében külön deriváljuk a számlálót és külön deriváljuk a nevezőt, s ennek a hányadosnak vesszük az eredeti helyen vett határértékét. Ez most

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x}\right)'}{\left(\ln x\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}}.$$

Ebben a formájában ez egy $\dfrac{0}{0}$ típusú határérték, látszólag nem jutottunk előre. De az utóbbi határérték átalakítható (megszüntetjük az emeletes törtet), és ezután könnyen kiszámolható a határérték:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{2}=\infty.$$

A deriváltak hányadosának plusz végtelen a limesze, így tételünk értelmében ennyi az eredeti limesz is, azaz

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\ln x}=\infty.$$

11. feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{2x}}{x^2}$ határértéket.

Megoldás: Egy $\dfrac{\infty}{\infty}$ típusú határértéket kell kiszámolni. Tekintjük a deriváltak hányadosának a határértékét.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(e^{2x}\right)'}{\left(x^2\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{2x}}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}}{x}.$$

Ez is egy $\dfrac{\infty}{\infty}$ típusú határérték. Kiszámolásához a L'Hospital-szabályt újra alkalmazzuk.

A deriváltak hányadosának határértéke most

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(e^{2x}\right)'}{\left(x\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{2x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\left(2e^{2x}\right)=\infty.$$

A tételünk értelmében ekkor

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}}{x}=\infty$$

is teljesül, majd még egyszer alkalmazva a tételt

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}}{x^2}=\infty$$

is fennáll. Tehát ebben az esetben kétszer alkalmaztuk egymás után a L’Hospital-szabályt.

12. feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x^2+e^x}$ határértéket.

Megoldás: A limesz $\dfrac{\infty}{\infty}$ típusú. Tekintjük a deriváltak hányadosának limeszét:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^3\right)'}{\left(x^2+e^x\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{2x+e^x}.$$

Ez még mindig $\dfrac{\infty}{\infty}$ típusú. Nézzük tehát a

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(3x^2\right)'}{\left(2x+e^x\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{2+e^x}$$

határértéket, de ez még mindig $\dfrac{\infty}{\infty}$ típusú. Végül, még egyszer képezve a deriváltak hányadosának határértékét, kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(6x\right)'}{\left(2+e^x\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{e^x}=0,$$

ezért sorban minden limesz nullával egyenlő, így az eredeti is, azaz

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2+e^x}=0.$$

Tehát ebben az esetben háromszor alkalmaztuk egymás után a L’Hospital-szabályt.

13. feladat: Számoljuk ki a $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}$ határértéket.

Megoldás: A 0-t behelyettesítve kapjuk, hogy a határérték $\dfrac{0}{0}$ típusú. Tehát tekintjük a deriváltak hányadosának limeszét, ami

$$\lim_{x\to0}\frac{\left(e^x-1\right)'}{\left(\sin x\right)'}=\lim_{x\to0}\frac{e^x}{\cos x}=1.$$

Ennyi tehát az eredeti limesz is:

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{\sin x}=1.$$

14. feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xe^x}{1-e^{2x}}$ határértéket.

Megoldás A 0-t behelyettesítve kapjuk, hogy a határérték $\dfrac{0}{0}$ típusú. Vesszük a deriváltak hányadosának limeszét:

$$\lim_{x\to0}\frac{\left(xe^x\right)'}{\left(1-e^{2x}\right)'}=\lim_{x\to0}\frac{e^x+xe^x}{-2e^{2x}}=\frac{1+0}{-2}=-\frac{1}{2}.$$

Tehát az eredeti határértékre is fennáll, hogy
$$\lim_{x\to 0}\frac{xe^x}{1-e^{2x}}=-\frac{1}{2}.$$

15. feladat: Számoljuk ki a $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos 3x}$ határértéket.

Megoldás: A 0-t behelyettesítve kapjuk, hogy a határérték $\frac{0}{0}$ típusú. Most a deriváltak hányadosának limesze:
$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{3\sin 3x},$$
ami a 0-t való behelyettesítést követően újra $\frac{0}{0}$ típusú. Ebből kapjuk a deriváltak hányadosát képezve a
$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cos^2 x-2\sin^2 x}{9\cos 3x}=\frac{2-0}{9}=\frac{2}{9}$$
eredményt, s így ennyi az eredeti limesz is,
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos 3x}=\frac{2}{9}.$$
Akár eszünkbe juthatott volna az első deriválás után egy trigonometrikus azonosság ($\cos 0=1$) is, mely alapján
$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{3\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3\sin 3x}.$$
Ez persze így is egy $\frac{0}{0}$ típusú limesz, de ha most vesszük a deriváltak hányadosának limeszét, azt kapjuk, hogy
$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x}{9\cos 3x}=\frac{2}{9},$$
és ismét hivatkozhatunk arra, hogy a tételünk alapján az eredeti határérték is ennyi. Ezen az úton a deriválás némileg egyszerűbb volt.
Az ilyenféle átalakítások gyakran jelentős egyszerűsödést tudnak eredményezni.

16. feladat: Számoljuk ki a $\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{tg} x}{\sin x-x}$ határértéket.

Megoldás: A 0-t behelyettesítve kapjuk, hogy a határérték $\frac{0}{0}$ típusú. A deriváltak hányadosának limesze így:
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{\cos^2 x}}{\cos x-1}=\frac{1-\frac{1}{\cos^2 0}}{\cos 0-1}.$$
Ez továbbra is $\frac{0}{0}$ típusú, de átalakítható a következő módon:
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{\cos^2 x}}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos^2 x-1}{\cos^2 x}}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{\cos^2 x\left(\cos x-1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x+1)(\cos x-1)}{\cos^2 x(\cos x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+1}{\cos^2 x}=\frac{1+1}{1}=2\,.$$

A tétel alapján az eredeti limesz is ennyi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{tg}x}{\sin x-x}=2\,.$$

Ha a fenti átalakítási lehetőséget nem vesszük észre, akkor ismét a L'Hospital-szabály alkalmazásával próbálkozhatnánk, ekkor azt kapnánk, hogy:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\frac{1}{\cos^2 x}\right)'}{(\cos x-1)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2\sin x}{\cos^3 x}}{-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\cos^3 x}=2\,.$$

Most tehát így is célhoz értünk. Néha azonban az egyszerűsítések elvégzése nélkül nem számítható ki a limesz.

17. feladat: $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{e}{x}\right)}{\sin\left(\frac{3}{x}\right)}=?$

Megoldás: $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{e}{x}\right)}{\sin\left(\frac{3}{x}\right)}=\frac{\ln(1+0)}{\sin(0)}=\frac{0}{0}$

Tehát újra egy $\frac{0}{0}$ típusú limesszel van dolgunk. Most a deriváltak hányadosának limesze:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{e}{x}}\left(-\frac{e}{x^2}\right)}{\cos\left(\frac{3}{x}\right)\left(-\frac{3}{x^2}\right)}\,.$$

Ez továbbra is $\frac{0}{0}$ típusú. Vegyük észre azonban, hogy a problémát okozó $-\frac{1}{x^2}$ tényezővel egyszerűsíthetünk. Ekkor kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{e}{x}}\left(-\frac{e}{x^2}\right)}{\cos\left(\frac{3}{x}\right)\left(-\frac{3}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{e}{x}}(e)}{\cos\left(\frac{3}{x}\right)(3)}=\frac{e}{3}\,.$$

Persze az eredeti limesz is ezzel egyenlő:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{e}{x}\right)}{\sin\left(\frac{3}{x}\right)}=\frac{e}{3}\,.$$

Ha most a deriváltak hányadosában nem egyszerűsítenénk a $-\frac{1}{x^2}$ tényezővel, hanem ismét tekintenénk a deriváltak hányadosának limeszét, akkor az továbbra is $\frac{0}{0}$ típusú maradna, és ez történne akárhányszor vennénk, az egyébként egyre bonyolultabb deriváltak hányadosának limeszét. Ezért, ha lehet, akkor mindig egyszerűsítsünk!

18. feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to\infty}\left(xe^{-2x}\right)$ határértéket.

Megoldás: Ez a határérték egy $0\cdot\infty$ típusú szorzat. A negatív kitevőjű hatvány miatt kínálkozik a

$$\lim_{x\to\infty}\left(xe^{-2x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{2x}}$$

tört alakú átírás.

Így egy $\frac{\infty}{\infty}$ típusú tört határértékének a kiszámítására vezettük vissza a feladatot, melyre már alkalmazható a L'Hospital szabály. Véve a deriváltak hányadosának határértékét, arra jutunk, hogy

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2e^{2x}}=0\,.$$

Tehát az eredeti limesz is ennyi:

$$\lim_{x\to\infty}\left(xe^{-2x}\right)=0\,.$$

19. feladat: Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\mathrm{tg}x\cdot\ln x\right)$ határértéket.

Megoldás: A feladat egyoldali határértékszámítással kapcsolatos ismeretekre épül (lásd Matematika 1. tárgy 8.Határérték című lecke).

Az egyoldali határértékeket megvizsgálva kapjuk, hogy a szorzatunk limesze $0\cdot\infty$ típusú. Mivel $\frac{1}{\mathrm{tg}x}=\mathrm{ctg}x$ elemi alapfüggvény, a

$$\lim_{x\to0^+}\left(\mathrm{tg}x\cdot\ln x\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\mathrm{tg}x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\mathrm{ctg}x}$$

átírást választjuk.

Így egy $\frac{\infty}{\infty}$ típusú határérték kiszámítása a feladatunk, melyre alkalmazható a L'Hospital szabály. Tekintsük a deriváltak hányadosának határértékét:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2x}}=\lim_{x\to0^+}\left(-\frac{\sin^2x}{x}\right).$$

Ez egy $\frac{0}{0}$ típusú határérték. Alkalmazhatjuk ismét a L'Hospital-szabályt, és egy lépésben célhoz jutunk, de talán még egyszerűbb, ha felhasználjuk a nevezetes $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1$ határértéket. Ekkor

$$\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{\sin^2 x}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\left(-\sin x\right)=1\cdot 0=0.$$

Ezzel egyenlő az eredeti limesz is:

$\lim_{x\to 0^+}\left(\mathrm{tg}x\cdot\ln x\right)=0$.

Ellenőrző kérdések:

8. kérdés: $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2}=$

1.

∞.

0 . (X)

$\frac{1}{2}$.

9. kérdés: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^{2x}}=$

0 . (X)

6 .

∞.

$\frac{3}{2}$.

10. kérdés: $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-1}{x^2}=$

∞ . (X)

0 .

$\frac{1}{2}$.

1 .

11. kérdés: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=$

0 .

$-\frac{1}{2}$.

-1.

$\frac{1}{2}$. (X)

12. kérdés: $\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-2x}}{x^2+3x}=$

0 .

$\frac{2}{3}$. (X)

$-\frac{2}{3}$.

1.5.

13. kérdés: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(5x-4)}{\ln(3-2x)}=$

$-\dfrac{5}{2}$. (X)

$\dfrac{5}{2}$.

1 .

-1 .

14. kérdés: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2e^{-x}\right)=$

∞.

1.

0. (X)

2.

15. kérdés: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)\right)=$

0.

$-\pi$.

∞.

π. (X)

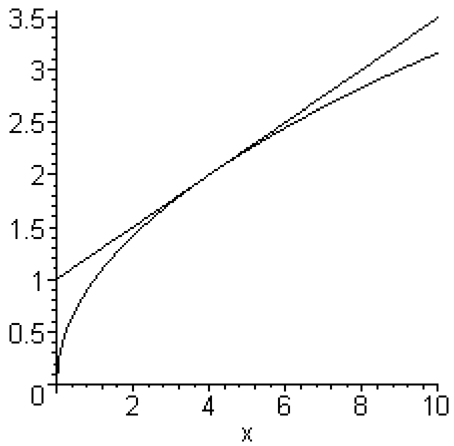
3. Differenciálszámítás

3.3. Monotonitás és szélsőérték vizsgálata

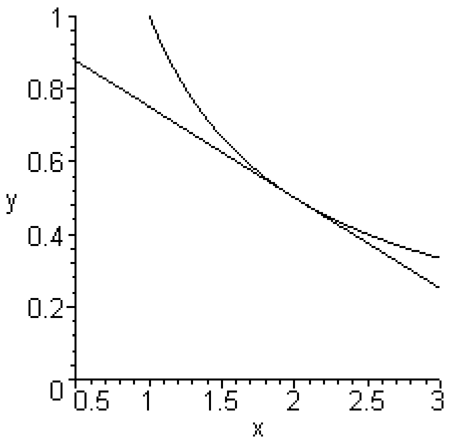
Tanulási cél: Olyan eljárás megismerése, melynek segítségével a függvények növekedés, csökkenés és szélsőérték szempontjából vizsgálhatók, valamint az eljárás alkalmazása szöveges feladatokban minimum vagy maximum keresésére.

Motivációs példa: Egy telep üresjárási feszültsége U_0, belső ellenállása R_b. Mekkora R_k külső ellenállást kell a telepre kapcsolni, hogy a külső ellenállás teljesítménye P_k maximális legyen? Mekkora ez a maximális teljesítmény?
A gyakorlati életben nagyon sok ehhez hasonló problémával találkozunk, amiben valamilyen fizikai, kémia, közgazdasági mennyiségnek maximumát vagy minimumát, azaz szélsőértékét keressük, egy másik mennyiség függvényében. Jelen esetben a P_k teljesítmény függ a külső ellenállástól, azaz R_k-tól. A két mennyiség közötti kapcsolat egy függvénnyel írható le. Ha sikerül megállapítanunk, hogy ez a függvény mikor nő, és mikor csökken, akkor azt is meg tudjuk mondani, hogy hol veszi fel a legnagyobb értékét, tehát a maximumát. Az ehhez hasonló problémák megoldásához fontos számunkra, hogy a függvényeket növekedés és csökkenés, azaz monotonitás szempontjából tudjuk jellemezni. Az alábbiakban olyan módszerrel ismerkedünk meg, aminek segítségével el tudjuk dönteni, hogy egy függvény mely intervallumokon nő, és mely intervallumokon csökken, valamint hol és milyen típusú szélsőértéke van.

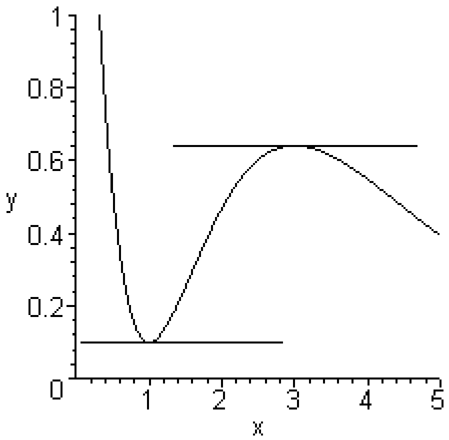
Elméleti összefoglaló: Mivel a derivált értéke minden pontban megadja a grafikon érintőjének meredekségét, ezért a derivált előjeléből következtethetünk arra, hogy hol nő és hol csökken a függvény, valamint hol van szélsőértéke. Szemléletesen ugyanis arra gondolhatunk, hogy ha egy pontban a derivált pozitív, akkor ott az érintő meredeksége pozitív, tehát az érintő úgymond felfelé halad, s mivel ő jól közelíti a függvényt, így a függvény is növekedni fog. Erre látunk példát az alábbi ábrán.



Hasonlóan okoskodhatunk akkor, ha egy pontban a derivált negatív. Ekkor az érintő nyilván lefelé halad, s ekkor a függvény csökkenni fog. Erre mutat példát az alábbi ábra.



Ha pedig egy függvénynek valahol szélsőértéke, azaz maximuma vagy minimuma van, akkor ott az érintőnek vízszintesnek kell lennie, tehát meredeksége 0, s így a derivált értéke itt 0 kell legyen. Erre láthatunk két példát is az alábbi ábrán.



Hangsúlyozzuk, hogy ez csak szemléletes okoskodás. A pontos megfogalmazás majd a most következő definíciókban és tételekben szerepel majd. Elsőként definiáljuk pontosan a lokális növekedés és csökkenés, valamint a szélsőértékek fogalmát.

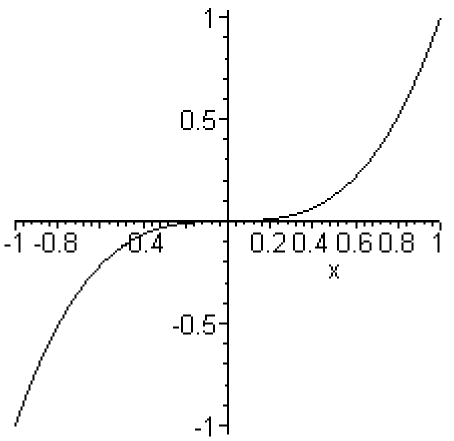
Definíció: Az f függvény az $x_0 \in D_f$ helyen lokálisan növekvő, ha létezik az x_0-nak olyan környezete, amelybe eső minden $x_1 < x_0 < x_2$ esetén teljesül, hogy $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.
Az f függvény az $x_0 \in D_f$ helyen lokálisan csökkenő, ha létezik az x_0-nak olyan környezete, amelybe eső minden $x_1 < x_0 < x_2$ esetén teljesül, hogy $f(x_1) > f(x_0) > f(x_2)$.
Definíció: Az f függvénynek az x_0 helyen helyi, másképpen lokális maximuma van, ha megadható x_0-nak olyan környezete, amelybe eső minden x esetén $f(x) \le f(x_0)$.
Az f függvénynek az x_0 helyen helyi, másképpen lokális minimuma van, ha megadható x_0-nak olyan környezete, amelybe eső minden x esetén $f(x) \ge f(x_0)$.

Ezek után kimondható az alábbi tétel, melyre a szemléletes okoskodással utaltunk.

Tétel: Ha az f függvény az x_0 helyen differenciálható és $f'(x_0) > 0$, akkor a függvény az x_0 helyen lokálisan növekvő.

Ha az f függvény az x_0 helyen differenciálható és $f'(x_0) < 0$, akkor a függvény az x_0 helyen lokálisan csökkenő.

A tétel megfordítása azonban sajnos nem igaz. Gondoljunk ugyanis az $f(x) = x^3$ függvényre, amely az $x_0 = 0$ helyen nyilván lokálisan növekvő, azonban deriváltja ott nem pozitív, hanem 0-val egyenlő. Az alábbi ábrán látható az $f(x) = x^3$ függvény grafikonja, amiről teljesen egyértelmű, hogy a függvény nő az $x_0 = 0$ helyen.



Így nem egészen megfordításként, következő tétel mondható ki.

Tétel: Ha az f függvény az x_0 helyen differenciálható és ott lokálisan növekedő, akkor $f'(x_0) \geq 0$.
Ha az f függvény az x_0 helyen differenciálható és ott lokálisan csökkenő, akkor $f'(x_0) \leq 0$.

A feladatok megoldása során a lokális növekedés és csökkenés helyett, az intervallumon növekedés és csökkenés fogalmát használjuk.

Definíció: Az f függvény az (a,b) intervallumon növekvő, ha minden $x \in (a,b)$ esetén lokálisan növekvő.
Az f függvény az (a,b) intervallumon csökkenő, ha minden $x \in (a,b)$ esetén lokálisan csökkenő.

Ezek után feladatokban leginkább a tétel alábbi megfogalmazásra hivatkozunk.

Tétel: Ha f az (a,b) intervallumon differenciálható és minden $x \in (a,b)$ esetén $f'(x) > 0$, akkor f az (a,b) intervallumon növekvő.
Ha f az (a,b) intervallumon differenciálható és minden $x \in (a,b)$ esetén $f'(x) < 0$, akkor f az (a,b) intervallumon csökkenő.

A lokális szélsőértékekre is több tétel mondható ki. Az első a szélsőérték létezésének szükséges feltétele.

Tétel: Ha f differenciálható az x_0 hely valamely környeztében, és f -nek x_0 -ban lokális szélsőértéke van, akkor $f'(x_0)=0$.

Gondoljunk bele, a tétel nem azt mondja ki, hogy ahol a derivált 0, ott szélsőérték van. Ez a tétel megfordítása lenne, és ez nem igaz. Példaként megint az $f(x)=x^3$ függvényt említhetjük, amelynek deriváltja az $x_0=0$ helyen 0-val egyenlő, de ott nincs szélsőértéke a függvénynek, mert ott lokálisan növekvő. Tehát csak annyit mondhatunk, ahol a derivált 0, ott könnyen elképzelhető, hogy van szélsőérték. Ezért van szükségünk egy másik tételre is, ami már elégséges feltétel a szélsőérték létezésére.

Tétel: Ha az f függvény differenciálható az x_0 helyen és $f'(x_0)=0$, valamint f' előjele megváltozik az x_0 -ban, akkor f -nek az x_0 helyen lokális szélsőértéke van.

A fenti tételek birtokában a következő módon vizsgálhatjuk majd a folytonosan differenciálható függvényeket növekedés, csökkenés és szélsőérték szempontjából.
1. Megvizsgáljuk, mi a legbővebb halmaz, amelyen a függvény értelmezhető.
2. Deriváljuk a függvényt.
3. Megoldjuk az $f'(x)=0$ egyenletet. Ezzel megkapjuk azokat a helyeket, ahol szélsőérték lehet.
4. Az értelmezési tartományt a szakadási helyekkel és a derivált zérushelyeivel részekre bontjuk, s a részeken vizsgáljuk a derivált előjelét. Ezt például úgy hajtjuk végre, hogy mindegyik részből választunk egy számot, melyet a deriváltba helyettesítünk.
5. Az értelmezési tartomány egyes részein a derivált előjeléből következtetünk a növekedésre, csökkenésre.
Az utolsó két pontban leírtakat célszerű egy táblázatban összefoglalni, mert akkor tömörebben írhatjuk a dolgokat.

Kidolgozott feladatok:

1. feladat: Vizsgáljuk meg növekedés és csökkenés, azaz monotonitás, valamint szélsőérték szempontjából az $f(x)=3x^4-8x^3$ függvényt.

Megoldás: A függvény minden valós számra értelmezhető, azaz $D_f=\mathbb{R}$.

$f'(x)=12x^3-24x^2$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 12x^3-24x^2=0$

Emeljünk ki amit csak lehet, így alakítsunk szorzattá.

$12x^2(x-2)=0$

Szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0. Két eset lesz, vagy $x^2=0$, amiből $x=0$ következik, vagy $x-2=0$, amiből $x=2$ következik. A derivált zérushelyei tehát most a 0 és a 2.
Készítsünk ezután egy táblázatot. Az első sorban az értelmezési tartomány részeit tüntessük fel. A derivált zérushelyei bontják részekre a valós számok halmazát. A zérushelyeknek is készítsünk külön oszlopot, mert ezeket a helyeket kell vizsgálnunk, hogy van-e bennük szélsőérték. A második sorban majd azt jelezzük, hogy az adott részen milyen előjelű a derivált. A harmadik sorban pedig majd azt, hogy azon a részen hogyan viselkedik a

függvény. Most egyelőre azonban csak az első sort töltsük ki. Így az induló táblázatunk az alábbi.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,\infty)$
$f'(x)$					
$f(x)$					

Most vegyünk egy számot a $(-\infty,0)$ intervallumból, és helyettesítsük be a deriváltba. Ilyen szám pl. a -1.

$f'(-1)=12(-1)^3-24(-1)^2=-36$

Negatív számot kaptunk, tehát a derivált negatív értékeket vesz fel a $(-\infty,0)$ intervallumon.

Most vegyünk egy számot a $(0,2)$ intervallumból, és helyettesítsük be a deriváltba. Ilyen szám pl. az 1.

$f'(1)=12\cdot1^3-24\cdot1^2=-12$

Negatív számot kaptunk, tehát a derivált negatív értékeket vesz fel a $(0,2)$ intervallumon.

Végül vegyünk egy számot a $(2,\infty)$ intervallumból, és helyettesítsük be a deriváltba. Ilyen szám pl. a 3.

$f'(1)=12\cdot3^3-24\cdot3^2=108$

Pozitív számot kaptunk, tehát a derivált pozitív értékeket vesz fel a $(2,\infty)$intervallumon.

Töltsük ki ezután a táblázat második sorát, beírva a derivált előjelét. A zérushelyeken természetesen azt írjuk be, hogy a derivált ott 0.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,\infty)$
$f'(x)$	neg. $(-)$	0	neg. $(-)$	0	poz. $(+)$
$f(x)$					

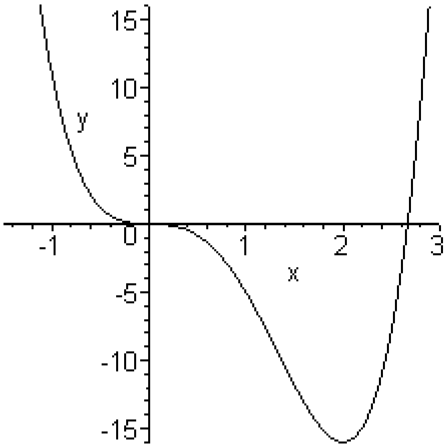
Ezután töltsük ki a harmadik sort is. Ahol a második sorban negatív a derivált, ott a függvény csökken, ahol pedig pozitív a derivált ott a függvény nő. Amelyik zérushelynél nem vált előjelet a derivált, ott nincs szélsőérték, de ahol megváltozik a derivált előjele ott van. Ha negatívból pozitívba vált a derivált, akkor lokális minimum van, hiszen a függvény a szélsőérték előtt csökken, azután pedig nő. Míg ha pozitívból negatívba megy át a derivált, akkor lokális maximum van, mert a függvény a szélsőérték előtt nő, utána pedig csökken.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,\infty)$
$f'(x)$	neg. $(-)$	0	neg. $(-)$	0	poz. $(+)$
$f(x)$	csökk. ↘	nincs SZÉ. ↘	csökk. ↘	lokális minimum	nő ↗

A függvény tehát csökken a $(-\infty, 2)$ intervallumon, nő a $(2, \infty)$ intervallumon, és lokális minimuma van az $x = 2$ helyen.
Az $x = 0$ helyen nincs szélsőérték, mert ott nem vált előjelet a derivált, s mert a függvény előtte és utána is csökken. Ebből következik, hogy az $x = 0$ helyen is lokálisan csökkenő a függvény.
A táblázat alapján bármilyen növekedéssel, csökkenéssel és szélsőértékkel kapcsolatos kérdésre választ tudunk adni.
A szélsőérték nagyságát is megkaphatjuk, ha helyét behelyettesítjük az eredeti függvénybe. Jelen esetben tehát 2-t helyettesítünk az f-be.

$$f(2) = 3 \cdot 2^4 - 8 \cdot 2^3 = -16$$

A függvény minimumának értéke tehát -16.
Az alábbi ábrán a függvény grafikonja látható.



2. feladat: Vizsgáljuk meg növekedés és csökkenés, azaz monotonitás, valamint szélsőérték szempontjából az $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ függvényt.

Megoldás: A törtek miatt kikötést kell tennünk, $x \neq 0$. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)' = \left(x^{-1} + x^{-2}\right)' = (-1) \cdot x^{-2} + (-2) \cdot x^{-3} = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} = 0$$

Célszerű -1-gyel szorozni, és közös nevezőre hozni. Így az alábbit kapjuk:

$$\frac{x+2}{x^3} = 0.$$

Egy tört akkor 0, ha számlálója 0. Így az $x + 2 = 0$ egyenletet kapjuk, amiből $x = -2$.
A deriváltnak tehát most csak egy zérushelye van. A táblázat készítésekor azonban ne feledkezzünk meg arról, hogy 0-ban nem értelmezett a függvény. Így a 0-t is vegyük be a táblázatba ugyanúgy, mint a derivált zérushelyét. Így az induló táblázat a következő.

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, \infty)$
$f'(x)$				X	
$f(x)$				X	

A 0 oszlopában az X-ekkel azt jelöltük, hogy ott a függvény nincs értelmezve.
Vegyünk egy számot a $(-\infty,-2)$-ból, mondjuk a -3-at, s helyettesítsük a deriváltba.

$$f'(-3)=-\frac{1}{(-3)^2}-\frac{2}{(-3)^3}=-\frac{1}{27}$$

Mivel negatív értéket kaptunk, ezen az intervallumon mindenütt negatív lesz a derivált, s így itt csökken a függvény.
Vegyünk egy számot a $(-2,0)$-ból, mondjuk a -1-et, s helyettesítsük a deriváltba.

$$f'(-1)=-\frac{1}{(-1)^2}-\frac{2}{(-1)^3}=1$$

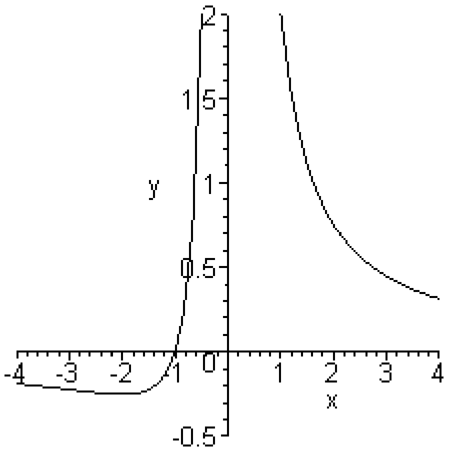
Mivel pozitív értéket kaptunk, ezen az intervallumon mindenütt pozitív lesz a derivált, s így itt nő a függvény.
Végül vegyünk egy számot a $(0,\infty)$-ból, mondjuk a 1-et, s helyettesítsük a deriváltba.

$$f'(1)=-\frac{1}{1^2}-\frac{2}{1^3}=-3$$

Mivel negatív értéket kaptunk, ezen az intervallumon mindenütt negatív lesz a derivált, s így itt csökken a függvény.
Mivel -2 előtt negatív a derivált, utána azonban pozitív, így az $x=-2$ helyen a függvénynek lokális minimuma van.
Töltsük ki ezután egyből a táblázat második és harmadik sorát is.

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,\infty)$
$f'(x)$	neg. $(-)$	0	poz. $(+)$	X	neg. $(-)$
$f(x)$	csökk. ↘	lokáis minimum	nő ↗	X	csökk. ↘

A függvény tehát csökken a $(-\infty,-2)$ és $(0,\infty)$ intervallumokon, nő a $(-2,0)$ intervallumon, és lokális minimuma van az $x=-2$ helyen.
A minimum értéke $f(-2)=\frac{1}{(-2)}+\frac{1}{(-2)^2}=-\frac{1}{4}$.
Bár az $x=0$ helyen megváltozik a derivált előjele, ez mégsem szélsőérték, hiszen itt a függvény nincs értelmezve.
Az alábbi ábrán a függvény grafikonja látható.



3. feladat: Hol növekvő az f függvény, ha deriváltja $f'(x)=(x+2)(x-5)^2$**?** Az f ugyanott értelmezhető ahol f'.

Megoldás: Első lépésként meg kell vizsgálnunk, mi a legbővebb halmaz, amelyen f' értelmezhető. Mivel nem kell semmilyen kikötést tennünk $D_{f'}=\mathbb{R}$, s ugyanitt értelmezhető f is.

Mivel most ismerjük a függvény deriváltját, így az $f'(x)=0$ egyenlet megoldásával folytatjuk.

$(x+2)(x-5)^2=0$

Mivel szorzat csak úgy lehet 0, ha valamelyik tényezője 0, így az egyenlet két egyszerűbb egyenletre bontható. Vagy $x+2=0$, amiből $x=-2$, vagy $(x-5)^2=0$, amiből $x=5$.

Készítsük most táblázatot, aminek első sorában feltüntetjük az értelmezési tartomány részeit. Most a derivált két zérushelye a -2 és az 5 bontja részekre a valós számok halmazát.

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,5)$	5	$(5,\infty)$
$f'(x)$					
$f(x)$					

Vegyünk egy számot a $(-\infty,-2)$-ból, mondjuk a -3-at, s helyettesítsük a deriváltba.

$f'(-3)=(-3+2)(-3-5)^2=-64$

Mivel negatív értéket kaptunk, ezen az intervallumon mindenütt negatív lesz a derivált, s így itt csökken a függvény.

Vegyünk egy számot a $(-2,5)$-ból, mondjuk a 0-t, s helyettesítsük a deriváltba. (Egy pozitív és egy negatív szám között mindig a 0-t célszerű választani, mert azt a legegyszerűbb helyettesíteni.)

$f'(0)=(0+2)(0-5)^2=50$

Mivel pozitív értéket kaptunk, ezen az intervallumon mindenütt pozitív lesz a derivált, s így itt nő a függvény.

Végül vegyünk egy számot az $(5,\infty)$-ból, mondjuk a 10-et, s helyettesítsük a deriváltba.

$f'(10)=(10+2)(10-5)^2=300$

Mivel pozitív értéket kaptunk, ezen az intervallumon mindenütt pozitív lesz a derivált, s így itt nő a függvény.

Mivel -2 előtt negatív a derivált, utána azonban pozitív, így az $x=-2$ helyen a függvénynek lokális minimuma van.

Az $x=5$ helyen nem változik a derivált előjele, és a függvény 5 előtt és után is nő, így ezen a helyen nincs szélsőérték. A függvény az $x=5$ helyen is lokálisan nő.

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,5)$	5	$(5,\infty)$
$f'(x)$	neg. $(-)$	0	poz. $(+)$	0	poz. $(+)$

$f(x)$	csökk. ↘	lokáis minimum	nő ↗	nincs SZÉ. ↗	nő ↗

A kész táblázat alapján már csak válaszolnunk kell a kérdésre. Látható, hogy a függvény a $(-2,\infty)$ intervallumon nő.

4. feladat: Hol csökkenő az f függvény, ha deriváltja $f'(x)=\frac{3-x}{x+4}$? Az f ugyanott értelmezhető ahol f'.

Megoldás: A feladat nagyon hasonlít az előzőhöz, így ugyanúgy járhatunk el. Első lépésként határozzuk meg, mely halmazon értelmezhető a függvény deriváltja. A nevező nem lehet zérus, így $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-4\}$.
Ezután oldjuk meg az $f'(x)=0$ egyenletet.

$$\frac{3-x}{x+4}=0 \Rightarrow 3-x=0 \Rightarrow x=3$$

Nézzük ezután, milyen részekre kell bontanunk az értelmezési tartományt. Az előzőekben szerepelt, hogy a derivált zérushelyei bontják részekre az értelmezési tartományt, mert általában ezeken a helyeken változik meg a derivált előjele. De nem csak zérushelyen változhat egy függvény előjele, hanem olyan helyen is, ahol nincs értelmezve. Gondoljunk pl. az $\frac{1}{x}$ függvényre, amely nincs értelmezve az $x=0$ helyen. A negatív x értékekre negatív ez a függvény, a pozitív x-ekre pedig pozitív. Nincs tehát zérushely a 0-ban, hisz a függvény itt nem is értelmezett, de a függvény előjele mégis változik. Amikor készítjük a táblázatot, akkor tehát nem csak a derivált zérushelyével kell részekre bontani az értelmezési tartományt, hanem az értelmezési tartományban levő szakadási hellyel is. Készítsük el most a táblázatot, egyelőre az első sorát kitöltve. A szakadási helyen azonban a második és a harmadik sorban jelölhetjük, hogy ott a derivált nem értelmezett, így a függvényről sem tudunk semmit mondani.

x	$(-\infty,-4)$	-4	$(-4,3)$	3	$(3,\infty)$
$f'(x)$		X			
$f(x)$		X			

Ezután vizsgáljuk meg az értelmezési tartomány részein a derivált előjelét, és ebből határozzuk meg, nő vagy csökken ott a függvény.
Vegyünk egy -4-nél kisebb számot. Legyen pl. -5, s helyettesítsük ezt a deriváltba.

$$f'(-5)=\frac{3-(-5)}{-5+4}=-8$$

Negatív értéket kaptunk, tehát $x<-4$ esetén negatív a derivált, ebből következően itt csökken a függvény.
Vegyünk egy -4 és 3 közé eső számot. Legyen pl. 0, s ezt is helyettesítsük a deriváltba.

$$f'(0)=\frac{3-0}{0+4}=\frac{3}{4}$$

Pozitív értéket kaptunk, tehát ha $-4<x<3$, akkor pozitív a derivált, s így itt nő a függvény.

Végül vegyünk egy 3-nál nagyobb számot is. Legyen pl. 4, és helyettesítsük ezt a deriváltba.

$$f'(4)=\frac{3-4}{4+4}=-\frac{1}{8}$$

Negatív értéket kaptunk, így ha $3<x$ akkor negatív a derivált, tehát ekkor csökken függvény. Mivel a derivált értéke az $x=3$ helyen előjelet vált, így ezen a helyen van lokális szélsőértéke a függvénynek. Mert a derivált pozitívból negatívba megy át, így ezen a helyen lokális maximum van.
Ezután kitölthetjük a táblázat második és harmadik sorát is.

x	$(-\infty,-4)$	-4	$(-4,3)$	3	$(3,\infty)$
$f'(x)$	neg. $(-)$	X	poz. $(+)$	0	neg. $(-)$
$f(x)$	csökk. ↘	X	nő ↗	lokális maximum	csökk. ↘

A kitöltött táblázat alapján válaszolhatunk a feladat kérdésére. A függvény csökken a $(-\infty,-4)$ és $(3,\infty)$ intervallumokon.

5. feladat: Hol és milyen jellegű szélsőértéke van az f függvénynek, ha deriváltja $f'(x)=(x-2)^2\ln x$? Az f ugyanott értelmezhető ahol f'.

Megoldás: Az előző feladatok megoldásából láthattuk, hogy egy függvény szélsőértékeinek meghatározásához is azokra a lépésekre van szükség, mint a növekedés és a csökkenés vizsgálatához. Így járjunk el hasonlóan, mint az előzőekben. Elsőként vizsgáljuk meg, mely halmazon értelmezhető a függvény deriváltja. Most a $\ln x$ miatt ki kell kötnünk, hogy x csak pozitív értékeket vehet fel, így $D_f=\mathbb{R}^+=(0,\infty)$.
Ezután oldjuk meg az $f'(x)=0$ egyenletet.

$$(x-2)^2\ln x=0$$

Arra hivatkozunk, hogy szorzat csak akkor lehet zérus, ha valamelyik tényezője 0. Így az egyenletet egyszerűbb egyenletekre bontjuk.

$(x-2)^2=0$ vagy $\ln x=0$

Az első egyenlet megoldása nyilván $x=2$.
A második egyenlet mindkét oldalát tekintsük úgy mint kitevőt, s az e számot emeljük fel ezen kitevőkre. Így a bal oldalon olyan kompozíciót kapunk, amiben egy függvény és inverze szerepel, így ott egyszerűen x áll.

$$\ln x=0 \iff e^{\ln x}=e^0 \iff x=1$$

A derivált zérushelyei tehát az 1 és a 2.
Ezután elkészíthetjük a táblázatot, egyelőre csak az első sort kitöltve. Figyeljünk oda, hogy az értelmezési tartomány most csak a pozitív valós számok halmaza. Így az első részben nem a $(-\infty,1)$ intervallum áll, hanem ott a $(0,1)$ intervallumnak kell szerepelni.

x	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,\infty)$
$f'(x)$					
$f(x)$					

Ezután vizsgáljuk a derivált előjelét az egyes részeken, s ebből következtessünk a növekedésre vagy a csökkenésre.
A $(0,1)$ intervallumban található pl. az 0.5. Helyettesítsük ezt a deriváltba.

$$f'(0.5)=(0.5-2)^2\ln 0.5\approx -1.56$$

A derivált értéke itt negatív, tehát ezen az intervallumon csökken a függvény.
Az $(1,2)$ intervallumban található pl. az 1.5, amit behelyettesítünk a deriváltba.

$$f'(1.5)=(1.5-2)^2\ln 1.5\approx 0.101$$

A derivált értéke ezen a helyen pozitív, ebből következően ezen az intervallumon nő a függvény.
Végül a $(2,\infty)$ intervallumban van pl. az 3, amit a deriváltba helyettesítünk.

$$f'(3)=(3-2)^2\ln 3\approx 1.10$$

A derivált pozitív ezen a helyen, így itt is nő a függvény.
Az $x=1$ helyen a derivált előjele megváltozik, így itt a függvénynek lokális szélsőértéke van. Mivel a derivált negatívból pozitívba megy át ezen a helyen, így itt lokális minimuma van a függvénynek.
Az $x=2$ helyen a derivált nem vált előjelet, így ezen a helyen nincs szélsőértéke a függvénynek. Mivel előtte és utána is növekvő a függvény, így ezen a helyen is lokálisan növekvő a függvény.
Töltsük ki ezután a táblázat második és harmadik sorát is.

x	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,\infty)$
$f'(x)$	neg. $(-)$	0	poz. $(+)$	0	poz. $(+)$
$f(x)$	csökk. ↘	lokális minimum	nő ↗	nincs SZÉ. ↗	nő ↗

A függvénynek tehát csak az $x=1$ helyen van lokális szélsőértéke, ahol lokális minimuma van.

Ellenőrző kérdések:

1. kérdés: Hol növekvő az $f(x)=3x^4+12x^3$ függvény?

A $(-\infty,-3)$ intervallumon.

A $(-\infty,0)$ intervallumon.

A $(-3,\infty)$ intervallumon. (X)

A $(0,\infty)$ intervallumon.

2. kérdés: Hol csökkenő az $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ függvény?

A $(-\infty,-1)$ és $(1,\infty)$ intervallumokon.

A $(-\infty,-1)$ és $(0,1)$ intervallumokon.

A $\left(-1,0\right)$ és $\left(1,\infty\right)$ intervallumokon.
A $\left(-1,0\right)$ és $\left(0,1\right)$ intervallumokon. (X)

3. kérdés: Hol növekvő az f függvény, ha deriváltja $f'\left(x\right)=\left(x-1\right)^3\left(x+8\right)$**?** Az f ugyanott értelmezhető ahol f'.

A $\left(-\infty,-8\right)$ és $\left(1,\infty\right)$ intervallumokon. (X)
A $\left(-\infty,1\right)$ intervallumon.
A $\left(-8,\infty\right)$ intervallumon.
A $\left(-8,1\right)$ intervallumon.

4. kérdés: Hol csökkenő az f függvény, ha deriváltja $f'\left(x\right)=\dfrac{x-5}{\left(x+2\right)^2}$**?** Az f ugyanott értelmezhető ahol f'.

A $\left(-\infty,-2\right)$ és $\left(2,5\right)$ intervallumokon. (X)
A $\left(-\infty,5\right)$ intervallumon.
A $\left(-2,5\right)$ és $\left(5,\infty\right)$ intervallumokon.
A $\left(-2,\infty\right)$ intervallumon.

5. kérdés: Hol és milyen jellegű szélsőértéke van az f függvénynek, ha deriváltja $f'\left(x\right)=\left(x-7\right)^3\ln x$? Az f ugyanott értelmezhető ahol f'.

Az $x=1$ és $x=7$ helyeken lokális minimuma van.
Az $x=1$ helyen lokális minimuma, az $x=7$ helyen lokális maximuma van.
Az $x=1$ és $x=7$ helyeken lokális maximuma van.
Az $x=1$ helyen lokális maximuma, az $x=7$ helyen lokális minimuma van. (X)

Elméleti összefoglaló: Az eddigiekben megismertük azt a módszert, mellyel függvényeket monotonitás és szélsőérték szempontjából vizsgálni tudunk. Most foglalkozzunk azzal, hogyan tudjuk alkalmazni ezt a módszert a lecke elején vázolt problémákhoz hasonló esetekben, melyeket szöveges szélsőérték feladatoknak nevezhetünk. Az ilyen feladatokban első lépésként fel kell írnunk, egy általunk választott független változó függvényében azt a mennyiséget, aminek a szélsőértékét keressük. Ezután meg kell határozni a feladat feltételeiből, hogy a független változó milyen értékeket vehet fel. Az így kapott, szöveg szerinti értelmezési tartományon kell aztán megkeresnünk a függvény szélsőértékeit a korábban megismert módon. A módszerrel az alábbi kidolgozott feladatokon keresztül ismerkedünk meg. Megoldjuk majd a lecke elején vázolt problémát is, de előbb egyszerűbb feladatokkal foglalkozunk.

Kidolgozott feladatok:

6. feladat: Mekkorának kell választani egy $20\,\text{cm}$ kerületű téglalap oldalait, hogy területe maximális legyen? Mekkora ez a maximális terület?

Megoldás: Jelöljük a téglalap egyik oldalát x-szel, a másikat pedig y-nal.
Ekkor a téglalap területe: $T = xy$.
Így felírva a területet, két változó mennyiség szerepel. Azonban a két változó között kapcsolat van, hiszen a kerület $20\,\text{cm}$. Írjuk fel a kerületet az oldalakkal.
$K = 20 = 2x + 2y$
Ebből az összefüggésből az egyik változó, pl. y kifejezhető.
$y = 10 - x$
Ha pedig ezután behelyettesítünk y helyére a területet leíró összefüggésben, akkor már egyváltozós függvényt kapunk. Ekkor már jelölhetjük azt is, hogy a terület az x változó függvénye.
$T(x) = x(10 - x) = 10x - x^2$
Ezzel olyan függvényt kaptunk, ami a terület változását írja le az egyik oldal függvényében.
Határozzuk meg ezután, hogy milyen határok között vehet fel értékeket a változó.
Nyilvánvaló, hogy az $x > 0$ feltételnek teljesülni kell, hiszen egy téglalap oldala csak pozitív lehet. Az x-nek azonban 10-nél kisebbnek is kell lennie, hiszen a téglalap másik oldala $10 - x$, és ennek is pozitívnak kell lenni. Így a változóra a $0 < x < 10$ feltételt kapjuk. Ezen a halmazon kell keresnünk a fenti $T(x)$ függvény maximumát. Ehhez állítsuk elő a függvény deriváltját.
$T'(x) = 10 - 2x$
Megoldjuk a $T'(x) = 0$ egyenletet.
$10 - 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5$
A deriváltnak a zérushelye a $(0,10)$ intervallumba esik, így szóba jöhet, mint lehetséges maximum hely. Annak eldöntésére, hogy az $x = 5$ helyen valóban maximuma van-e a területnek, célszerű elkészíteni a szokásos táblázatot.
Az első sor kitöltésekor vegyük figyelembe a $0 < x < 10$ feltételt.
A derivált előjelének vizsgálatát immár nem részletezzük, mert nyilvánvaló, hogy melyik intervallumon pozitív ill. negatív a derivált.

x	$(0,5)$	5	$(5,10)$
$T'(x)$	$+$	0	$-$
$T(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

Az $x = 5$ helyen tehát lokális maximuma van a függvénynek. Sőt ez a $0 < x < 10$ feltétel mellett nem csak lokális maximum, hanem ezen a halmazon ez globális maximum is, hiszen $x < 5$ esetén végig nő a függvény, $x > 5$ esetén pedig végig csökken.
A terület tehát akkor lesz maximális, ha az egyik oldal 5 cm hosszúságú. Persze ekkor a másik oldal hossza is 5 cm, azaz a téglalap ekkor négyzet.
A maximális területet kell még meghatároznunk. Helyettesítsük be a maximum helyét a függvénybe.
$T_{\max} = T(5) = 5(10 - 5) = 25$
A terület maximumának értéke tehát $25\ \text{cm}^2$.

Megjegyzés: Az ilyen feladatokban nem egyértelmű, hogy mit lesz majd a legjobb független változónak tekinteni. Jelen feladatban elég egyértelmű volt, hogy a téglalap egyik oldalát célszerű választani, de eljárhattunk volna más módon is. Mivel a két oldal összege 10, így az egyik oldal ugyanannyival rövidebb 5-nél, mint amennyivel a másik hosszabb 5-nél. Választhattuk volna változónak ezt a mennyiséget is, amivel az oldalak az 5-től eltérnek. Természetesen ekkor másik függvény írja le területet, és más a szöveg szerinti értelmezési tartomány is. Ennek megmutatása végett megoldjuk most a feladatot másik módon is.

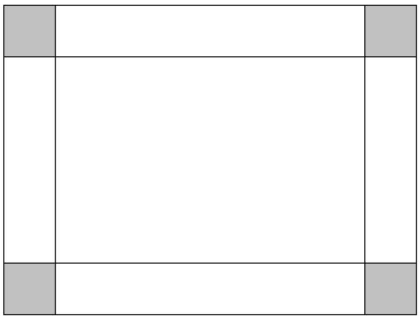
Jelölje a téglalap két oldalát a és b. Tegyük fel, hogy a a nem rövidebb oldal, b pedig a nem hosszabb oldal, azaz $a \geq b$.
Jelölje x az oldalak hosszának 5-től való eltérését.
Ekkor $a = 5 + x,\ b = 5 - x$.
A téglalap terület: $T = ab$, amibe behelyettesítve a fentieket, egy függvényt kapunk, aminek változója x lesz.
$T(x) = (5 + x)(5 - x) = 25 - x^2$
Ne feledkezzünk el annak vizsgálatáról, hogy a szöveg milyen értékeket enged meg a változóra. Jelen esetben $0 \leq x$, hiszen egy eltérés nem lehet negatív, $x < 5$, mert a b oldalnak, azaz $5 - x$-nek is pozitívnak kell lenni. Ez együttesen $0 \leq x < 5$, vagy $x \in [0,5)$ formában írható. Amint látható, most olyan intervallumon keressük a maximumot, aminek egyik vége zárt, másik vége nyitott.
Vegyük a területfüggvény deriváltját.
$T'(x) = -2x$
Itt kell felhívnunk azonban a figyelmet arra, hogy a derivált csak a T függvény értelmezési tartományának belső pontjaiban értelmezhető, így a derivált esetén már $0 < x < 5$, azaz $x \in (0,5)$.
Ha megoldjuk a $T'(x) = 0$ egyenletet, ami $-2x = 0$, akkor abból $x = 0$ következik.
Ez azonban nem eleme T' értelmezési tartományának. Ennek ellenére olyan érzésünk támadhat, hogy ha van szélsőérték, akkor az most csak az $x = 0$ esetén lehet. Ennek igazolására készítsünk táblázatot. Az $x = 0$ értéket kezeljük külön, és itt a derivált sorában azt tüntetjük fel, hogy az nem értelmezett.

x	0	$(0,5)$
$T'(x)$	nem értelmezett	neg. $(-)$
$T(x)$	maximum	$\searrow$

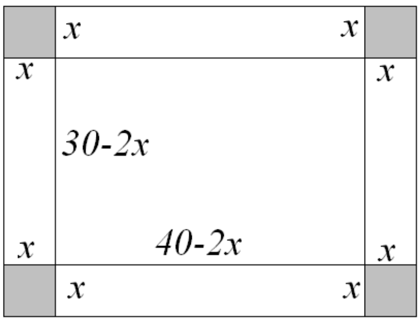
A táblázatból leolvasható, hogy a függvény végig csökken, s ebből következően a maximumát az értelmezési tartomány alsó határán, azaz $x = 0$ esetén veszi fel. Megkaptuk tehát most is, hogy akkor van szélsőérték, ha a téglalap négyzet.
Megjegyezzük, hogy ha a második megoldásunk során nem éltünk volna az $a \geq b$ feltevéssel, akkor x negatív értékeket is felvehetett volna. Ekkor egyrészt a $-5 < x$ feltételnek kellett volna teljesülni amiatt, hogy az a oldalnak, azaz $x + 5$-nek pozitívnak kell lenni. Másrészt az $x < 5$ feltételnek kell fennállni, mert a b oldalnak, azaz $5 - x$-nek pozitívnak kell lenni. A kettőből együttesen kapjuk, hogy $-5 < x < 5$, azaz $x \in (-5,5)$. Ekkor ugyanúgy az értelmezési tartomány belső pontjában kapjuk a szélsőértéket, mint az első megoldásunkban.
A fentiekből jól látható, hogy a független változó megválasztása nagyban befolyásolja a

feladat megoldásának további részét. Arra is felhívjuk a figyelmet, hogy a szélsőértéket nagyon sok esetben a derivált alkalmazása nélkül is meghatározhatjuk. Ha például a második megoldásunkban kapott területet leíró függvényt $T(x)=25-x^2$ vizsgáljuk, akkor egyértelműen $x=0$ esetén van maximuma a függvénynek. Ennek oka, hogy egy konstansból vonunk x^2-et, aminek legkisebb értéke a 0, az $x=0$ esetben. Így amikor x^2 a legkisebb, akkor lesz $25-x^2$ a legnagyobb. Sok esetben viszont nem találunk ilyen elemi megoldást, s így ilyenkor nem tudjuk elkerülni a derivált alkalmazását.

7. feladat: Egy téglalap alakú lemezből, melynek oldalai $30\,\text{cm}$ és $40\,\text{cm}$ hosszúak, mindegyik sarkánál négyzet alakú darabokat vágunk ki az ábrán látható módon. A megmaradt lemez füleit felhajtjuk, és az éleket összehegesztve felül nyitott téglatest alakú dobozt kapunk. Mekkorának válasszuk a kivágott négyzetek oldalát, ha azt szeretnénk, hogy a doboz térfogata maximális legyen?



Megoldás: Jelöljük a kivágott kis négyzetek oldalát x-szel, és tekintsük az alábbi ábrát.



Ezen láthatjuk, hogy dobozunk alapja egy $30-2x$, és $40-2x$ oldalú téglalap, magassága pedig x. Téglatest térfogata a három oldal szorzatából kapható, így felírhatjuk a doboz térfogatát az x változó függvényében.

$V(x)=(30-2x)(40-2x)x=1200x-140x^2+4x^3$

Határozzuk meg, hogy milyen intervallumon belül mozoghat x értéke. Egyrészt nyilván $0<x$, másrészt $x<15$, mert a doboz alapjának rövidebb oldala, azaz $30-2x$ pozitív kell legyen. A függvényünk szöveg szerinti értelmezési tartománya tehát $0<x<15$, azaz $x\in(0,15)$. A szélsőértéket csak ezen a halmazon keressük.

Deriváljuk a függvényt.

$V'(x)=1200-280x+12x^2$

Oldjuk meg a $V'(x)=0$ egyenletet.

$1200-280x+12x^2=0 \Leftrightarrow 3x^2-70x+300=0$

Ez egy másodfokú egyenlet, melynek gyökei az alábbiak.

$$x_{1,2}=\frac{70\pm\sqrt{70^2-4\cdot 3\cdot 300}}{2\cdot 3}=\frac{70\pm\sqrt{1300}}{6}=\begin{cases} x_1=\dfrac{35+\sqrt{325}}{3}=\dfrac{35+5\sqrt{13}}{3}\approx 17.68 \\ x_2=\dfrac{35-\sqrt{325}}{3}=\dfrac{35-5\sqrt{13}}{3}\approx 5.66 \end{cases}$$

A két megoldás közül csak $x_2=\frac{35-5\sqrt{13}}{3}$ esik a $(0,15)$ intervallumba ezt kell vizsgálni. Készítsük el a szokásos táblázatot.

x	$\left(0,\frac{35-5\sqrt{13}}{3}\right)$	$\frac{35-5\sqrt{13}}{3}$	$\left(\frac{35-5\sqrt{13}}{3},15\right)$
$V'(x)$	$+$	0	$-$
$V(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

A $V'(x)$ sorában az előjeleket például a következő módon kaphattuk meg. Választunk egy számot a $\left(0,\frac{35-5\sqrt{13}}{3}\right)$ intervallumból, mondjuk az 1-et, mert azzal könnyű lesz számolni.

Ezt behelyettesítjük $V'(x)$-be.

$V'(1)=1200-280\cdot 1+12\cdot 1^2=932>0$

Hasonlóan választunk egy számot a $\left(\frac{35-5\sqrt{13}}{3},15\right)$ intervallumból. Legyen ez mondjuk a 10, mert ezzel is könnyű lesz számolni.

$V'(10)=1200-280\cdot 10+12\cdot 10^2=-2800<0$

Ezután már kijelenthetjük, hogy az $x=\frac{35-5\sqrt{13}}{3}$ helyen lokális maximuma van a $V(x)$ függvénynek. A $(0,15)$ intervallumon ez nem csak lokális, hanem globális maximum is, hiszen $x=\frac{35-5\sqrt{13}}{3}$ előtt végig nő a függvény, $x=\frac{35-5\sqrt{13}}{3}$ után pedig végig csökken.

8. feladat: Két pozitív szám szorzata 100. Melyik ez a két szám, ha összegük minimális? Mekkora a minimális összeg?

Megoldás: Legyen a két szám x és y. Tudjuk, hogy $xy=100$. Fejezzük ki ebből y-t.

$$y=\frac{100}{x}$$

Írjuk a két szám összegét ezután x függvényeként.

$$f(x)=x+\frac{100}{x}$$

Ennek a függvénynek kell keresnünk a minimumát a $(0,\infty)$ intervallumon.

Deriváljuk a függvényt.

$$f'(x)=\left(x+\frac{100}{x}\right)'=\left(x+100x^{-1}\right)'=1+100(-1)x^{-2}=1-\frac{100}{x^2}$$

Oldjuk meg az $f'(x)=0$ egyenletet.

$$1-\frac{100}{x^2}=0 \iff x^2=100 \iff x=\pm 10$$

Minimum szempontjából nyilván csak az $x=10$ esettel kell foglalkoznunk, hiszen most $x>0$.
Készítsük el a már jól ismert táblázatot.

x	$(0,10)$	10	$(10,\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Az $f'(x)$ sorában az előjeleket például $x=1$ és $x=100$ deriváltba történő helyettesítésével kaphatjuk.

$$f'(1)=1-\frac{100}{1^2}=-99<0$$

$$f'(100)=1-\frac{100}{100^2}=0.99>0$$

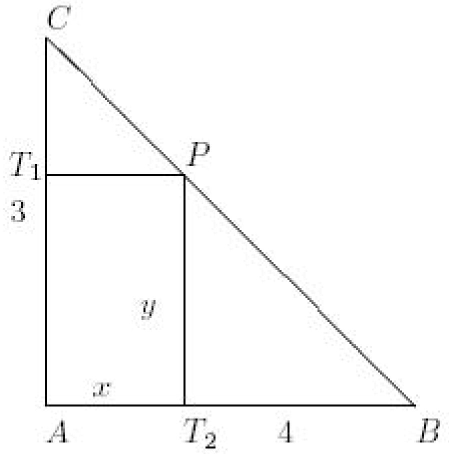
Amint látható, a függvénynek az $x=10$ helyen lokális minimuma van, ami pozitív x-ekre egyben globális minimum is.
Határozzuk meg ezután a másik számot, tehát y-t is.

$$y=\frac{100}{x}=\frac{100}{10}=10$$

Az összeg tehát akkor lesz minimális, ha mindkét szám 10. Ekkor az összegük 20, ez a minimális összeg.

9. feladat: Adott egy 3 és 4 egység befogójú derékszögű háromszög. Tekintsük azokat a háromszögbe írható téglalapokat, amelyeknek egyik csúcsa a háromszög derékszöge, az ezzel szemközti csúcs pedig az átfogóra esik. A legnagyobb területű ilyen téglalapnak mekkorák az oldalai?

Megoldás: Készítsünk egy ábrát a háromszögről és a belé írt téglalapról.



A téglalap x -szel és y -nal jelölt oldala között most hasonlóság alapján lehet összefüggést találni. A PT_2B és CAB derékszögű háromszögek hasonlóak, ezért

$$\frac{y}{4-x}=\frac{3}{4}$$

Rendezzük ezt y -ra.

$$y=\frac{3}{4}(4-x)=3-\frac{3}{4}x$$

Ezt felhasználva felírhatjuk a téglalap területét az x függvényében.

$$T(x)=x\left(3-\frac{3}{4}x\right)=3x-\frac{3}{4}x^2$$

Az x változó most nyilván a $(0,4)$ intervallumba esik, így ezen a halmazon keressük a függvény maximumát.
Deriváljuk a függvényt.

$$T'(x)=3-\frac{3}{2}x$$

Megoldjuk a $T'(x)=0$ egyenletet.

$$3-\frac{3}{2}x=0 \iff x=2$$

A szokásos táblázat segítségével megvizsgáljuk, hogy ezen a helyen valóban van-e maximuma a függvénynek.

x	$(0,2)$	2	$(2,4)$
$T'(x)$	$+$	0	$-$
$T(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

A második sorban T' előjelét például $x=1$ és $x=3$ helyettesítésével vizsgálhattuk.

$$T'(1)=3-\frac{3}{2}\cdot 1=\frac{3}{2}>0$$

$$T'(3)=3-\frac{3}{2}\cdot 3=-\frac{3}{2}<0$$

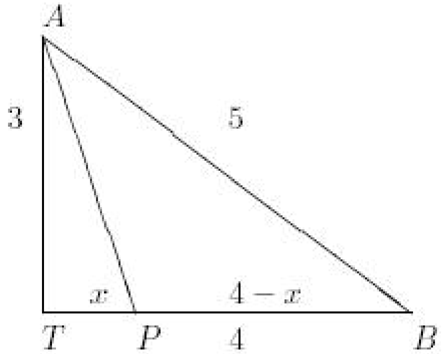
Amint látható, az $x=2$ helyen lokális maximuma van a függvénynek, ami egyben globális maximum is.
Már csak a téglalap másik oldalát kell kiszámolnunk.

$$y=3-\frac{3}{4}x=3-\frac{3}{4}\cdot 2=\frac{3}{2}$$

A maximális területű téglalap oldalai tehát 2 és $\frac{3}{2}$ hosszúságúak.

10. feladat: Egy ember 3 km-re van egy csónakban az egyenes tóparttól. Egy parton elhelyezkedő, tőle 5 km távolságban lévő helyre akar a lehető legrövidebb idő alatt eljutni. Evezni $v_1=3$ km/h, gyalogolni $v_2=6$ km/h sebességgel tud. Mennyi az a legrövidebb idő, ami alatt eljuthat a céljába?

Megoldás: Készítsünk egy ábrát!



Az ember helyét a csónakkal a tavon A jelöli, az egyenes tópart a T és B pontok által meghatározott egyenes, melynek B pontjába szeretne emberünk eljutni. Egy lehetőség a B pontba jutásra, hogy emberünk az AB szakasz mentén egyenes odaevez B-be. De valószínűleg nem ez lesz időben a legrövidebb. Mivel a parton gyorsabban halad mint a vízen, várhatóan jobban jár, ha a partnak valamilyen közelebbi P pontjáig evez, majd onnan gyalog folytatja az utat. A partra érkezés helye, azaz a P pont a legrövidebb idő esetén nyilvánvalóan a T és B pontok közé esik.
Válasszuk független változónak a P pont T-től való távolságát, és jelöljük ezt x-szel.
Próbáljuk meg ezzel kifejezni az A pontból B pontba jutás idejét.
Elsőként határozzuk meg a TB szakasz hosszát. Ez a Pitagorasz-tétel alapján nyilván 4 km.
(A 3, 4, 5 a legismertebb pitagoraszi számhármas.)
Bontsuk az utat két szakaszra, első az evezés, a második a gyaloglás.
Az első szakasz hosszát ismét a Pitagorasz-tételből kapjuk, amit az ATP derékszögű háromszögben az AP átfogóra írunk fel. AP hosszát jelölje s_1.

$$s_1=\sqrt{x^2+3^2}=\sqrt{x^2+9}$$

Az ennek megtételéhez szükséges időt, amit jelöljünk t_1-gyel, megkapjuk, ha ezt osztjuk az evezés sebességével.

$$t_1=\frac{s_1}{v_1}=\frac{\sqrt{x^2+9}}{3}$$

Ezzel órában mérve kapjuk meg AP szakaszon végigevezés idejét.

Most nézzük az út második szakaszát. Az itt megtett távolság a PB szakasz hossza, amit jelöljön s_2, nyilván $4-x$ km. Az ennek megtételéhez szükséges időt jelölje t_2. Az út gyalogos részének megtételéhez szükséges idő is az út és sebesség hányadosként kapható, de nyilván most a gyaloglás sebességével kell osztanunk.

$$t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{4-x}{6}$$

A két időt összeadva felírhatjuk a teljes út megtételéhez szükséges időt az x változó függvényében.

$$t(x) = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{4-x}{6}$$

Ennek a függvénynek keressük a minimumát a $0 \le x < 4$ halmazon.
Állítsuk elő a függvény deriváltját.

$$t'(x) = \left(\frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{4-x}{6}\right)' = \left(\frac{1}{3}\left(x^2+9\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{6} - \frac{1}{6}x\right)' =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(x^2+9\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}\frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{6}$$

Megoldjuk $t'(x) = 0$ egyenletet.

$$\frac{1}{3}\frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{6} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \sqrt{x^2+9} \Rightarrow$$

$$4x^2 = x^2 + 9 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

A $-\sqrt{3}$ hamis gyök, így csak a $\sqrt{3}$-mal kell foglalkoznunk.
Elkészítjük a szokásos táblázatot.

x	$\left(0,\sqrt{3}\right)$	$\sqrt{3}$	$\left(\sqrt{3},4\right)$
$t'(x)$	$-$	0	$+$
$t(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

A második sorban az előjeleket például $x=1$ és $x=2$ helyettesítésével kapjuk.

$$t'(1) = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{1^2+9}} - \frac{1}{6} \approx -0.06 < 0$$

$$t'(2) = \frac{1}{3}\frac{2}{\sqrt{4^2+9}} - \frac{1}{6} \approx 0.018 > 0$$

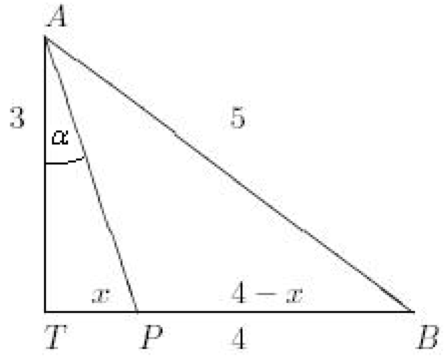
A függvénynek tehát lokális minimuma van az $x = \sqrt{3}$ helyen, ami egyben globális minimum is a $(0,4)$ intervallumon.
Még a legrövidebb időt kell kiszámolnunk.

$$t_{\min} = t\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+9}}{3} + \frac{4-\sqrt{3}}{6} \approx 1.53$$

Tehát emberünknek az A pontból B pontba eljutás legalább 1.53 óráig tart.

Vázlatosan megoldjuk a feladatot egy másik úton is.

Válasszuk most független változónak az ATP derékszögű háromszög A csúcsnál lévő szögét, és jelöljük ezt α-val.



A TP szakasz hossza, ami az evezéssel megtett út, ekkor $s_1 = \dfrac{3}{\cos\alpha}$. Az ennek megtételéhez szükséges idő $t_1 = \dfrac{s_1}{v_1} = \dfrac{\frac{3}{\cos\alpha}}{3} = \dfrac{1}{\cos\alpha}$.

A PB szakasz hossza, ami a gyalogolva megtett út, ekkor $s_2 = 4 - 3\,\mathrm{tg}\,\alpha$. (Az x távolság az ATP derékszögű háromszögből kifejezhető, s $x = 3\,\mathrm{tg}\,\alpha$.)

A gyaloglásra fordított idő $t_2 = \dfrac{s_2}{v_2} = \dfrac{4 - 3\,\mathrm{tg}\,\alpha}{6} = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{2}\mathrm{tg}\,\alpha$.

Az út megtételéhez szükséges teljes idő az alábbi.

$$t(\alpha) = t_1 + t_2 = \frac{1}{\cos\alpha} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\mathrm{tg}\,\alpha$$

Az α radiánban mért szög nyilván 0 és a $TAB\sphericalangle = \mathrm{arctg}\dfrac{4}{3} \approx 0.93$ közé esik. Ezen értékek között keressük a $t(\alpha)$ függvény minimumát.

Deriváljuk a függvényt.

$$t'(\alpha) = \left(\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\mathrm{tg}\,\alpha\right)' = \frac{0\cdot\cos\alpha - 1(-\sin\alpha)}{(\cos\alpha)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(\cos\alpha)^2} =$$

$$= \frac{\sin\alpha}{(\cos\alpha)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(\cos\alpha)^2} = \frac{\sin\alpha - \frac{1}{2}}{(\cos\alpha)^2}$$

Ebből következik, hogy $t'(\alpha) = 0$ akkor teljesül, ha $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$, amiből $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ következik.

A megoldás befejezéshez el kell készíteni a táblázatot, amelyből megállapítható, hogy ezen a helyen valóban minimuma van a függvénynek, majd kiszámolható a legrövidebb idő is. Ezeket a lépéseket már nem hajtjuk végre, hanem az olvasóra bízzuk. Természetesen így is ugyanarra az eredményre jutunk.

Ellenőrző kérdések:

6. kérdés: Egy tó egyenes partján szeretnénk elkeríteni egy téglalap alakú telket. Ehhez 200 m drótfonat áll rendelkezésünkre. A legnagyobb területű téglalapot szeretnénk elkeríteni úgy, hogy a tó felőli oldalon nem lesz kerítés.

Ha a téglalap tópartra merőleges oldalát választjuk változónak, és x-szel jelöljük, akkor az alábbi függvénnyel írható le a terület:

$T(x) = 200x - x^2$

$T(x) = 200x - 2x^2$ (X)

$T(x) = 200x + x^2$

$T(x) = 200x + 2x^2$

7. kérdés: Az előző kérdésben a maximális területű telek oldalai az alábbiak:

A partra merőleges oldal 40 m, a parttal párhuzamos oldal 120 m.
A partra merőleges oldal 50 m, a parttal párhuzamos oldal 100 m. (X)
A partra merőleges oldal 55 m, a parttal párhuzamos oldal 90 m.
A partra merőleges oldal $\frac{200}{3}$ m, a parttal párhuzamos oldal $\frac{200}{3}$ m.

8. kérdés: Két pozitív szám összege 1. A szorzatuk maximumát keressük. Ekkor a következő függvényt kell vizsgálnunk:

$f(x) = (x-1)x$

$f(x) = x - x^2$ (X)

$f(x) = \left(\frac{1}{2} - x\right)^2$

$f(x) = x^2 - \frac{1}{4}$

9. kérdés: Az előző kérdésben a két szám szorzatának maximuma az alábbi:

$\frac{1}{4}$ (X)

$\frac{1}{3}$

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{\sqrt{2}}$

10. kérdés: A $[0,1]$ intervallumot egy belső pontjával két részre bontjuk, és mindegyik rész fölé négyzetet emelünk. A négyzetek területösszegének minimumát szeretnénk meghatározni. Melyik függvényt kell vizsgálnunk, ha független változónak az egyik szakasz hosszát választjuk?

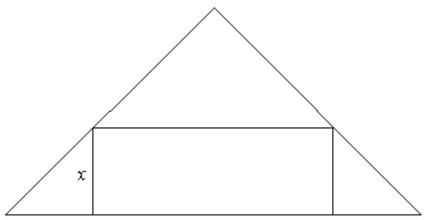
$f(x) = x^2 - 2x + 2$

$f(x) = 2x^2 - 2x + 2$

$f(x) = 2x^2 - 2x + 1$ (X)

$f(x) = 2x^2 + 1$

11. kérdés: Egy egységnyi befogójú, egyenlőszárú derékszögű háromszög átfogójára téglalapot írunk úgy, hogy két csúcsa az átfogóra, a másik két csúcsa pedig egy-egy befogóra esik.



Keressük a legnagyobb területű ilyen téglalapot. Ha a téglalap átfogóra merőleges oldalát választjuk független változónak, és jelöljük x-szel, akkor melyik függvényt kell vizsgálnunk?

$f(x) = (1 - x)x$

$f(x) = (1 - 2x)x$

$f(x) = \left(\sqrt{2} - x\right)x$

$f(x) = \left(\sqrt{2} - 2x\right)x$ (X)

12. kérdés: Az előző kérdésben a téglalap maximális területe:

$\frac{1}{4}$ (X)

$\frac{1}{3}$

$\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\frac{\sqrt{2}}{3}$

További kidolgozott feladatok:

11. feladat: Vizsgáljuk meg monotonitás és szélsőérték szempontjából az $f(x)=\dfrac{x^2}{(x+1)^2}$ függvényt!

Megoldás: Amikor egy függvényt valamilyen szempontból vizsgálunk, akkor elsőként mindig az értelmezési tartományt kell meghatároznunk. Jelen esetben ki kell kötnünk, hogy a nevező nem lehet 0, s ebből az következik, hogy $x \neq -1$. A függvény értelmezési tartománya tehát: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

A monotonitás vizsgálata azt jelenti, hogy meghatározzuk, hol nő, hol csökken a függvény. Ehhez elő kell állítanunk a függvény deriváltját. Alkalmazzuk a törtekre vonatkozó deriválási szabályt.

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(x+1)^2-x^2\cdot 2(x+1)}{\left((x+1)^2\right)^2}$$

Ez ilyen formában nagyon csúnyán néz ki, ezért próbáljunk alakítani rajta. Emeljünk ki a számlálóban, amit csak lehet, a nevezőt pedig írjuk egyetlen hatványként.

$$f'(x)=\frac{2x(x+1)[(x+1)-x]}{(x+1)^4}$$

Ezután egyszerűsítsünk, és a szögletes zárójelen belül vonjunk össze.

$$f'(x)=\frac{2x}{(x+1)^3}$$

A derivált minél egyszerűbb alakra hozása azért fontos, mert ezután meg kell oldanunk az $f'(x)=0$ egyenletet, valamint vizsgálnunk kell majd a derivált előjelét. Ha a derivált bonyolult alakban van felírva, akkor mind az egyenlet megoldása, mind az előjel vizsgálata nehézségekbe ütközik. Általában elmondhatjuk, hogy ha lehetőség van kiemelésre, akkor ezzel a lehetőséggel élni kell, s törtek esetében egyszerűsítsünk, ha erre lehetőség van. Most oldjuk meg az $f'(x)=0$ egyenletet, hogy megkapjuk, hol lehet szélsőértéke a függvénynek.

$$\frac{2x}{(x+1)^3}=0$$

Tört csak úgy lehet egyenlő 0-val, ha számlálója 0, így egyszerűbb egyenletet kapunk.

$2x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0$

Ezután a szokásos módon táblázatot készíthetünk. Elsőként csak az első sort töltsük ki, melyben feltüntetjük az értelmezési tartomány részeit, melyeken belül már nem változik a derivált előjele. Az értelmezési tartományt a derivált zérushelye és az értelmezési tartományban levő szakadás bontja részekre. A szakadási hely oszlopában X-ekkel jelölhetjük, hogy ott a függvény nem értelmezett.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,\infty)$
$f'(x)$		X			
$f(x)$		X			

Most vizsgáljuk meg a derivált előjelét az egyes részeken. A derivált tört, így külön vizsgálhatjuk a számláló és a nevező előjelét, amiből következtethetünk a tört előjelére. Ha $x<-1$, akkor a számláló, azaz $2x$ negatív, és a nevező, azaz $(x+1)^3$ is negatív, így a derivált ekkor pozitív. Ebben az esetben tehát nő a függvény.

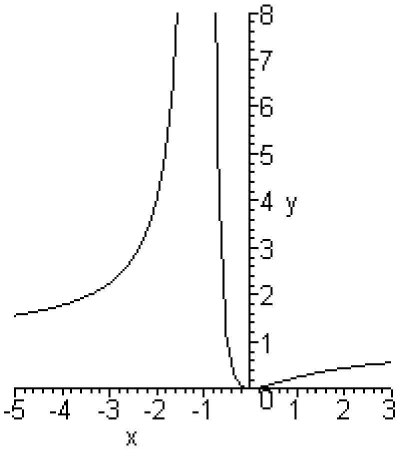
Ha $-1<x<0$, akkor $2x$ negatív, de $(x+1)^3$ pozitív, így negatív lesz a derivált. A függvény tehát ekkor csökken.
Ha $0<x$, akkor $2x$ is pozitív, és $(x+1)^3$ is pozitív, azaz pozitív lesz a derivált. Ebből következően itt nő a függvény.
Az $x=0$ helyen a derivált előjele megváltozik, így itt szélsőértéke van a függvénynek. Mivel a derivált negatívból pozitívba megy át ezen a helyen, így itt lokális minimuma van a függvénynek.
Készítsük el a teljes táblázatot.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,\infty)$
$f'(x)$	+	X	−	0	+
$f(x)$	↗	X	↘	lok. min.	↗

A táblázattal így megadtuk, hogy hol nő, és hol csökken a függvény, valamint hol, milyen jellegű szélsőértéke van. Már csak egyetlen feladatunk van, megadni a szélsőérték nagyságát. Helyettesítsük be a függvénybe azt a helyet, ahol szélsőértéke van.

$$f(0)=\frac{0^2}{(0+1)^2}=0$$

A lokális minimum értéke tehát 0 .
A függvény grafikonja az alábbi ábrán látható.



12. feladat: Vizsgáljuk meg monotonitás és szélsőérték szempontjából az $f(x)=x^2e^{-2x}$ függvényt!

Megoldás: Határozzuk meg a legbővebb halmazt, amin értelmezhető a függvény. Nem kell kikötést tennünk, így $D_f=\mathbb{R}$.
Deriváljuk a függvényt. Alkalmazzuk a szorzatra vonatkozó deriválási szabályt, és ne feledkezzünk el arról, hogy szorzat második tényezője összetett függvény.

$$f'(x)=2xe^{-2x}+x^2e^{-2x}\cdot(-2)$$

Emeljük ki amit lehet.

$$f'(x)=2xe^{-2x}(1-x)$$

Oldjuk meg az $f'(x)=0$ egyenletet.

$$2xe^{-2x}(1-x)=0$$

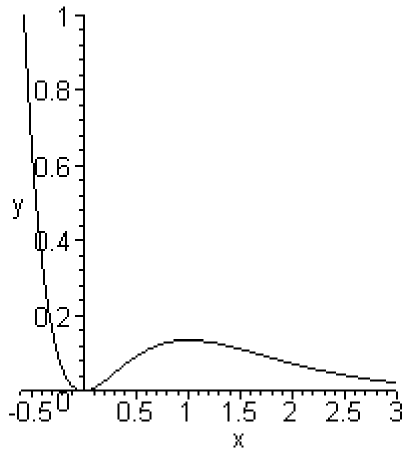
Egy három tényezős szorzat egyenlő 0-val, ami csak úgy lehetséges, ha valamelyik tényező 0. Így három egyszerűbb egyenletet kapunk.
$x=0$, vagy $e^{-2x}=0$, vagy $(1-x)=0$.
Az első egyenlettel semmit sem kell tenni, a harmadiknak pedig $x=1$ megoldása.
A második egyenletnek nincs megoldása, mert exponenciális függvény csak pozitív értékeket vesz fel, azaz $e^{-2x}>0$ minden x esetén, így $e^{-2x}\neq 0$.
A derivált zérushelyeinek ismertében készítsük el a táblázatot, egyelőre csak az első sort kitöltve.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
$f'(x)$					
$f(x)$					

Vizsgáljuk meg a derivált előjelét az egyes intervallumokon.
$(-\infty,0)$: $f'(-1)=2(-1)e^{-2(-1)}(1-(-1))=-4e^{2}<0$
$(0,1)$: $f'(0.5)=2\cdot 0.5e^{-2\cdot 0.5}(1-0.5)=0.5e^{-1}>0$
$(1,\infty)$: $f'(2)=2\cdot 2e^{-2\cdot 2}(1-2)=-4e^{-4}<0$
Megjegyezzük, hogy a derivált előjelét a szorzat egyes tényezőinek előjeléből is könnyen vizsgálhatjuk. Például a $(-\infty,0)$ intervallumon x nyilván negatív, az e^{-2x} mindig pozitív, az $1-x$ szintén pozitív. Mivel a három tényezőből csak egy negatív, így negatív lesz a szorzat is.
Hasonlóan járhatunk el a másik két intervallumon is.
Most töltsük az egész táblázatot.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	lok. min.	↗	lok. max.	↘

A táblázatból látható, hogy a függvény a $(-\infty,0)$ és $(1,\infty)$ intervallumokon csökken, a $(0,1)$ intervallumon pedig nő. Az $x=0$ helyen lokális minimuma, az $x=1$ helyen pedig lokális maximuma van.
Határozzuk meg a minimum és maximum értékét is.
A lokális minimum értéke: $f(0)=0^{2}e^{-2\cdot 0}=0$.
A lokális maximum értéke: $f(1)=1^{2}e^{-2\cdot 1}=e^{-2}\approx 0.135$.
Az alábbi ábrán a függvény grafikonja látható.



13. feladat: Vizsgáljuk meg monotonitás és szélsőérték szempontjából az $f(x) = x^2 \ln\left(x^2\right)$ függvényt!

Megoldás: Határozzuk meg a legbővebb halmazt, amin értelmezhető a függvény. A logaritmus miatt kell kikötést tennünk. Mivel csak pozitív számoknak létezik logaritmusa, így kikötjük, hogy $x^2 > 0$. Ez minden 0 -tól különböző szám esetén teljesül, így $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Előállítjuk a függvény deriváltját. Szorzatot deriválunk, melynek második tényezője összetett függvény.

$$f'(x) = 2x \ln\left(x^2\right) + x^2 \frac{1}{x^2} 2x = 2x \ln\left(x^2\right) + 2x$$

Emeljük ki amit lehet.

$$f'(x) = 2x\left(\ln\left(x^2\right) + 1\right)$$

Oldjuk meg az $f'(x) = 0$ egyenletet.

$$2x\left(\ln\left(x^2\right) + 1\right) = 0$$

Vizsgáljuk külön a szorzat tényezőit, hogy mikor egyenlők 0 -val.
Első tényező: $x = 0$. Ez nem eleme a függvény értelmezési tartományának.
Második tényező: $\ln\left(x^2\right) + 1 = 0$. Ez átrendezve $\ln\left(x^2\right) = -1$ lesz.
A -1-et írjuk fel $\ln\left(e^{-1}\right)$ formában, így az $\ln\left(x^2\right) = \ln\left(e^{-1}\right)$ egyenletet kapjuk.
A logaritmus függvény szigorú monotonitása miatt elhagyhatjuk az egyenlet két oldaláról a logaritmust. Így kapjuk $x^2 = e^{-1} = \frac{1}{e}$.
Ennek megoldásai: $x = \pm \frac{1}{\sqrt{e}}$.
Most készítsük el a szokásos táblázatunkat. Ez most egy kicsit hosszabb lesz mint az eddigiek, hiszen a deriváltnak két zérushelye is van, és a függvény értelmezési tartományában is van szakadás. Egyelőre csak az első sort töltsük ki, és a szakadást jelöljük.

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}, 0\right)$	0	$\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \infty\right)$
$f'(x)$				X			

$f(x)$				X			

Határozzuk meg f' előjelét az egyes intervallumokon.

$\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$: $f'(-1)=2\cdot(-1)\left(\ln\left((-1)^2\right)+1\right)=-2(0+1)=-2<0$

$\left(-\frac{1}{\sqrt{e}},0\right)$: $f'\left(-\frac{1}{e}\right)=2\cdot\left(-\frac{1}{e}\right)\left(\ln\left(\left(-\frac{1}{e}\right)^2\right)+1\right)=-\frac{2}{e}(-2+1)=\frac{2}{e}>0$

$\left(0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$: $f'\left(\frac{1}{e}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{e}\right)\left(\ln\left(\left(\frac{1}{e}\right)^2\right)+1\right)=\frac{2}{e}(-2+1)=-\frac{2}{e}<0$

$\left(\frac{1}{\sqrt{e}},\infty\right)$: $f'(1)=2\cdot1\left(\ln\left(1^2\right)+1\right)=2(0+1)=2>0$

Most töltsük ki a teljes táblázatot.

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{e}},0\right)$	0	$\left(0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{e}},\infty\right)$
$f'(x)$	–	0	+	X	–	0	+
$f(x)$	↘	lok. min.	↗	X	↘	lok. min.	↗

A táblázatból látható, hogy a függvény csökken a $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ és $\left(0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ intervallumokon, nő a $\left(-\frac{1}{\sqrt{e}},0\right)$ és $\left(\frac{1}{\sqrt{e}},\infty\right)$ intervallumokon. Két lokális minimuma van az $x=\pm\frac{1}{\sqrt{e}}$ helyeken.

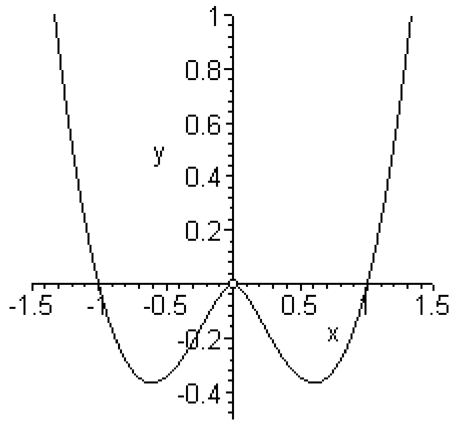
Határozzuk meg a lokális minimumok értékét is.

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2\ln\left(\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2\right)=\frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\cdot(-1)=-\frac{1}{e}\approx-0.368$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2\ln\left(\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2\right)=\frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\cdot(-1)=-\frac{1}{e}\approx-0.368$$

A két minimum értéke megegyezik.

Az alábbi ábrán a függvény grafikonja látható. Az origóban az üres karika jelzi a függvény szakadását.

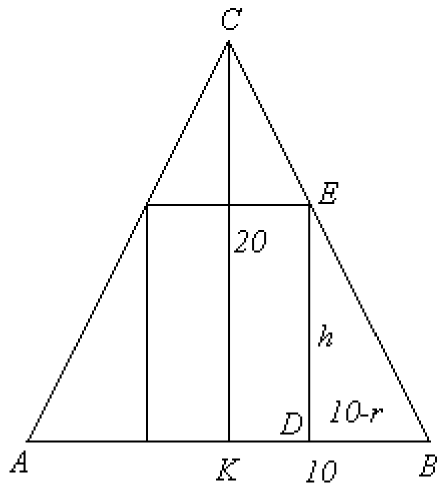


14. feladat: Egy 10 cm sugarú, 20 cm magasságú egyenes körkúpba hengert írunk úgy, hogy forgástengelye megegyezik a kúp forgástengelyével, alapköre a kúp alapkörére esik, fedőköre pedig érinti a kúp palástját. Mekkora legyen a henger sugara és magassága, hogy térfogata maximális legyen? Mekkora a maximális térfogat?

Megoldás: Jelöljük a henger sugarát r-rel, magasságát pedig h-val. Ekkor a henger térfogata, aminek szélsőértéke kell, hogy legyen, az alábbi módon írható fel:

$V_{henger} = \pi r^2 h$

Ebben két változó van, hiszen ha változik a henger sugara, akkor a magasság is változik. Amint azt korábbi feladatban tettük, itt is összefüggést keresünk a két változó között. Ehhez szükségünk lesz egy ábrára. Képzeletben vágjuk el a kúpot és a hengert egy a közös forgástengelyre illeszkedő síkkal, és a síkmetszetről készítsünk ábrát. Ezen metszeten a kúp nyilván egyenlő szárú háromszögnek látszik majd, a henger pedig egy olyan téglalapnak, amely ezen háromszögbe van írva úgy, hogy két csúcsa az alapra, másik két csúcsa pedig egy-egy szárra esik.



Az ábráról nyilvánvaló, hogy a KBC derékszögű háromszög hasonló a DBE derékszögű háromszöghöz, így a két háromszögben megegyezik a befogók aránya. Írjuk ezt fel.

$$\frac{h}{10-r} = \frac{20}{10} = 2$$

Fejezzük ki ebből h-t az r-rel.

$h = 20 - 2r$

Helyettesítsük be ezt a henger térfogatába, s így olyan függvényt kapunk, amiben már csak r lesz a változó.

$V(r) = \pi r^2 (20 - 2r) = 20\pi r^2 - 2\pi r^3$

Ennek a függvénynek kell keresnünk a maximumát. A változóra nyilván a $0 < r < 10$ feltételnek kell teljesülni. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy szigorú egyenlőtlenségek vannak, mert egyenlőség esetén a henger elfajulna. Az $r = 0$ esetben egy szakasszá, a kúp magasságává válna a henger, az $r = 10$ esetben pedig egy körlappá, a kúp alapkörévé válna. Ezután a szokott módon határozzuk meg a szélsőértéket. Állítsuk elő a térfogatfüggvény deriváltját.

$V'(r) = 40\pi r - 6\pi r^2$

Oldjuk meg a $V'(r) = 0$ egyenletet. Ehhez célszerű a deriváltat szorzattá alakítani.

$V'(r) = 2\pi r\left(20 - 3r\right) = 0$

Így nyilvánvaló, hogy az egyenletnek két megoldása van, az egyik $r = 0$, a másik pedig $r = \frac{20}{3}$. Az $r = 0$ nem felel meg a $0 < r < 10$ feltételnek, így csak a másik zérushellyel kell foglalkoznunk. Készítsük el a megszokott táblázatot, melyet töltsünk most ki egyből teljesen. A derivált előjelét például a következő módon kaphatjuk meg a két intervallumon.

$\left(0, \frac{20}{3}\right)$: $V'(1) = 40\pi \cdot 1 - 6\pi \cdot 1^2 = 34\pi > 0$

$\left(\frac{20}{3}, 10\right)$: $V'(8) = 40\pi \cdot 8 - 6\pi \cdot 8^2 = -64\pi < 0$

x	$\left(0, \frac{20}{3}\right)$	$\frac{20}{3}$	$\left(\frac{20}{3}, 10\right)$
$V'(x)$	+	0	–
$V(x)$	↗	lok. max.	↘

Látható, hogy az $r = \frac{20}{3}$ helyen lokális maximuma van a függvénynek, ami a $0 < r < 10$ feltétel mellett globális maximum is.

A henger térfogat tehát akkor maximális, ha $r = \frac{20}{3}$.

Ekkor a henger magassága a következő:

$h = 20 - 2 \cdot \frac{20}{3} = \frac{20}{3}$.

Végül a maximális térfogat:

$$V_{max} = V\left(\frac{20}{3}\right) = \pi \left(\frac{20}{3}\right)^2 \cdot \frac{20}{3} = \pi \frac{8000}{27} \approx 930.84.$$

Utolsó feladatként pedig, amint azt korábban ígértük, visszatérünk a lecke elején vázolt probléma megoldásához.

15. feladat: Egy telep üresjárási feszültsége U_0, belső ellenállása R_b. Mekkora R_k külső ellenállást kell a telepre kapcsolni, hogy a külső ellenállás teljesítménye P_k maximális legyen? Mekkora ez a maximális teljesítmény?

Megoldás: Amint az a középiskolai fizika anyagból ismert, az R_k külső ellenállás teljesítménye a rajta átfolyó áram erősségének négyzete szorozva az ellenállással, azaz $P = I^2 R_k$.
Az áram erősségét az Ohm-törvényből kapjuk.

$$I = \frac{U_0}{R_k + R_b}$$

Ezután a külső ellenállás teljesítménye:

$$P = \left(\frac{U_0}{R_k + R_b}\right)^2 R_k = U_0^{\ 2} \frac{R_k}{\left(R_k + R_b\right)^2}$$

Mivel U_0 és R_b konstansok, ebben csak az R_k külső ellenállás a változó, azaz a fenti összefüggés pontosan a teljesítményt írja le az R_k függvényében. Ezt jelölésben is hangsúlyozzuk.

$$P\left(R_k\right) = U_0^{\ 2} \frac{R_k}{\left(R_k + R_b\right)^2}$$

Az R_k külső ellenállás nyilván a $\left(0,\infty\right)$ intervallumba esik, így itt keressük ennek a függvénynek a maximumát.
Mivel a feladatban most nem szerepelnek konkrét számadatok, kicsit jobban kell figyelnünk arra, hogy melyik betű jelenti a változót az összefüggésben, és melyek konstansok. Ha valakit zavar ilyen formában a jelölés, akkor változtassa meg, és közelítse a szokásos matematika jelölésekhez. A R_k helyett használjon x-et, $P\left(R_k\right)$ helyett $f\left(x\right)$-et, az U_0 és R_b konstansok helyett pedig a-t és b-t. Így a következőt kapja: $f\left(x\right) = a^2 \frac{x}{\left(x+b\right)^2}$. Mi most nem kívánunk élni ezzel, hanem szeretnénk az eredeti jelöléssel végigvinni a megoldást.
Deriváljuk most a $P\left(R_k\right)$ függvényt az R_k változó szerint. A konstans szorzót emeljük ki a deriválás során, s alkalmazzuk a törtekre vonatkozó deriválási szabályt.

$$P'\left(R_k\right) = \left(U_0^{\ 2} \frac{R_k}{\left(R_k + R_b\right)^2}\right)' = U_0^{\ 2}\left(\frac{R_k}{\left(R_k + R_b\right)^2}\right)' =$$

$$= U_0^{\ 2} \frac{R_k' \cdot \left(R_k + R_b\right)^2 - R_k \cdot \left(\left(R_k + R_b\right)^2\right)'}{\left(\left(R_k + R_b\right)^2\right)^2} =$$

$$= U_0^{\ 2} \frac{1 \cdot \left(R_k + R_b\right)^2 - R_k \cdot 2\left(R_k + R_b\right)}{\left(R_k + R_b\right)^4}$$

Emeljünk ki a számlálóban $\left(R_k + R_b\right)$-t, és egyszerűsítsünk.

$$P'\left(R_k\right) = U_0^{\ 2} \frac{\left(R_k + R_b\right)\left(\left(R_k + R_b\right) - 2R_k\right)}{\left(R_k + R_b\right)^4} = U_0^{\ 2} \frac{R_b - R_k}{\left(R_k + R_b\right)^3}$$

Ezután határozzuk meg, hogy a $P'(R_k)$ derivált mikor 0.

$$U_0^2 \frac{R_b - R_k}{(R_k + R_b)^3} = 0 \iff R_b - R_k = 0 \iff R_k = R_b$$

A megszokott táblázatunk segítségével ellenőrizzük le, hogy ezen a helyen a $P(R_k)$ függvénynek valóban maximuma van. Töltsük ki egyből a teljes táblázatot. A második sorban az előjeleket például az alábbiakból kaphatjuk.

$$(0,R_b):\ P'\left(\frac{R_b}{2}\right) = U_0^2 \frac{R_b - \frac{R_b}{2}}{\left(\frac{R_b}{2} + R_b\right)^3} = U_0^2 \frac{\frac{1}{2}R_b}{\left(\frac{3}{2}R_b\right)^3} = U_0^2 \frac{\frac{1}{2}R_b}{\frac{27}{8}R_b^3} = \frac{4}{27}\frac{U_0^2}{R_b^2} > 0$$

$$(R_b,\infty):\ P'(2R_b) = U_0^2 \frac{R_b - 2R_b}{(2R_b + R_b)^3} = U_0^2 \frac{-R_b}{(3R_b)^3} = U_0^2 \frac{-R_b}{27R_b^3} = -\frac{1}{27}\frac{U_0^2}{R_b^2} < 0$$

R_k	$(0,R_b)$	R_b	(R_b,∞)
$P'(R_k)$	$+$	0	$-$
$P(R_k)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

Amint látható, amikor a külső ellenállás megegyezik a belső ellenállással akkor valóban maximuma lesz a külső ellenállás teljesítményének.
A maximális teljesítmény a következő:

$$P_{\max} = P(R_b) = U_0^2 \frac{R_b}{(R_b + R_b)^2} = U_0^2 \frac{R_b}{4R_b^2} = \frac{U_0^2}{4R_b}.$$

Ellenőrző kérdések:

13. kérdés: Hol nő az $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x}$ függvény?

A $(-\infty,-2)$ és $(0,2)$ intervallumokon.
A $(-2,0)$ és $(2,\infty)$ intervallumokon.
A $(-2,0)$ és $(0,2)$ intervallumokon.
A $(-\infty,-2)$ és $(2,\infty)$ intervallumokon. (X)

14. kérdés: Hol van szélsőértéke az $f(x) = \dfrac{6x}{x^2+2}$ függvénynek?

Az $x=-2$ és az $x=2$ helyeken.
Az $x=-\sqrt{2}$ és az $x=0$ helyeken.
Az $x=0$ és az $x=\sqrt{2}$ helyeken.
Az $x=-\sqrt{2}$ és az $x=\sqrt{2}$ helyeken. (X)

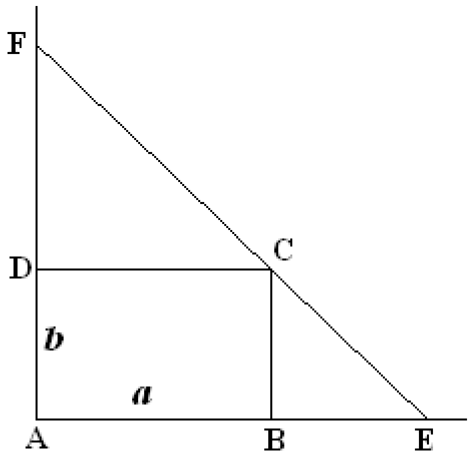
15. kérdés: Hol és milyen szélsőértéke van az $f(x) = xe^x$ függvénynek?

Az $x = -\frac{1}{2}$ helyen minimuma van. (X)
Az $x = -\frac{1}{2}$ helyen maximuma van.
Az $x = 2$ helyen minimuma van.
Az $x = 2$ helyen maximuma van.

16. kérdés: Hol csökken az $f(x) = x\ln(x^2)$ függvény?

A $\left(-\infty, -\frac{1}{e}\right)$ és $\left(\frac{1}{e}, \infty\right)$ intervallumokon.
A $\left(-\frac{1}{e}, 0\right)$ és $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ intervallumokon. (X)
A $(-\infty, -e)$ és (e, ∞) intervallumokon.
A $(-e, 0)$ és $(0, e)$ intervallumokon.

17. kérdés: Tekintsük a koordinátarendszerben azt a téglalapot, melynek csúcsai: $A(0;0)$, $B(a;0)$, $C(a;b)$, $D(0;b)$. A C csúcson áthaladó egyenessel derékszögű háromszöget vágunk le az első síknegyed sarkánál. (AEF háromszög)



Azt szeretnénk, hogy a háromszög területe minimális legyen. Ha az AE oldal hosszát választjuk független változónak, és x-szel jelöljük, akkor az alábbi függvényt kell vizsgálnunk szélsőérték szempontjából:

$f(x) = \frac{a}{2}\frac{x^2}{x-b}$

$f(x) = \frac{a}{2}\frac{(x-b)^2}{x}$

$f(x) = \frac{b}{2}\frac{x^2}{x-a}$ (X)

$$f(x) = \frac{b}{2}\frac{(x-a)^2}{x}$$

18. kérdés: Az előző kérdésben a minimális területű háromszög AE oldalának hossza:

$\sqrt{2}a$
$2a$ (X)
$\sqrt{2}(a+b)$
$2(a+b)$

3. Differenciálszámítás

3.4. Függvény konvexitásának vizsgálata, teljes függvényvizsgálat

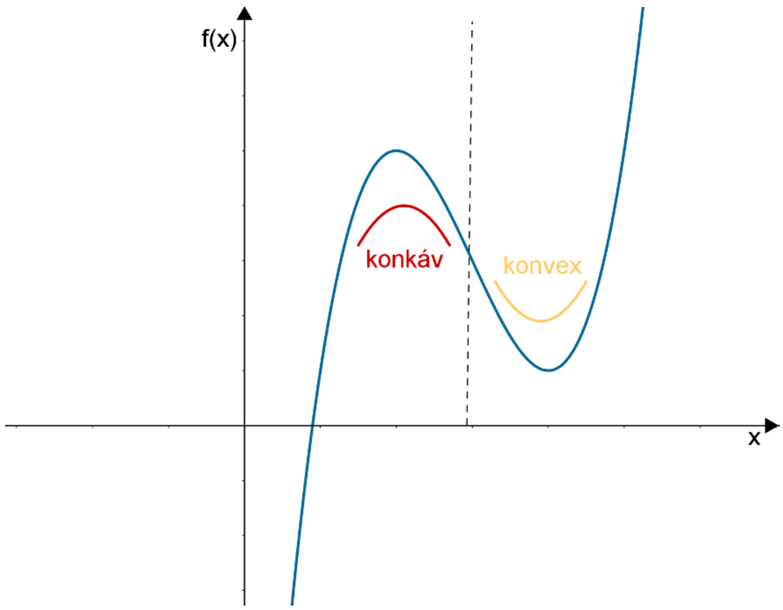
Tanulási cél: A másodrendű derivált és a konvexitás közötti kapcsolat megismerése, a függvények konvexitás és inflexiós pont szempontjából való jellemzése. A teljes függvényvizsgálat lépéseinek megismerése és gyakorlása

Elméleti összefoglaló:

A Matematika 1. tantárgy A derivált alkalmazásai című leckéjében láttuk, hogy az elsőrendű derivált előjele meghatározza a függvény monotonitását. A másodrendű derivált előjeléből is következtetéseket vonhatunk le a függvény görbéjének alakjáról, ebben az esetben a függvény konvexitására vonatkozóan.

Elsőként definiáljuk a konvexitás fogalmát szemléletes módon.

Definíció: Egy intervallumon értelmezett valós függvény **konvex**, ha a függvénygörbe két pontját összekötő húr a függvénygörbe fölött halad. Egy intervallumon értelmezett valós függvény **konkáv**, ha a függvénygörbe két pontját összekötő húr a függvénygörbe alatt halad.



Tétel: Legyen az f függvény az $[a,b]$ zárt intervallumon folytonos és az (a,b) nyílt intervallumon differenciálható. Az f függvény $[a,b]$-n akkor és csak akkor konvex, ha $f'(x)$ az (a,b)-n szigorúan monoton nő, illetve az f függvény az $[a,b]$-n akkor és csak akkor konkáv, ha $f'(x)$ az (a,b)-n szigorúan monoton csökkenő.

Tétel: Legyen az f függvény kétszer differenciálható (a,b)-n. Az f függvény akkor és csak akkor konvex az $[a,b]$-n, ha $f''(x)>0$ (a,b)-n, illetve az f függvény akkor és csak akkor konkáv az $[a,b]$-n, ha $f''(x)<0$ (a,b)-n.

Definíció: Legyen f folytonos (a,b)-n és $c \in (a,b)$. Ha f konvex (a,c)-n és konkáv (c,b)-n, vagy konkáv (a,c)-n és konvex (c,b)-n, akkor c **inflexiós pont**ja f-nek.

Tétel: Legyen f a c hely környezetében kétszer differenciálható. Ha a c pontban f-nek inflexiós pontja van, akkor $f''(c)=0$.

Fontos megjegyezni, hogy a tétel megfordítása nem igaz. Abból, hogy az $f''(c)=0$, még nem következik, hogy c inflexiós pont.

Tétel: Ha f kétszer differenciálható c-ben és $f''(c)=0$, továbbá (a,c)-n $f''>0$ és (c,b)-n $f''<0$, vagy (a,c)-n $f''<0$ és (c,b)-n $f''>0$, azaz f'' c-ben előjelet vált, akkor c inflexiós pontja f-nek.

A fenti tételek birtokában a következő módon vizsgálhatjuk a függvényeket konvexitás és inflexiós pont szempontjából.

1. Megvizsgáljuk, hogy mi a legbővebb halmaz, amelyen a függvény értelmezhető.

2. Kétszer deriváljuk a függvényt (amennyiben lehetséges).

3. Megoldjuk az $f''(x)=0$ egyenletet. Ezzel megkapjuk azokat a helyeket, ahol inflexiós pont lehet.

4. Az értelmezési tartományt a szakadási helyekkel és a másodrendű derivált zérushelyeivel részekre bontjuk, s az adott részeken megvizsgáljuk a derivált előjelét. Ezt például úgy hajtjuk végre, hogy mindegyik részből választunk egy számot, melyet a deriváltba behelyettesítünk.

5. Az értelmezési tartomány egyes részein a másodrendű derivált előjeléből következtetünk a konvexitásra.

Az utolsó két pontban leírtakat célszerű egy táblázatban összefoglalni, mert akkor tömörebben írhatjuk le az adatokat.

Ez a fenti módszer ismerős lehet, mivel hasonló módon végeztük a függvények monotonitására és szélsőértékére vonatkozó vizsgálatot (lásd Matematika 1. A derivált alkalmazásai című leckében).

Kidolgozott feladatok:

1. feladat: Az $f(x)$ függvény értelmezési tartománya $D_f=\mathbb{R}$. Hol konvex az $f(x)$ függvény, ha második deriváltja $f''(x)=(x-1)(x+6)^3$?

Megoldás: Amikor egy függvényt olyan szempontból vizsgálunk, hogy hol konvex, illetve hol konkáv, akkor ugyanúgy járhatunk el, mint a növekedés és csökkenés vizsgálatánál (lásd Matematika 1. tárgyban A derivált alkalmazásai című leckében). Ilyenkor azonban a második derivált előjelével kell foglalkoznunk. Ahol ugyanis pozitív egy függvény második deriváltja, ott konvex a függvény, ahol pedig negatív a második derivált, ott konkáv a függvény. Természetesen ilyenkor azzal kell kezdenünk, hogy megállapítjuk, hol értelmezhető a második derivált, és ezen a halmazon vizsgáljuk az előjelét. Jelen esetben minden valós számra értelmezhető a második derivált, azaz $D_{f''}=\mathbb{R}$.

Ezután határozzuk meg a második deriváltat zérushelyeit, azaz oldjuk meg az $f''(x)=0$ egyenletet.

$(x-1)(x+6)^3=0$

Egy szorzat akkor egyenlő 0 -val, ha valamelyik tényezője 0, így ez a szorzat két egyenletre bontható.

$x-1=0$ vagy $(x+6)^3=0$

Ezen egyenletek megoldásai: $x=1$ és $x=-6$.

Most hasonló táblázatot célszerű készítenünk, mint amikor növekedés és csökkenés, azaz monotonitás szempontjából vizsgáltunk egy függvényt. Annyi csak a változás, hogy a második sorban nem az első, hanem a második derivált előjelét tüntetjük majd fel. Természetesen az értelmezési tartományt most a második derivált zérushelyei bontják részekre, hiszen ezeken a helyeken változhat meg a második derivált előjele. Ha egyenlőre csak az első sort töltjük ki, akkor táblázatunk az alábbi lesz.

x	$(-\infty,-6)$	-6	$(-6,1)$	1	$(1,\infty)$
$f''(x)$					
$f(x)$					

Ezután vizsgáljuk meg a második derivált előjelét az értelmezési tartomány egyes részein. Ezt végrehajthatjuk úgy, ahogyan a korábbiakban vizsgáltunk előjelet, azaz mindegyik részből kiválasztottunk egy számot, és azt behelyettesítettük. Mivel azonban a második derivált egy szorzat, így megtehetjük azt is, hogy külön vizsgáljuk az egyes tényezők előjelét, és ebből következtetünk a szorzat előjelére.

Ha pl. $x<-6$, akkor nyilván $x-1<0$, azaz a derivált első tényezője negatív. Persze ekkor $x+6<0$ is teljesül, amiből $(x+6)^3<0$ is következik, tehát a második tényező is negatív. Két negatív szám szorzata pedig pozitív, azaz $x<-6$ esetén pozitív a második derivált, s ebből következően itt konvex a függvény.

Hasonlóan, ha $-6<x<1$, akkor $x-1<0$, és $x+6>0 \Leftrightarrow (x+6)^3>0$, azaz a szorzat egyik tényezője negatív, másik tényezője pedig pozitív, tehát ekkor negatív a második derivált. Ez azt jelenti, hogy ezen az intervallumon konkáv a függvény.

Végül ha $1<x$, akkor $x-1>0$, és $x+6>0 \Leftrightarrow (x+6)^3>0$, tehát mindkét tényező pozitív, s így a második derivált is pozitív. Ennek következtében ezen az intervallumon konvex a függvény.

Mivel mindkét zérushelyén $(x=-6, x=1)$ megváltozik a második derivált előjele, így mindkét helyen inflexiós pontja van a függvénynek.

Ezek alapján már kitölthetjük a táblázat második és harmadik sorát is.

x	$(-\infty,-6)$	-6	$(-6,1)$	1	$(1,\infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	konvex $(\cup)$	inflexiós pont	konkáv $(\cap)$	inflexiós pont	konvex $(\cup)$

Legvégül adjunk választ a feladat kérdésére. Amint a táblázatból látható, a függvény konvex, ha $x<-6$ vagy ha $1<x$. Ugyanezt úgy is írhatjuk, hogy a függvény a $(-\infty,-6)\cup(1,\infty)$ halmazon konvex.

2. feladat: Az $f(x)$ függvény értelmezési tartománya $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-3,4\}$. Hol konkáv az $f(x)$ függvény, ha második deriváltja $f''(x)=\dfrac{5^x}{(x+3)(x-4)}$?

Megoldás: Az előző feladat megoldásában ismertetettek szerint járunk el. Vizsgáljuk meg, hogy mely halmazon értelmezhető a függvény második deriváltja. Mivel a nevezőben nem állhat 0, így $(x+3)(x-4)\neq 0$, melyből $x+3\neq 0$ és $x-4\neq 0$. Ezekből következik, hogy $x\neq -3$ és $x\neq 4$.
A második derivált értelmezési tartománya tehát: $D_{f''}=\mathbb{R}\setminus\{-3,4\}$.

Ezután oldjuk meg az $f''(x)=0$ egyenletet.

$$\frac{5^x}{(x+3)(x-4)}=0$$

Tört csak úgy lehet zérus, ha a számlálója zérus, így egyszerűbb egyenletet kapunk.

$$5^x=0$$

Ennek az egyenletnek azonban nincs megoldása, hiszen 5^x értéke pozitív minden valós x esetén. A második deriváltnak tehát nincs zérushelye, azaz nem lesz inflexiós pontja a függvénynek.

Mivel egy függvény előjele ott is változhat, ahol a függvény nincs értelmezve, így bár nincs a második deriváltnak zérushelye, de az értelmezési tartományt a szakadási helyek mégis részekre bontják. Ha elkezdjük kitölteni a szokásos táblázatot, akkor most a következőt kapjuk.

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,4)$	4	$(4,\infty)$
$f''(x)$		X		X	
$f(x)$		X		X	

A szakadási helyeken egyből jelölhettük, hogy mivel ott nem létezik a második derivált, így a függvényről semmit sem mondhatunk.

Vizsgáljuk meg ezután az egyes részeken a második derivált előjelét. Most olyan törtünk van, melynek számlálója minden x esetén pozitív, így csak a nevezőt kell vizsgálnunk, ami egy szorzat. Itt megtehetjük, hogy külön vizsgáljuk a tényezők előjelét.

Ha $x<-3$, akkor $x+3<0$ és $x-4<0$, tehát a nevező pozitív, így a második derivált is pozitív. Ebből következően a függvény konvex.

Ha $-3<x<4$, akkor $x+3>0$ és $x-4<0$, tehát a nevező negatív, így a második derivált is negatív. Ebből következően a függvény konkáv.

Ha pedig $4<x$, akkor $x+3>0$ és $x-4>0$, tehát a nevező pozitív, így a második derivált is pozitív. Ebből következően a függvény konvex.

Immáron kitölthetjük a teljes táblázatot.

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,4)$	4	$(4,\infty)$
$f''(x)$	$+$	X	$-$	X	$+$
$f(x)$	$\cup$	X	$\cap$	X	$\cup$

A táblázatból kiolvasható, hogy a függvény a $(-3,4)$ intervallumon konkáv.

3. feladat: Az $f(x)$ függvény értelmezési tartománya $D_f=\mathbb{R}$. Hol van inflexiós pontja az $f(x)$ függvénynek, ha második deriváltja $f''(x)=(x-7)^6\cdot(e^x-1)$?

Megoldás: Most is a második derivált értelmezési tartományának vizsgálatával kezdjük. Jelen esetben ez az összes valós szám, azaz $D_{f''}=\mathbb{R}$.

Oldjuk meg az $f''(x)=0$ egyenletet. Egy függvénynek ugyanis ott lehet inflexiós pontja, ahol a második deriváltja 0.

$(x-7)^6\cdot(e^x-1)=0$

Mivel a derivált szorzat, ezt egyszerűbb egyenletekre bontjuk.

$(x-7)^6=0$ vagy $e^x-1=0$

Az első egyenlet megoldása nyilván $x=7$. A második egyenletet rendezzük át.

$e^x-1=0 \iff e^x=1$

Vegyük mindkét oldal logaritmusát.

$\ln(e^x)=\ln 1$

Mivel a bal oldalon egy függvény és az inverze áll egy összetételben, így ott valójában egyszerűen x szerepel.

$x=\ln 1=0$

A második egyenlet megoldása így $x=0$.

Két zérushelye van tehát a második deriváltnak, az $x=0$ és az $x=7$.

Ezek után a táblázat első sora kitölthető.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,7)$	7	$(7,\infty)$
$f''(x)$					
$f(x)$					

Vizsgáljuk meg ezután a második derivált előjelét. Mivel a derivált olyan szorzat, aminek első tényezője nem vesz fel negatív értéket, hiszen páros kitevőjű hatvány, így csak a második tényező előjelével kell foglalkoznunk.

Ha $x<0$, akkor $e^x<1$, ezért $e^x-1<0$. Ekkor tehát negatív a második derivált, s itt konkáv a függvény.

Ha $0<x<7$, akkor $e^x>1$, ezért $e^x-1>0$. Így itt pozitív a második derivált, tehát konvex a függvény.

Ha $7<x$, akkor $e^x>1$, ezért $e^x-1>0$. Így itt is pozitív a második derivált, tehát itt is konvex a függvény.

Amint látható, a második derivált zérushelyei közül az $x=0$ helyen előjelet vált a második derivált, így itt inflexiós pontja van a függvénynek. Viszont az $x=7$ helyen a második derivált nem vált előjelet, így itt nincs inflexiós pont.

Töltsük ki a teljes táblázatot.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,7)$	7	$(7,\infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	inflexiós pont	$\cup$	nincs inflexiós pont	$\cup$

A függvénynek tehát az $x=0$ helyen van inflexiós pontja.

4. feladat: Adja meg a függvény értelmezési tartományát! Vizsgálja meg konvexitás szempontjából a függvényt! Számolja ki az inflexiós ponthoz (pontokhoz) tartozó függvényértéket!

$$f(x)=x^3+x\ln x$$

Megoldás: Elsőként most is a függvény értelmezési tartományát kell megvizsgálnunk. A logaritmus argumentumában kizárólag pozitív valós számok szerepelhetnek, tehát a kikötés $x>0$, azaz $D_f=(0,\infty)$.

Először az első derivált függvényt határozzuk meg. Az összeg második tagja egy szorzat (itt a szorzatra vonatkozó deriválási szabályt alkalmazzuk).

$f'(x)=3x^2+1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=3x^2+\ln x+1$

A második derivált előállítása:

$f''(x)=6x+\frac{1}{x}$

Oldjuk meg az $f''(x)=0$ egyenletet.

$$6x+\frac{1}{x}=0$$

Mivel az értelmezési tartományból tudjuk, hogy x csak pozitív szám lehet, ezért az egyenlet a következő alakra hozható:

$$6x^2 + 1 = 0$$

Ennek az egyenletnek a valós számok halmazán nincs megoldása, ami azt jelenti, hogy az $f(x)$ függvénynek nincs inflexiós pontja. A $(0,\infty)$ intervallumon $6x^2 + 1 > 0$, tehát a függvény ezen az intervallumon konvex.

5. feladat: Vizsgáljuk meg konvexitás és inflexiós pont szempontjából az $f(x) = \ln(4x^2 + 2)$ függvényt.

Megoldás: Először az értelmezési tartományt kell meghatároznunk. Tudjuk, hogy a logaritmus argumentumában kizárólag pozitív valós számok szerepelhetnek, tehát a kikötés $4x^2 + 2 > 0$. Ez az egyenlőtlenség bármely valós számra fennáll, azaz a függvény minden valós számra értelmezhető, $D_f = \mathbb{R}$.

Ezt követően meghatározzuk a másodrendű deriváltat, melyhez először az elsőrendű deriváltat kell kiszámolnunk. Az összetett függvény deriválási szabályát felhasználva kapjuk, hogy

$$f'(x) = \frac{1}{4x^2 + 2} \cdot 8x = \frac{8x}{4x^2 + 2} .$$

Erre a deriválási hányadosszabályt alkalmazva kapjuk, hogy

$$f''(x) = \frac{8(4x^2 + 2) - (8x \cdot 8x)}{(4x^2 + 2)^2} = \frac{32x^2 + 16 - 64x^2}{(4x^2 + 2)^2} = \frac{-32x^2 + 16}{(4x^2 + 2)^2} .$$

Ezt követően megkeressük a másodrendű derivált zérushelyeit, azaz megoldjuk a $f''(x) = 0$ egyenletet.

$$\frac{-32x^2 + 16}{(4x^2 + 2)^2} = 0$$

Egy tört értéke akkor 0, ha a számlálója 0. Ez alapján

$$-32x^2 + 16 = 0$$

$$32x^2 = 16$$

$$x^2 = \frac{1}{2}$$

$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ és $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ezek lehetnek a függvény inflexiós pontjai. Hogy valóban azok-e, ahhoz ellenőriznünk kell, hogy a másodrendű derivált előjelet vált-e ezekben a pontokban. Ehhez az értelmezési tartományt és a lehetséges inflexiós pontokat tüntetjük fel a táblázat első sorában. Ez alapján a következő táblázatot kell kitöltenünk.

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\infty\right)$
$f''(x)$					
$f(x)$					

A táblázat második sorában a másodrendű derivált előjeleit vizsgáljuk meg az adott tartományokon, s ebből határozzuk meg a konvexitást a következő sorban. Vegyünk egy $-\frac{1}{\sqrt{2}}$-nél kisebb számot. Legyen pl. -1, s helyettesítsük ezt a másodrendű deriváltba.

$$f''(-1)=\frac{-32\cdot(-1)^2+16}{(4\cdot(-1)^2+2)^2}=-\frac{32}{36}$$

Negatív értéket kaptunk, tehát $x<-\frac{1}{\sqrt{2}}$ esetén negatív a másodrendű derivált, ebből következően itt konkáv a függvény.

Ezt követően vegyünk egy $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ és $\frac{1}{\sqrt{2}}$ közé eső számot. Legyen pl. 0, s ezt is helyettesítsük be a másodrendű deriváltba.

$$f'(0)=\frac{-32\cdot 0+16}{(4\cdot 0+2)^2}=\frac{16}{4}=4$$

Pozitív értéket kaptunk, tehát ha $-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$, akkor pozitív a másodrendű derivált, s így itt konvex a függvény.

Végül vegyünk egy $\frac{1}{\sqrt{2}}$-nél nagyobb számot is. Legyen pl. 1, és helyettesítsük ezt a másodrendű deriváltba.

$$f'(1)=\frac{-32+16}{(4+2)^2}=-\frac{16}{36}$$

Negatív értéket kaptunk, így ha $\frac{1}{\sqrt{2}}<x$ akkor negatív a másodrendű derivált, tehát ekkor konkáv a függvény.

Mivel a másodrendű derivált értéke az $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ és $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ helyen előjelet vált ($x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$-nél negatívból pozitívba, $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$-nél pozitívból negatívba), így ezeken a helyeken inflexiós pontja van a függvénynek.

Mindezeket az összefüggéseket tartalmazza az alábbi táblázat, mellyel válaszoltunk a feladatra.

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\infty\right)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	konkáv $\cap$	inflexiós pont	konvex $\cup$	inflexiós pont	konkáv $\cap$

6. feladat: Vizsgáljuk meg konvexitás szempontjából az $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ függvényt. Adjuk meg az inflexiós pont(ok) koordinátáit is!

Megoldás: Elsőként most is a függvény értelmezési tartományát kell vizsgálnunk. Mivel nevező nem lehet zérus, így ki kell kötnünk, hogy a kitevőben $x \neq 0$, azaz $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Ezután állítsuk elő a függvény második deriváltját, mert a konvexitás vizsgálatához erre lesz szükségünk. Az első derivált előállításakor egy összetett függvényt deriválunk. A külső függvény az e^x, a belső függvény pedig az $\frac{1}{x}$.

$$f'(x)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'=e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(x^{-1}\right)'=e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-x^{-2}\right)$$

A második deriválás során a szorzatra vonatkozó deriválási szabályt használjuk.

$$f''(x)=\left(e^{\frac{1}{x}}\right)'\cdot\left(-x^{-2}\right)+e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-x^{-2}\right)'=$$

$$=e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-x^{-2}\right)\cdot\left(-x^{-2}\right)+e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(2x^{-3}\right)=e^{\frac{1}{x}}\cdot x^{-4}+2e^{\frac{1}{x}}\cdot x^{-3}$$

Amint az korábban már szerepelt, ilyenkor célszerű kiemelni, amit csak lehet. Figyeljünk oda, hogy a hatványokból azt emeljük ki, ahol kisebb a kitevő, s ez most az x^{-4}. Ha pedig az x^{-3}-ból kiemelünk x^{-4}-t, akkor ott x fog maradni.

$$f''(x)=e^{\frac{1}{x}}\cdot x^{-4}\cdot(1+2x)$$

A negatív kitevős hatvány helyett törtet is írhatunk. Így a második derivált a következő alakot ölti:

$$f''(x)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1+2x}{x^4}$$

Miután a második deriváltat sikerült egyszerűbb alakra hozni, oldjuk meg az $f''(x)=0$ egyenletet.

$$e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1+2x}{x^4} = 0$$

Tudjuk, hogy egy szorzat akkor zérus, ha valamelyik tényezője zérus. Az első tényező nem lehet egyenlő 0 -val, hiszen az exponenciális függvény csak pozitív értékeket vesz fel. Ennek következtében elég csak a második tényezőben levő törtet vizsgálnunk.

$$\frac{1+2x}{x^4} = 0$$

De a tört csak úgy lehet 0 , ha a számlálója 0 , így az egyenlet még tovább egyszerűsödik.

$$1+2x=0$$

Ennek megoldása pedig $x=-0.5$.

Ezután elkészíthetjük a táblázatot, kitöltve az első sort. Az értelmezési tartományt egyrészt a második derivált zérushelye, másrészt az értelmezési tartományban levő szakadási hely osztja részekre.

x	$(-\infty,-0.5)$	-0.5	$(-0.5,0)$	0	$(0,\infty)$
$f''(x)$				X	
$f(x)$				X	

Vizsgáljuk meg ezután a második derivált előjelét a különböző részeken. Ehhez a kiemelést követően kapott szorzattá alakított formát célszerű használni. Az $e^{\frac{1}{x}}$, valamint az x^{-4} csak pozitív értékeket vehet fel, így elég csak az $1+2x$ előjelét vizsgálnunk.

Ha $x<-0.5$, akkor $1+2x<0$, így a derivált negatív, s ebből következően itt konkáv a függvény.

Ha $-0.5<x<0$, akkor $1+2x>0$, s ezért itt konvex a függvény.

Ha pedig $0<x$, akkor $1+2x>0$ ismét, így itt is konvex a függvény.

Az $x=-0.5$ helyen előjelet vált a második derivált, így ezen a helyen inflexiós pontja van a függvénynek.

Töltsük ki a teljes táblázatot.

x	$(-\infty,-0.5)$	-0.5	$(-0.5,0)$	0	$(0,\infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	X	$+$
$f(x)$	$\cap$	inflexiós pont	$\cup$	X	$\cup$

Ezután már csak az inflexiós pont második koordinátáját kell meghatároznunk. Ehhez helyettesítsük be a függvénybe az $x=-0.5$ értéket, ahol az inflexiós pont van.

$$f(-0.5) = e^{\frac{1}{-0.5}} = e^{-2}$$

Az inflexiós pont koordinátái tehát: $(-0.5, e^{-2})$

Ellenőrző kérdések:

1. kérdés: Az $f(x)$ függvény értelmezési tartománya $D_f = \mathbb{R}$. Mely intervallumo(ko)n konkáv az $f(x)$ függvény, ha $f''(x) = (x-2)^4(x+1)$?

$(-\infty, -1)$ (X)

$(-1, 2)$

$(2, \infty)$

$(-1, 2)$ és $(2, \infty)$

2. kérdés: Az $f(x)$ függvény értelmezési tartománya $D_f = \mathbb{R} \setminus \{8, -5\}$. Mely intervallumo(ko)n konvex az $f(x)$ függvény, ha $f''(x) = \dfrac{2e^x}{(x-8)(x+5)^2}$?

$(-5, 8)$

$(-\infty, -5)$ és $(-5, 8)$

$(8, \infty)$ (X)

$(-\infty, -5)$ és $(8, \infty)$

3. kérdés: Hány inflexiós pontja van az $f(x)$ függvénynek, ha $f''(x) = (\ln x - 1)(x+3)^5$?

0

1 (X)

2

3

4. kérdés: A következő intervallumo(ko)n konkáv az $f(x)$ függvény, ha $f''(x) = 1 - \lg(x^2 + 6)$

$(-\infty, -2)$.

$(-2, 2)$.

$(2, \infty)$.

$(-\infty, -2)$ és $(2, \infty)$. (X)

5. kérdés: Az $f(x) = \ln(1 + 3x^2)$ függvény inflexiós pontjának (pontjainak) koordinátái:

$\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \ln 2\right)$.

$\left(-\sqrt{3}, \ln 10\right)$.

$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \ln 2\right)$ és $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \ln 2\right)$. (X)

$\left(-\sqrt{3},\ln 10\right)$ és $\left(\sqrt{3},\ln 10\right)$.

6. kérdés: Hány inflexiós pontja van az $f\left(x\right)=x^5-30x^3+2$ függvénynek?

0
1
2
3 (X)

7. kérdés: Az $f\left(x\right)=e^x\left(x-1\right)$ függvény inflexiós pontjának függvényértéke

$-e^2$
e^2-1
$-\frac{2}{e}$ (X)
$2e$

8. kérdés: Hány inflexiós pontja van az $f\left(x\right)=4x^3+x\ln x$ függvénynek?

0 (X)
1
2
3

9. kérdés: Hány inflexiós pontja van az $f\left(x\right)=\frac{3}{2}x^3+x-x\ln x$ függvénynek?

0
1
2 (X)
3

Elméleti összefoglaló:

Függvénydiszkusszión annak vizsgálatát értjük, hogy egy függvény az értelmezési tartományának mely pontjaiban, vagy mely részhalmazain rendelkezik a függvényekre jellemző tulajdonságok valamelyikével.

A jellemző tulajdonságokat két csoportba oszthatjuk.

Az első csoportba az úgynevezett globális tulajdonságok tartoznak. Ide soroljuk azokat, amelyekkel egy függvény az értelmezési tartományának egy egész részintervallumán rendelkezik vagy nem rendelkezik, pl. növekedés vagy konvexitás.

A másik csoportba a lokális tulajdonságok tartoznak. Ezek azok, amelyek az értelmezési tartomány egy pontjában lépnek fel, pl. lokális szélsőérték, zérushely, stb.

A függvények diszkusszióját a következő lépésekben végezzük:

1) Értelmezési tartomány meghatározása.

2) Alaki tulajdonságok (tengelymetszetek, paritás).

3) Limeszek az értelmezési tartomány szélein.

4) Monotonitás vizsgálata, lokális szélsőérték(ek) meghatározása.

5) Konvexitás vizsgálata, inflexiós pont(ok) meghatározása.

6) Grafikon rajzolása.

7) Értékkészlet meghatározása.

Kidolgozott feladatok

7. feladat: Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f(x)=x^3-3x^2$ függvényen.

Megoldás:

1) Értelmezési tartomány.

Egyszerű most a helyzetünk, mert látható, hogy a függvény mindenütt értelmezve van, ezért

$D_f=\mathbb{R}$.

2) Alaki tulajdonságok.

Ezen értjük egyrészt annak meghatározását, hogy a függvény grafikonja hol metszi az x tengelyt. Ezeket a pontokat az $f(x)=0$ egyenlet megoldásai adják. Megoldjuk tehát az

$$x^3-3x^2=0$$

egyenletet. Az x^2 kiemelésével

$x^2(x-3)=0$,

ami akkor teljesül, ha $x_1=0$ vagy ha $x_2=3$. Ebben a két pontban metszi tehát a grafikon az x tengelyt.

Másrészt ide tartozik annak megállapítása, hogy a grafikon hol metszi az y tengelyt. Ilyen persze csak akkor van, ha a nulla eleme az értelmezési tartománynak, ebben az esetben $f(0)$ adja a keresett pontot. A mi esetünkben

$f(0)=0^3-3\cdot 0^2=0$,

a grafikon tehát átmegy az origón.

Továbbá ebben a lépésben vizsgáljuk meg, hogy a függvény páros-e vagy páratlan-e. Mindkettő az $f(-x)$ összetett függvény képletének előállításával kezdődik.

$f(-x)=(-x)^3-3(-x)^2=-x^3-3x^2$.

A függvény akkor páros, ha $f(-x)=f(x)$ (tehát szimmetrikus az y tengelyre), ez most nem teljesül, mivel

$-x^3-3x^2 \neq x^3-3x^2$.

A függvény akkor páratlan, ha $f(-x)=-f(x)$ (tehát szimmetrikus az origóra), most ez sem teljesül, mivel

$-x^3-3x^2 \neq -\left(x^3-3x^2\right)$.

Függvényünk tehát se nem páros, se nem páratlan.

3) Limeszek az értelmezési tartomány szélein.

Egy függvény értelmezési tartománya általában diszjunkt (véges vagy végtelen) intervallumok uniója. Ezeknek az intervallumoknak a végpontjaiban kell az intervallum felőli egyoldali határértékeket kiszámítani.

Mivel a feladatunkban az értelmezési tartomány a valós számok halmaza, ezért két limeszt kell kiszámolnunk:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^3-3x^2\right)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(1-\frac{3}{x}\right)=-\infty,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^3-3x^2\right)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(1-\frac{3}{x}\right)=\infty.$$

4) Monotonitás vizsgálata, lokális szélsőérték(ek) meghatározása.

Tudjuk, hogy lokális szélsőérték ott lehet, ahol $f'(x)=0$. Elkészítjük tehát a derivált függvényt:

$f'(x)=3x^2-6x$,

és megoldjuk az $f'(x)=0$ egyenletet.

$3x^2-6x=0$,

$3x(x-2)=0$,

aminek a két gyöke $x_1=0$, illetve $x_2=2$.

A derivált gyökei közül az értelmezési tartományba is beletartozók a lehetséges szélsőértékek. Mivel most a teljes valós számok halmaza az értelmezési tartomány, mindkét gyököt meg kell vizsgálnunk.

Tudjuk, hogy a jelöltek közül azok valóban szélsőérték helyek, ahol a derivált függvény előjelet vált.

A jelöltek az értelmezési tartományt (további) darabokra bontják, és ezeken a darabokon a derivált függvény állandó előjelű, ezeket az előjeleket kell először meghatározni. Ezeket egy-

egy, a darabokba eső számnak a derivált függvénybe való behelyettesítésével kaphatjuk meg. Az egész eljárást célszerű egy táblázatba foglalni.

A táblázat első sora a szélsőérték jelölteket és az értelmezési tartomány általuk létrehozott darabjait tartalmazza (a valós számok természetes rendezésében).

A második sorban az $f'(x)$ egyes darabokbeli előjele szerepel, (és az, hogy a derivált a jelöltekben nulla).

Az értelmezési tartományunk egy darabból áll, és két jelöltünk van, ezek tehát három darabra bontják az értelmezési tartományt.

A $(-\infty,0)$ darabból vesszük mondjuk a -1-et, s ekkor azt kapjuk, hogy $f'(-1)=3(-1)^2-6(-1)=9>0$, ezért az egész darabon pozitív az első derivált előjele.

A $(0,2)$ darabból vegyük például az 1-et, ekkor $f'(1)=3(1)^2-6(1)=-3<0$, ezért az egész darabon negatív az előjel.

Végül a $(2,\infty)$ darabból válasszuk a hármat, ekkor $f'(3)=3(3)^2-6(3)=9>0$, ezért az egész darabon pozitív az első derivált előjele.

Az alábbi táblázat első két sorában látjuk ezeket feltüntetve.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Látjuk azt is, hogy mindkét jelöltünk esetén megvan a szükséges előjelváltás, tehát mindkettő valóban szélsőérték hely.

Mivel nullában a derivált pozitívból vált negatívba, itt lokális maximum van. A kettőben a derivált előjele negatívból vált pozitívba, itt tehát lokális minimum van.

Ki kell még számolni a maximum és a minimum értékét:

$f(0)=0$, illetve $f(2)=2^3-3 \cdot 2^2=-4$.

Tudjuk, hogy ahol az első derivált pozitív, ott növő a függvény, ahol negatív, ott csökkenő.

Az előző táblázat harmadik sora ezeket az információkat tartalmazza, felfelé mutató nyíllal jelölve a növekedést, illetve lefelé mutatóval a csökkenést. A növekedési viszonyokból is leolvasható, hogy egy adott szélsőérték hely maximum hely, vagy minimum hely.

5) Konvexitás vizsgálata, inflexiós pont(ok) meghatározása.

Tudjuk, hogy inflexiós pont ott lehet, ahol $f''(x)=0$. Elkészítjük tehát a második deriváltat:

$f''(x)=6x-6$.

Megoldva az

$f''(x)=0$, azaz a $6x-6=0$

egyenletet megoldásként $x_1=1$ adódik. Mivel ez a gyök benne van az értelmezési tartományban, ez az inflexiós pont jelölt.

Tudjuk, hogy a jelöltek közül az(ok) valóban inflexiós pont(ok), ahol a második derivált előjelet vált. Ezt a szélsőértékeknél használt eljáráshoz hasonlóan lehet megvizsgálni. Az eredményeket most is egy táblázatba foglaljuk.

Az első sor most az inflexiós pont jelölteket, és az értelmezési tartomány általuk létrehozott darabjait tartalmazza.

A második sor a második derivált előjelét tartalmazza a keletkezett darabokon, és azt, hogy a jelöltünkben az értéke nulla. Egy jelöltünk van, ami az értelmezési tartományt két részre bontja.

Az első darabból vegyük a nullát, itt $f''(0)=6(0)-6=-6<0$, ezért az egész darabon negatív a második derivált.

A második darabból vegyük a kettőt, ekkor $f''(2)=6(2)-6=6>0$, tehát az egész darabon pozitív a második derivált.

Az alábbi táblázatban láthatjuk ezeket.

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,\infty)$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	konkáv	inf. pont	konvex

Megvan tehát a szükséges előjelváltás, az 1 inflexiós pont. Ki kell még számítanunk az inflexiós pont második koordinátáját:

$f(1)=1^3-3(1)^2=-2$.

Tudjuk, hogy ahol a második derivált pozitív, ott konvex a függvény, ahol negatív, ott konkáv. A második táblázat harmadik sora ezeket az információkat tartalmazza.

6) Grafikon.

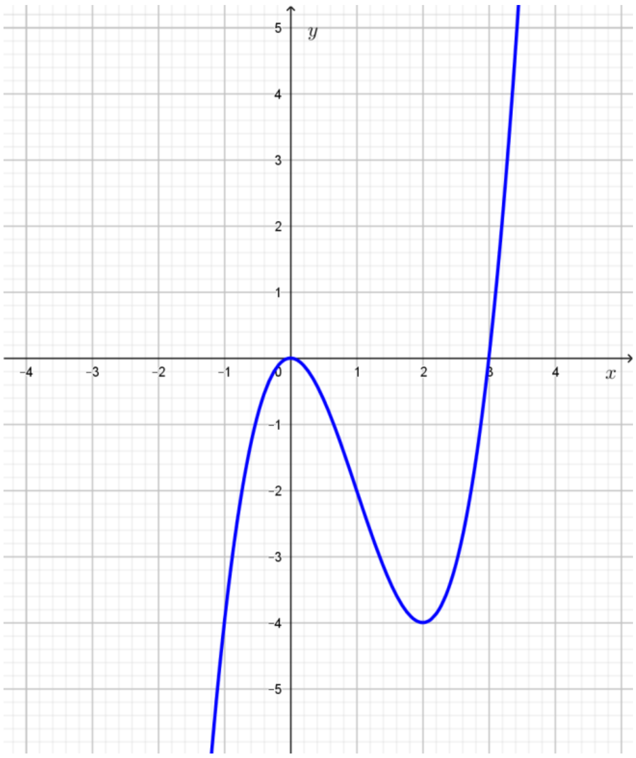
Az eddig megszerzett információkat felhasználva felvázolható a függvény grafikonja.

Felvéve egy koordináta-rendszert először a nevezetes pontokat jelöljük meg, (tengelymetszetek, szélsőértékek, inflexiós pontok.)

Ezután vegyük figyelembe a határértékeket és a monotonitási viszonyokat.

Végül, a konvexitási információkat is figyelembe véve, rajzoljuk meg a grafikont.

Ezt látjuk az alábbi ábrán.



7) Értékkészlet.

A (helyes) grafikonról leolvasható az értékkészlet.

Most azt kapjuk, hogy

$R_f = \mathbb{R}$.

8. feladat: Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ függvényen.

Megoldás:

1) Értelmezési tartomány.

A nevező x^2+1, soha nem lehet nulla. Azt látjuk, hogy minden valós számra teljesül ez az egyenlet, így

$D_f=\mathbb{R}$.

2) Alaki tulajdonságok.

Az $f(x)=0$ egyenlet megoldása $x_1=0$, ami az x tengellyel vett metszetet adja, azonban $f(0)=0$ miatt, itt metszi a grafikon a függőleges tengelyt is.

A függvény paritását vizsgálva látjuk, hogy

$$f(-x)=\frac{-x}{(-x)^2+1}=-\frac{x}{x^2+1}=-f(x),$$

tehát a függvény páratlan.

3) Limeszek az értelmezési tartomány szélein.

Ismét csak a végtelenekben kell kiszámolni a határértékeket. A számlálóból is és a nevezőből is kiemelve x^2-et kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=0.$$

Teljesen hasonlóan

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=0.$$

4) Monotonitás vizsgálata, lokális szélsőérték(ek) meghatározása.

$$f'(x)=\frac{(x^2+1)-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

A derivált nulla, ha a tört számlálója nulla, ez nyilván $x_1'=-1$ és $x_2'=1$ esetén teljesül. Mindkét gyök az értelmezési tartományban van, meg kell ezért őket vizsgálni.

Elkészítjük a táblázatot.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-

$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

Az első darabból a -2 -t helyettesítve $f'(-2) = -\dfrac{3}{25} < 0$.

A második darabból 0 -t helyettesítve $f'(0) = 1 > 0$.

Végül a harmadik darabból 2 -t helyettesítve $f'(2) = -\dfrac{3}{25} < 0$.

Így kaptuk a második sor előjeleit. Látjuk, hogy mindkét jelölt esetén megvan az előjelváltás, ezért mindkettő szélsőérték hely, mégpedig a -1 lokális minimum hely, az 1 lokális maximum hely.

A minimum értéke $f(-1) = -\dfrac{1}{2}$, a maximum értéke (a páratlanság miatt is) $f(1) = \dfrac{1}{2}$.

A fenti táblázat harmadik sorában megjelöltük a monotonitási szakaszokat. Látjuk, hogy a szélsőértékek között a függvény növő, különben csökkenő.

5) Konvexitás vizsgálata, inflexiós pont(ok) meghatározása.

$$f''(x) = \frac{-2x\left(x^2+1\right)^2 - \left(1-x^2\right)2\left(x^2+1\right)2x}{\left(x^2+1\right)^4} = \frac{-2x\left(x^2+1\right) - 4x\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3} == \frac{2x^3-6x}{\left(x^2+1\right)^3} = \frac{2x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$$

Az $f''(x) = 0$ egyenletnek most három megoldása van: $x_1'' = -\sqrt{3}, \quad x_2'' = 0, \quad x_3'' = \sqrt{3}$. Mindhárom az értelmezési tartományban van, ezért meg kell őket vizsgálni. Most az alábbi táblázatot készíthetjük el.

x	$\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$	$-\sqrt{3}$	$\left(-\sqrt{3}, 0\right)$	0	$\left(0, \sqrt{3}\right)$	$\sqrt{3}$	$\left(\sqrt{3}, \infty\right)$
$f''(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	konkáv	inf.pont	konvex	inf.pont	konkáv	inf.pont	konvex

Az előjeleket, például, a következő számok behelyettesítésével kaphatjuk:

az első tartományból válasszuk a -2 -t, ekkor $f''(-2) = -\dfrac{4}{125} < 0$, a második tartományból a -1-et, ekkor $f''(-1)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}>0$,

a harmadikból az 1 -et, ekkor $f''(1)=-\frac{1}{2}<0$,

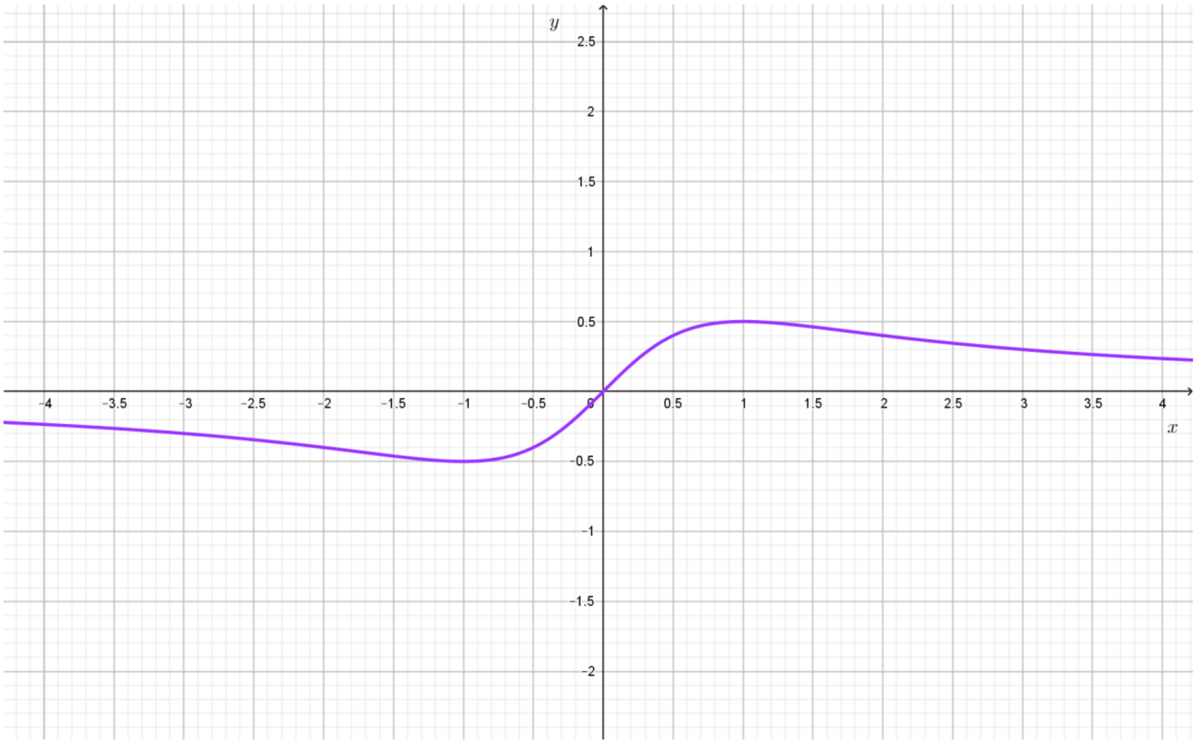
a negyedikből 2 -t, ekkor $f''(2)=\frac{4}{125}>0$.

Látjuk, hogy mindhárom jelölt esetén megvan az előjelváltás, mind a három valóban inflexiós pont. Az inflexiós pontok második koordinátái: $f\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{4}$, $f\left(0\right)=0$ és $f\left(\sqrt{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

A második táblázat harmadik sorában szerepelnek ezek az információk. Látjuk, hogy most az inflexiós pontok választják el a konkáv és konvex szakaszokat.

6) Grafikon.

A grafikont most is a nevezetes pontok berajzolásával kezdjük. A határértékek azt mondják, hogy a függvény a végtelenek felé hozzásimul az x tengelyhez, vagyis $y=0$ vízszintes aszimptota. Figyelembe véve a monotonitási és konvexitási viszonyokat is, az alábbi ábrát kaphatjuk:



Ügyeljünk a páratlanság érzékeltetésére, azaz arra, hogy a grafikon az origóra szimmetrikus.

7) Értékkészlet.

Az ábra alapján világos, hogy a függvény a lokális minimuma és a lokális maximuma közötti értékeket veszi fel, beleértve azokat is, tehát

$$R_f = \left[-\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}\right].$$

9. feladat: Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3}$ függvényen.

Megoldás:

1) Értelmezési tartomány.

Mivel a nevezőben nulla nem lehet, így

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty).$$

2) Alaki tulajdonságok.

Az $f(x) = 0$ egyenletnek most két gyöke van: $x_1 = -1$ és $x_2 = 1$. Mivel a nulla nem eleme az értelmezési tartománynak, a grafikon nem metszi a függőleges tengelyt.

A paritást vizsgálva:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{(-x)^3} = \frac{x^2 - 1}{-x^3} = -\frac{x^2 - 1}{x^3} = -f(x),$$

a függvény tehát páratlan.

3) Limeszek az értelmezési tartomány szélein.

Az értelmezési tartomány két darabból áll, ezeknek négy széle van, négy limeszt kell tehát kiszámolnunk. (Valójában a páratlanság miatt csak kettőt.)

Ezek:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right)}{x^3 \cdot 1} = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) = 0,$$

$$\lim_{x \to 0^-} \quad \frac{x^2 - 1}{x^3} = \infty,$$

hiszen a számláló -1-hez tart, a nevező pedig nullához, de mindig negatív.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - 1}{x^3} = -\infty,$$

a páratlanság miatt persze az előző limesz mínusz egyszerese, és végül

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^3} = 0,$$

most is igaz, hogy ez a mínusz végtelenben vett határérték mínusz egyszerese.

4) Monotonitás vizsgálata, lokális szélsőérték(ek) meghatározása.

$$f'(x) = \frac{2x\left(x^3\right)-\left(x^2-1\right)3x^2}{x^6} = \frac{2x^4-3x^4+3x^2}{x^6} = \frac{-x^4+3x^2}{x^6} = -\frac{x^2-3}{x^4}.$$

Az $f'(x)=0$ egyenlet megoldásai: $x_1' = -\sqrt{3}$, $x_2' = \sqrt{3}$.

Mindkét jelölt az értelmezési tartományba esik, meg kell őket vizsgálnunk. Az eredményeket az alábbi táblázat tartalmazza.

Figyeljünk arra, hogy most a D_f eleve két darabból áll. Ezeket vágja ketté a két jelölt, mivel különböző darabokba esnek. A táblázat fejlécében ezért négy darabot kell szerepeltetni.

x	$\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$	$-\sqrt{3}$	$\left(-\sqrt{3},0\right)$	0	$\left(0,\sqrt{3}\right)$	$\sqrt{3}$	$\left(\sqrt{3},\infty\right)$
$f'(x)$	-	0	+	X	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	lok.min.	$\nearrow$	X	$\nearrow$	lok.max.	$\searrow$

Az $f'(x)$ előjeleit rendre a következő helyettesítésekkel kaptuk:

$$f'(-2) = -\frac{1}{16} < 0,$$

$$f'(-1) = 2 > 0,$$

$$f'(1) = 2 > 0,$$

$$f'(2) = -\frac{1}{16} < 0.$$

Mindkét jelöltben előjelet vált a derivált, ezért mindkettő szélsőérték hely, mégpedig $-\sqrt{3}$ lokális minimum hely, $\sqrt{3}$ lokális maximum hely. A lokális minimum értéke $f\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{2}{-\sqrt{27}} \approx -0.38$, a lokális maximum, a páratlanság miatt, ennek mínusz egyszerese, $f\left(\sqrt{3}\right) \approx 0.38$.

A táblázatunk harmadik sorából láthatjuk, hogy mik a monotonitási viszonyok.

5) Konvexitás vizsgálata, inflexiós pont(ok) meghatározása.

$$f''(x) = -\frac{2x(x^4)-(x^2-3)4x^3}{x^8} = -\frac{2x^5-4x^5+12x^3}{x^8} = -\frac{-2x^5+12x^3}{x^8} = \frac{2(x^2-6)}{x^5}.$$

$f''(x)=0$ akkor és csak akkor, ha $x_1'' = -\sqrt{6}$, $x_2'' = \sqrt{6}$. Mindkét jelölt az értelmezési tartományba esik. A táblázatunk most az alábbi:

x	$\left(-\infty,-\sqrt{6}\right)$	$-\sqrt{6}$	$\left(-\sqrt{6},0\right)$	0	$\left(0,\sqrt{6}\right)$	$\sqrt{6}$	$\left(\sqrt{6},\infty\right)$
$f''(x)$	-	0	+	X	-	0	+
$f(x)$	konkáv	inf.pont	konvex	X	konkáv	inf.pont	konvex

Az előjeleket, alkalmas számok behelyettesítésével ellenőrizze le most az olvasó.

Az előjelek megkaphatók a következő okoskodással is.

Egy tört előjelét kell kiszámolnunk. Ez akkor pozitív, ha a számláló és a nevező egyforma előjelű, akkor negatív, ha különböző előjelűek.

A számlálóban egy másodfokú kifejezés áll, amelynek képe egy felfelé nyíló parabola, ez tehát a gyökein kívül pozitív, a gyökei között pedig negatív. A nevezőben álló hatvány, a páratlan kitevő miatt, negatív x-ekre negatív, pozitívakra pozitív.

Ezek alapján is megkaphatjuk a fenti előjeleket.

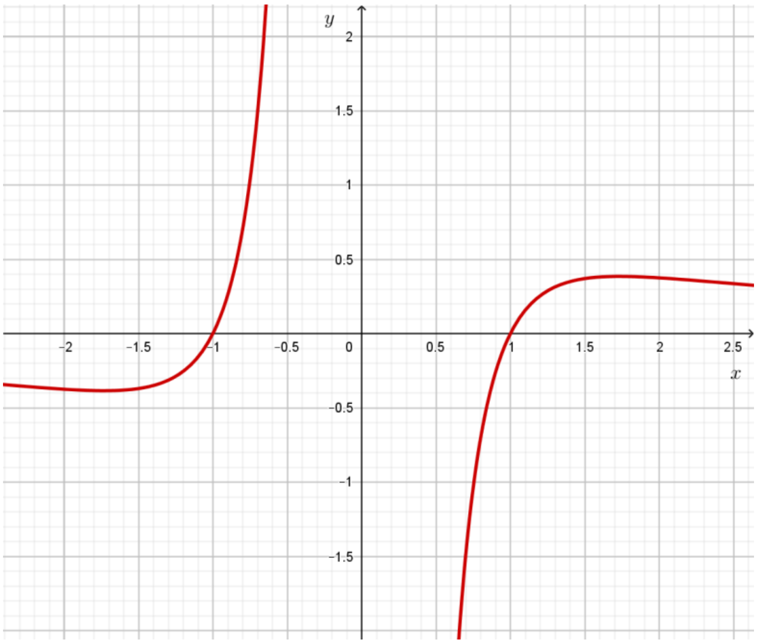
Mindkét jelölt inflexiós pont tehát. Az inflexiós pontok második koordinátái: $f\left(-\sqrt{6}\right) = -\frac{5}{6\sqrt{6}} \approx -0.34$, $f\left(\sqrt{6}\right) = 0.34$.

A nulla előtti és utáni darabon is más előjelű a második derivált, de a nulla persze nem inflexiós pont, hiszen ott értelmezve sincs a függvény. Jól mutatja ez azonban azt, hogy a $-\sqrt{6}$ és $\sqrt{6}$ közötti részt nem lehet egy darabként szerepeltetni a fejlécben.

A táblázat harmadik sorában szerepelnek az erre vonatkozó információk.

6) Grafikon.

Az eddigek figyelembevételével az alábbi ábrát rajzolhatjuk fel:



7) Az ábráról látszik, hogy

$R_f = \mathbb{R}$.

Ellenőrző kérdések:

10. kérdés: Hány lokális szélsőértéke van az $f(x) = x^3 - x^2 + x$ függvénynek?

0. (X)

1.

2.

3.

11. kérdés: Hány inflexiós pontja van az $f(x) = x^3 - x^2 + x$ függvénynek?

0.

1. (X)

2.

3.

12. kérdés: Van-e olyan harmadfokú polinom, amelynek nincs inflexiós pontja?

Van.

Nincs. (X)

13. kérdés: Az $f(x) = x + \frac{4}{x}$ függvény lokális minimumának értéke

4. (X)

2.

-4.

$-\infty$.

14. kérdés: Az $f(x) = \frac{6x}{x^2+2}$ függvény lokális szélsőértékhelyei

$-2, 2$.

$0, \sqrt{2}$.

$-\sqrt{2}, 0$.

$-\sqrt{2}, \sqrt{2}$. (X)

15. kérdés: Az $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$ függvény

páros. (X)

páratlan.

se nem páros, se nem páratlan.

16. kérdés: Az $f(x) = xe^{-x^2}$ függvény

páros.

páratlan. (X)

se nem páros, se nem páratlan.

Összetettebb feladatok

Kidolgozott feladatok:

10. feladat: Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = \ln(x^2+1)$ függvényen.

Megoldás:

1) Értelmezési tartomány.

A logaritmus argumentumára kell kikötést tennünk. Mivel $x^2+1>0$ minden x-re, ezért $D_f=\mathbb{R}$.

2) Alaki tulajdonságok.

Megoldjuk először az

$$\ln\left(x^2+1\right)=0$$

egyenletet. Mivel a logaritmus egyedül 1-ben nulla, az kell, hogy

$$x^2+1=1$$

legyen, ami $x=0$ esetén teljesül. Persze ekkor $f(0)=0$ is fennáll, a grafikon tehát áthalad az origón.

A paritást vizsgálva:

$$f(-x)=\ln\left((-x)^2+1\right)=\ln\left(x^2+1\right)=f(x),$$

most tehát páros függvénnyel van dolgunk.

3) Limeszek az értelmezési tartomány szélein.

$$\lim_{x\to-\infty}\ln\left(x^2+1\right)=\infty,$$

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left(x^2+1\right)=\infty.$$

A párosság miatt ezek nem is lehetnek eltérők.

4) Lokális szélszőértékek.

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x=\frac{2x}{x^2+1}.$$

$\frac{2x}{x^2+1}=0$ akkor és csak akkor, ha $x_1'=0$, egy szélsőérték jelöltünk van tehát. A szokásos táblázat elkészítésével megvizsgáljuk, hogy valóban szélsőérték-e.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Látjuk, hogy a jelöltünk valóban szélsőérték hely, mégpedig lokális minimum hely, a minimum értéke: $f(0)=0$.

5) Monotonitási szakaszok.

A harmadik sorból látszik, hogy a minimum hely előtt csökken, utána nő a függvény.

6) Inflexiós pontok.

$$f''(x)=\frac{2\left(x^2+1\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

$f''(x)=0$ akkor és csak akkor, ha $x_1''=-1$ vagy $x_2''=1$.

Az alábbi táblázatban mindkét jelöltet megvizsgáljuk.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,\infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	konkáv	inf. pont	konvex	inf. pont	konkáv

Mindkét jelölt valóban inflexiós pont. Az inflexiós pontok második koordinátái: $f(-1)=f(1)=\ln 2\approx 0.69$.

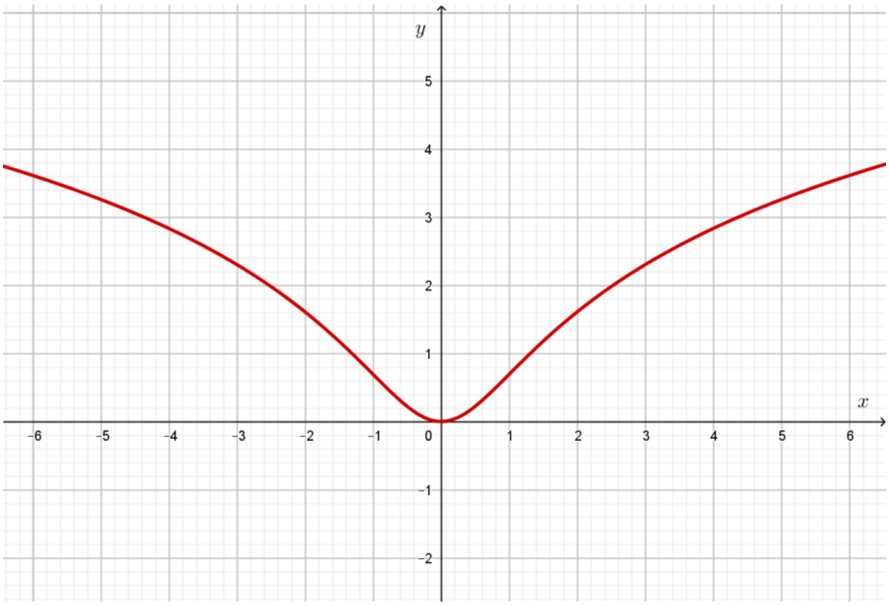
7) Konvex, konkáv szakaszok.

Látjuk a harmadik sorból, hogy a függvény az inflexiós pontok között konvex, azokon kívül konkáv.

8) Grafikon.

Figyelembe véve az eddig megszerzett információkat, most az alábbi grafikont kapjuk.

Most is ügyeljünk arra, hogy a párosság, azaz a grafikon y tengelyre való szimmetrikussága, látszódjon.



9) Értékkészlet.

Látjuk, hogy $R_f = [0, \infty)$.

11. feladat: Végezzünk teljes függvényviszgálatot az $f(x) = xe^{-x}$ függvényen.

Megoldás:

1) Értelmezési tartomány.

Mivel nem kell kikötést tennünk, így $D_f = \mathbb{R}$.

2) Alaki tulajdonságok.

A tengelymetszeteket vizsgálva:

$f(x) = 0$ akkor és csak akkor, ha $x_1 = 0$, a grafikon átmegy az origón.

A paritást vizsgálva:

$f(-x) = (-x)e^{-(-x)} = -xe^x$.

Ez nem az $f(x)$, és nem is annak mínusz egyszerese, tehát a függvény se nem páros, se nem páratlan.

3) Limeszek az értelmezési tartomány szélein.

$\lim_{x \to -\infty} \left(xe^{-x}\right) = -\infty$,

hiszen a szorzat első tényezője mínusz végtelenbe, a második tényezője plusz végtelenbe tart.

A $\lim\limits_{x\to\infty}\left(xe^{-x}\right)$ határérték $0\cdot\infty$ típusú, de átírható $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}$ alakban törtté, és ez a $\frac{\infty}{\infty}$ típusú limesz a L'Hospital-szabály segítségével könnyen kiszámolható. A deriváltak hányadosának limesze

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0,$$

ezért

$$\lim_{x\to\infty}\left(xe^{-x}\right)=0.$$

4) Lokális szélsőértékek.

A deirválásnál a szorzat szabályt alkalmazva:

$$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}.$$

$f'(x)=0$ pontosan akkor, ha a szorzat valamelyik tényezője 0. Mivel $e^{-x}>0$, ezért ez csak $x=1$ esetén lehetséges.

A szokásos táblázatban megvizsgáljuk a jelöltet.

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

Az 1-ben tehát szélsőérték van, mégpedig lokális maximum, aminek értéke $f(1)=\frac{1}{e}\approx 0.37$.

5) Monotonitási viszonyok.

A harmadik sor alapján a függvény 1 -ig nő, utána csökken.

6) Inflexiós pontok.

$$f''(x)=-e^{-x}+(1-x)\left(-e^{-x}\right)=(x-2)e^{-x}.$$

$f''(x)=0$ pontosan akkor, ha a szorzat valamelyik tényezője 0. 0. Mivel $e^{-x}>0$, ezért ez csak $x=2$ esetén lehetséges.

Megvizsgáljuk a jelöltünket. A táblázat most

x	$(-\infty,2)$	2	$(2,\infty)$

$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	konkáv	inf. pont	konvex

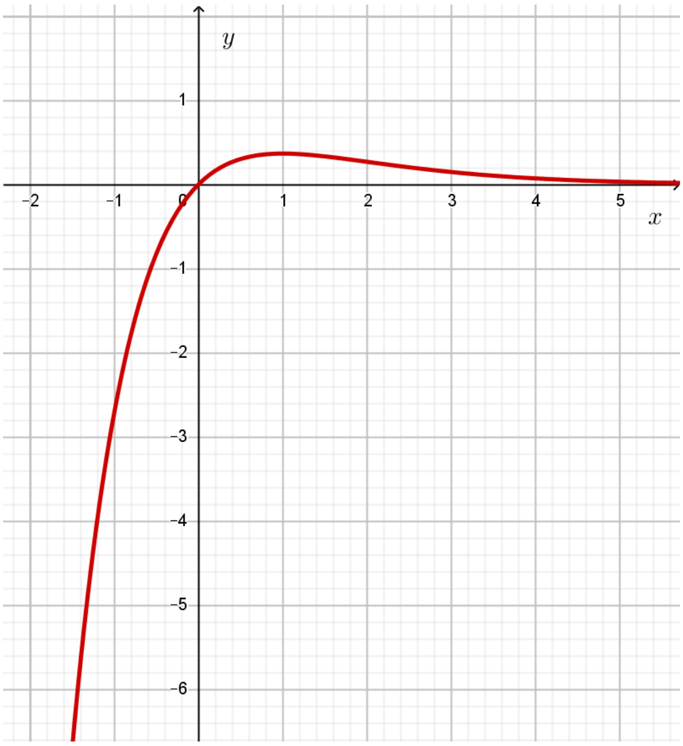
A második derivált előjele az $x-2$ tényező előjelével azonos. Ez 2 előtt negatív, utána pozitív.
A 2-ben tehát inflexiós pont van. $f(2)=2e^{-2}\approx 0.27$ az inflexiós pont második koordinátája.

7) Konvex, konkáv szakaszok.

A második sor alapján az inflexiós pont előtt konkáv a függvény, utána konvex.

8) Grafikon.

Figyelembe véve az eddigieket a függvény ábrája:



9) Értékkészlet.

Az ábra alapján a függvény a lokális maximumát, és az annál kisebb értékeket veszi fel, (a lokális maximum most globális maximum is).

$R_f=\left(-\infty,\quad \frac{1}{e}\right].$

12. feladat: Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ függvényen.

Megoldás:

1) Értelmezési tartomány.

A nevezőbeli x miatt

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

2) Alaki tulajdonságok.

A függvény sehol sem nulla, hiszen a számláló minden x-re pozitív, a grafikon nem metszi a vízszintes tengelyt.

Mivel $0 \notin D_f$, a grafikon nem metszi a függőleges tengelyt sem.

$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{-x} = -\frac{e^{-x}}{x},$$

amiből látszik, hogy a függvény se nem páros, se nem páratlan.

3) Limeszek az értelmezési tartomány szélein.

Négy határértéket kell kiszámolnunk.

Alkalmazva a L'Hospital-szabályt az eredeti $\frac{\infty}{\infty}$ típusú limeszre:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{1} = 0.$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty,$$

hiszen a számláló 1-hez, a nevező pedig nullához tart, de mindig negatív.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{x} = \infty,$$

mivel most a nevező a pozitív számokon keresztül tart nullához.

Végül, ismét felhasználva a L'Hospital-szabályt,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1} = \infty.$$

4) Lokális szélsőértékek.

$$f'(x) = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}.$$

$f'(x) = 0$ pontosan akkor, ha a tört számlálója 0. Mivel a számláló szorzat, így valamelyik tényezőjének kell 0-nak lennie, amiből $x = 1$.

Figyeljünk most arra, hogy a jelölt a D_f jobb oldali felébe esik, azt vágja ketté, ezért a fejléc az alábbi három intervallumot tartalmazza.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
$f'(x)$	–	X	–	0	+
$f(x)$	↘	X	↘	lok. min.	↗

Az 1-ben tehát lokális minimum van, amelynek értéke: $f(1)=e$.

5) Monotonitási viszonyok.

Figyeljük meg, hogy - összhangban a nulla körüli limeszekkel - a nulla bal és jobb oldali környezetében is csökkenő a függvény.

6) Inflexiós pontok

$$f''(x)=\frac{\left((x-1)e^x\right)' x^2-(x-1)e^x\left(x^2\right)'}{x^4}=\frac{\left(e^x+(x-1)e^x\right)x^2-2x(x-1)e^x}{x^4}=$$

$$=\frac{\left(x^2-2x+2\right)e^x}{x^3}.$$

Újra egy törtet kell vizsgálnunk, hogy az hol 0, mely akkor lehetséges, ha a tört számlálója 0. Mivel a számláló szorzat, így valamelyik tényezőjének kell 0-nak lennie. Azt látjuk, hogy az $x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0$ és $e^x>0$, amiből $f''(x)\neq 0$, tehát nincs inflexiós pont.

7) Konvex, konkáv szakaszok.

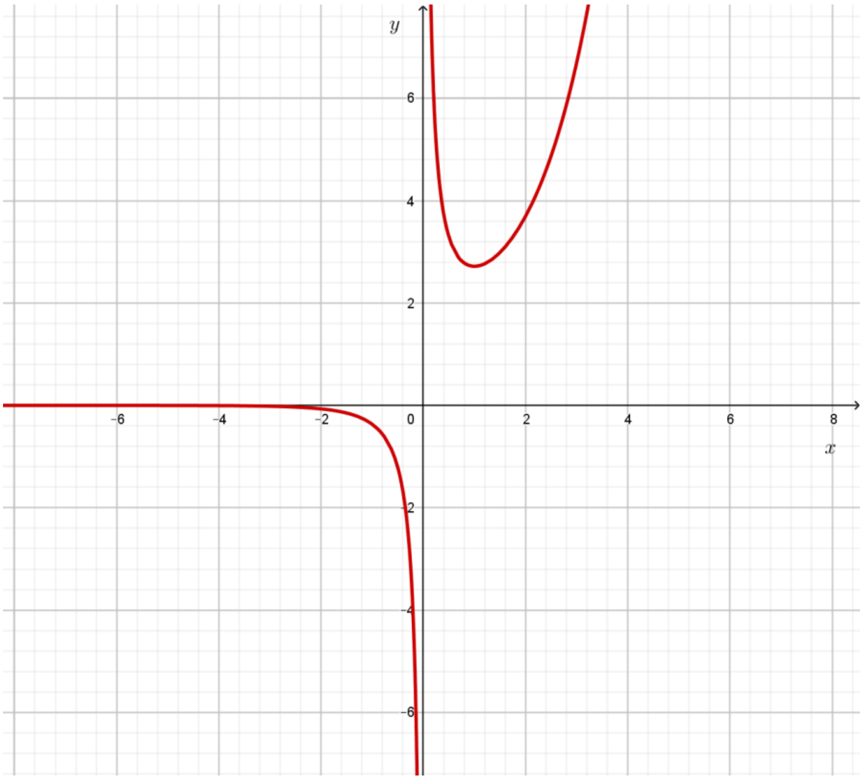
Nincs ugyan inflexiós pont, de a második táblázatot most is el kell készíteni, mert a konvex és konkáv szakaszok abból olvashatók ki.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\infty)$
$f''(x)$	–	X	+
$f(x)$	konkáv	X	konvex

Az előjelekkel kapcsolatban jegyezzük meg, hogy most $f''(x)$ előjele (mivel a számlálója mindig pozitív) a nevezője előjelével egyezik meg, az pedig negatív x-ekre negatív, pozitívakra pozitív.

8) Grafikon.

Ezek után elkészíthetjük a függvény ábráját, ami az alábbi:



9) Az ábra alapján

$R_f = (-\infty, 0) \cup (e, \infty)$.

Ellenőrző kérdések:

17. kérdés: Az $f(x) = x^3 - 12x + 1$ függvény csökken az alábbi intervallum(ok)on

$(2, \infty)$.

$(-2, 2)$. (X)

$(-\infty, -2)$.

$(-\infty, -2)$ és $(2, \infty)$.

18. kérdés: Hány inflexiós pontja van az $f(x) = xe^{-x^2}$ függvénynek?

0.

1.

2 .

3 . (X)

19. kérdés: Hány inflexiós pontja van az $f(x)=x^4-2x^3+1$ függvénynek?

0 .

1.

2 . (X)

3 .

20. kérdés: Hány lokális szélsőértékhelye van az $f(x)=x^2e^{-x}$ függvénynek?

0 .

1.

2 . (X)

3 .

21. kérdés: Hány inflexiós pontja van az $f(x)=x^4$ függvénynek?

0 . (X)

1.

2 .

3 .

22. kérdés: Az $f(x)=x^6-10x^4$ függvény konkáv a $(-2,2)$ intervallumon.

Igaz. (X)

Nem igaz.

3. Differenciálszámítás

3.5. Modulzáró ellenőrző kérdések

1. kérdés: Mi az $f\left(x\right)=\frac{2}{x^3}$ függvény $x_0=-1$-beli érintőjének egyenlete?

$y=-6x-8$ (X)

$y=-2x+1$

$y=8x-10$

$y=-\frac{1}{2}x+10$

2. kérdés: Mi az $f\left(x\right)=x^2+3x+1$ függvény $m=-5$ meredekségű érintőjének egyenlete?

$y=5x+4$

$y=-5x+13$

$y=-5x-15$ (X)

$y=-5x+4$

3. kérdés: Mi az $f\left(x\right)=\left(2x+\sin x\right)\left(x^2+3\right)$ függvény derivált függvénye?

$\left(2-\cos x\right)\left(x^2+3\right)+2x\left(2x+\sin x\right)$.

$\left(2-\cos x\right)2x$.

$\left(2+\cos x\right)\cdot 2x$

$\left(2+\cos x\right)\left(x^2+3\right)+2x\left(2x+\sin x\right)$ (X).

4. kérdés: Mi az $f\left(x\right)=\frac{2e^x+\sqrt{x}}{\cos x}$ függvény derivált függvénye?

$$\frac{\left(2e^x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\cos x-\left(2e^x+\sqrt{x}\right)\sin x}{\cos^2 x}.$$

$$\frac{\left(2e^x+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\cos x+\left(2e^x+\sqrt{x}\right)\sin x}{\cos^2 x}.\ \text{(X)}$$

$$\frac{2e^x + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sin x}$$

$$-\frac{2e^x + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sin x}$$

5. kérdés: Mi az $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x}$ függvény derivált függvénye?

$\frac{1}{2\sqrt{3x^2 - 3}}$.

$\frac{3x^2 - 3}{2\sqrt{3x^2 - x}}$.

$\frac{3x^2 - 3}{2\sqrt{x^3 - 3x}}$. (X)

$\frac{3x^2}{\sqrt{x^3 - 3x}}$.

6. kérdés: Mi az $f(x) = xe^x$ függvény másodrendű derivált függvénye?

$(x+1)e^x$.

$(x+2)e^x$. (X)

e^x

$2xe^x$

7. kérdés: Az $f(x) = \sqrt{5 - x}$ függvény $a = 1$ hely körüli elsőfokú Taylor-polinomja

$y = -\frac{x}{4} + \frac{9}{4}$. (X)

$y = -\frac{x}{4} - \frac{9}{4}$.

$y = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}$.

$y = -\frac{x}{4} + \frac{7}{4}$.

8. kérdés: Az alábbi függvények közül melyik az $f(x)=x^3-10x^2+32x-37$ függvény $a=4$ helyen vett harmadfokú Taylor-polinomja?

$5+2(x-4)+(x-4)^3$

$-5+2(x-4)+(x-4)^3$

$5+2(x-4)^2+(x-4)^3$

$-5+2(x-4)^2+(x-4)^3$ (X)

9. kérdés: Melyik az $f(x)=\frac{1}{2+x}$ függvény harmadfokú Maclaurin-polinomja?

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3$

$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3$ (X)

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{128}x^3$

$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x+\frac{1}{16}x^2-\frac{1}{128}x^3$

10. kérdés: $\lim_{x\to 1}\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sin(x-1)}=$

$\frac{1}{2}$. (X)

1.

0.

$-\frac{1}{2}$.

11. kérdés: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 3x}{x^2}=$

$\dfrac{1}{9}$.

$\dfrac{1}{3}$.

3.

9. (X)

12. kérdés: $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot \mathrm{arcctg} x=$

-1.

0.

1. (X)

∞.

13. kérdés: Legyen $f\left(x\right)=4x^3-12x^2+6$. Milyen x -re lesz $f'(x)=0$?

$0\ ;\ 2$ (X)

$-2\ ;\ 2$

$-2\ ;\ 0$

$-1\ ;\ 3$

14. kérdés: Legyen $C\left(t\right)=\dfrac{3}{t^3-6t}$. Milyen t -re lesz $C'(t)=0$?

$0\ ;\ \sqrt{2}$

$-\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{2}$ (X)

$-2\ ;\ 2$

$-\sqrt{2}\ ;\ 1$

15. kérdés: Hol csökkenő az f függvény, ha deriváltja $f'\left(x\right)=\dfrac{x+7}{\left(x-8\right)^3}$? Az f ugyanott értelmezhető, ahol f'.

A $\left]-\infty,-7\right[$ és $\left]-7,8\right[$ intervallumokon.

A $\left]-\infty,-7\right[$ intervallumon.

A $\left]-7,8\right[$ és $\left]8,\infty\right[$ intervallumokon.

A $\left]-7,8\right[$ intervallumon. (X)

16. kérdés: Hol nő az $f\left(x\right)=\dfrac{x^3-16}{x}$ függvény?

A $\left]-\infty,-2\right[$ és $\left]0,\infty\right[$ intervallumokon.

A $\left]-2,0\right[$ és $\left]2,\infty\right[$ intervallumokon.

A $\left]-2,0\right[$ és $\left]0,\infty\right[$ intervallumokon. (X)

A $\left]-\infty,0\right[$ és $\left]2,\infty\right[$ intervallumokon.

17. kérdés: Hol és milyen szélsőértéke van az $f\left(x\right)=\dfrac{e^{-x}}{x}$ függvénynek?

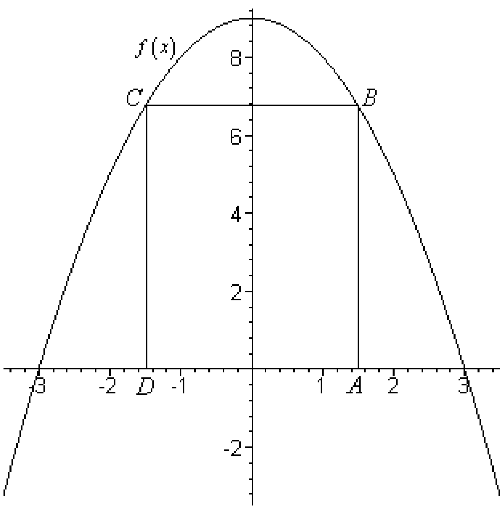
Az $x=-1$ helyen minimuma van.

Az $x=-1$ helyen maximuma van. (X)

Az $x=1$ helyen minimuma van.

Az $x=1$ helyen maximuma van.

18. kérdés: Tekintsük azokat a téglalapokat, melyeknek két csúcsa az x-tengelyen, másik két csúcsa pedig az x-tengely fölött az $f\left(x\right)=9-x^2$ függvény grafikonján van.



Mi az A csúcs első koordinátája, ha a téglalap területe maximális?

1

$\sqrt{2}$

$\sqrt{3}$ (X)

2

19. kérdés: Az $f(x)=\dfrac{x^2}{1-x^2}$ függvény

páros. (X)

páratlan.

se nem páros, se nem páratlan.

20. kérdés: Hol konvex az $f\left(x\right)=\ln^2 x$ függvény?

$\left(0,1\right)$

$\left(0,e\right)$ (X)

$\left(1,\infty\right)$

$\left(e,\infty\right)$

21. kérdés: A következő intervallumo(ko)n konkáv az $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+3}$ függvény

$\left(-1,1\right)$.

$\left(-\infty,-1\right)\cup\left(1,\infty\right)$. (X)

$\left(-\infty,-1\right)$.

$\left(-1,1\right)\cup\left(1,\infty\right)$

22. kérdés: Az $f\left(x\right)=x^3-3x^2+3x$ függvénynek az $x=1$ helyen

minimuma van.

maximuma van.

inflexiós pontja van. (X)

nincs sem szélsőértéke, sem inflexiós pontja.