Differenciálegyenletek

Összefoglalás

I. Elsőrendű közönséges differenciálegyenletek

1. Egyszerűbb explicit differenciálegyenletek

a) $y'(x) = f(x)$ alakú egyenletek

Megoldási módszer: „egyszerűen integrálni kell" az x változó szerint mindkét oldalt, azaz

$$y(x) = \int f(x)\, dx.$$

b) $y' = f(y)$ alakú egyenletek

Megoldási módszer: elosztjuk az egyenletet (az $f(y) \neq 0$ esetben) $f(y)$-nal, majd integráljuk az $\frac{1}{f(y)}$ kifejezést az y változó szerint baloldalon, az 1-et x szerint jobb oldalon, azaz

$$\int \frac{1}{f(y)}\, dy = x + C.$$

2. Szeparábilis differenciálegyenletek

Vagyis ha az egyenlet

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y)$$

alakba írható. Ahhoz, hogy észrevegyük, hogy ilyen az egyenlet, rendezzük át először úgy, hogy egyedül az y' szerepeljen a baloldalon. Majd a jobboldalon kiemeléssel, összevonással válasszuk szét a tagokat két csoportra, az egyikbe gyűjtsük össze az y-t tartalmazó tagokat, a másikba a maradékot. Itt alapvetően szorzunk és osztunk, nem pedig összeadunk és kivonunk az egyenlet rendezésénél!

Ezek után a megoldás

$$\int \frac{1}{g(y)}\, dy = \int f(x)\, dx.$$

Példa. Oldjuk meg az $y'(x) = y^2(x)$ egyenletet!

Megoldás. Az $y(x) \equiv 0$ függvény biztosan megoldás. Ha $y \neq 0$, akkor elosztva vele az egyenletet, a hagyományos jelöléssel kapjuk, hogy

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int \mathrm{d}x \iff -\frac{1}{y} = x + C \iff y(x) = -\frac{1}{x+C}.$$

3. Szeparábilis differenciálegyenletekre vezető differenciálegyenletek

a) Változóban homogén differenciálegyenletek

Vagyis ha az egyenlet

$$y' = f\left(\frac{y(x)}{x}\right)$$

alakú. A megoldás menete: helyettesítsük az $u(x) = \frac{y(x)}{x}$ függvényt az egyenletbe, ez lesz az új keresett függvényt. Az eredeti egyenletben szereplő y és y' tagokat lecseréljük rendre az $u(x) \cdot x$, valamint $u'(x) \cdot x + u(x)$ kifejezésekre. Ekkor egy új egyenletet kapunk az u függvényre, amely szeparábilis lesz. Egészen pontosan az új egyenlet

$$u' = \frac{f(u) - u}{x}$$

lesz, melyet szeparálás után az

$$\int \frac{1}{f(u) - u}\, du = \log x + C$$

képlettel oldunk meg. Végül az így kapott u függvényből megkapjuk a keresett y függvényt: $y(x) = u(x) \cdot x$.

b) $y' = f(ax + by + c)$ alakú differenciálegyenletek

A megoldás menete: az előző típushoz hasonlóan helyettesítsük az $u(x) = ax + by(x) + c$ függvényt az egyenletbe, ez lesz az új keresett függvényt. Az eredeti egyenletben szereplő y és y' tagokat lecseréljük rendre az $\frac{1}{b}(u(x) - ax - c)$, valamint $\frac{1}{b}(u'(x) - a)$ kifejezésekre. Ekkor egy új egyenletet kapunk az u függvényre, amely szeparábilis lesz. Egészen pontosan az új egyenlet

$$u' = bf(u) + a$$

lesz, melyet szeparálás után az

$$\int \frac{u}{bf(u) + a}\, du = x + C$$

képlettel oldunk meg. Végül az így kapott u függvényből megkapjuk a keresett y függvényt: $y(x) = \frac{1}{b}(u(x) - ax - c)$.

4. Egzakt differenciálegyenletek

Ha az egyenlet

$$P(x, y) + y'Q(x, y) = 0$$

alakba írható, ahol

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

A megoldás menete: Keressük az F függvényt, melyre $F = \frac{\partial P}{\partial x}$ és $F = \frac{\partial Q}{\partial y}$. Ennek meghatározása:

1. lépés $F(x, y) = \int P(x, y)\, dx + h(y)$

2. lépés: a h függvény meghatározásához deriváljuk a fent kapott F-et y szerint, tegyük egyenlővé Q-val. Ez egy egyenletet szolgáltat h-ra. Azt megoldva, majd visszahelyettesítve az eredeti képletbe, megkapjuk F-et.

Az eredeti egyenlet megoldását az $F(x, y) = 0$ implicit egyenlet szolgáltatja.

Példa. Oldjuk meg az $x^2 - y(x) - xy'(x) = 0$ egyenletet!

Megoldás. Az $M(x,y) = x^2 - y$, $N(x,y) = -x$ választás mellett az egyenlet (1.5) alakú és $\partial_2 M = -1 = \partial_1 N$. A primitív függvény

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,\mathrm{d}x = \int x^2 - y\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - xy + C(y),$$

alakú, ahol a C függvényt az

$$-x = N(x,y) = \partial_2 F(x,y) = -x + C'(y)$$

egyenletből határozhatjuk meg, ahonnan $C(y) = C$ konstans. Primitív függvénynek tehát választható $F(x,y) = \frac{x^3}{3} - xy$, ahonnan a megoldás

$$\frac{x^3}{3} - xy(x) = C, \quad \text{azaz} \quad y(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{C}{x}.$$

5. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

a) Homogén lineáris egyenlet:

$$y' = f(x)y$$

alakú. Ez egy szeparábilis egyenlet.

b) Inhomogén lineáris egyenlet:

$$y' = f(x)y + g(x)$$

alakú. A megoldás menete:
1. lépés: megoldjuk a hozzá tartozó homogén egyenletet, azaz az $y' = f(x)y + g(x)$ egyenletet. Megkapjuk a homogén egyenlet általános megoldását: $y_h(x) = c \cdot e^{\int f(x)\,dx}$.
2. lépés: megkeressük az inhomogén egyenlet egy megoldását az állandó variálásának módszerével. Vagyis az inhomogén egyenletbe helyettesítjük a $c(x) \cdot e^{\int f(x)\,dx}$ kifejezést. Ez egy újabb differenciálegyenletet ad a $c(x)$ függvényre. Ezt megoldva kapjuk az inhomogén egyenlet egy megoldását $y_p(x) = c(x) \cdot e^{\int f(x)\,dx}$.
3. lépés: az inhomogén egyenlet összes megoldása előáll $y = y_h + y_p$ alakban.

Példa. Oldjuk meg az $y'(x) = 2x \cdot y(x) + 2x^3$ egyenletet!

Megoldás. A $z'(x) = 2x \cdot z(x)$ homogén egyenlet szeparábilis, a megoldása

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 2xz \implies \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2x\,\mathrm{d}x \implies \int \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int 2x\,\mathrm{d}x \implies \log|z| = x^2 + D \implies z(x) = C\mathrm{e}^{x^2}.$$

A partikuláris megoldást keressük $y_0(x) = C(x)\mathrm{e}^{x^2}$ alakban. Ekkor C-re a

$$C'(x) = 2x^3\mathrm{e}^{-x^2}$$

egyenletet kapjuk, melyből parciális integrálással

$$C(x) = \int 2x^3\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\int \big(-2x\mathrm{e}^{-x^2}\big)x^2\,\mathrm{d}x = -\int \big(\mathrm{e}^{-x^2}\big)'x^2\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x^2}x^2 + \int \mathrm{e}^{-x^2}2x\,\mathrm{d}x =$$
$$= -\mathrm{e}^{-x^2}x^2 - \int (-2x)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x^2}x^2 - \int \big(\mathrm{e}^{-x^2}\big)'\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x^2}x^2 - \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Ebből $y_0(x) = -x^2 - 1$, így a feladat megoldása $y(x) = C\mathrm{e}^{x^2} - x^2 - 1$.

Példa. Adjuk meg az $y' - 2y = 4x$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Először az $y' - 2y = 0$ homogén egyenlet megoldását határozzuk meg, ami egy szeparábilis egyenlet, a megoldása

$$y_h = c \cdot \mathrm{e}^{-\int -2\,\mathrm{d}x} = c \cdot \mathrm{e}^{2x}.$$

A zavaró függvény egy elsőfokú polinom, tehát próbafüggvény-módszerrel a partikuláris megoldást a következő alakban célszerű keresni:

$$y_p = Ax + B$$

Ezt, illetve ennek a deriváltját (y_p'-t) helyettesítjük vissza az eredeti inhomogén egyenletbe, majd összehasonlítjuk az egyenlet két oldalát, így információt kapunk A-ról és B-ről.

$$A - 2\,(Ax + B) = 4x$$

$$-2Ax + A - 2B = 4x$$

A fenti egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $-2A = 4$ és $A - 2B = 0$ teljesül, tehát $A = -2$ és $B = -1$ a megfelelő választás. Ezek alapján a partikuláris megoldás

$$y_p = -2x - 1,$$

a differenciálegyenlet általános megoldása pedig

$$y = y_h + y_p = c \cdot \mathrm{e}^{2x} - 2x - 1.$$

Példa. Adjuk meg az $y' - 4y = \frac{25}{4}\cos(3x) + 2$ differenciálegyenlet általános megoldását.

A homogén rész megoldása $y_h = c \cdot \mathrm{e}^{4x}$. Mivel a zavaró függvényben szerepel a $\cos(3x)$ függvény, ezért a próbafüggvény mindenképpen tartalmazza majd az $A\sin(3x) + B\cos(3x)$ kifejezést. A zavaró függvény második tagja egy konstans (nulladfokú polinom), ezért az alkalmas próbafüggvény az

$$y_p = A\sin(3x) + B\cos(3x) + C$$

lesz. Ezt deriválva, majd az eredeti egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$3A\cos(3x) - 3B\sin(3x) - 4\,(A\sin(3x) + B\cos(3x) + C) = \frac{25}{4}\cos(3x) + 2,$$

amit a benne szereplő függvények szerint rendezve a

$$(3A - 4B)\cos(3x) + (-4A - 3B)\sin(3x) - 4C = \frac{25}{4}\cos(3x) + 2$$

egyenletet nyerjük. Ez pontosan akkor teljesül, ha $C = -\frac{1}{2}$, valamint $3A - 4B = \frac{25}{4}$ és $-4A - 3B = 0$ is teljesül. Ennek az egyenletrendszernek a megoldása az $A = \frac{3}{4}$ és a $B = -1$, tehát a differenciálegyenlet partikuláris részének megoldása

$$y_p = \frac{3}{4}\sin(3x) - \cos(3x) - \frac{1}{2}.$$

A differenciálegyenlet általános megoldása az előbbiek alapján

$$y = y_h + y_p = c \cdot \mathrm{e}^{4x} + \frac{3}{4}\sin(3x) - \cos(3x) - \frac{1}{2}.$$

Példa. Oldjuk meg az $y' - 2y = \mathrm{e}^{2x} + x$ differenciálegyenletet.
A homogén rész megoldása $y_h = c \cdot \mathrm{e}^{2x}$. A zavaró függvény alapján felírt próbafüggvény az

$$y_p = A\mathrm{e}^{2x} + Bx + C$$

lenne, azonban az első tag rezonálni fog a homogén rész megoldásával, ezért annak x-szeresét vesszük:

$$y_p = Ax\mathrm{e}^{2x} + Bx + C.$$

Deriváljuk, majd visszahelyettesítjük az inhomogén differenciálegyenletbe:

$$A\mathrm{e}^{2x} + 2Ax\mathrm{e}^{2x} + B - 2\left(Ax\mathrm{e}^{2x} + Bx + C\right) = \mathrm{e}^{2x} + x.$$

Az $x\mathrm{e}^{2x}$-es tagok kiejtik egymást.

$$A\mathrm{e}^{2x} - 2Bx - 2C + B = \mathrm{e}^{2x} + x,$$

ahonnan kapjuk, hogy $A = 1$, $B = -\dfrac{1}{2}$ és $C = -\dfrac{1}{4}$. Ezek alapján a differenciálegyenlet általános megoldása

$$y = c \cdot \mathrm{e}^{2x} + x\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}.$$

II. Másodrendű differenciálegyenletek

1. Hiányos másodrendű differenciálegyenletek

a) $y'' = f(x)$ alakú egyenletek
Megoldása: $y(x) = \int \left(\int f(x)\, dx\right)\, dx + c_1x + c_2$.

b) $y'' = F(x, y')$ alakú egyenletek, vagyis nem szerepel benne „deriválás nélküli” y. ekkor egy új $z = y'$ függvény bevezetésével elsőrendű egyenletet kapunk.

2. Másodrendű lineáris differenciálegyenletek

a) Állandó együtthatós homogén lineáris egyenletek
Az egyenlet alakja

$$ay'' + by' + xy = 0.$$

A megoldás menete: megkeressük az $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ valós másodfokú egyenlet λ_1, λ_2 gyökeit.
1. eset: ha két különböző valós gyök van, ekkor a megoldás:

$$y(x) = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x},$$

ahol c_1, c_2 tetszőleges konstansok
2. eset: ha egy kétszeres valós gyök van, azaz ha $\lambda_1 = \lambda_2$, akkor a megoldás:

$$y(x) = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2xe^{\lambda_1 x},$$

ahol c_1, c_2 tetszőleges konstansok
3. eset: ha két (konjugált) komplex gyök van, $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, akkor a megoldás:

$$y(x) = c_1e^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_2e^{\alpha x}\sin(\beta x),$$

Másodrendű inhomogén lineáris differenciálegyenletek megoldása konstansok variálásának módszerével:

Az

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x)$$

inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának keresése hasonló elv alapján történik, mint az elsőrendű lineáris egyenleteknél. Ha a homogén egyenlet $y_1(x)$ és $y_2(x)$ alapmegoldásait már meghatároztuk, akkor a homogén egyenlet összes megoldása $c_1y_1 + c_2y_2$ alakú. Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását az állandók variálásának módszerével kereshetjük: legyen $y_0(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$, ahol c_1, c_2 alkalmas függvények.

Válasszuk úgy a keresett c_1, c_2 függvényeket, hogy $c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0$ legyen és ekkor a fenti egyenletből a $c_1'y_1' + c_2'y_2' = f$ feltétel adódik.
Noha az első követelmény teljesen önkényes, a c_1', c_2' függvényekre kapott

$$\left.\begin{array}{rcl} c_1'y_1 + c_2'y_2 & = & 0 \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' & = & f \end{array}\right\}$$

lineáris egyenletrendszer megoldható, hiszen a rendszer mátrixának determinánsa éppen $W(y_1, y_2)$, ami pedig sehol sem nulla, tehát ennek a rendszernek egyértelműen van megoldása, amiből integrálással a c_1, c_2 függények is előállíthatók:

$$c_1(x) = \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{W(y_1(x), y_2(x))}\,dx, \qquad c_2(x) = \int \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x) \end{vmatrix}}{W(y_1(x), y_2(x))}\,dx.$$

Ha az f függvények speciális alakja van, például polinom, exponenciális vagy trigonometrikus függvény, akkor érdemes lehet a partikuláris megoldást is olyan alakban keresni. Ez a próbafüggvény-módszernek is nevezett eljárás gyakran gyorsabb és egyszerűbb számolásokra vezető módszer, mint az állandók variálása.

Definíció. A fenti állításban szereplő

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

determinánst az y_1, y_2 megoldásokhoz tartozó Wronski-determinánsnak nevezzük.

Definíció. Ha az y_1 és y_2 megoldásokra $W(y_1, y_2) \neq 0$ teljesül, akkor azt mondjuk, hogy y_1 és y_2 a homogén egyenlet alaprendszerét alkotják.

Példa. Add meg a $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{2x}$ egyenlet általános megoldását.

Eloször az $y'' - 2y' + y = 0$ homogén egyenlet megoldását határozzuk meg,

a differenciálegyenlet karakterisztikus polinomja: $r^2 - 2r + 1 = 0 \rightarrow r_1 = r_2 = 1 \rightarrow$ tehát a homogén rész megoldása: $\underline{y_h = C_1 e^x + C_2 x e^x}$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását az állandó variálásának módszerével $y_p = C_1(x)\,e^x + C_2(x)\,x\,e^x$ alakban keressük:

Ekkor az egyenletrendszert erre a feladatra felírva kapjuk:

$$\begin{cases} C_1' e^x + C_2' x e^x = 0 \\ C_1' e^x + C_2' (e^x + x e^x) = \dfrac{e^x}{2x} \end{cases}$$

Ezt végigszámolva kapjuk, hogy

$$C_1'(x) = -\frac{1}{2} \qquad \rightarrow \qquad C_1(x) = \int \left(-\frac{1}{2}\right) dx = -\frac{1}{2}x + \underbrace{K_1}_{=0} = -\frac{1}{2}x \,,$$

$$C_2'(x) = \frac{1}{2x} \qquad \rightarrow \qquad C_2(x) = \int \frac{1}{2x}\, dx = \frac{1}{2} \ln x + \underbrace{K_2}_{=0} = \ln\sqrt{x} \,.$$

Ezért

$$y_p = -\frac{1}{2} x e^x + (\ln\sqrt{x})\, x e^x$$

tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 x e^x - \frac{1}{2} x e^x + (\ln\sqrt{x})\, x e^x$$

Konstans együtthatós másodrendű inhomogén lineáris differenciálegyenletek megoldása próbafüggvény módszerével:

Példa. Add meg az $y'' + y = 3x^2$ egyenlet általános megoldását.

Az egyenlethez rendelt homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 + 1 = 0,$$

amelynek két komplex gyöke van, $\lambda_1 = i = 0 + 1i$ és $\lambda_2 = -i = 0 - 1i$. A homogén rész megoldása ezért $y_h = e^{0x}(c_1 \cos(1x) + c_2 \sin(1x)) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$. Mivel most a zavaró függvény egy másodfokú polinom, ezért a partikuláris megoldást célszerű az

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

próbafüggvény segítségével meghatároznunk. Vesszük y_p első, majd második deriváltját, ezeket visszahelyettesítjük az inhomogén egyenletbe.

$$2A + Ax^2 + Bx + C = 3x^2,$$

amiből rögtön következik, hogy $A = 3$, $B = 0$ és $C = -6$ a próbafüggvény megfelelő együtthatóinak értéke. Ezek alapján az egyenlet általános megoldása

$$y = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + 3x^2 - 6.$$

Példa. Add meg az $y'' + 2y' = 12x^2 - 2$ egyenlet $y(0) = 0$ és $y(-0.5) = -1 - e$ kezdeti feltételeket kielégítő megoldását.

A homogén rész karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 + 2\lambda = 0,$$

melynek két különböző valós gyöke van, $\lambda_1 = 0$ és $\lambda_2 = -2$, ezért a homogén megoldás $y_h = c_1 + c_2 \cdot e^{-2x}$. Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását kereshetjük próbafüggvénnyel, mivel a zavaró függvény egy másodfokú polinom. Célszerűnek tűnhet most is az $Ax^2 + Bx + C$ választás, azonban a differenciálegyenletet alaposabban megvizsgálva ez mégsem lesz megfelelő. Az egyenlet ugyanis nem tartalmazza az y tagot, csak az y' és y'' tagokat, tehát ha másodfokú polinomot választanánk próbafüggvénynek, akkor visszahelyettesítés után az egyenlet bal oldalán egy legfeljebb elsőfokú polinomot kapnánk. Ennek az együtthatóit viszont nem tudnánk úgy választani, hogy az megegyezzen a zavaró függvénnyel, azaz egy másodfokú polinommal. Ezért most célszerű egy magasabb fokszámú, esetükben harmadfokú polinommal próbálkozni.

$$y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D,$$

majd ennek deriváltjait visszahelyettesítjük az eredeti egyenletbe:

$$6Ax + 2B + 2(3Ax^2 + 2Bx + C) = 12x^2 - 2.$$

Látható, hogy $A = 2$, $B = -3$ és $C = 2$ esetén teljesül az egyenlőség. Az egyenlet általános megoldása

$$y = c_1 + c_2 \cdot \mathrm{e}^{-2x} + 2x^3 - 3x^2 + 2x.$$

Az inhomogén részre felírt y_p partikuláris megoldásban szerepelt még egy D konstans is, ennek értékét – mivel deriváláskor úgyis eltűnik – kedvünk szerint választhatjuk, legkényelmesebb nullának választani (egyébként pedig „beolvad" a c_1 konstansba).

A kezdeti feltételeknek eleget tevő partikuláris megoldást a c_1 és c_2 konstansok alkalmas megválasztásával kapjuk. Az $y(0) = 0$ feltétel akkor teljesül, ha

$$0 = c_1 + c_2 \cdot \mathrm{e}^{-2\cdot 0} + 2 \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 = c_1 + c_2,$$

azaz

$$c_1 = -c_2.$$

A második feltétel pedig akkor, ha

$$-1 - \mathrm{e} = c_1 + c_2 \cdot \mathrm{e}^{-2\cdot(-0.5)} + 2 \cdot (-0.5)^3 - 3 \cdot (-0.5)^2 + 2 \cdot (-0.5) = c_1 + c_2 \cdot \mathrm{e} - 2,$$

az előbb kapott összefüggés alapján

$$-1 - \mathrm{e} = c_1 - c_1\mathrm{e} - 2$$
$$1 - \mathrm{e} = c_1(1 - \mathrm{e}).$$

Ezek alapján a $c_1 = 1$ és $c_2 = -1$ konstansokkal felírt

$$y = 1 - \mathrm{e}^{-2x} + 2x^3 - 3x^2 + 2x.$$

partikuláris megoldás kielégíti a megadott differenciálegyenletet és a kezdeti feltételeket is.

Példa. Add meg a $4y'' + y = 85(\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{2x})$ egyenlet általános megoldását.

A homogén rész karakterisztikus egyenletének két komplex gyöke $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}i$ és $\lambda_2 = -\dfrac{1}{2}i$, tehát a homogén rész megoldása $y_h = c_1 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + c_2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)$.

Az inhomogén egyenlet jobb oldalán álló zavaró függvény két exponenciális függvény összege, így alkalmazhatjuk a próbafüggvény-módszert például az

$$y_p = A\mathrm{e}^{-x} + B\mathrm{e}^{2x}.$$

választással. A megfelelő tagokat az eredeti egyenletbe helyettesítjük:

$$4\left(A\mathrm{e}^{-x} + 4B\mathrm{e}^{2x}\right) + A\mathrm{e}^{-x} + B\mathrm{e}^{2x} = 85\left(\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{2x}\right).$$

A zárójeleket mindkét oldalon felbontva azt kapjuk, hogy

$$5A\mathrm{e}^{-x} + 17B\mathrm{e}^{2x} = 85\mathrm{e}^{-x} - 85\mathrm{e}^{2x},$$

amiből egyszerűen adódik az $A = 17$ és $B = -5$ választás. Az eredeti differenciálegyenlet általános megoldása tehát

$$y = c_1 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + c_2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) + 17\mathrm{e}^{-x} - 5\mathrm{e}^{2x}.$$

Példa. Oldd meg az $y'' + y = (x+1)\mathrm{e}^{-x}$ differenciálegyenletet.

A homogén rész megoldása $y_h = c_1\cos(x)+c_2\sin(x)$. Az inhomogén egyenlet jobb oldalán álló zavaró függvény egy elsőfokú polinom és egy exponenciális kifejezés szorzata, tehát felírható rá egy megfelelő próbafüggvény. Mivel a zárójelet akár fel is bonthatnánk – ekkor két tagból állna a zavaró függvény – ezért elegendő a polinom tagjait ellátni az ismeretlen együtthatókkal, az exponenciális tagot külön nem szükséges.

$$y_p = (Ax+B)\,\mathrm{e}^{-x},$$

aminek második deriváltját véve, majd visszahelyettesítve az inhomogén egyenletbe kapjuk, hogy

$$-2A\mathrm{e}^{-x} + 2(Ax+B)\mathrm{e}^{-x} = (x+1)\mathrm{e}^{-x},$$

melyet rendezve a

$$2Ax\mathrm{e}^{-x} + (2B-2A)\mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}$$

egyenlethez jutunk. Látható, hogy az $A = \dfrac{1}{2}$ és $B = 1$ választás megfelelő, tehát a differenciálegyenlet általános megoldása

$$y = c_1\cos(x) + c_2\sin(x) + \left(\frac{1}{2}x+1\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

Példa. Add meg az $y'' + 9y = \sin(3x) - \cos(3x)$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Mivel a homogén rész karakterisztikus egyenletének két komplex gyöke van: $\lambda_{1,2} = \pm 3i$, ezért a homogén rész megoldása $y_h = c_1\cos(3x) + c_2\sin(3x)$. Ha az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását próbafüggvény-módszerrel keressük, akkor figyelembe kell vennünk, hogy a homogén részre kapott megoldás hasonló a zavaró függvényhez, rezonancia lép fel. Éppen ezért próbafüggvénynek célszerű most az x-szel megszorzott

$$y_p = Ax\cos(3x) + Bx\sin(3x)$$

függvényt választani, ekkor a rezonancia megszűnik. Ezt és ennek második deriváltját helyettesítve az inhomogén egyenletbe kapjuk, hogy

$$-6A\sin(3x) - 9Ax\cos(3x) + 6B\cos(3x) - 9Bx\sin(3x) + 9\left(Ax\cos(3x) + Bx\sin(3x)\right) = \sin(3x) - \cos(3x).$$

A kieső tagok elhagyása után a

$$-6A\sin(3x) + 6B\cos(3x) = \sin(3x) - \cos(3x)$$

egyenlethez jutunk, amiből adódnak az $A = -\dfrac{1}{6}$ és $B = -\dfrac{1}{6}$ konstansok. A differenciálegyenlet megoldása tehát

$$y = c_1\cos(3x) + c_2\sin(3x) - \frac{1}{6}x\sin(3x) - \frac{1}{6}x\cos(3x).$$

Példa. Add meg az $y'' - 4y' + 4y = \mathrm{e}^{2x} + 4x$ differenciálegyenlet általános megoldását.

A karakterisztikus egyenletnek a $\lambda = 2$ kétszeres valós gyöke, így ahomogén rész megoldása $y_h = c_1\mathrm{e}^{2x} + c_2x\mathrm{e}^{2x}$. A zavaró függvény alapján próbálkozhatnánk az

$$y_p = A\mathrm{e}^{2x} + Bx + C$$

próbafüggvény felírásával, ennek első tagja azonban rezonálna a homogén megoldás első tagjával. Ha x-szel szorozzuk, akkor pedig

$$y_p = Ax\mathrm{e}^{2x} + Bx + C$$

a homogén megoldás második tagjával rezonálna, ezért célszerű ismét x-szel szorozni, így az alkalmas próbafüggvény az

$$y_p = Ax^2\mathrm{e}^{2x} + Bx + C$$

lesz, melyet deriváltjaival együtt visszahelyettesítve a

$$4Ax^2\mathrm{e}^{2x} + 8Ax\mathrm{e}^{2x} + 2A\mathrm{e}^{2x} - 4(2Ax^2\mathrm{e}^{2x} + 2Ax\mathrm{e}^{2x} + B) + 4(Ax^2\mathrm{e}^{2x} + Bx + C) = \mathrm{e}^{2x} + 4x$$

egyenletet kapjuk. Ezt csoportosítva a

$$2A\mathrm{e}^{2x} + 4Bx - 4B + 4C = \mathrm{e}^{2x} + 4x$$

egyenletet nyerjük, amiből rögtön adódik, hogy az $A = \frac{1}{2}$, $B = 1$ és $C = 1$ választás megfelelő, vagyis az egyenlet általános megoldása

$$y = c_1\mathrm{e}^{2x} + c_2x\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{2x} + x + 1.$$

Lineáris differenciálegyenlet rendszerek

A homogén egyenlet alaprendszerének előállítása az állandó együtthatós esetben

A homogén egyenlet alaprendszerének előállítására nincs módszer, ugyanakkor az állandó együtthatós eset könnyen kezelhető. A továbbiakban tehát az

$$y'(x) = Ay(x)$$

alakú homogén egyenlet megoldásait keressük, ahol $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ egy adott mátrix.

1. eset: páronként különböző sajátértékek

Tétel. *Legyenek $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \ldots, \lambda_n$ az A mátrix sajátértékei, ahol feltesszük, hogy mindegyik valós, továbbá m-szeres λ_j sajátérték esetén található hozzá m lineárisan független sajátvektor, vagyis a λ_j-hez tartozó sajátaltér dimenziója ugyannyi, mint a sajátérték multiplicitása. Jelölje $s^{(1)}, s^{(2)}, \ldots, s^{(n)}$ a megfelelő sajátvektorokat. Ekkor az rendszer minden y megoldása előáll*

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} s^{(1)} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x} s^{(2)} + \ldots + C_n \mathrm{e}^{\lambda_n x} s^{(n)}$$

alakban, ahol $C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$ konstansok.

Példa. Oldjuk meg az

$$y'(x) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} y(x)$$

lineáris differenciálegyenlet-rendszert!

Megoldás. A rendszer mátrixa egy felsőháromszög-mátrix, melynek főátlójában vannak a sajátértékei: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$. Ezek különbözőek, így a hozzájuk tartozó sajátvektorok automatikusan függetlenek lesznek. Rövid számolással adódnak a sajátvektorok: például $s^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, $s^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$, $s^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$. Ekkor a rendszer alapmegoldásai:

$$\varphi^{(1)}(x) = \mathrm{e}^{-x} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \varphi^{(2)}(x) = \mathrm{e}^{-2x} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \varphi^{(3)}(x) = \mathrm{e}^{-3x} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

az alapmátrix az ezekből az oszlopokból álló

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-x} & \mathrm{e}^{-2x} & 0 \\ 0 & -\mathrm{e}^{-2x} & \mathrm{e}^{-3x} \\ 0 & 0 & -\mathrm{e}^{-3x} \end{bmatrix},$$

mátrix, melynek determinánsa nem nulla. A rendszer általános megoldása

$$y(x) = \Phi(x) \cdot C = C_1 \mathrm{e}^{-x} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 \mathrm{e}^{-2x} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_3 \mathrm{e}^{-3x} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2 \mathrm{e}^{-2x} \\ -C_2 \mathrm{e}^{-2x} + C_3 \mathrm{e}^{-3x} \\ -C_3 \mathrm{e}^{-3x} \end{bmatrix}$$

alakban kapható meg.

2 eset: Többszörös sajátértékek (Kétdimenziós eset)

Foglalkozzunk most azzal az esettel, amikor a mátrixnak többszörös sajátértéke van, de a sajátaltér dimenziója kisebb, mint a sajátérték multiplicitása, vagyis nincs meg a kellő számú lineárisan független sajátvektor.

Állítás. *Legyen a rendszer $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixa olyan, hogy $\lambda \in \mathbb{R}$ kétszeres gyöke a karakterisztikus karakterisztikus polinomnak, de a hozzá tartozó sajátaltér csak egy dimenziós. Legyenek $s^{(1)}, s^{(2)} \in \mathbb{R}^2$ olyan vektorok, melyekre $(A-\lambda I)s^{(1)} = 0$, illetve $(A-\lambda I)s^{(2)} = s^{(1)}$. Ekkor az rendszer összes megoldása*

$$y(x) = C_1 e^{\lambda x} s^{(1)} + C_2 e^{\lambda x}\left(s^{(2)} + x \cdot s^{(1)}\right)$$

alakba írható.

Példa. Oldjuk meg az

$$y'(x) = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} y(x)$$

lineáris differenciálegyenlet-rendszert!

Megoldás. A mátrix karakterisztikus polinomja $k_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2$, vagyis $\lambda_{1,2} = 2$ kétszeres sajátérték. Sajátvektornak azonban csak az $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ vektor, illetve ennek számszorosai lesznek jók, vagyis a sajátaltér dimenziója egy. Kényelmi okokból válasszuk az $s^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \end{bmatrix}^T$ vektort sajátvektornak és keressük meg az $(A-\lambda I)s^{(2)} = s^{(1)}$ egyenlet megoldását. Az általánosított sajátvektor $s^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^T$ lesz, így az egyenlet összes megoldása felírható

$$y(x) = C_1 e^{2x} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} + C_2 e^{2x}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + x \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} e^{2x}(4C_1 + C_2(2+4x)) \\ e^{2x}(4C_1 + C_2(1+4x)) \end{bmatrix}$$

alakban.

3. eset: Komplex sajátértékek (Kétdimenziós eset)

Végezetül foglakozzunk azzal, hogy komplex sajátértékek esetén hogyan kapjuk meg a valós megoldásokat.

Legyen $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ az rendszer mátrixa, melynek most legyenek $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ konjugált komplex sajátértékei.

Ha az egyik sajátértékhez az $s^{(1)} = \begin{bmatrix} a+bi & c+di \end{bmatrix}^T$ sajátvektor tartozik, akkor könnyen látható, hogy $s^{(2)} = \begin{bmatrix} a-bi & c-di \end{bmatrix}^T$ tartozik a konjugáltjához.

Ezek felhasználásával két független valós megoldást kapunk

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\left(\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \cos\beta x - \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \sin\beta x \right), \qquad y_2(x) = e^{\alpha x}\left(\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \sin\beta x + \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \cos\beta x \right).$$

A homogén egyenlet általános megoldása:

$$yh(x) = c1\, y1(x) + c2\, y2(x)$$

ahol c1, c2 tetszőleges valós konstansok.

Példa. Oldjuk meg az

$$y'(x) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} y(x)$$

lineáris differenciálegyenlet-rendszert!

Megoldás. A karakterisztikus polinom $k_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5$, melynek gyökei $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2\mathrm{i}$. A pozitív képzetes részű sajátértékhez például az $s^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathrm{i} & 1 \end{bmatrix}^T$ sajátvektor tartozik, ami alapján minden megoldás

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^x \begin{bmatrix} -\sin 2x \\ \cos 2x \end{bmatrix} + C_2 \mathrm{e}^x \begin{bmatrix} \cos 2x \\ \sin 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^x(-C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x) \\ \mathrm{e}^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) \end{bmatrix}$$

alakú.

Lineáris differenciálegyenlet rendszer megoldása
Az állandó variálásával:

Direkt megoldás.

1. LÉPÉS. Mátrixos alak: $\underline{y}' = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{y} + \underline{b}$.

2. LÉPÉS. Homogén egyenlet. $\underline{y}' - \underline{\underline{A}} \cdot \underline{y} = 0$ $(\underline{b} = \underline{0})$ **megoldása:**

(a) $\underline{\underline{A}}$ **sajátértékei. A karakterisztikus egyenlet:** $\left|\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}\right| = 0$ **gyökei**

(b) $\underline{\underline{A}}$ **sajátvektorai.** **Az** $(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}})\, \underline{s} = 0$ **homogén lineáris egyenletrendszer megoldása**

(c) A homogén egyenlet megoldása

(c1) Az alaprendszer: $\underline{\underline{\Psi}} = (\underline{s}_1 e^{\lambda_1 t}\ \underline{s}_2 e^{\lambda_2 t}\ \ldots\ \underline{s}_n e^{\lambda_n t})$

(c2) A megoldás: $\underline{y} = \underline{\underline{\Psi}} \cdot \underline{c}$

3. LÉPÉS. Inomogén egyenlet megoldása. Az állandók variálása: $\underline{\underline{\Psi}} \cdot \underline{\dot{c}}(t) = \underline{b}$.

(a) $\underline{\dot{c}}(t)$ **meghatározása: az** $\underline{\underline{\Psi}} \cdot \underline{\dot{c}}(t) = \underline{b}$ **lineáris egyenletrendszer megoldása.**

(b) $\underline{c}(t)$ **meghatározása, integrálás.**

(c) Inhomogén partikuláris meghatározása: $\underline{y} = \underline{\underline{\Psi}} \cdot \underline{c}(t)$.

4. LÉPÉS. Inomogén egyenlet általános megoldása: a homogén általános és az inhomogén partikuláris megoldásának összege:

Példa. Oldjuk meg az

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 7e^{3t} \\ -14e^{3t} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

kezdeti érték feladatot!
A homogén egyenlet általános megoldása

$$\mathbf{x}_H(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{10t} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix},$$

a homogén egyenlet egy alapmátrixa

$$\mathbf{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 3e^{10t} \\ e^{2t} & -5e^{10t} \end{pmatrix}.$$

A konstansok variálásának módszerét használva keressük az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását az $\mathbf{x}_{IP}(t) = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}(t)$ alakban. Ekkor $\mathbf{u}$ teljesíti az egyenletet, amely ebben az esetben:

$$\begin{aligned} e^{2t}u_1'(t) + 3e^{10t}u_2'(t) &= 7e^{3t} \\ e^{2t}u_1'(t) - 5e^{10t}u_2'(t) &= -14e^{3t}. \end{aligned}$$

Ennek megoldása

$$u_1'(t) = -\frac{7}{8}e^t \qquad \text{és} \qquad u_2'(t) = \frac{21}{8}e^{-7t}.$$

Így

$$u_1(t) = -\int \frac{7}{8}e^t\,dt = -\frac{7}{8}e^t \qquad \text{és} \qquad u_2(t) = \int \frac{21}{8}e^{-7t}\,dt = -\frac{3}{8}e^{-7t}.$$

(Ne felejtsük el, hogy egy $\mathbf{u}$ függvényt elég megadni, ezért nem kell az integráláskor az összes primitív függvényt felírni.) Ezért a partikuláris megoldás képlete

$$\mathbf{x}_{IP}(t) = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 3e^{10t} \\ e^{2t} & -5e^{10t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{7}{8}e^t \\ -\frac{3}{8}e^{-7t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix},$$

és így az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{10t} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Ebbe behelyettesítve a kezdeti feltételt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} c_1 + 3c_2 - 2 &= -1 \\ c_1 - 5c_2 + 1 &= 2, \end{aligned}$$

azaz

$$\begin{aligned} c_1 + 3c_2 &= 1 \\ c_1 - 5c_2 &= 1. \end{aligned}$$

Ebből $c_1 = 1$ és $c_2 = 0$ adódik, tehát a kezdeti érték feladat megoldása

$$\mathbf{x}(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} - 2e^{3t} \\ e^{2t} + e^{3t} \end{pmatrix}.$$