Tartalomjegyzék

Kétváltozós függvény integrálszámítása

Primitívfüggvény

Az $f(x,y)$ függvény x változó szerinti primitív függvénye $F(x,y)$, ha $F_x'(x,y)=f(x,y)$

Az összes primitív függvény jelölése: $\int f(x,y)dx = F(x,y)+C$

Az $f(x,y)$ függvény y változó szerinti primitív függvénye $G(x,y)$, ha $G_y'(x,y)=f(x,y)$ Az összes primitív függvény jelölése: $\int f(x,y)dy = G(x,y)+C$

Példa

$\int \frac{1}{y^2}\cdot e^{\frac{x}{y}}dx = \frac{1}{y}\cdot\int\frac{1}{y}\cdot e^{\frac{x}{y}}dx = \frac{1}{y}\cdot e^{\frac{x}{y}}+C$, mert $\left(\frac{1}{y}\cdot e^{\frac{x}{y}}\right)_x' = \frac{1}{y}\cdot e^{\frac{x}{y}}\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y^2}\cdot e^{\frac{x}{y}}$

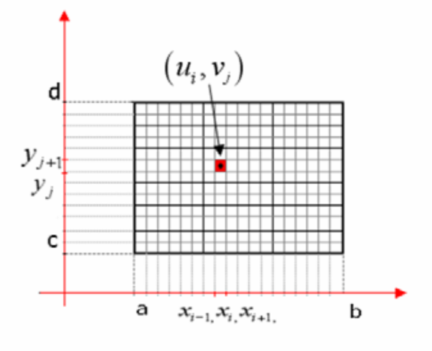
$\int \frac{1}{y^2}\cdot e^{\frac{x}{y}}dy = -\frac{1}{x}\int -\left(\frac{1}{y^2}\right)\cdot x\cdot e^{\frac{x}{y}}dy = -\frac{1}{x}\cdot e^{\frac{x}{y}}+C$, mert $\left(-\frac{1}{x}e^{\frac{x}{y}}\right)_y' = \left(-\frac{1}{x}\right)e^{\frac{x}{y}}\left(-\frac{x}{y^2}\right)$

Kettősintegrál

A kettősintegrál téglalap tartományon

Legyen *T* egy téglalap alakú tartomány a koordinátatengelyekkel párhuzamos oldalakkal, $T=\left\{(x,y): \begin{matrix} a\le x\le b \\ c\le y\le d\end{matrix}\right\}$, osszuk fel az $[a,b]$ intervallumot n egyenlő részre, jelölje az osztópontokat $a=x_0<x_1<\ldots<x_i<x_{i+1}<\ldots x_n=b$, osszuk fel a $[c,d]$ intervallumot is m egyenlő részre, jelölje az osztópontokat $c=y_0<y_1<\ldots<y_j<y_{j+1}<\ldots y_m=d$.

Legyen (u_i,v_j) egy tetszőleges belső pontja az $\left\{\begin{matrix} x_i<u_i<x_{i+1} \\ y_j<v_j<y_{j+1}\end{matrix}\right\}$. téglalapnak.



Képezzük az $f(u_i,v_i)(y_{j+1}-y_j)\cdot(x_{i+1}-x_i)$ szorzatot, azaz a téglalap egy tetszőleges belső pontjában vett függvényértéket szorozzuk meg a téglalap területével.

Summázzuk a szorzatot az összes téglalapra.

A kapott összeg $I=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f\left(u_i,v_j\right)(x_{i+1}-x_i)\cdot(y_{j+1}-y_j)$, melyet a konkrét *(n,m)* felosztáshoz tartozó általános integrálközelítő összegnek nevezünk.

Legyen $m_{ij}=\inf\left\{f(u_i,v_j)\right\}$ és $M_{ij}=\sup\left\{f(u_i,v_j)\right\}$ vagyis m_{ij} az alsó határa, M_{ij} a felső határa a téglalapbeli függvényértékeknek.

Legyen $s_{n,m}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}(x_{i+1}-x_i)\cdot(y_{j+1}-y_j)$, ezt az összeget, az adott *(n,m)* felosztáshoz tartozó alsó közelítő összegnek nevezzük.

Legyen $S_{n,m}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}(x_{i+1}-x_i)\cdot(y_{j+1}-y_j)$, ezt az összeget, az adott *(n,m)* felosztáshoz tartozó felső közelítő összegnek nevezzük.

Ekkor minden integrálközelítő összegre igaz, hogy $s_{n,m}\le I\le S_{n,m}$ minden I -re. További osztópontok felvétele esetén az alsó összeg nő (nem csökken), a felső összeg csökken (nem nő). Ha az alsó összegeknek a felső határa és a felső összegeknek alsó határa megegyezik, vagyis ha $\sup(s_{n,m})=\inf(S_{n,m})$, akkor mondjuk, hogy $f\left(x,y\right)$ integrálható T -n. Jele: $\iint_T f\left(x,y\right)\cdot dxdy$ (szokásos jelölés még dT)

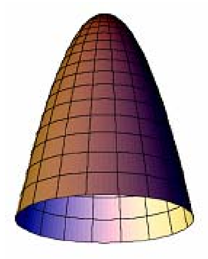
A kettősintegrál létezésének szükséges feltétele

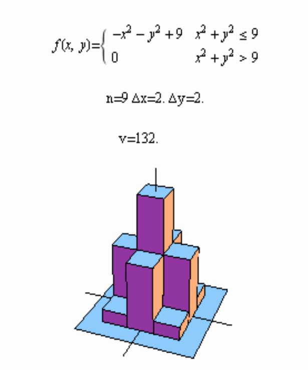
Az integrál definíciójából következik, hogy ha létezik a kettős integrál, akkor az $f\left(x,y\right)$ függvény korlátos a **T** tartományon.

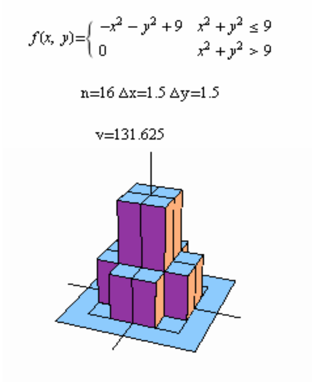
Illusztráció

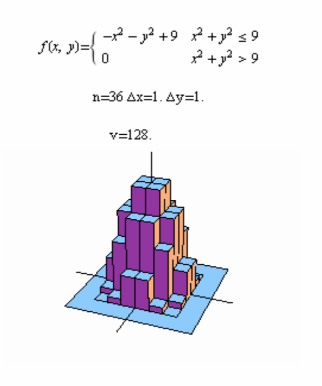
Vegyük az $f\left(x,y\right)=\begin{cases} 9-x^2-y^2 & ha \quad x^2+y^2\le 9 \\ 0 & ha \quad x^2+y^2\ge 9 \end{cases}$ függvényt!

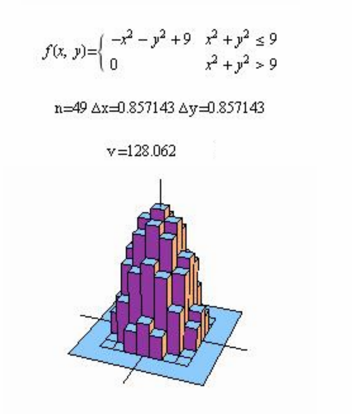
A hozzá tartozó felület egy forgás-paraboloid $z=x^2+y^2$, lefelé fordítva (-1-el szorozva) és feltolva a z=9 pontba. Legyen a **T** tartomány egy 6 egység oldalú négyzet melynek középpontja az origó.
Elkészítettük az n=m (ugyanannyi részre osztjuk fel a négyzet mindkét oldalát) felosztáshoz tartozó alsó és felső közelítő összegek egyikét-másikát.

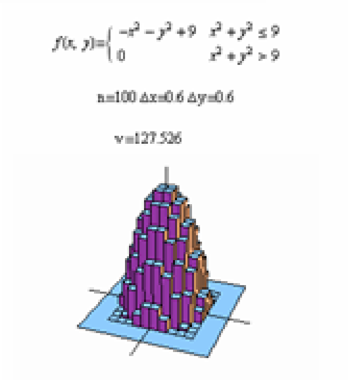








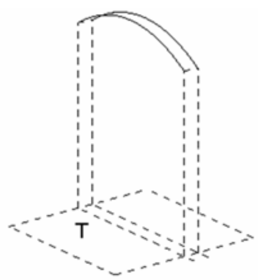




A kettősintegrál kiszámítása téglalap tartományon

A kettősintegrál egy téglalap tartományon $T=\left\{(x,y): \begin{matrix} a\le x\le b \\ c\le y\le d \end{matrix}\right\}$ visszavezethető két egymás után végrehajtható egyszeres integrálra.

Téglalap tartomány esetén tetszőleges az integrálás sorrendje.



Ha az integrálközelítő összegben az összes téglalapra való összegezést először rögzített (x_{i+1},x_i) mellett végezzük *j* szerint $\left[c,d\right]$-n, majd *i* szerint $\left[a,b\right]$ -n, akkor két egyszeres integrálközelítő összeget kapunk, tehát:

$$\iint_T f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

Könnyen látható, hogy ha fordított sorrendben végezzük az összes téglalapra való összegezést, először rögzített (y_{j+1}, y_j) mellett végezzük *i* szerint $[a,b]$ -n, majd *j* szerint $[c,d]$-n, akkor két egyszeres integrálközelítő összeget kapunk, tehát:

$$\iint_T f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$ Vagyis az integrálás sorrendje tetszőleges.

Példa

Határozzuk meg az $f(x,y) = e^{x+y}$ függvény kettős integrálját

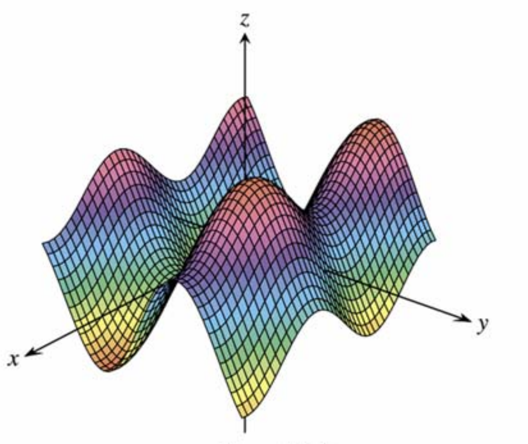
a $T = \left\{ (x,y) : \begin{array}{c} -1 \le x \le 1 \\ \frac{-1}{2} \le y \le \frac{1}{2} \end{array} \right\}$ tartományon!

Megoldás

Ha először y-szerint integrálunk azután x-szerint, akkor:

$$\iint_T e^{x+y} \cdot dxdy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{x+y} \cdot dy \right) dx = \int_{-1}^{1} \left(\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^x \cdot e^y dy \right) dx = \int_{-1}^{1} e^x \left(\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^y dy \right) dx = \int_{-1}^{1} e^x \left[e^y \right]_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \left(\sqrt{e} - \frac{1}{\sqrt{e}} \right) \int_{-1}^{1} e^x dx = \left(\sqrt{e} - \frac{1}{\sqrt{e}} \right) \left(e - \frac{1}{e} \right)$$



$z = \sin x + 2 \sin y$

Példa

Határozzuk meg a $z = \sin x + 2\sin y$ függvény kettősintegrálját N-en.

$$N = \left\{ (x,y) : \frac{-\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \frac{\pi}{2} \right\}$$

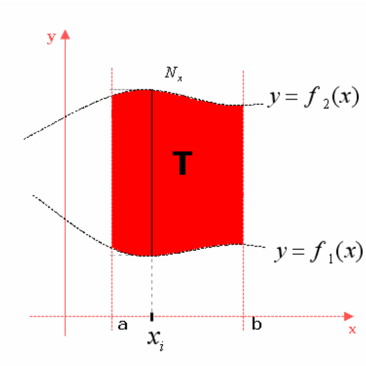
$$\iint_N (\sin x + 2\sin y) dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + 2\sin y)\, dx \right) dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left[-\cos x + 2x\sin y \right]_{x=-\frac{\pi}{2}}^{x=\frac{\pi}{2}} \right) dy =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi \sin y dy = 2\pi \left[-\cos y \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi \left(-\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0 \right) = 2\pi$$

A kettősintegrál kiszámítása normál tartományon

Definíció

x-tengelyre vonatkoztatott normál tartománynak nevezzük a következő tartományt.



$$N_x = \left\{ (x, y) : \begin{array}{c} a \le x \le b \\ f_1(x) \le y \le f_2(x) \end{array} \right\}$$

Ha az integrálközelítő összegben rögzített x_i mellett végezzük előbb az összegezést, akkor az x_i hez tartozó intervallum $\left[f_1(x_i), f_2(x_i) \right]$.

Tehát: $$\iint_{N_x} f(x, y) dxdy = \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Példa

Határozzuk meg az $f(x, y) = 2xy$ függvény kettős integrálját

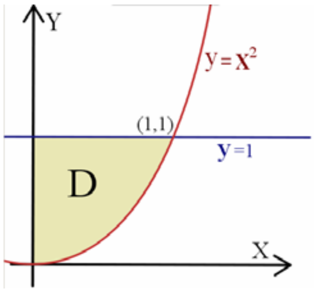
a $N_x = \left\{ (x, y) : \begin{array}{c} 0 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le \sqrt{x} \end{array} \right\}$ tartományon!

Megoldás

$$\iint_{N_x} 2xy \cdot dxdy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} 2xydy \right) dx = \int_0^1 \left[xy^2 \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 (x^2 - x^5) dx = \frac{1}{6}$$

Példa

Számítsuk ki az $f(x, y) = \frac{y}{x+1}$ függvény kettősintegrálját a D tartományon!



$$D_x = \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le 1 \end{cases} \; ; \; D_y = \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ 0 \le x \le \sqrt{y} \end{cases}$$

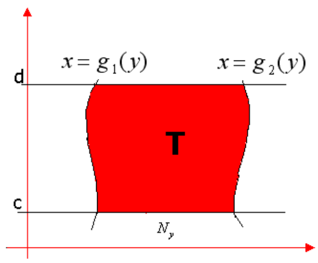
$$\iint_{D_x} \frac{y}{x+1} \cdot dxdy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 \frac{y}{x+1} dy \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{x+1} \left(\int_{x^2}^1 y dy \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{x+1} \left[\frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^1 dx = \int_0^1 \frac{1}{x+1} \left(\frac{1}{2} - \frac{x^4}{2} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{x^4}{x+1} \right) dx = \frac{1}{2} \left[\ln(x+1) - \int_0^1 \frac{x^4}{x+1} dx \right] = \frac{1}{2} \left(\left[\ln(x+1) \right]_0^1 - \int_0^1 (x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{x+1}) dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\ln(x+1) - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln(x+1)) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{7}{24}$$

Kettősintegrál y-tengelyre vonatkoztatott normál tartományon

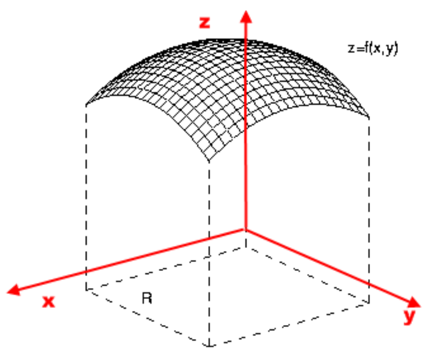
Definíció: y-tengelyre vonatkoztatott normál tartománynak nevezzük a következő tartományt.



$$N_y = \left\{ (x,y) : \begin{matrix} c \le y \le d \\ g_1(y) \le x \le g_2(y) \end{matrix} \right\}$$

$$\iint_{N_y} f(x,y) dxdy = \int_c^d \left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y) dx \right) dy$$

A kettősintegrál geometriai jelentése



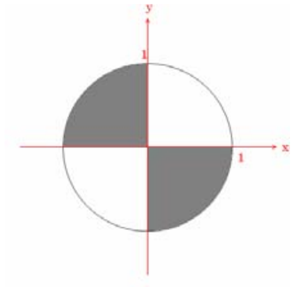
A téglalap tartományon vett kettősintegrál geometriai jelentése a felület alatti **előjeles térfogat**, hiszen egy felosztáshoz tartozó alsó közelítő összeg a beírt hasábok térfogatának összege, a felső összeg pedig a kívül írt hasábok térfogatának összege:

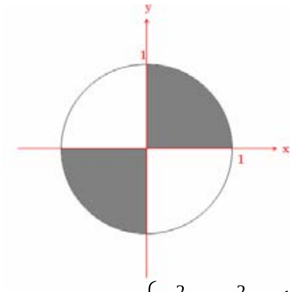
Példa

Határozzuk meg a $f(x,y)=xy$ függvény kettősintegrálját az egységkörön.

Megoldás

$\iint_K xy \cdot dxdy = 0$, mert a függvény értéke szimmetrikus de ellentétes előjelű a következő tartományon.





Határozzuk meg a $f(x,y)=xy$ felület és az egységsugarú henger $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=z \end{cases}$ közös részének térfogatát.

Megoldás

Tekintettel arra, hogy most nem előjeles térfogatot számolunk, kiszámoljuk az első síknegyedbe eső N negyedkörre az integrál értékét és négyszer vesszük.

$$V = 4\iint_N xy \cdot dxdy = 4\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy \cdot dy \right) dx = 4\int_0^1 x \left(\left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = 4\int_0^1 \frac{1-x^2}{2} x \cdot dx =$$

$$= 4\int_0^1 \left(\frac{1}{2}x - \frac{x^3}{3} \right) \cdot dx = 4\left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{12} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

Integráltranszformáció

$\iint_T f(x,y) \cdot dxdy$ kettősintegrál kiszámításánál, ha az $[x,y]$ síkon minden (x,y) koordinátájú ponthoz az $[u,v]$ síkon a $(x(u,v),y(u,v))$ pontot rendeljük, akkor $f(x,y) \Rightarrow f(x(u,v),y(u,v))$ és a **T** tartomány az $[u,v]$ síkon egy **Q** tartományba megy át.

A kettősintegrál pedig $\iint_Q f(x(u,v),y(u,v)) \cdot |J| dudv$ integrálba megy át, ahol

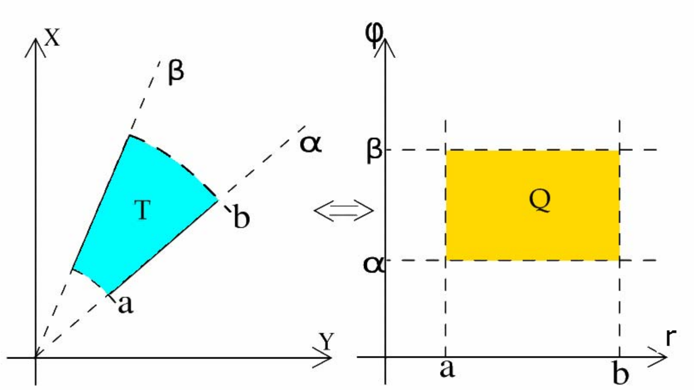
$$|J| = \begin{vmatrix} x'_u(u,v) & x'_v(u,v) \\ y'_u(u,v) & y'_v(u,v) \end{vmatrix}$$ neve Jacobi determináns.

Polárkoordinátás transzformáció

Ha az u paraméter geometriai jelentése az origótól való távolság, a v jelentése pedig a pont irányszöge (x-tengely pozitív felével bezárt szög) akkor a szokásos $u = r \quad v = \varphi$ jelöléssel $x(r,\varphi) = r \cdot \cos\varphi, \quad y(r,\varphi) = r \cdot \sin\varphi$

$$|J| = \begin{vmatrix} x'_r(r,\varphi) & x'_\varphi(r,\varphi) \\ y'_u(r,\varphi) & y'_\varphi(r,\varphi) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$$

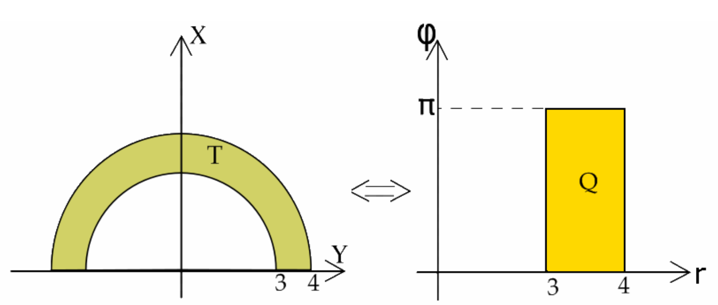
A transzformációnál az $[x,y]$ síkban lévő szektor (lásd az ábrát) téglalap tartományba megy át az $[r,\varphi]$ síkon



Példa

Határozzuk meg az $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ függvény kettősintegrálját $T = \{(x,y) : 3 \le x^2 + y^2 \le 4, y \ge 0\}$ tartományon!

A **T** tartomány egy fél körgyűrű, mely polárkoordinátás transzformációval egy **Q** téglalap tartományba megy át a polár síkon.



$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

Polár transzformációt alkalmazva kapjuk:

$$\iint_T \ln(x^2+y^2)dxdy = \int_0^\pi \left(\int_3^4 (\ln r^2) \cdot r \cdot dr \right) d\varphi = \int_0^\pi \left(\int_3^4 2(\ln r) \cdot r \cdot dr \right) d\varphi = 2\int_0^\pi \left(\int_3^4 (\ln r) \cdot r \cdot dr \right) d\varphi$$

Parciális integrálás segítségével:

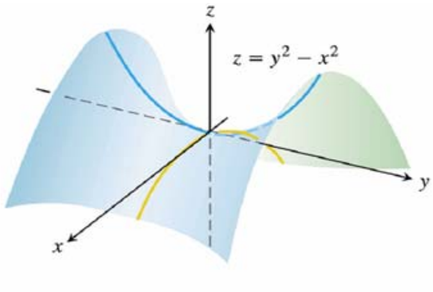
$$\int 2r \cdot \ln r \cdot dr = r^2 \cdot \ln r - \int r^2 (\ln r)' dr = r^2 \cdot \ln r - \int r^2 \frac{1}{r} dr = r^2 \cdot \ln r - \frac{r^2}{2} = r^2 \cdot \left(\ln r - \frac{1}{2} \right)$$

Tehát visszatérve a keresett integrálra:

$$\int_0^{\pi}\left(\int_3^4 2r\ln r\cdot dr\right)d\varphi=\pi\left[r^2\left(\ln r-\frac{1}{2}\right)\right]_3^4=\pi\cdot\left(16(\ln 4-\frac{1}{2})-9(\ln 3-\frac{1}{2})\right)$$

Példa

Határozzuk meg a nyeregfelület kettősintegrálját az egységkörön.



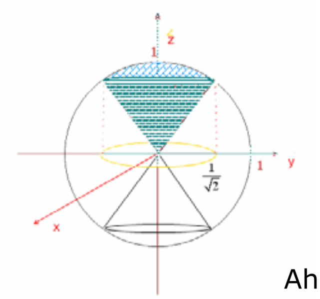
Példa

Számítsuk ki az $x^2+y^2=z^2$ kúp $x^2+y^2+z^2=1$ gömb belsejébe eső részének térfogatát!

Megoldás

A térfogatot két egyenlő részből számoljuk. A kúp pozitív fele $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

A test, melynek a térfogatát számoljuk a kúpból és egy gömbszeletből áll.



A gömbszelet alatti térfogatból ki kell vonni a kúp alatti térfogatot.

$$\iint_K \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy-\iint_K \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$

Ahol a ***K*** tartomány a test vetülete az $[x,y]$ síkon, melyet úgy kapunk, hogy a gömb és kúp metszetgörbéjét levetítjük az $[x,y]$ síkra.

A metszetgörbe pontjaira: $\sqrt{1-x^2-y^2}=\sqrt{x^2+y^2}$; $1-x^2-y^2=x^2+y^2$;azaz

$2x^2+2y^2=1$ innen $x^2+y^2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

Tehát a ***K*** tartomány egy $\frac{1}{\sqrt{2}}$ sugarú kör origó középpontú kör.

Az integrál additivitása miatt

$$\iint_K \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy-\iint_K \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\iint_K (\sqrt{1-x^2-y^2}-\sqrt{x^2+y^2})\,dxdy=\mathrm{V}$$

Polár transzformációt alkalmazva kapjuk:

$$\iint_K (\sqrt{1-x^2-y^2}-\sqrt{x^2+y^2})\,dxdy=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\sqrt{1-r^2}-r\right)\cdot r\cdot dr\right)d\varphi=\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{r^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\cdot d\varphi=$$

$$\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{r^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\cdot d\varphi=\left[\frac{1}{3}(1-\frac{1}{\sqrt{2}})r\right]_0^{2\pi}=\frac{\pi}{3}\left(2-\sqrt{2}\right)$$

Feladatok:

1. Számítsa ki a $z=8-2x^2-2y^2$ paraboloid és a $z=0$ sík közé zárt térrész térfogatát!

2. Határozza meg a $\iint\limits_T xy^3\,dxdy$ kettős integrál értékét, ha a T tartományt az $x^2 + y^2 \le 4,\ x \le 0,\quad y \le 0$ egyenlőtlenségek jelölik ki.

Térgörbék

TÉRGÖRBÉK

Általában t-vel jelölt skalár változóhoz (fizikában ez leggyakrabban az idő), annak szóba jöhető értékeihez vektorokat rendelünk.
Jele: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.
Koordinátás alakban: $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$.

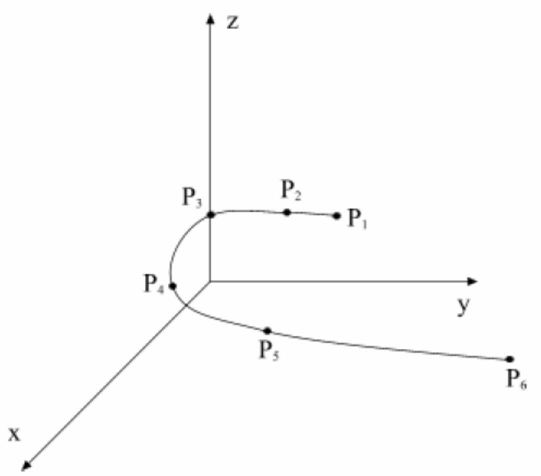
Pl.: $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \sqrt{t+1}\,\mathbf{k}$ függvény a $t_1 = 2$ skalárhoz az $\mathbf{r}_1(2) = 4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \sqrt{3}\mathbf{k}$ vektort, míg a $t_2 = -1$ értékhez az $\mathbf{r}_2(-1) = -2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ vektort rendeli.

Megjegyzés: az $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ megadás egyenértékű az
$x = x(t)$,
$y = y(t)$,
$z = z(t)$ egyváltozós valós függvények megadásával és viszont.

Ábrázolás: térbeli derékszögű koordináta rendszerben az $\mathbf{r}(t)$ helyvektorok végpontjai egy térgörbét határoznak meg (speciálisan lehet síkgörbe is).

Pl.: $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \sqrt{t+1}\,\mathbf{k}$ függvény néhány pontját ábrázolhatjuk értéktáblázat segítségével ($t \ge -1$), aminek felhasználásával a térgörbe egy darabja közelítően felrajzolható.

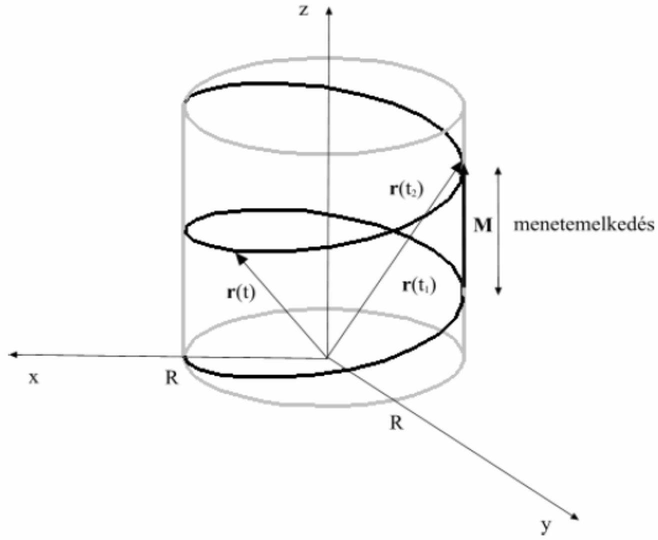
t	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1	2	3
x	-2	-1	0	2	4	6
y	1	$\frac{1}{4}$	0	1	4	9
z	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6



Gyakori térgörbe a hengerre (esetleg kúpra) csavart spirális.

Az $\mathbf{r}(t) = R\cos t\mathbf{i} + R\sin t\mathbf{j} + ct\mathbf{k}$ ($R > 0$, c adottak)
egy egyenletes menetemelkedésű spirális vektorfüggvénye.

Ez $t = 0$ esetén $\mathbf{r}(t) = R\mathbf{i}$ értéket vesz fel, tehát az x tengelyt az $P(R;0;0)$ pontban metszi.



A menetemelkedés (egy körülfordulásra eső z irányú elmozdulás)

$\mathrm{M} = \left|\mathbf{r}(\mathrm{t}_1) - \mathbf{r}(\mathrm{t}_2)\right|$ legyen $t_1 = \frac{\pi}{2}$, akkor $t_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi$

$$\mathbf{M} = R\cos\frac{5\pi}{2}\mathbf{i} + R\sin\frac{5\pi}{2}\mathbf{j} + c\frac{5\pi}{2}\mathbf{k} - \left(R\cos\frac{\pi}{2}\mathbf{i} + R\sin\frac{\pi}{2}\mathbf{j} + \frac{\pi}{2}\mathbf{k}\right) = R\mathbf{j} + c\frac{5\pi}{2}\mathbf{k} - \left(R\mathbf{j} + c\frac{\pi}{2}\mathbf{k}\right) = c2\pi\mathbf{k}$$

$M = 2\pi c$

Deriválás

Deriválás

Ha az $\mathbf{r}(\mathrm{t})$ függvényből képzett $\frac{\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)}{\Delta t}$ differenciahányadosnak van véges határértéke $\Delta t \to 0$ esetén, akkor az $\mathbf{r}(t)$ függvény a $t = t_0$ helyen differenciálható, a differenciálhányados

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{r}(t_0+\Delta t)-\mathbf{r}(t_0)}{\Delta t}\text{, jelölése } \left.\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}\right|_{t=t_0} \text{ vagy } \dot{\mathbf{r}}(t_0).$$

Ha az $\mathbf{r}(t)$ függvény egy T halmazon differenciálható, akkor a $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)}{\Delta t}$ függvényt az $\mathbf{r}(t)$ derivált függvényének vagy deriváltjának nevezzük, jele $\dot{\mathbf{r}}(t)$.

Bizonyítható, hogy $\mathbf{r}(t)$ akkor differenciálható, ha a koordinátái differenciálhatók és akkor $\dot{\mathbf{r}}(t)=\dot{x}(t)\mathbf{i}+\dot{y}(t)\mathbf{j}+\dot{z}(t)\mathbf{k}$

Pl.: $\mathbf{r}(t)=2t^2\mathbf{i}+\dfrac{1}{t}\mathbf{j}+\sin t\mathbf{k}$

$\dot{\mathbf{r}}(t)=4t\mathbf{i}-\dfrac{1}{t^2}\mathbf{j}+\cos t\mathbf{k}$, és pl: $\dot{\mathbf{r}}(1)=4\mathbf{i}-\mathbf{j}+\cos 1\mathbf{k}\approx 4\mathbf{i}-\mathbf{j}+0,54\mathbf{k}$

A deriválási szabályok hasonlók a valós függvényeknél megtanultakkal, de az eltérésekre felhívjuk a figyelmet!

$(cr)^{\bullet}=c\dot{r}$ pl.: $\left[3\left(t\mathbf{i}+\mathbf{j}+t^2\mathbf{k}\right)\right]^{\bullet}=3(\mathbf{i}+2t\mathbf{k})=3\mathbf{i}+6t\mathbf{k}$

$(\mathbf{r}_1\pm\mathbf{r}_2)^{\bullet}=\dot{\mathbf{r}}_1\pm\dot{\mathbf{r}}_2$

$(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2)^{\bullet}=\dot{\mathbf{r}}_1\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_1\dot{\mathbf{r}}_2$ ($(\mathbf{r}\mathbf{r})^{\bullet}=\dot{\mathbf{r}}\mathbf{r}+\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}=2\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}$, vagy másként $(\mathbf{r}^2\dot{)}=2\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}$)

$(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)^{\bullet}=\dot{\mathbf{r}}_1\times\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_1\times\dot{\mathbf{r}}_2$

A derivált függvény deriváltjait magasabbrendű deriváltnak nevezzük.

Pl.: $(\dot{\mathbf{r}})^{\bullet}=\ddot{\mathbf{r}}$ Legyen $\mathbf{r}(t)=e^t\mathbf{i}-t\mathbf{j}+\dfrac{1}{t^2}\mathbf{k}$, akkor

$\dot{\mathbf{r}}=e^t\mathbf{i}-\mathbf{j}-\dfrac{2}{t^3}\mathbf{k}$ $\ddot{\mathbf{r}}=e^t\mathbf{i}+\dfrac{6}{t^4}\mathbf{k}$.

Bebizonyítható, hogy $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$ az $\mathbf{r}(t)$ vektorfüggvényhez rendelhető térgörbe érintővektora a $t=t_0$ -hoz tartozó P_0 pontban.

Pl.: $\mathbf{r}(t)=\sqrt{t}\mathbf{i}+\dfrac{2}{t}\mathbf{j}+t^3\mathbf{k}$ érintővektora a $t_0=1$ helyen, azaz a $P_0(1;2;1)$ helyen;

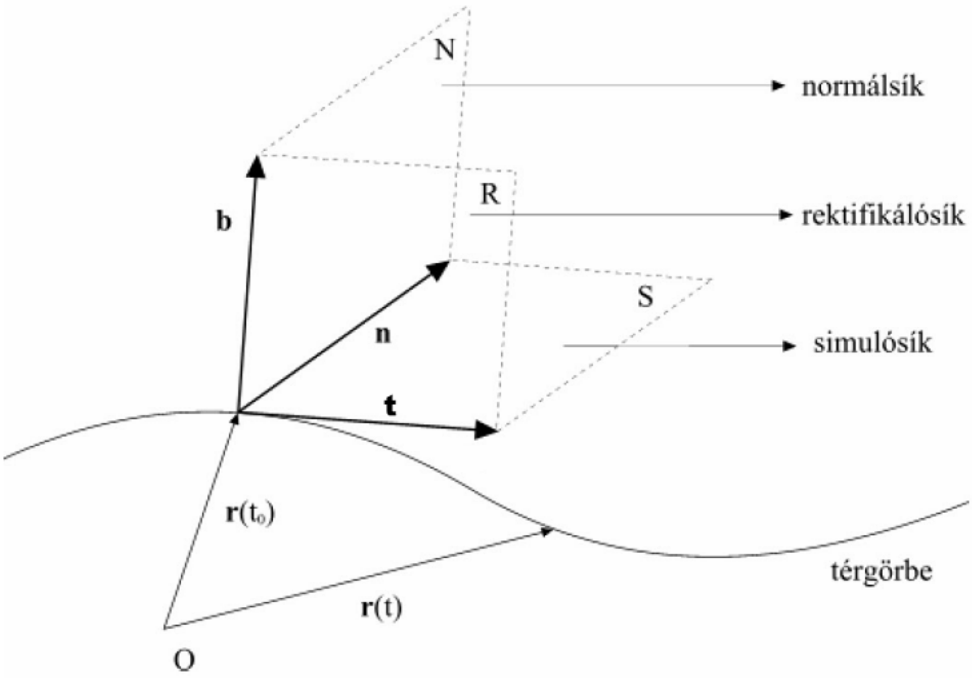
$\dot{\mathbf{r}}(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\mathbf{i}-\dfrac{2}{t^2}\mathbf{j}+3t^2\mathbf{k}$, amiről

$\dot{\mathbf{r}}(1)=\dfrac{1}{2}\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ vektor a P_0 -hoz tartozó érintővektor.

Ennek egységvektora $\mathbf{t}=\dfrac{\frac{1}{2}\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k}}{\sqrt{\frac{53}{4}}}=\dfrac{1}{\sqrt{53}}\mathbf{i}-\dfrac{4}{\sqrt{53}}\mathbf{j}+\dfrac{6}{\sqrt{53}}\mathbf{k}$.

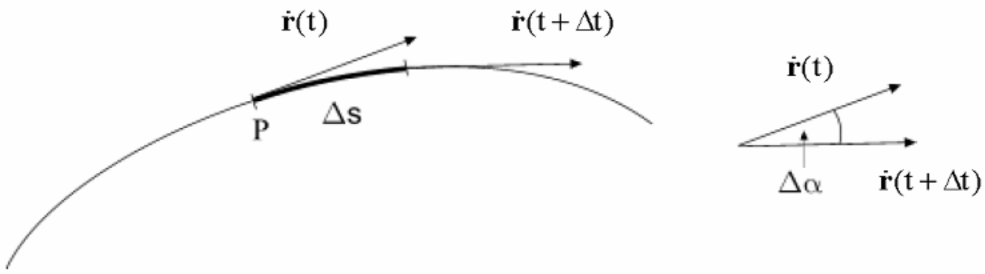
Kísérő triéder

Az érintő és a binormális egységvektor mellett fontos szerepe van az ún. **főnormális** egységvektornak. Jele: **n**, értéke definíció szerint $\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t}$, vagyis a három egységvektor egymásra merőleges (hasonlóan, mint **i**, **j**, **k**), és tulajdonképpen egy „koordináta rendszert”



alkotnak; neve **kísérő triéder**.

Az ábrán a kísérő triédert és az egységvektorok által páronként kifeszített síkok (S, N, R) elnevezését is feltüntettük.
A síkgörbék görbületéhez hasonlóan értelmezhető a térgörbe görbülete (g) egy adott pontban (P). Ez tulajdonképpen az érintővektor irányváltozásának ($\Delta\alpha$) mértékét jellemzi az ívhosszhoz (Δs) viszonyítva.



A definíció tehát: $g = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}$, ahol $\Delta\alpha$ az $\dot{\mathbf{r}}(t)$ és az $\dot{\mathbf{r}}(t + \Delta t)$ vektorok hajlásszöge.

A g kiszámítható a térgörbe $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ egyenlete ismeretében is $g = \dfrac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}$ képlet alapján.

Pl.: Adott $\mathbf{r}(t)=(t^2+1)\mathbf{i}-\sin t\mathbf{j}+\sqrt{t+1}\mathbf{k}$.

Számítsuk ki a $t=0$ helyhez tartozó P_0 pontban a kísérő triéder egységvektorait, az azokra illeszkedő síkok egyenletét és a térgörbe görbületét!

$\mathbf{r}(0)=\mathbf{i}+\mathbf{k} \qquad P(1;0;1)$

$\dot{\mathbf{r}}(t)=2t\mathbf{i}-\cos t\mathbf{j}+\dfrac{1}{2\sqrt{t+1}}\mathbf{k} \qquad \dot{\mathbf{r}}(P_0)=-\mathbf{j}+\dfrac{1}{2}\mathbf{k}$

$\ddot{\mathbf{r}}(t)=2\mathbf{i}+\sin t\mathbf{j}-\dfrac{1}{4}(t+1)^{-\frac{3}{2}}\mathbf{k} \qquad \ddot{\mathbf{r}}(P_0)=2\mathbf{i}-\dfrac{1}{4}\mathbf{k}$

$\mathbf{t}=\dfrac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|}=\dfrac{-\mathbf{j}+\frac{1}{2}\mathbf{k}}{\sqrt{\frac{5}{4}}}=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{j}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{k}$ **az érintő egységvektor**.

$\mathbf{m}=\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 0 & -1 & \frac{1}{2}\\ 2 & 0 & -\frac{1}{4}\end{vmatrix}=\dfrac{1}{4}\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ a **binormális** vektor, amelynek **egységvektora**

$$\mathbf{b}=\frac{\mathbf{m}}{|\mathbf{m}|}=\frac{\frac{1}{4}\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{\frac{1}{4}\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}}{\frac{9}{4}}=\frac{1}{9}\mathbf{i}-\frac{4}{9}\mathbf{j}+\frac{8}{9}\mathbf{k}\,.$$

A főnormális egységvektor

$$\mathbf{n}=\mathbf{b}\times\mathbf{t}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{8}{9}\\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{vmatrix}=\frac{2}{9\sqrt{5}}\mathbf{i}-\frac{1}{9\sqrt{5}}\mathbf{j}-\frac{2}{9\sqrt{5}}\mathbf{k}$$

A térgörbe görbülete a P_0 helyen

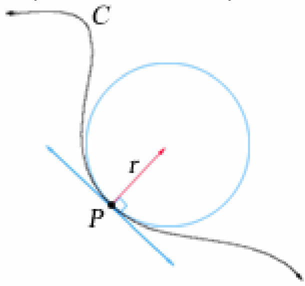
$g=\dfrac{|\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}=\dfrac{\left|\frac{1}{4}\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}\right|}{\frac{5\sqrt{5}}{8}}=\dfrac{\frac{9}{4}}{\frac{5\sqrt{5}}{8}}=\dfrac{18}{5\sqrt{5}}$ (figyelembe vettük a binormális vektor és annak egységvektora kiszámításánál kapott eredményeket).

A kísérő triéder három síkja mindegyikének ismerjük egy pontját (P_0) és normálisát. Tehát bármelyik sík egyenletének felírása ugyanazon probléma megoldása (más számokkal).

Mi a simuló sík egyenletét fogjuk kiszámítani. Adott $P_0(1;0;1)$ és a normálisa $\mathbf{b}=\dfrac{1}{9}\mathbf{i}-\dfrac{4}{9}\mathbf{j}+\dfrac{8}{9}\mathbf{k}$. A simuló sík (S) tetszőleges pontja legyen P, ahová az $\mathbf{s}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ vektor mutat, akkor a sík $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\mathbf{n}=0$ általános egyenlete esetünkben $(\mathbf{s}-\mathbf{r}_0)\mathbf{b}=0$ alakú.

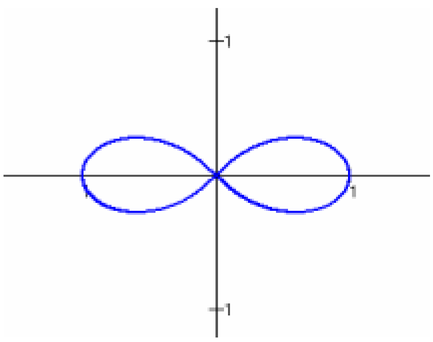
$$\left[x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}-\left(\mathbf{i}+\mathbf{k}\right)\right]\cdot\left[\frac{1}{9}\mathbf{i}-\frac{4}{9}\mathbf{j}+\frac{8}{9}\mathbf{k}\right]=\left[\left(x-1\right)\mathbf{i}+y\mathbf{j}+\left(z-1\right)\mathbf{k}\right]\cdot\left[\frac{1}{9}\mathbf{i}-\frac{4}{9}\mathbf{j}+\frac{8}{9}\mathbf{k}\right]=$$

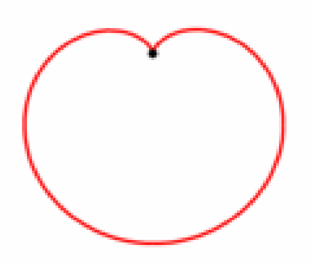
$=\frac{1}{9}(x-1)-\frac{4}{9}y+\frac{8}{9}(z-1)=0$ a simuló sík skalár egyenlete.



Rendezés után
$x-1-4y+8z-8=0$, illetve
$x-4y+8z-9=0$ a simuló sík egyenletének legegyszerűbb alakja.

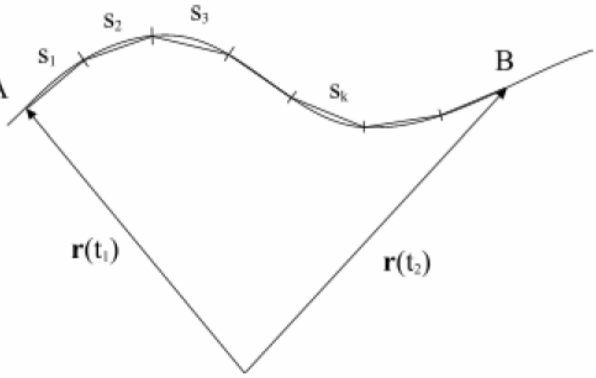
Megjegyzések:
- A síkgörbék simuló köréhez hasonlóan térgörbe egy pontjához is rendelhető simuló kör, amely a **simuló síkban** van. Ennek sugara $R=\frac{1}{g}$, középpontja pedig a főnormális egyenesen van.
- A térgörbe egyenletét valamely kísérő triéderben, mint koordináta rendszerben is fel lehet írni (ívhossz paraméterrel). Az ívhossz kiszámítására a később visszatérünk. Ebből bizonyos esetekben előnyök származhatnak, például bizonyos számolások egyszerűbbé válhatnak.
- Hogy egy térgörbe mennyire tér el egy adott hely környezetében a síkgörbétől azt az ún. **torzióval** (*T*) lehet jellemezni, amelynek nagysága $\mathrm{T}=\frac{(\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}})\cdot\dddot{\mathbf{r}}}{\left|\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}\right|^{2}}$, ahol a számláló vegyesszorzat(!).





Térgörbék ívhossza

Egy folytonos térgörbe két pontja közötti ívhosszának nevezzük azt a számot, melyhez a görbéhez húzott törött vonalak hosszai tartanak, ha az osztópontok számát minden határon túl növeljük, miközben a töröttvonalat alkotó húrok hosszának maximuma a 0-hoz tart (ld. ábra).



$S_n = \sum_1^n S_k$ a beírt húrok (poligonok) hossza.

A térgörbe AB pontok közötti ívhossza a levezetés mellőzésével:

$$s = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max S_k \to 0}} \sum_1^n S_k = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\mathbf{r}}| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt$$

Pl.: legyen $\mathbf{r}(t) = t^{\frac{3}{2}}\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} - t\mathbf{k}$, akkor

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}}\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$$|\dot{\mathbf{r}}| = \sqrt{\frac{9}{4}t + 5}$$

Keressük az $\mathbf{r}(t)$ ívhosszát az $1 \le t \le 3$ paraméterintervallumban!

$$s = \int_1^3 \sqrt{\frac{9}{4}t + 5}\,dt = \left[\frac{\left(\frac{9}{4}t + 5\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{4}} \right]_1^3 =$$

$$\frac{8}{27}\left[\left(\frac{27}{4} + 5\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{9}{4} + 5\right)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{8}{27}\left[\left(\frac{47}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{29}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right] = \ldots$$

Ha t_2 nem egy adott érték, hanem folytonosan változó paraméter, akkor az integrál (az ívhossz) ezen t-nek lesz a függvénye.

$s(t)=\int_{t_1}^{t}\left|\dot{\bar{r}}\right|dt$ Ha az $s=s(t)$ függvényből a t kifejezhető, akkor $t=f(s)$ függvényhez jutunk (pl.: ha egy feladatban $s=\frac{t+1}{t}$ adódik, akkor ebből $t=\frac{1}{s-1}$ $(=f(s)$, t_1 egy rögzített pont, amitől az ív hosszát mérjük).

Ha az ívhosszat választjuk paraméternek, akkor az $\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k}$ függvény, $t=f(s)$ alkalmazásával $\mathbf{r}(s)=x(s)\mathbf{i}+y(s)\mathbf{j}+z(s)\mathbf{k}$ alakú lesz.

Az ívhossz mint paraméter, sok esetben, számos előnnyel jár (ld. 3.1.1.1):

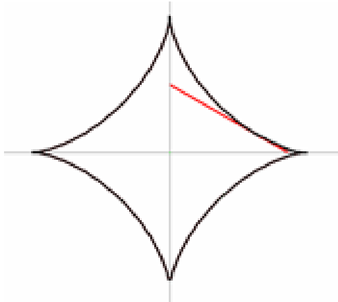
Pl.:

- $\mathbf{r}'(s)=$ az érintő egységvektor (itt a deriválás s szerint történik, ezért alkalmazzuk a megszokott vesszős – nem pont – jelölést).
- $|\mathbf{r}''(s)|=g$ (görbület) stb.

Példa

a.) Bizonyítsuk be, hogy az astroid $\underline{r}(t)=\left((\cos t)^3,\ (\sin t)^3,\ 0\right)$ síkgörbe minden pontjában az érintőjéből a koordináta tengelyek által lemetszett szakasz ugyanakkora.

b.) Számítsuk ki az astroid ívhosszát!



Megoldás

$$\underline{\dot{r}(t)}=\left(3(\cos t)^2(-\sin t),\ \ 3(\sin t)^2\cos t,\ \ 0\right)$$

$$\left|\underline{\dot{r}(t)}\right|=\sqrt{9(\cos t)^4(\sin t)^2+9(\sin t)^4(\cos t)^2}=3\cos t\sin t=\frac{3}{2}\sin 2t$$

A negyed részének ívhossza:

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\left|\underline{\dot{r}(t)}\right|dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{2}\sin 2t\cdot dt=-3\int_0^{\frac{\pi}{2}}-2\sin 2t\cdot dt=-3\left[\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=3$$

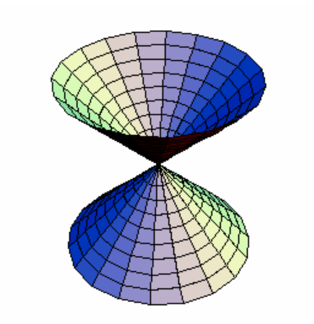
Tehát az astroid hossza: 12

Példa

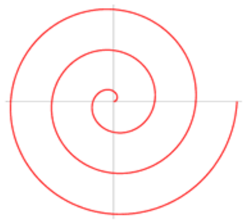
Bizonyítsuk be, hogy az $\underline{r}(t)=\left(t\cos t,\;\; t\sin t,\;\; t\right)$ térgörbe rajta van az $x^2+y^2=z^2$ egyenletű kúpfelületen.

Adjuk meg a görbületét a $t=\dfrac{\pi}{2}$ paraméterű pontban!

Megoldás



Vetülete az $[x,y]$ síkon



$\dot{\underline{r}}(t)=\left(\cos t-t\sin t,\;\; \sin t+t\cos t,\;\; 1\right)$,

$\dot{\underline{r}}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\left(-\dfrac{\pi}{2},1,1\right)$ $\ddot{r}(t)=\left(-\sin t-(\sin t+t\cos t),\;\; \cos t+(\cos t-t\sin t),\;\; 0\right)$

$\ddot{r}(t)=\left(-2\sin t-t\cos t),\;\; 2\cos t-t\sin t,\;\; 0\right)$, $\ddot{r}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\left(-2,\;\; -\dfrac{\pi}{2},\;\; 0\right)$

$$\dot{r}\times\ddot{r}=\begin{vmatrix}\underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ \dfrac{-\pi}{2} & 1 & 1\\ -2 & \dfrac{-\pi}{2} & 0\end{vmatrix}=\left(\dfrac{\pi}{2},\;\; -2,\;\; \dfrac{\pi^2}{4}+2\right),\;\; |\dot{r}\times\ddot{r}|=\sqrt{\left(\dfrac{\pi^2}{4}+4+(\dfrac{\pi^2}{4}+2)^2\right)}=\sqrt{\dfrac{\pi^4}{16}+8+\dfrac{5\pi^2}{4}}$$

$$|\dot{\underline{r}}|=\sqrt{\dfrac{\pi^2}{4}+2}\qquad\qquad g=\dfrac{|\dot{r}\times\ddot{r}|}{|\dot{\underline{r}}|^3}=\dfrac{\sqrt{\dfrac{\pi^4}{16}+8+\dfrac{5\pi^2}{4}}}{\left(\dfrac{\pi^2}{4}+2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Feladatok

3. Adott az $\underline{r}(t)=\left(e^t\cos t,\;\; e^t\cos t,\;\; e^t\right)$ térgörbe.

a) Írja fel a térgörbe $t_0=0$ pontjához tartozó simulósíkjának és érintő egyenesének egyenletét.

b) Számítsa ki a térgörbe $t\in[0,\ln 2]$ intervallumba eső darabjának az ívhosszát.

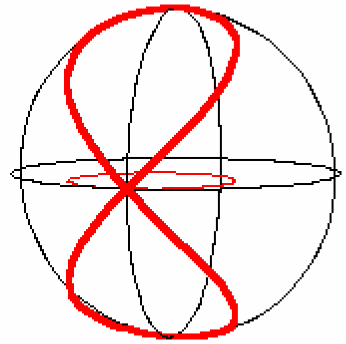
4. Határozza meg az $\underline{r}(t)=\left(\cos t,\;\; \sin t,\;\; \ln\cos t\right)$ térgörbe $P_0(1{,}0{,}0)$ pontbeli kísérő triéderének egységvektorait, a görbületet! Határozza meg ebben a pontban a simulósík és az érintő egyenes egyenletét is!

Példa

Igazoljuk, hogy a $\underline{r}(t) = \begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \cos t \sin t \\ z = \sin t \end{cases} \quad -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$ térgörbe az egység sugarú gömbön van, és számítsuk ki az ívhosszát!

Megoldás

Az egységsugarú gömb egyenlete: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, az egyenletbe behelyettesítve a térgörbe koordináta-függvényeit, $\left(\cos^2 t\right)^2 + \left(\cos t \cdot \sin t\right)^2 + \sin^2 t = \cos^2 t\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) + \sin^2 t = 1$, kielégíti azt, tehát valóban a felületen van.



$$\dot{\underline{r}}(t) = \begin{cases} \dot{x} = -\sin 2t \\ \dot{y} = \cos 2t \\ \dot{z} = \cos t \end{cases},$$

$$\left|\dot{\underline{r}}(t)\right| = \sqrt{\sin^2 2t + \cos^2 2t + \cos^2 t} = \sqrt{1 + \cos^2 t}$$

Az ívhosszát nyolc egybevágó darabból számolva:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \left|\dot{\underline{r}}(t)\right| dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 t} \cdot dt$$

közelítőleg tudjuk kiszámítani (elliptikus integrál)

A görbe nézetei: