Σύμμορφα Επίπεδες Σχεδόν Ερμητιανές Πολλαπλότητες και Απόλυτα Φράγματα Καμπυλοτήτων

Τουλιας Λ. Θωμας

Συνοψη: Μελετάται η συμπεριφορά των σύμμορφα επίπεδων σχεδόν Ερμητιανών πολλαπλοτήτων (γενικότερων $2n$-διαστάσεων) όταν φράσσεται απόλυτα η ολομορφική καμπυλότητα ή η καμπυλότητα Ricci αυτών, και συγκεκριμένα όταν οι πολλαπλότητες αυτές διαθέτουν Ερμητιανό τελεστή Ricci (δηλ. J-αναλλοίωτο τελεστή Ricci, όπου J η σχεδόν μιγαδική δομή της σχεδόν Ερμητιανής πολλαπλότητας).

Το κυρίως αποτέλεσμα είναι ότι, σε τέτοιες πολλαπλότητες, τόσο η απόλυτα φραγμένη ολομορφική καμπυλότητα όσο και η καμπυλότητα Ricci (δηλ. οι πιο ειδικότερες μορφές καμπυλοτήτων) οδηγούν σε απόλυτους φραγμούς (διαφόρων τρόπων) γενικότερες μορφές καμπυλοτήτων καθώς και την γενικότερη όλων διτμηματική καμπυλότητα.

1. Εισαγωγή στις σύμμορφα επίπεδες πολλαπλότητες και γενικεύσεις αυτών

Δίνουμε καταρχήν κάποιους γενικούς ορισμούς όσο αναφορά τις σύμμορφα επίπεδες πολλαπλότητες καθώς και κάποια βασικά αποτελέσματα που χρειαζόμαστε στο δεύτερο μέρος του κειμένου όπου αντιμετωπίζεται το θέμα των απόλυτα φραγμένων ειδικών καμπυλοτήτων.

Ορισμος: 1.1. *Σύμμορφη μετρική (Conformal metric). Έστω (M,g) πολλαπλότητα Riemann n-διάστασης. Μια άλλη μετρική Riemann $\overline{g}$ της πολλαπλότητας M, καλείται (M,g)-σύμμορφη μετρική, εάν και μόνο εάν ισχύει*

$$\overline{g}\,|_U = e^{\sigma} g\,|_U\,, \sigma \in \mathfrak{F}(U),\ \ U \in N_\tau(p),\ \ \forall p \in M\ ,$$

(όπου $\mathfrak{F}(U)$ οι πραγματικές συναρτήσεις στην περιοχή U και $N_\tau(p)$ το σύνολο των $\tau-$ανοικτών περιοχών του σημείου $p \in M$) δηλαδή, εάν και μόνο εάν για κάθε σημείο $p \in M$ υπάρχει U ανοικτή περιοχή του p, έτσι ώστε περιοριζόμενη η $\overline{g}$ σ' αυτή την περιοχή, να είναι σημειακό πολλαπλάσιο της g, δηλαδή, να υπάρχει συνάρτηση σ ορισμένη στην U, έτσι ώστε να ισχύει $\overline{g}\,|_U = e^{\sigma} g\,|_U$.

Ορισμος: 1.2. *Ομοθετική μετρική (Homothetic metric). Έστω (M,g) πολλαπλότητα Riemann n-διάστασης. Μια άλλη μετρική Riemann $\overline{g}$ της πολλαπλότητας M, καλείται (M,g)-ομοθετική μετρική, εάν και μόνο εάν ισχύει*

$$\overline{g}_{/U} = e^{c} g_{/U}\,,\ \ c \in \mathbb{R}\,,\ U \in N_\tau(p),\ \ \forall p \in M\ ,$$

δηλαδή, η συνάρτηση σ του παραπάνω ορισμού να είναι σταθερή.

ΠΟΡΙΣΜΑ: 1.3. *Έστω* (M,g) *πολλαπλότητα Riemann n-διάστασης. Εάν* $\overline{g}$ *(M,g)-σύμμορφη μετρική, τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι η συμμορφικότητα των μετρικών διατηρεί τις γωνίες, δηλ.*

$$\angle_{\overline{g}}(X,Y)=\angle_{g}(X,Y),\ \forall X,Y\in\mathfrak{X}(M),$$

όπου $\angle_{g}(X,Y)$ *η γωνία των διανυσματικών πεδίων* $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ *της πολλαπλότητας, δηλ.*

$$\cos\angle_{g}(X,Y)=\frac{g(X,Y)}{\|X\|^{2}\,\|Y\|^{2}},\ \forall X,Y\in\mathfrak{X}(M),$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: 1.4. *Σύμμορφα επίπεδη πολλαπλότητα (Conformally flat manifold). Μια (M,g) πολλαπλότητα Riemann n-διάστασης καλείται σύμμορφα επίπεδη πολλαπλότητα, εάν και μόνο εάν υπάρχει* (M,g) *-σύμμορφη μετρική* $\overline{g}$ *της* g*, για την οποία* $\overline{g}$*, η πολλαπλότητα να είναι επίπεδη.*

ΟΡΙΣΜΟΣ: 1.5. *Έστω (M,g) πολλαπλότητα Riemann n-διάστασης.*

Α. *Σύμμορφος τανυστής Weyl (Weyl conformal tensor). Ένας* $\mathfrak{X}(M)$ *-τανυστής (1,3)-τύπου* $C\in\mathfrak{T}_1^3(M)$ *της μορφής*

$$C:\mathfrak{X}(M)^4\to\mathfrak{F}(M),\ \text{όπου } C(X,Y,Z,U)=g(C_{X,Y}Z,W),\ \forall X,Y,Z,U\in\mathfrak{X}(M),$$

καλείτε (M,g) *-σύμμορφος τανυστής Weyl, εάν και μόνο εάν*

$$C_{X,Y}Z=R_{X,Y}Z-\frac{1}{n-2}\big[g(Y,Z)QX-g(X,Z)QY+\rho(Y,Z)X-\rho(X,Z)Y\big]+$$
$$+\frac{s}{(n-1)(n-2)}\big[g(Y,Z)X-g(X,Z)Y\big],\ \forall X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M),$$

όπου ρ *ο τανυστής Ricci της πολλαπλότητας.*

Β. *Προβολικός τανυστής Weyl (Weyl projective tensor). Ένας* $\mathfrak{X}(M)$ *-τανυστής (1,3)-τύπου* $P\in\mathfrak{T}_1^3(M)$ *της μορφής*

$$P:\mathfrak{X}(M)^4\to\mathfrak{F}(M),\ \text{όπου } P(X,Y,Z,U)=g(C_{X,Y}Z,W),\ \forall X,Y,Z,U\in\mathfrak{X}(M),$$

καλείται (M,g) *-προβολικός τανυστής Weyl, εάν και μόνο εάν*

$$P_{X,Y}Z=R_{X,Y}Z-\frac{1}{n-1}\big[g(X,Z)QY-g(Y,Z)QX\big],\ \forall X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M),$$

όπου Q *ο τελεστής Ricci, δηλ.* $\rho(X,Y)=g(QX,Y),\ \forall X,Y\in\mathfrak{X}(M)$.

ΛΗΜΜΑ: 1.6. *Έστω (M,g) πολλαπλότητα Riemann n-διάστασης.*

Α. *Εάν C είναι ο (M,g)-σύμμορφος τανυστής Weyl, τότε ο C-Ricci τανυστής, μηδενίζεται ταυτοτικά, δηλαδή*

$$\sum_{i=1}^{n} C\left(X,e_i,Y,e_i\right) \equiv 0,\ \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M),$$

όπου $(e_i)_{i=1}^n$ $(\mathfrak{X}(M),g)$ *-ορθοκανονική βάση.*

Β. *Ο (M,g)-σύμμορφος τανυστής Weyl C, αποτελεί (M,g)-τανυστή καμπυλότητας κι επιπλέον ισχύει η σχέση*

$$\sum_{a=1}^{n} \nabla_a C_{ijka} = -\frac{n-3}{n-2}\left[\nabla_i \rho_{jk} - \nabla_j \rho_{ik} - \frac{1}{2(n-1)}\left(g_{jk}\nabla_i s - g_{ik}\nabla_j s\right)\right],\ \forall i,j,k \in \mathbb{N}_1^n,$$

όπου s *η αριθμητική καμπυλότητα, για τυχαία* $(e_i)_{i=1}^n$ $(\mathfrak{X}(M),g)$ *-ορθοκανονική βάση.*

Γ. *Για τον (M,g)-προβολικό τανυστής Weyl P, ισχύει η σχέση*

$$\sum_{a=1}^{n} \nabla_a P_{ijka} - \nabla_a P_{jika} = -\frac{2n-3}{n-1}\left(\nabla_i \rho_{jk} - \nabla_j \rho_{ik}\right) + \frac{1}{2(n-1)}\left(g_{jk}\nabla_i s - g_{ik}\nabla_j s\right),\ \forall i,j,k \in \mathbb{N}_1^n,$$

σε τυχαία $(e_i)_{i=1}^n$ $(\mathfrak{X}(M),g)$ *-ορθοκανονική βάση.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: 1.6Α. Αποδεικνύεται άμεσα με βάση τον Ορισμό 1.5Α.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: 1.6Β. Αποδεικνύεται επίσης άμεσα με βάση τον Ορισμό 1.5Α, ότι ο σύμμορφος τανυστής Weyl *C* αποτελεί (*M,g*)-τανυστή καμπυλότητας.

Έστω $(e_i)_{i=1}^n$ $(\mathfrak{X}(M),g)$ -ορθοκανονική βάση. Από τον Ορισμό 1.5Α, παίρνουμε με συναλλοίωτη διαφόριση

$$\begin{aligned}(\nabla_U C)\left(X,Y,Z,W\right) &= (\nabla_U R)\left(X,Y,Z,W\right) - \frac{1}{n-2}\left[g\left(X,Z\right)(\nabla_U \rho)\left(Y,W\right) - (\nabla_U \rho)\left(X,W\right)g\left(Y,Z\right)\right] \\ &+ \frac{U(s)}{(n-1)(n-2)}\left[g\left(X,Z\right)g\left(Y,W\right) - g\left(X,W\right)g\left(Y,Z\right)\right]\ \forall X,Y,Z,W,U \in \mathfrak{X}(M) \qquad (1.6B.1)\end{aligned}$$

και με τη χρήση συνιστωσών

$$\begin{aligned}\sum_{a=1}^{n} \nabla_a C_{ijka} &= \sum_{a=1}^{n} \nabla_a R_{ijka} - \frac{1}{n-2}\left(g_{ik}\sum_{a=1}^{n}\nabla_a \rho_{ja} - \sum_{a=1}^{n} g_{ia}\nabla_a \rho_{jk} + \sum_{a=1}^{n} g_{ja}\nabla_a \rho_{ik} - g_{jk}\sum_{a=1}^{n}\nabla_a \rho_{ia}\right) + \\ &+ \frac{1}{(n-1)(n-2)}\sum_{a=1}^{n}\nabla_a s\left(g_{ik}g_{ja} - g_{ia}g_{jk}\right)\ \forall i,j,k \in \mathbb{N}_1^n,\end{aligned}$$

από όπου, καθώς γενικά ισχύει

$$\nabla_i s = 2\sum_{a=1}^{n}\nabla_a \rho_{ia},\ \forall i \in \mathbb{N}_1^n,$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned}\sum_{a=1}^{n} \nabla_a C_{ijka} &= \sum_{a=1}^{n} \nabla_a R_{ijka} + \frac{1}{n-2}\left(\nabla_i \rho_{jk} - \nabla_j \rho_{ik} + \frac{\nabla_i s}{2} g_{jk} + \frac{\nabla_j s}{2} g_{ik}\right) \\ &- \frac{1}{(n-1)(n-2)}\left[\left(\nabla_i s\right)g_{jk} - \left(\nabla_j s\right)g_{ik}\right],\ \forall i,j,k \in \mathbb{N}_1^n,\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\sum_{a=1}^{n}\nabla_a C_{ijka}=\sum_{a=1}^{n}\nabla_a R_{ijka}+\frac{1}{n-2}\left(\nabla_i\rho_{jk}-\nabla_j\rho_{ik}\right)+\frac{n-3}{2(n-1)(n-2)}\left[(\nabla_i s)g_{jk}-\left(\nabla_j s\right)g_{ik}\right],$$

$$\forall i,j,k\in\mathbb{N}_1^n. \qquad (1.6B.2)$$

Επίσης, από την (1.6Β.1) έχουμε

$$\sum_{a=1}^{n}\nabla_j C_{kaia}=\sum_{a=1}^{n}\nabla_j R_{kaia}-\frac{1}{n-2}\left(g_{ki}\sum_{a=1}^{n}\nabla_j\rho_{aa}-\sum_{a=1}^{n}g_{ka}\nabla_j\rho_{ia}+\nabla_j\rho_{ki}\sum_{a=1}^{n}g_{aa}-\sum_{a=1}^{n}g_{ia}\nabla_j\rho_{ka}\right)+$$
$$+\frac{\nabla_j s}{(n-1)(n-2)}\left(\sum_{a=1}^{n}g_{ki}g_{aa}-g_{ka}g_{ia}\right),\ \forall i,j,k\in\mathbb{N}_1^n,$$

οπότε, κάνοντας χρήση του Λήμματος 1.6Α, παίρνουμε

$$\sum_{a=1}^{n}\nabla_j R_{kaia}=\frac{1}{n-2}\left(g_{ki}\nabla_j s-2\nabla_j\rho_{ik}+n\nabla_j\rho_{ik}\right)-\frac{\nabla_j s}{n-2}g_{ik},\ \forall i,j,k\in\mathbb{N}_1^n$$

κι απλοποιώντας

$$\sum_{a=1}^{n}\nabla_j R_{kaia}=\nabla_j\rho_{ik},\ \forall i,j,k\in\mathbb{N}_1^n. \qquad (1.6B.3)$$

Από τη δεύτερη ταυτότητα Bianchi, έχουμε

$$\sum_{a=1}^{n}\nabla_a R_{ijka}=\sum_{a=1}^{n}\nabla_a R_{kaij}=-\left(\sum_{a=1}^{n}\nabla_i R_{kaja}-\nabla_j R_{kaia}\right),\ \forall i,j,k\in\mathbb{N}_1^n$$

κι επομένως, από την (1.6Β.3), λαμβάνουμε

$$\sum_{a=1}^{n}\nabla_a R_{ijka}=-\left(\nabla_i\rho_{jk}-\nabla_j\rho_{ik}\right),\ \forall i,j,k\in\mathbb{N}_1^n,$$

από όπου, με αντικατάσταση στην (1.6Β.2), συνάγουμε το ζητούμενο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: 1.6Γ. Έστω $(e_i)_{i=1}^n$ $(\mathfrak{X}(M),g)$-ορθοκανονική βάση. Από τον Ορισμό 1.5Β, παίρνουμε με συναλλοίωτη διαφόριση

$$\sum_{a=1}^{n}\nabla_a P_{ijka}=\sum_{a=1}^{n}\nabla_a R_{ijka}-\frac{1}{n-1}\left(g_{ik}\sum_{a=1}^{n}\nabla_a\rho_{ja}-\sum_{a=1}^{n}g_{ia}\nabla_a\rho_{jk}\right),\ \forall i,j,k\in\mathbb{N}_1^n,$$

από όπου, καθώς γενικά ισχύει

$$\nabla_i s=2\sum_{a=1}^{n}\nabla_a\rho_{ia},\ \forall i\in\mathbb{N}_1^n,$$

παίρνουμε

$$\sum_{a=1}^{n}\nabla_a P_{ijka}=\sum_{a=1}^{n}\nabla_a R_{ijka}+\frac{1}{n-1}\left(\nabla_i\rho_{jk}-\frac{\nabla_j s}{2}g_{ik}\right),\ \forall i,j,k\in\mathbb{N}_1^n. \qquad (1.6\Gamma.1)$$

Από τη δεύτερη ταυτότητα Bianchi, έχουμε

$$\sum_{a=1}^{n} \nabla_a R_{ijka} = \sum_{a=1}^{n} \nabla_a R_{kaij} = -\left(\sum_{a=1}^{n} \nabla_i R_{kaja} - \nabla_j R_{kaia} \right), \ \forall i,j,k \in \mathbb{N}_1^n$$

κι επομένως

$$\sum_{a=1}^{n} \nabla_a R_{ijka} = -\left(\nabla_i \rho_{jk} - \nabla_j \rho_{ik} \right), \ \forall i,j,k \in \mathbb{N}_1^n .$$

Αντικαθιστώντας στην (1.6Γ.1), έχουμε

$$\sum_{a=1}^{n} \nabla_a P_{ijka} = -\left(\nabla_i \rho_{jk} - \nabla_j \rho_{ik} \right) + \frac{1}{n-1}\left(\nabla_i \rho_{jk} - \frac{\nabla_j s}{2} g_{ik} \right), \ \forall i,j,k \in \mathbb{N}_1^n ,$$

από όπου

$$\sum_{a=1}^{n} \nabla_a P_{ijka} - \nabla_a P_{jika} = -2\left(\nabla_i \rho_{jk} - \nabla_j \rho_{ik} \right) + \frac{1}{n-1}\left(\nabla_i \rho_{jk} - \nabla_j \rho_{ik} + \frac{\nabla_i s}{2} g_{jk} - \frac{\nabla_j s}{2} g_{ik} \right), \ \ \forall i,j,k \in \mathbb{N}_1^n$$

κι άρα, λαμβάνουμε τη ζητούμενη σχέση. **Ο.Ε.Δ.**

ΘΕΩΡΗΜΑ: 1.7. *Θεώρημα Weyl* [Y,K]. *Μια (M,g) πολλαπλότητα Riemann n-διάστασης,* $n>3$*, είναι σύμμορφα επίπεδη, αν και μόνο αν, ο σύμμορφος τανυστής Weyl μηδενίζεται ταυτοτικά.*

ΠΟΡΙΣΜΑ: 1.8. *Έστω (M,g) πολλαπλότητα Riemann n-διάστασης.*

Α. *Κάθε δισδιάστατη πολλαπλότητα Riemann, είναι σύμμορφα επίπεδη πολλαπλότητα.*

Β. *Εάν* $\overline{g}$ *είναι μια (M,g)-σύμμορφη μετρική, δηλ.* $\overline{g} = e^{\sigma} g$ *όπου* $\sigma \in \mathfrak{F}(M)$, C *ο (M,g)-σύμμορφος τανυστής Weyl και* $\overline{C}$ *ο* $(M,\overline{g})$ *-σύμμορφος τανυστής Weyl, τότε* $\overline{C} = e^{-\sigma} C$.

ΘΕΩΡΗΜΑ: 1.9. *Έστω (M,g) πολλαπλότητα Riemann n-διάστασης.*

Α. *Σε κάθε (M,g) σύμμορφα επίπεδη πολλαπλότητα, διάστασης* $n>3$ *, ισχύει*

$$\left(\nabla_X Q\right)Y - \left(\nabla_Y Q\right)X = \frac{1}{2(n-1)}\left[X(s)Y - Y(s)X \right] , \ \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M) .$$

Β. *Κάθε (M,g) τρισδιάστατη πολλαπλότητα Riemann είναι σύμμορφα επίπεδη, αν και μόνο αν, ισχύει*

$$\left(\nabla_X Q\right)Y - \left(\nabla_Y Q\right)X = \frac{1}{2(n-1)}\left[X(s)Y - Y(s)X \right] , \ \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M) .$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: 1.9Α. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 1.7 στο Λήμμα 1.6Β, έχουμε

$$\nabla_i \rho_{jk} - \nabla_j \rho_{ik} = \frac{1}{2(n-1)}\left[\left(\nabla_i s\right) g_{jk} - \left(\nabla_j s\right) g_{ik} \right], \ \forall i,j,k \in \mathbb{N}_1^n , \qquad (1.9Α.1)$$

όπου $(e_i)_{i=1}^n$ $(\mathfrak{X}(M),g)$ -ορθοκανονική βάση. Έστω τώρα $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$, $X = X^i e_i$, $Y = Y^j e_j$ κι έτσι

$$
\begin{aligned}
&(\nabla_X Q)Y-(\nabla_Y Q)X-\frac{1}{2(n-1)}\left[X(s)Y-Y(s)X\right]= \\
&\quad X^i Y^j\left[\nabla_i Q_j-\nabla_j Q_i-\frac{1}{2(n-1)}\left[(\nabla_i s)e_j-(\nabla_j s)e_i\right]\right],
\end{aligned}
$$

από όπου με βάση την (1.9A.1), παίρνουμε το ζητούμενο.

Διαφορετικά, ορίζουμε ένα τανυστή L (0,2)-τύπου επί μιας πολλαπλότητας Riemann n-διάστασης, ο οποίος έχει τη μορφή

$$
L(X,Y)=-\frac{1}{n-2}\rho(X,Y)+\frac{s}{2(n-1)(n-2)}g(X,Y),\ \forall X,Y\in\mathfrak{X}(M).
$$

Ο H. Weyl [CH], απέδειξε ότι για μια σύμμορφα επίπεδη πολλαπλότητα Riemann n-διάστασης, $n\geq 4$, ισχύει

$$
(\nabla_Z L)(X,Y)=(\nabla_X L)(Z,Y),\ \forall X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M). \tag{1.9A2}
$$

Από τον ορισμό του τανυστή L, έχουμε

$$
\begin{aligned}
&(\nabla_Z L)(X,Y)=\nabla_Z\left(L(X,Y)\right)-L(\nabla_Z X,Y)-L(X,\nabla_Z Y)= \\
&-\frac{1}{n-2}\nabla_Z\left(\rho(X,Y)\right)+\frac{Z(s)}{2(n-1)(n-2)}g(X,Y)+\frac{s}{2(n-1)(n-2)}Z\left(g(X,Y)\right)+ \\
&+\frac{1}{n-2}\rho(\nabla_Z X,Y)-\frac{s}{2(n-1)(n-2)}g(\nabla_Z X,Y)+\frac{1}{n-2}\rho(X,\nabla_Z Y)-\frac{s}{2(n-1)(n-2)}g(X,\nabla_Z Y)= \\
&-\frac{1}{n-2}Z\left(g(QX,Y)\right)+\frac{Z(s)}{2(n-1)(n-2)}g(X,Y)+\frac{1}{n-2}\left[g\left(Q(\nabla_Z X),Y\right)+g(QX,\nabla_Z Y)\right]= \\
&-\frac{1}{n-2}\left[g\left((\nabla_Z(QX)),Y\right)+g(QX,\nabla_Z Y)-g\left(Q(\nabla_Z X),Y\right)-g(QX,\nabla_Z Y)\right]+ \\
&+\frac{Z(s)}{2(n-1)(n-2)}g(X,Y),\ \forall X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M).
\end{aligned}
$$

Επομένως

$$
(\nabla_Z L)(X,Y)=-\frac{1}{n-2}g\left((\nabla_Z Q)X,Y\right)+\frac{Z(s)}{2(n-1)(n-2)}g(X,Y),\ \forall X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M). \tag{1.9A3}
$$

Αλλάζοντας αμοιβαία τα X και Z στην τελευταία σχέση, παίρνουμε

$$
(\nabla_X L)(Z,Y)=-\frac{1}{n-2}g\left((\nabla_X Q)Z,Y\right)+\frac{X(s)}{2(n-1)(n-2)}g(Z,Y),\ \forall X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M). \tag{1.9A4}
$$

Αφαιρώντας τις (1.9A.3) και (1.9A.4) κατά μέλη, και λαμβάνοντας υπόψη την (1.9A.1), προκύπτει η ζητούμενη σχέση.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: 1.9Β. [Y,K]. **Ο.Ε.Δ.**

ΘΕΩΡΗΜΑ: 1.10. *Έστω (M,g) πολλαπλότητα Riemann n-διάστασης.*

Α. *Σε κάθε (M,g) σύμμορφα επίπεδη πολλαπλότητα, η παραλληλία του τανυστή Ricci ταυτίζεται με* *την τοπική συμμετρικότητα.*

B. *Κάθε (M,g) σύμμορφα επίπεδη και Ricci-επίπεδη πολλαπλότητα, είναι επίπεδη πολλαπλότητα.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: 1.10A. Η τοπική συμμετρικότητα, καταρχήν, είναι υποκλάση της παραλληλίας του τανυστή Ricci. Υποθέτουμε τώρα λοιπόν τη Ricci-παραλληλία. Από τη συναλλοίωτη διαφόριση του τανυστή καμπυλότητας, έχουμε

$$(\nabla_U R)(X,Y,Z,W) = U\big(R(X,Y,Z,W)\big) - R(\nabla_U X,Y,Z,W) - R(X,\nabla_U Y,Z,W) -$$
$$-R(X,Y,\nabla_U Z,W) - R(X,Y,Z,\nabla_U W),\ \forall X,Y,Z,W,U \in \mathfrak{X}(M),$$

αλλά με βάση το Θεώρημα 1.7, και χρησιμοποιώντας τον Ορισμό 1.5A, παίρνουμε

$$(\nabla_U R)(X,Y,Z,W) = \frac{1}{n-2}\big[(\nabla_U g)(X,Z)\rho(Y,W) + g(X,Z)(\nabla_U \rho)(Y,W) -$$
$$-(\nabla_U g)(X,W)\rho(Y,Z) - g(X,W)(\nabla_U \rho)(Y,Z) + (\nabla_U \rho)(X,Z)g(Y,W) + \rho(X,Z)(\nabla_U g)(Y,W) -$$
$$-(\nabla_U \rho)(X,W)g(Y,Z) - \rho(X,W)(\nabla_U g)(Y,Z)\big] -$$
$$-\frac{U(s)}{(n-1)(n-2)}\big[g(X,Z)g(Y,W) - g(X,W)g(Y,Z)\big],\ \forall X,Y,Z,W,U \in \mathfrak{X}(M),$$

κι εξαιτίας της παραλληλίας του μετρικού τανυστή g και του τανυστή Ricci, δηλ. $\nabla g \equiv 0$ και $\nabla \rho \equiv 0$ αντίστοιχα, θα έχουμε

$$(\nabla_U R)(X,Y,Z,W) = -\frac{U(s)}{(n-1)(n-2)}\big[g(X,Z)g(Y,W) - g(X,W)g(Y,Z)\big],\ \forall X,Y,Z,W,U \in \mathfrak{X}(M).$$

Από την παραλληλία του τανυστή Ricci, συνάγουμε τη σταθερότητα της αριθμητικής καμπυλότητας, που μέσω της παραπάνω σχέσης, δίνει τελικά την τοπική συμμετρικότητα. Άρα λοιπόν, συνάγουμε τη ζητούμενη ταύτιση.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: 1.10B. Από το Θεώρημα 1.7, και χρησιμοποιώντας τον Ορισμό 1.5A, συνεπάγεται η ολική επιπεδότητα της πολλαπλότητας. **Ο.Ε.Δ.**

2. Απόλυτα φράγματα καμπυλοτήτων

ΘΕΩΡΗΜΑ: 2.1. *Έστω (M,J,g) πολλαπλότητα Riemann n-διάστασης. Κάθε (M,J,g) σύμμορφα επίπεδη πολλαπλότητα, είναι πολλαπλότητα Einstein, αν και μόνο αν είναι πολλαπλότητα σταθερής τμηματικής καμπυλότητας.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (A) Έστω (M,g) πολλαπλότητα Einstein. Διακρίνουμε τώρα τις δύο υποπεριπτώσεις: $n=3$ και $n>3$.

(A_1) Έστω $n=3$. Τότε είναι γνωστό πως είναι πολλαπλότητα σταθερής τμηματικής καμπυλότητας.

(A_2) Έστω $n>3$. Από το Θεώρημα Weyl (Θεώρημα 1.7), συνεπάγεται ο μηδενισμός του σύμμορφου τανυστή Weyl, κι εφόσον η σύμμορφα επίπεδη πολλαπλότητα είναι, από την υπόθεση (A), πολλαπλότητα Einstein, θα συνεπάγεται και τη σταθερότητα της τμηματικής καμπυλότητας.

(B) Έστω (M,g) πολλαπλότητα σταθερής τμηματικής καμπυλότητας. Από τον ορισμό της καμπυλότητας Ricci r θα έχουμε

$$r(X) = \rho(X,X),\ \forall X \in \mathfrak{X}_1(M,g),$$

όπου $\mathfrak{X}_1(M,g)$ τα μοναδιαία διανυσματικά πεδία της πολλαπλότητας (M,g), κι απ' τον ορισμό του τανυστή Ricci,

$$r(X)=\sum_{i=1}^{n} R(X,e_i,X,e_i),\quad \forall X\in \mathfrak{X}_1(M,g)$$

όπου $(e_i)_{i=1}^n$ $(\mathfrak{X}(M),g)$-ορθοκανονική βάση. Με βάση τον ορισμό της τμηματικής καμπυλότητας, η παραπάνω σχέση γράφεται

$$r(X)=\sum_{i=1}^{n} K(X,e_i)\left[1-g^2(X,e_i)\right],\ \forall X\in \mathfrak{X}_1(M,g),$$

όπου K η τμηματική καμπυλότητα της πολλαπλότητας (M,g). Επειδή από την υπόθεση (Β) θα ισχύει $K\equiv c$, $c\in\mathbb{R}$, η προηγούμενη εξίσωση γράφεται

$$r(X)=c\left[\sum_{i=1}^{n}1-g^2(X,e_i)\right]=c\left[n-\sum_{i=1}^{n}g^2(X,e_i)\right]=c\left[n-\sum_{i=1}^{n}\left(X^k\right)^2 g_{ki}^2\right],\ \forall X\in \mathfrak{X}_1(M,g),$$

δηλαδή

$$r(X)=c\left(n-\|X\|^2\right),\ \forall X\in \mathfrak{X}_1(M,g),$$

Άρα $r\equiv(n-1)c$, κι επομένως, λόγω της σταθερότητας της καμπυλότητας Ricci, η πολλαπλότητα θα είναι τελικά Einstein. **Ο.Ε.Δ.**

ΠΟΡΙΣΜΑ: 2.2. *Έστω (M,J,g) πολλαπλότητα σχεδόν Hermite 2n-διάστασης,* $2n\geq 4$. *Κάθε (M,J,g) σύμμορφα επίπεδη πολλαπλότητα που διαθέτει Ερμητιανό τελεστή Ricci (δηλ. που διατηρεί τον τελεστή Ricci J-αναλλοίωτο,* $Q\circ J=J\circ Q$*), ανήκει στη δεύτερη κλάση των πολλαπλοτήτων Gray, δηλ. (M,J,g)* AH_2*-πολλαπλότητα.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Από το Θεώρημα Weyl (Θεώρημα 1.7), έχουμε

$$R(X,Y,Z,W)=\frac{1}{2(n-1)}\left[g(X,Z)\rho(Y,W)-g(Y,Z)\rho(X,W)+\rho(X,Z)g(Y,W)-\rho(Y,Z)\rho(X,W)\right]-$$
$$-\frac{s}{2(n-1)(2n-1)}\left[g(X,Z)g(Y,W)-g(Y,Z)g(X,W)\right],\ \forall X,Y,Z,W\in\mathfrak{X}(M),$$

κι εφόσον ο τελεστής Ricci είναι Ερμητιανός, ικανοποιείται η σχέση

$$R(X,Y,Z,W)-R(X,Y,JZ,JW)=R(X,JY,Z,JW)+R(X,JY,JZ,W),\ \forall X,Y,Z,W\in\mathfrak{X}(M),$$

δηλαδή

$$G(X,Y,Z,W)=G(X,JY,Z,JW),\ \forall X,Y,Z,W\in\mathfrak{X}(M),$$

κι επομένως, (M,J,g) AH_2-πολλαπλότητα. **Ο.Ε.Δ.**

ΛΗΜΜΑ: 2.3. *Έστω (M,J,g) πολλαπλότητα σχεδόν Hermite 2n-διάστασης,* $2n\geq 4$. *Κάθε (M,g) σύμμορφα επίπεδη πολλαπλότητα σημειακά, σταθερής ολομορφικής τμηματικής καμπυλότητας είναι πολλαπλότητα ασθενώς *Einstein και ισχύουν οι σχέσεις*

$$\rho(X,Y)+\rho(JX,JY)=2(2n-1)f_H g(X,Y),\ \forall X,Y\in\mathfrak{X}(M),\ s=2n(2n-1)f_H,\ s^*=2nf_H,$$

όπου $H\equiv f_H,\ f_H\in\mathfrak{F}(M)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Από το Θεώρημα Weyl (Θεώρημα 1.7) και τον ορισμό της ολομορφικής τμηματικής καμπυλότητας H, συνεπάγεται ότι

$$H(X)\|X\|^2=\frac{1}{2(n-1)}\left[\rho(X,X)+\rho(JX,JX)\right]\|X\|^2-\frac{s}{2(2n-1)(n-1)}\|X\|^2,\ \forall X\in\mathfrak{X}(M),$$

και καθώς η πολλαπλότητα είναι σημειακά σταθερής ολομορφικής τμηματικής καμπυλότητας, δηλαδή

$$H\equiv f_H,\ f_H\in\mathfrak{F}(M),$$

η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$\rho(X,X)+\rho(JX,JX)=\left[2(n-1)f_H+\frac{s}{2n-1}\right]\|X\|^2,\ \forall X\in\mathfrak{X}(M). \tag{2.3.1}$$

Πολώνοντας (αντικαθιστώντας δηλ. τυχαίο διανυσματικό πεδίο X με το επίσης τυχαίο $X+Y$), έχουμε άμεσα

$$\rho(X+Y,X+Y)+\rho(JX+JY,JX+JY)=\left[2(n-1)f_H+\frac{s}{2n-1}\right]\|X+Y\|^2,\ \forall X,Y\in\mathfrak{X}(M),$$

και με τη βοήθεια της (2.3.1), θα έχουμε

$$\rho(X,Y)+\rho(JX,JY)=\left[2(n-1)f_H+\frac{s}{2n-1}\right]g(X,Y),\ \forall X,Y\in\mathfrak{X}(M). \tag{2.3.2}$$

Ανάγοντας τη (2.3.2) στην αριθμητική καμπυλότητα, παίρνουμε

$$s=2n(n-1)f_H+\frac{ns}{2n-1},$$

δηλαδή $s=2n(2n-1)f_H$. Αντικαθιστώντας τώρα στη (2.3.2), παίρνουμε τελικά το ζητούμενο

$$\rho(X,Y)+\rho(JX,JY)=2(2n-1)f_H g(X,Y),\ \forall X,Y\in\mathfrak{X}(M). \tag{2.3.3}$$

Είναι τώρα γνωστό [S – Corollary 4.7], ότι στις πολλαπλότητες σημειακά σταθερής ολομορφικής τμηματικής καμπυλότητας, ισχύει

$$\rho(X,Y)+\rho(JX,JY)+3\rho^*(X,Y)+3\rho^*(JX,JY)=4(n+1)f_H g(X,Y),\ \forall X,Y\in\mathfrak{X}(M).$$

Από το Θεώρημα Weyl (Θεώρημα 1.7), παίρνουμε

$$\rho^*(X,Y)=\frac{1}{2(n-1)}\left[\rho(X,Y)+\rho(JX,JY)\right]-\frac{s}{2(n-1)(2n-1)}g(X,Y),\ \forall X,Y\in\mathfrak{X}(M)$$

και σε συνδυασμό με την προηγούμενη σχέση καθώς και την (2.3.3), συνάγουμε ότι η πολλαπλότητα είναι ασθενώς *Einstein, με $s^*=2nf_H$. **Ο.Ε.Δ.**

ΘΕΩΡΗΜΑ: 2.4. *Έστω (M,J,g) πολλαπλότητα σχεδόν Hermite 2n-διάστασης,* $2n \geq 4$.

Α. *Κάθε (M,g) σύμμορφα επίπεδη πολλαπλότητα, σημειακά σταθερής ολομορφικής τμηματικής καμπυλότητας, Ερμητιανού τελεστή Ricci, είναι πολλαπλότητα σταθερής τμηματικής καμπυλότητας.*

Β. *Κάθε (M,g) σύμμορφα επίπεδη πολλαπλότητα σχεδόν Kaehler, Ερμητιανού τελεστή Ricci που έχει σημειακά σταθερή ολομορφική τμηματική καμπυλότητα, είναι επίπεδη πολλαπλότητα.*

Γ. *Κάθε (M,g) σύμμορφα επίπεδη πολλαπλότητα, σημειακά σταθερής ολομορφικής τμηματικής καμπυλότητας Ερμητιανού τελεστή Ricci κι επιπλέον ταυτίζονται απόλυτα η αριθμητική κι η *αριθμητική καμπυλότητα, είναι επίπεδη πολλαπλότητα.*

Δ. *Κάθε (M,g) σύμμορφα επίπεδη πολλαπλότητα para-Kaehler, σημειακά σταθερή ολομορφικής τμηματικής καμπυλότητα, είναι επίπεδη πολλαπλότητα.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: 2.4Α. Από το Λήμμα 2.3, κι επειδή η σχεδόν Hermite πολλαπλότητα διαθέτει Ερμητιανό τελεστή Ricci, θα έχουμε, $\rho = (2n-1)f_H g$, $f_H \in \mathfrak{F}(M)$, δηλαδή, (M,g) πολλαπλότητα Einstein. Σύμφωνα όμως με το Θεώρημα 2.1, συνάγουμε τελικά τη σταθερότητα της τμηματικής καμπυλότητας.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: 2.4Β. Από το Θεώρημα 2.4Α, η (M,g) είναι πολλαπλότητα σταθερής τμηματικής καμπυλότητας, κι επειδή επιπλέον είναι και πολλαπλότητα σχεδόν Kaehler, σύμφωνα με γνωστό αποτέλεσμα [O – Theorem], θα είναι τελικά επίπεδη πολλαπλότητα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: 2.4Γ. Από το Θεώρημα 2.4Α και από γνωστό αποτέλεσμα για τις σταθερές τμηματικές καμπυλότητες, συνεπάγεται ότι η (M,g) είναι τελικά επίπεδη πολλαπλότητα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: 2.4Δ. Επειδή (M,J,g) πολλαπλότητα para-Kaehler, θα έχουμε $s = s^*$, και σύμφωνα με το Θεώρημα 2.4Γ, θα συνεπάγεται προφανώς ότι η (M,g) είναι τελικά επίπεδη πολλαπλότητα. **Ο.Ε.Δ.**

ΘΕΩΡΗΜΑ: 2.5. *Έστω (M,J,g) πολλαπλότητα σχεδόν Hermite 2n-διάστασης,* $2n \geq 4$. *Κάθε (M,J,g) σύμμορφα επίπεδη πολλαπλότητα που διαθέτει αντι-Ερμητιανό τελεστή Ricci (δηλ. που διατηρεί τον τελεστή Ricci J-αντιαλλοίωτο,* $Q \circ J + J \circ Q \equiv 0$ *), είναι επίπεδη πολλαπλότητα.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Από το Θεώρημα Weyl (Θεώρημα 1.7), παίρνουμε

$$\begin{aligned} &R(X,JX,Y,JY) = \\ &\quad \frac{1}{2(n-1)}\left[g(X,Y)\rho(JX,JY) - g(JX,Y)\rho(X,JY) + \rho(X,Y)g(JX,JY) - \rho(JX,Y)g(X,JY)\right] - \\ &\quad -\frac{s}{2(2n-1)(n-1)}\left[g^2(X,Y) + \Phi^2(X,Y)\right],\ \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M), \end{aligned}$$

όπου Φ η σχεδόν μιγαδική μορφή, δηλ. $\Phi(X,Y) = g(X,JY),\ \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M)$, και εξαιτίας του αντι-Ερμητιανού τελεστή Ricci, θα έχουμε

$$R(X,JX,Y,JY) = -\frac{s}{2(2n-1)(n-1)}\left[g^2(X,Y) + \Phi^2(X,Y)\right],\ \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{2.5.1}$$

Κατά συνέπεια

$$H(X) = -\frac{s}{2(2n-1)(n-1)},\ \forall X \in \mathfrak{X}_1(M), \tag{2.5.2}$$

δηλαδή, καταλήγουμε στη σημειακή σταθερότητα της ολομορφικής τμηματικής καμπυλότητας. Από το, Λήμμα 2.3, λόγω του αντι-Ερμητιανού τελεστή Ricci, συνάγουμε την ολομορφική επιπεδότητα, κι άρα, από την Θεώρημα 2.4Α,τελικά παίρνουμε την επιπεδότητα της πολλαπλότητας. **Ο.Ε.Δ.**

ΘΕΩΡΗΜΑ: 2.6. *Έστω (M,J,g) πολλαπλότητα σχεδόν Hermite 2n-διάστασης,* $2n \geq 4$. *Κάθε (M,J,g) σύμμορφα επίπεδη πολλαπλότητα, σημειακά σταθερής ολομορφικής διτμηματικής καμπυλότητας, είναι επίπεδη πολλαπλότητα.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $(e_i)_{i=1}^{n}$ $(\mathfrak{X}(M), g)$ -ορθοκανονική *J*-βάση. Από το Θεώρημα Weyl (Θεώρημα 1.7), παίρνουμε τις σχέσεις

$$R(X,Y,JX,JY) = \frac{1}{2(n-1)}\Phi(X,Y)\left[\rho(X,JY) - \rho(JX,Y)\right] - \frac{s}{2(n-1)(2n-1)}\Phi^2(X,Y), \ \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M),$$

$$R(X,JY,JX,Y) = -\frac{1}{2(n-1)}g(X,Y)\left[\rho(X,Y) + \rho(JX,JY)\right] + \frac{s}{2(n-1)(2n-1)}g^2(X,Y), \ \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Σύμφωνα με την πρώτη ταυτότητα Bianchi, ισχύει

$$R(X,JX,Y,JY) = R(X,Y,JX,JY) - R(X,JY,JX,Y), \ \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M),$$

οπότε, αντικαθιστώντας τις δύο προηγούμενες σχέσεις, παίρνουμε

$$\begin{aligned} R(X,JX,Y,JY) = & \frac{1}{2(n-1)}\Big[\Phi(X,Y)\left[\rho(X,JY) - \rho(JX,Y)\right] + g(X,Y)\left[\rho(X,Y) + \rho(JX,JY)\right]\Big] - \\ & - \frac{s}{2(n-1)(2n-1)}\left[g^2(X,Y) + \Phi^2(X,Y)\right], \ \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M). \end{aligned} \tag{2.6.1}$$

Εφόσον από την υπόθεση έχουμε τη σημειακή σταθερότητα της ολομορφικής διτμηματικής καμπυλότητας, δηλ. $h \equiv f_h$, $f_h \in \mathfrak{F}(\mathrm{M})$, η σχέση (1) για $X = Y$ γίνεται

$$\left[f_h + \frac{s}{2(n-1)(2n-1)}\right]\|X\|^2 = \frac{1}{2(n-1)}\left[g^2(X,Y) + \Phi^2(X,Y)\right], \ \forall X \in \mathfrak{X}(M),$$

από όπου έχουμε

$$f_h = \frac{s}{2n(2n-1)}.$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση αυτή στην (2.6.1) κι αντικαθιστώντας $X = e_i, \ Y = e_j \ (i \neq j)$ παίρνουμε την αριθμητική επιπεδότητα, από την οποία σύμφωνα με το Θεώρημα Weyl (Θεώρημα 1.7), συνάγουμε την ολική επιπεδότητα της πολλαπλότητας. **Ο.Ε.Δ.**

ΘΕΩΡΗΜΑ: 2.7. *Έστω (M,J,g) πολλαπλότητα σχεδόν Hermite 2n-διάστασης,* $2n \geq 4$. *Κάθε (M,J,g) σύμμορφα επίπεδη πολλαπλότητα, σημειακά σταθερής *τμηματικής καμπυλότητας, είναι επίπεδη πολλαπλότητα, δηλ.*

$$K_p^* \equiv f_{K^*}, \ \forall p \in \mathfrak{P}(M), \ f_{K^*} \in \mathfrak{F}(M),$$

όπου $\mathfrak{P}(M)$ *τα εφαπτόμενα επίπεδα, δηλ. οι δισδιάστατοι διανυσματικοί υπόχωροι των* *διανυσματικών πεδίων* $\mathfrak{X}(M)$ *της πολλαπλότητας.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Από το Θεώρημα Weyl (Θεώρημα 1.7), παίρνουμε

$$R(X,Y,JX,JY)=\frac{1}{2(n-1)}\left[\Phi(X,Y)\rho(X,JY)-\Phi(X,Y)\rho(JX,Y)\right]-$$

$$-\frac{s}{2(n-1)(2n-1)}\Phi^2(X,Y),\ \forall X,Y\in\mathfrak{X}(M),$$

και περιοριζόμενοι στα αντιολομορφικά ζεύγη διανυσματικών πεδίων (X,Y), συνεπάγεται

$$R(X,Y,JX,JY)\equiv 0,\ \forall (X,Y)\in\mathfrak{X}^a(M,J,g),$$

δηλαδή

$$K_p^*=K_{pJp}\equiv 0,\ \forall p\in\mathfrak{P}^a(M,J,g),$$

όπου $\mathfrak{X}^a(M,J,g)$ τα αντιολομορφικά ζεύγη διανυσματικών πεδίων και $\mathfrak{P}^a(M,J,g)$ τα αντιολομορφικά επίπεδα (οριζόμενα από αντιολομορφικά ζεύγη διανυσματικών πεδίων) της σχεδόν μιγαδικής πολλαπλότητας (M,J,g). Εξαιτίας της υποθέσεως για τη σημειακή σταθερότητα της *τμηματικής καμπυλότητας, θα ισχύει γενικότερα

$$K_p^*=K_{pJp}\equiv 0,\ \forall p\in\mathfrak{P}(M). \tag{2.7.1}$$

Είναι γνωστό όμως ότι η σημειακή *τμηματική σταθερότητα της καμπυλότητας συνεπάγεται τη σημειακή σταθερότητα της ολομορφικής τμηματικής καμπυλότητας και συγκεκριμένα ισχύει,

$$H_p\equiv f_{K^*},\ \forall p\in\mathfrak{P}^h(M,J,g),$$

όπου $\mathfrak{P}^h(M,J,g)$ τα ολομορφικά επίπεδα (οριζόμενα από ολομορφικά ζεύγη διανυσματικών πεδίων) της σχεδόν μιγαδικής πολλαπλότητας (M,J,g). Από τη σχέση (2.7.1), συνάγουμε λοιπόν την ολομορφική επιπεδότητα της πολλαπλότητας, κι έτσι από το Θεώρημα 2.4Α, καταλήγουμε άμεσα στην ολική επιπεδότητα της πολλαπλότητας. **Ο.Ε.Δ.**

ΘΕΩΡΗΜΑ: 2.8. *Έστω (M,J,g) πολλαπλότητα σχεδόν Hermite 2n-διάστασης,* $2n\geq 4$.

Α. *Σε κάθε (M,g) σύμμορφα επίπεδη πολλαπλότητα, ισχύει η σχέση* $s=(2n-1)s^*$.

Β. *Κάθε (M,g) σύμμορφα επίπεδη, *Ricci-επίπεδη πολλαπλότητα, Ερμητιανού τελεστή Ricci, είναι επίπεδη πολλαπλότητα.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: 2.8Α. Έστω $(e_i)_{i=1}^n$ $(\mathfrak{X}(M),g)$-ορθοκανονική *J*-βάση. Από τον ορισμό του τανυστή *Ricci και το Θεώρημα Weyl (Θεώρημα 1.7), προκύπτει

$$\rho^*(X,Y)=\frac{1}{2(n-1)}\left[\Phi(X,Y)\left(\sum_{i=1}^{2n}\rho_{i\bar{i}}\right)-\left[\sum_{i=1}^{2n}\Phi(e_i,Y)\rho(X,Je_i)+\rho(e_i,JY)\Phi(X,e_i)\right]\right]-$$

$$-\frac{s}{2(n-1)(2n-1)}g(X,Y),\ \forall X,Y\in\mathfrak{X}(M), \tag{2.8A.1}$$

κι ανάγοντας την προηγούμενη σχέση στις πρωταρχικές καμπυλότητες *Ricci, παίρνουμε

$$r_j^* = \frac{1}{2(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{2n} g_{\bar{i}\bar{j}}\rho_{\bar{i}\bar{j}} + g_{\bar{i}\bar{j}}\rho_{\bar{i}\bar{j}}\right) - \frac{s}{2(n-1)(2n-1)},\ \forall j \in \mathbb{N}_1^{2n},$$

δηλαδή

$$r_j^* = \frac{1}{2(n-1)}\left(r_j + r_{\bar{j}}\right) - \frac{s}{2(n-1)(2n-1)},\ \forall j \in \mathbb{N}_1^{2n}. \tag{2.8A.2}$$

Αθροίζοντας, θα έχουμε

$$s^* = \frac{s}{n-1} - \frac{ns}{(n-1)(2n-1)},$$

δηλαδή, $s = (2n-1)s^*$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: 2.8Β. Έστω $(e_i)_{i=1}^n$ $(\mathfrak{X}(M), g)$ -ορθοκανονική *J*-βάση. Ισχύει τότε

$$\sum_{i=1}^{2n}\rho_{i\bar{i}} = \sum_{i=1}^{n}\rho_{i\bar{i}} + \sum_{i=1}^{n}\rho_{\bar{i}\bar{\bar{i}}} = \sum_{i=1}^{n}\rho_{i\bar{i}} - \sum_{i=1}^{n}\rho_{\bar{i}i} \equiv 0,$$

οπότε, η σχέση (2.8Α.1) μπορεί να γραφεί

$$\rho^*(X,Y) = \frac{1}{2(n-1)}\left[\sum_{i=1}^{2n} g(Je_i,Y)\,g(QX,Je_i) + g(e_i,QJY)\,g(JX,e_i)\right] - \frac{s}{2(n-1)(2n-1)}g(X,Y),$$

$$\forall X,Y \in \mathfrak{X}(M),$$

δηλαδή

$$\rho^*(X,Y) = \frac{1}{2(n-1)}\left[g(QX,Y) + g(QJY,JX)\right] - \frac{s}{2(n-1)(2n-1)}g(X,Y),\ \ \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M),$$

κι επομένως

$$\rho^*(X,Y) = \frac{1}{2(n-1)}\left[\rho(X,Y) + \rho(JX,JY)\right] - \frac{s}{2(n-1)(2n-1)}g(X,Y),\ \ \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{2.8B.1}$$

Λόγω της *Ricci-επιπεδότητας, δηλ. $\rho^* \equiv 0$, από το Θεώρημα 2.8Α, προκύπτει η αριθμητική επιπεδότητα, δηλ. $s \equiv 0$. Έτσι, η σχέση (2.8Β.1) σε συνδυασμό με τον Ερμητιανού τελεστή Ricci, δίνει τη Ricci-επιπεδότητα, δηλ. $\rho \equiv 0$, η οποία με βάση το Θεώρημα 1.10Β, δίνει με τη σειρά της τη ζητούμενη ολική επιπεδότητα της πολλαπλότητας. **Ο.Ε.Δ.**

ΘΕΩΡΗΜΑ: 2.9. *Έστω (M,J,g) πολλαπλότητα σχεδόν Hermite 2n-διάστασης,* $2n \geq 4$.

- **Α.** *Κάθε (M,g) σύμμορφα επίπεδη πολλαπλότητα, διάστασης* $2n \geq 6$, *σημειακά σταθερής αντιολομορφικής τμηματικής καμπυλότητας, είναι πραγματική χωρική μορφή.*
- **Β.** *Κάθε (M,g) σύμμορφα επίπεδη, *αριθμητικά επίπεδη πολλαπλότητα, σημειακά σταθερής αντιολομορφικής τμηματικής καμπυλότητας, είναι επίπεδη πολλαπλότητα.*
- **Γ.** *Κάθε (M,g) σύμμορφα επίπεδη πολλαπλότητα, σημειακά σταθερής αντιολομορφικής τμηματικής καμπυλότητας, της οποίας η αριθμητική κι *αριθμητική καμπυλότητα ταυτίζονται απόλυτα, δηλ.* $|s| = |s^*|$, *είναι επίπεδη πολλαπλότητα.*

Δ. *Κάθε (M,g) σύμμορφα επίπεδη πολλαπλότητα para-Kaehler, σημειακά σταθερής αντιολομορφικής τμηματικής καμπυλότητας, είναι επίπεδη πολλαπλότητα.*

Ε. *Κάθε (M,g) σύμμορφα επίπεδη πολλαπλότητα σχεδόν Kaehler, διάστασης $2n \geq 8$, σημειακά σταθερής αντιολομορφικής τμηματικής καμπυλότητας, είναι επίπεδη πολλαπλότητα.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: 2.9Α. Επειδή (M,J,g) πολλαπλότητα σημειακά σταθερής αντιολομορφικής τμηματικής καμπυλότητας, θα διαθέτει ως γνωστόν [F,F,K], Ερμητιανό τελεστή Ricci, οπότε από το Πόρισμα 2.2, θα είναι AH_2-πολλαπλότητα, δηλαδή RK-πολλαπλότητα. Είναι όμως γνωστό [F,F – Theorem A], ότι κάθε RK-πολλαπλότητα, διάστασης $2n \geq 6$, σημειακά σταθερής αντιολομορφικής τμηματικής καμπυλότητας είναι μιγαδική ή πραγματική χωρική μορφή. Επειδή όμως η μιγαδική χωρική μορφή, είναι πολλαπλότητα Kaehler [T1], η πολλαπλότητα θα είναι τελικά επίπεδη. Άρα λοιπόν, η πολλαπλότητα απόμένει τελικά να είναι πραγματική χωρική μορφή.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: 2.9Β. Από το Θεώρημα 2.8Α, λαμβάνουμε την αριθμητική και *αριθμητική επιπεδότητα της πολλαπλότητας. Ισχύει όμως [F,F,K], για τις πολλαπλότητες σημειακά σταθερής αντι-ολομορφικής τμηματικής καμπυλότητας, η σχέση $8n(n+1)(n-1)f_A = (2n+1)s - 3s^*$ όπου

$$A_p \equiv f_A,\ \forall p \in \mathfrak{P}^a(M,J,g),\ f_A \in \mathfrak{F}(M).$$

Έτσι λοιπόν, συμπεραίνουμε την αντιολομορφική επιπεδότητα της πολλαπλότητας, κι επομένως η σχέση

$$H_p = r(X) - 2(n-1)f_A,\ \forall X \in p,\ \forall p \in \mathfrak{P}^h(M,J,g),$$

που προκύπτει από τη βασική σχέση των πολλαπλοτήτων σημειακά σταθερής αντιολομορφικής τμηματικής καμπυλότητας [G], γίνεται

$$H_p = r(X),\ \forall X \in p,\ \forall p \in \mathfrak{P}^h(M,J,g). \tag{2.9B.1}$$

Από το Θεώρημα Weyl (Θεώρημα 1.7) και λόγω της *αριθμητικής επιπεδότητας, έχουμε τη σχέση

$$R(X,Y,Z,W) = \frac{1}{2(n-1)}\left[g(X,Z)\rho(Y,W) - g(Y,Z)\rho(X,W) + \rho(X,Z)g(Y,W) - \rho(Y,Z)\rho(X,W)\right],$$

$$\forall X,Y,Z,W \in \mathfrak{X}(M),$$

από όπου

$$H_p = \frac{1}{n-1} r(X),\ \forall X \in p,\ \forall p \in \mathfrak{P}^h(M,J,g),$$

κι άρα από την (2.9Β.1) συμπεραίνουμε την ολομορφική επιπεδότητα, η οποία, βάση του Θεωρήματος 2.4Α, οδηγεί τελικά στην ολική επιπεδότητα της πολλαπλότητας.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: 2.9Γ. Από το Θεώρημα 2.8Α, λαμβάνουμε την αριθμητική και *αριθμητική επι-πεδότητα της πολλαπλότητας, οπότε με άμεση χρήση του Θεωρήματος 2.9Β, συνάγουμε τελικά την ολική επιπεδότητα της πολλαπλότητας.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: 2.9Δ. Άμεσο αποτέλεσμα από το Θεώρημα 2.9Γ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: 2.9Ε. Από γνωστό αποτέλεσμα, κάθε (M,J,g) πολλαπλότητα σχεδόν Kaehler, διάστασης $2n \geq 8$, σημειακά σταθερής αντιολομορφικής τμηματικής καμπυλότητας, είναι μιγαδική χωρική μορφή. Όμως, από το Θεώρημα 2.9Δ, συμπεραίνουμε άμεσα τη ζητούμενη επιπεδότητα της πολλαπλότητας. **Ο.Ε.Δ.**

ΘΕΩΡΗΜΑ: 2.10. *Έστω (M,J,g) πολλαπλότητα σχεδόν Hermite 2n-διάστασης,* $2n \geq 4$.

Α. *Κάθε (M,g) σύμμορφα επίπεδη πολλαπλότητα, η οποία έχει απόλυτα φραγμένη την ολομορφική τμηματική καμπυλότητα, δηλ.* $\left|H_p\right| \leq f_H, \forall p \in \mathfrak{P}(M), \quad f_H \in \mathfrak{F}(M)$ *, θα έχει απόλυτα φραγμένες και τις υπόλοιπες καμπυλότητες, κατά τρόπο ώστε*

$$\left|s\right| \leq 2n(2n-1)f_H \,, \; \left|s^*\right| \leq 2nf_H \,,$$

$$\left|r + r \circ J\right| \leq 2(2n-1)f_H \,,$$

$$\left|K_{pq} + K_{JpJq}\right| \leq 4\frac{7n-3}{n-1} f_H, \quad \forall p,q \in \mathfrak{P}(M) \,,$$

$$\left|H_{pq}\right| \leq 2\frac{7n-3}{n-1} f_H, \quad \forall p,q \in \mathfrak{P}^h(M,J,g) \,,$$

$$\left|K_p + K_{Jp}\right| \leq 2\frac{7n-3}{n-1} f_H, \quad \forall p \in \mathfrak{P}(M) \,,$$

$$\left|K_p^*\right| \leq \frac{f_H}{n-1}\cos\delta_p\left[n\left(4+\cos\delta_p\right)-2\right] \; \leq \frac{5n-2}{n-1} f_H, \quad \forall p \in \mathfrak{P}(M) \,.$$

όπου δ_p η ολομορφική απόκλιση του επιπέδου $p \in \mathfrak{P}(M)$, δηλ.

$$\delta_p = \measuredangle(X, JY), \; (X,Y) \in B_p \quad \Leftrightarrow \quad \cos\delta_p = \frac{\Phi(X,Y)}{\left\|X\right\|^2\left\|Y\right\|^2}, \; (X,Y) \in B_p \,.$$

Β. *Κάθε (M,g) σύμμορφα επίπεδη πολλαπλότητα, η οποία έχει απόλυτα φραγμένη την ολομορφική τμηματική καμπυλότητα, δηλ.* $\left|H_p\right| \leq f_H, \forall p \in \mathfrak{P}(M), \quad f_H \in \mathfrak{F}(M)$ *κι επιπλέον έχει μη-αρνητική την καμπυλότητα Ricci, θα έχει απόλυτα φραγμένες και τις (δι)τμηματικές καμπυλότητες, κατά τρόπο ώστε*

$$\left|K_{pq}\right| \leq 4\frac{7n-3}{n-1} f_H, \quad \forall p,q \in \mathfrak{P}(M) \,,$$

$$\left|K_p\right| \leq 2\frac{7n-3}{n-1} f_H, \quad \forall p \in \mathfrak{P}(M) \,,$$

$$\left|K_p^*\right| \leq \frac{f_H}{2(n-1)}\cos\delta_p\left[n\left(4+\cos\delta_p\right)-2\right] \; \leq \frac{5n-2}{2(n-1)} f_H, \quad \forall p \in \mathfrak{P}(M) \,.$$

Γ. *Κάθε (M,g) σύμμορφα επίπεδη πολλαπλότητα Ερμητιανού τελεστή Ricci, η οποία έχει απόλυτα φραγμένη την ολομορφική τμηματική καμπυλότητα, δηλ.* $\left|H_p\right| \leq f_H, \forall p \in \mathfrak{P}(M), \quad f_H \in \mathfrak{F}(M)$ *, θα έχει απόλυτα φραγμένες και τις καμπυλότητες, κατά* *τρόπο ώστε*

$$|r| \le (2n-1)f_H \,,$$

$$|K_{pq}| \le 2\frac{7n-3}{n-1} f_H \,, \ \ \forall p \in \mathfrak{P}(M) \,,$$

$$|K_p| \le \frac{7n-3}{n-1} f_H \,, \ \ \forall p \in \mathfrak{P}(M) \,.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: 2.10Α. Από το Θεώρημα Weyl (Θεώρημα 1.7) και τον ορισμό της ολομορφικής τμηματικής καμπυλότητας, θα έχουμε

$$H(X)\|X\|^2 = \frac{1}{2(n-1)}\left[\rho(X,X)+\rho(JX,JX)\right]\|X\|^2 - \frac{s}{2(n-1)(2n-1)}\|X\|^2 \,, \ \forall X \in \mathfrak{X}(M) \,,$$

ή αλλιώς

$$\rho(X,X)+\rho(JX,JX) = \left[2(n-1)H(X)+\frac{s}{2n-1}\right]\|X\|^2 \,, \ \forall X \in \mathfrak{X}(M) \,.$$

Παίρνοντας τις απόλυτες τιμές κι εφαρμόζοντας την υπόθεση του απόλυτου φράγματος, δηλαδή

$$\left|\rho(X,X)+\rho(JX,JX)\right| \le \left[2(n-1)f_H + \frac{|s|}{2n-1}\right]\|X\|^2 \,, \ \forall X \in \mathfrak{X}(M) \,, \tag{2.10A.1}$$

κι αθροίζοντας για να πάρουμε την αριθμητική καμπυλότητα, έχουμε

$$|s| \le 2n(n-1)f_H + \frac{n|s|}{2n-1} \,,$$

οπότε απλοποιώντας, έχουμε τελικά

$$|s| \le 2n(2n-1)f_H \,. \tag{2.10A.2}$$

Από τη (2.10A.2), με βάση το Θεώρημα 2.8Α, άμεσα προκύπτει $|s^*| \le 2nf_H$. Από την (2.10A.1) και τη (2.10A.2) συνεπάγεται η ανισότητα για τις καμπυλότητες Ricci

$$|r + r\circ J| \le 2(2n-1)f_H \,. \tag{2.10A.3}$$

Ο τανυστής Ricci κι η καμπυλότητα Ricci συνδέονται με τη σχέση

$$2\rho(X,Y) = r(X+Y)\|X+Y\|^2 - r(X)\|X\|^2 - r(Y)\|Y\|^2 \,, \ \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M) \,,$$

από την οποία συνεπάγεται

$$\begin{aligned} 2\rho(X,Y)+2\rho(JX,JY) &= \left[r(X+Y)+r(JX+JY)\right]\|X+Y\|^2 - \\ &-\left[r(X)+r(JX)\right]\|X\|^2 - \left[r(Y)+r(JY)\right]\|Y\|^2 \,, \ \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M) \,, \end{aligned}$$

και παίρνοντας τις απόλυτες τιμές, εφαρμόζουμε την ανισότητα (2.10A.3), οπότε έχουμε

$$\left|\rho\left(X,Y\right)+\rho\left(JX,JY\right)\right|\leq 2(2n-1)f_H\left[\left\|X\right\|^2+\left\|Y\right\|^2+g\left(X,Y\right)\right],\ \forall X,Y\in\mathfrak{X}(M)\,. \tag{2.10A.4}$$

Από το Θεώρημα Weyl (Θεώρημα 1.7), έχουμε τη σχέση

$$R\left(X,Y,Z,W\right)=\frac{1}{2(n-1)}\left[g\left(X,Z\right)\rho\left(Y,W\right)-g\left(Y,Z\right)\rho\left(X,W\right)+\rho\left(X,Z\right)g\left(Y,W\right)-\rho\left(Y,Z\right)\rho\left(X,W\right)\right]-$$

$$-\frac{s}{2(n-1)(2n-1)}\left[g\left(X,Z\right)g\left(Y,W\right)-g\left(Y,Z\right)g\left(X,W\right)\right],\ \forall X,Y,Z,W\in\mathfrak{X}(M)\,,$$

και προσθέτοντας σ' αυτή, την αντίστοιχη σχέση για τα J-διανυσματικά πεδία, παίρνοντας τι απόλυτες τιμές, κι εφαρμόζοντας τις ανισότητες (2.10A.2) και (2.10A.4), συνεπάγεται

$$\begin{aligned}&\left|R\left(X,Y,Z,W\right)+R\left(JX,JY,JZ,JW\right)\right|\leq\frac{2n-1}{n-1}f_H\Big[\ \left|g\left(X,Z\right)\right|\left[\left\|Y\right\|^2+\left\|W\right\|^2+g\left(Y,W\right)\right]\\&+\left|g\left(Y,Z\right)\right|\left[\left\|X\right\|^2+\left\|W\right\|^2+g\left(X,W\right)\right]+\left|g\left(Y,W\right)\right|\left[\left\|X\right\|^2+\left\|Z\right\|^2+g\left(X,Z\right)\right]+\\&+\left|g\left(X,W\right)\right|\left[\left\|Y\right\|^2+\left\|Z\right\|^2+g\left(Y,Z\right)\right]\Big]+\\&+\frac{2n}{n-1}f_H\Big[\ \left|g\left(X,Z\right)g\left(Y,W\right)\right|+\left|g\left(Y,Z\right)g\left(X,W\right)\right|\ \Big],\ \forall X,Y,Z,W\in\mathfrak{X}(M)\,.\end{aligned} \tag{2.10A.5}$$

Από την παραπάνω γενική σχέση, και καθώς ισχύει

$$g^2\left(X,Y\right)\leq\left\|X\right\|^2\left\|Y\right\|^2,\ \forall X,Y\in\mathfrak{X}(M)\,,$$

παίρνουμε

$$\left|R\left(X,Y,Z,W\right)+R\left(JX,JY,JZ,JW\right)\right|\leq 12\frac{2n-1}{n-1}f_H+\frac{4n}{n-1}f_H,\ \forall X,Y,Z,W\in\mathfrak{X}_1(M,g)\,,$$

δηλαδή

$$\left|K_{pq}+K_{JpJq}\right|\leq 4\frac{7n-3}{n-1}f_H,\ \forall p\in\mathfrak{P}(M)\,,$$

από όπου παίρνουμε και τη σχέση

$$\left|H_{pq}\right|\leq 2\frac{7n-3}{n-1}f_H,\ \forall p,q\in\mathfrak{P}^h(M,J,g)\,.$$

Από τη σχέση (2.10A.5), θα έχουμε επίσης

$$\left|R\left(X,Y,X,Y\right)+R\left(JX,JY,JX,JY\right)\right|\leq 6\frac{2n-1}{n-1}f_H+\frac{2n}{n-1}f_H,\ \forall\left(X,Y\right),\left(Z,W\right)\in\mathfrak{X}_1^{\perp}(M,g)\,,$$

όπου $\mathfrak{X}_1^{\perp}(M,g)$ τα ορθομοναδιαία ζεύγη πολλαπλότητας Riemann (M,g), δηλαδή

$$\left|K_p+K_{Jp}\right|\leq 2\frac{7n-3}{n-1}f_H,\ \forall p\in\mathfrak{P}(M)\,.$$

Από τη σχέση (2.10A.5), θα έχουμε τέλος

$$\begin{aligned}&\left|R\left(X,Y,JX,JY\right)+R\left(JX,JY,X,Y\right)\right|\leq\\&\quad\frac{2n-1}{n-1}f_H\left(\left|\Phi\left(X,Y\right)\right|\left[\|X\|^2+\|Y\|^2+\Phi\left(X,Y\right)\right]+\left|\Phi\left(X,Y\right)\right|\left[\|Y\|^2+\|Y\|^2-\Phi\left(X,Y\right)\right]\right)\\&\quad+\frac{2n}{n-1}f_H\Phi^2\left(X,Y\right),\ \forall X,Y\in\mathfrak{X}(M)\,,\end{aligned}$$

οπότε

$$\left|K_{pJp}\right|\leq\frac{f_H}{n-1}\cos\delta_p\left[n\left(4+\cos\delta_p\right)-2\right]\ \leq\frac{5n-2}{n-1}f_H,\ \forall p\in\mathfrak{P}(M)\,.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: 2.10Β. Από το Θεώρημα 2.10Α, η ανισότητα

$$\left|r+r\circ J\right|\leq 2(2n-1)f_H\,,$$

λόγω της υποθέσεως της μη-αρνητικότητας της καμπυλότητας Ricci, μπορεί να γραφεί

$$0\leq r\leq 2(2n-1)f_H\,. \tag{2.10B.1}$$

Ο τανυστής Ricci κι η καμπυλότητα Ricci συνδέονται, ως γνωστόν, με τη σχέση

$$2\rho\left(X,Y\right)=r(X+Y)\|X+Y\|^2-r(X)\|X\|^2-r(Y)\|Y\|^2,\ \forall X,Y\in\mathfrak{X}(M)\,,$$

οπότε, λόγω ξανά της θετικότητας της καμπυλότητας Ricci και της ανισότητας (2.10Β.1), ο τανυστής Ricci φράσσεται απόλυτα κατά τρόπο ώστε

$$\left|\rho\left(X,Y\right)\right|\leq 2(2n-1)f_H\left[\|X\|^2\ +\|Y\|^2+g\left(X,Y\right)\right],\ \forall X,Y\in\mathfrak{X}(M)\,. \tag{2.10B.2}$$

Από το Θεώρημα Weyl (Θεώρημα 1.7), έχουμε τη γνωστή σχέση

$$\begin{aligned}R\left(X,Y,Z,W\right)=&\ \frac{1}{2(n-1)}\left[g\left(X,Z\right)\rho\left(Y,W\right)-g\left(Y,Z\right)\rho\left(X,W\right)+\rho\left(X,Z\right)g\left(Y,W\right)-\rho\left(Y,Z\right)\rho\left(X,W\right)\right]\\&-\frac{s}{2(n-1)(2n-1)}\left[g\left(X,Z\right)g\left(Y,W\right)-g\left(Y,Z\right)g\left(X,W\right)\right],\ \forall X,Y,Z,W\in\mathrm{X}(M)\,,\end{aligned}$$

και παίρνοντας στην παραπάνω σχέση τις απόλυτες τιμές, κι εφαρμόζοντας την ανισότητα (2.10Β.2) καθώς και την ανισότητα $|s|\leq 2n(2\mathrm{n}-1)f_H$ από το Θεώρημα 2.10Α, συνεπάγεται

$$\begin{aligned}\left|R\left(X,Y,Z,W\right)\right|\leq&\ \frac{2n-1}{n-1}f_H\left[\left|g\left(X,Z\right)\right|\left[\|Y\|^2\ +\|W\|^2+g\left(Y,W\right)\right]+\left|g\left(Y,Z\right)\right|\left[\|X\|^2\ +\|W\|^2+g\left(X,W\right)\right]\right.\\&\left.+\left|g\left(Y,W\right)\right|\left[\|X\|^2\ +\|Z\|^2+g\left(X,Z\right)\right]+\left|g\left(X,W\right)\right|\left[\|Y\|^2\ +\|Z\|^2+g\left(Y,Z\right)\right]\right]\\&+\frac{2n}{n-1}f_H\left[\ \left|g\left(X,Z\right)g\left(Y,W\right)\right|+\left|g\left(Y,Z\right)g\left(X,W\right)\right|\right],\ \forall X,Y,Z,W\in\mathfrak{X}(M)\,,\end{aligned}$$

κι έτσι από την παραπάνω γενική σχέση, παρόμοια με την απόδειξη του Θεωρήματος 2.10Α, παίρνουμε τελικά τις ζητούμενες ανισότητες των καμπυλοτήτων.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: 2.10Γ. Από το Θεώρημα 2.10Α και λόγω του Ερμητιανού τελεστή Ricci, οι ζητούμενες ανισότητες συνεπάγονται άμεσα. **Ο.Ε.Δ.**

ΘΕΩΡΗΜΑ: 2.11. *Έστω (M,J,g) πολλαπλότητα σχεδόν Hermite 2n-διάστασης,* $2n \geq 4$. *Κάθε (M,J,g) σύμμορφα επίπεδη πολλαπλότητα, της οποίας η καμπυλότητα Ricci φράσσεται απόλυτα, δηλ.* $|r| \leq f_r$, $f_r \in \mathfrak{F}(M)$, *θα φράσσει επίσης απόλυτα και τις (δι)τμηματικές καμπυλότητες, κατά τρόπο ώστε*

$$\left|K_{pq}\right| \leq 2\frac{7n-3}{(n-1)(2n-1)} f_r, \ \ \forall p,q \in \mathfrak{P}(M),$$

$$\left|K_p\right| \leq \frac{7n-3}{(n-1)(2n-1)} f_r, \ \ \forall p \in \mathfrak{P}(M),$$

$$\left|H_p\right| \leq \frac{3n-1}{(n-1)(2n-1)} f_r, \ \ \forall p,q \in \mathfrak{P}^h(M,J,g),$$

$$\left|K_p^*\right| \leq \frac{f_r}{n-1}\cos\delta_p\left[\frac{n}{2n-1}\cos\delta_p + 1\right] \leq \frac{3n-1}{(n-1)(2n-1)} f_r, \ \ \forall p \in \mathfrak{P}(M).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Από το Θεώρημα Weyl (Θεώρημα 1.7) και τον ορισμό της ολομορφικής τμηματικής καμπυλότητας, έχουμε

$$H(X) = \frac{1}{2(n-1)}\left[\rho(X,X) + \rho(JX,JX)\right] - \frac{s}{2(n-1)(2n-1)}, \ \ \forall X \in \mathfrak{X}_1(\mathrm{M}),$$

οπότε παίρνοντας τις απόλυτες τιμές, κι εξαιτίας του απόλυτα φραγμένου τανυστή Ricci, θα ισχύει η ανισότητα

$$\left|H_p\right| \leq \frac{1}{n-1} f_r + \frac{|s|}{2(n-1)(2n-1)}, \ \ \forall p \in \mathfrak{P}(M). \tag{2.11.1}$$

Από την υπόθεση του απόλυτου φράγματος της καμπυλότητας Ricci, συνεπάγεται άμεσα ότι $|s| \leq 2nf_r$ κι έτσι από την (2.11.1) θα φράσσεται τελικά απόλυτα κι η ολομορφική τμηματική καμπυλότητα, κατά τρόπο ώστε

$$\left|H_p\right| \leq \frac{3n-1}{(n-1)(2n-1)} f_r, \ \ \forall p \in \mathfrak{P}(M).$$

Ο τανυστής Ricci κι η καμπυλότητα Ricci συνδέονται, ως γνωστόν, με τη σχέση

$$2\rho(X,Y) = r(X+Y)\|X+Y\|^2 - r(X)\|X\|^2 - r(Y)\|Y\|^2, \ \ \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M),$$

οπότε, λόγω της υποθέσεως για την καμπυλότητα Ricci, ο τανυστής Ricci θα φράσσεται απόλυτα κατά τρόπο ώστε

$$\left|\rho(X,Y)\right| \leq f_r\left[\|X\|^2 + \|Y\|^2 + g(X,Y)\right], \ \ \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{2.11.2}$$

Από το Θεώρημα Weyl (Θεώρημα 1.7), έχουμε τη γνωστή σχέση

$$R(X,Y,Z,W) = -\frac{s}{2(n-1)(2n-1)}\left[g(X,Z)g(Y,W) - g(Y,Z)g(X,W)\right], \ \ \forall X,Y,Z,W \in \mathfrak{X}(M),$$

και παίρνοντας τις απόλυτες τιμές, κι εφαρμόζοντας την ανισότητα (2.11.2) καθώς και την ανισότητα $|s| \le 2nf_r$, συνεπάγεται

$$\begin{aligned}\left|R(X,Y,Z,W)\right| \le \frac{f_r}{2(n-1)}\Big[&\left|g(X,Z)\right|\left[\|Y\|^2+\|W\|^2+g(Y,W)\right]+\left|g(Y,Z)\right|\left[\|X\|^2+\|W\|^2+g(X,W)\right]\\ &+\left|g(Y,W)\right|\left[\|X\|^2+\|Z\|^2+g(X,Z)\right]+\left|g(X,W)\right|\left[\|Y\|^2+\|Z\|^2+g(Y,Z)\right]\Big]\\ &+\frac{n}{(n-1)(2n-1)}f_r\left[\left|g(X,Z)g(Y,W)\right|+\left|g(Y,Z)g(X,W)\right|\right],\ \forall X,Y,Z,W\in\mathfrak{X}(M),\end{aligned}$$

κι έτσι από την παραπάνω γενική σχέση, παρόμοια με την απόδειξη του Θεωρήματος 2.10Α, παίρνουμε τελικά τις ζητούμενες ανισότητες των καμπυλοτήτων. **Ο.Ε.Δ.**

Αρθρογραφία – Βιβλιογραφία

[A,M] **ADATI T, MIYAZAWA T.:** *"On conformally symmetric spaces"*, Tensor. N. S., vol. 18 (1967), pp. 335-342.

[A,D,M] **APOSTOLOV V, DAVIDOV J, MUŠKAROV O.:** *"Compact self-dual Hermitian surfaces"*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 348, no. 8 (1996), pp. 3051-3063.

[C] **CALVARUSO G.:** *"Four-dimensional conformally flat Riemannian manifolds"*, Note di. Mat., vol. 15, no. 2 (1996), pp. 153-159.

[CH] **CHEN B.Y.:** *"Riemannian submanifolds"*, Handbook of Differential Geometry, vol. I (2000), Elsevier Science B.V., pp. 187-418.

[D] **DERDZINSKI A.:** *"Self-dual Kähler manifolds and Einstein manifolds of dimension four"*, Comp. Math., vol. 49 (1983), pp. 405-433.

[D,M] **DAVIDOV J., MUŠKAROV O.:** *"Twistor spaces with Hermitian Ricci tensor"*, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 109, no 4 (1990), pp. 1115-1120.

[D,R] **DERDZINSKI A., ROTER W.:** *"On conformally symmetric manifolds with metrics of indices 0 and 1"*, Tensor N. S., vol. 31 (1977), pp. 255-259.

[F,F] **FALCITELLI M., FARINOLA A.:** *"Six-dimensional almost-Kaehler manifolds with pointwise constant antiholomorphic sectional curvature"*, Riv. Mat. Univ. Parma, vol. 6, no 5 (1997), pp. 143-156.

[F,F,K] **FALCITELLI M., FARINOLA A., KASSABOV O.T.:** *"Almost Kaehler manifolds whose antiholomorphic sectional curvature is pointwise constant"*, Rendiconti. di Mat. Serie VII, vol. 18 (1998), pp. 151-166.

[G] **GANCHEV G.:** *"On Bochner curvature tensor in almost Hermitian manifolds"*, Pliska Stud. Math. Bulgar., vol. 9 (1987), pp. 33-43.

[GR] **GRAY A.:** *"Curvature identities for almost Hermitian manifolds"*, Tôhoku Math. J., vol. 28 (1976), pp. 601-612.

[I] **ITOH M.:** *"Self-duality of Kähler surfaces"*, Comp. Math., vol. 51 (1984), pp. 265-273.

[M] **MYERS S. B.:** *"Riemannian manifolds with positive mean curvature"*, Duke Math. J., vol. 8 (1941), pp. 401-404.

[O] **OGURO T.:** *"On almost Kaehler manifolds of constant curvature"*, Tsukuba J. Math., vol. 21, no 1 (1997), pp. 199-206.

[OL] **OLSZAK Z.:** *"Curvature properties of four-dimensional Hermitian manifolds"*, Ann. Soc. Math. Polonae, vol. 27 (1987), pp. 169-179.

[S] **SATO T.:** *"On some almost Hermitian manifolds with constant holomorphic sectional curva-ture"*, Kyungpook Math. J., vol. 29, no 1 (1989), pp. 11-25.

[T_1] **TANNO S.:** *"4-dimensional conformally flat Kähler manifolds"*, Tôhoku Math. J., vol. 24 (1972), pp. 501-504.

[T_2] **TANNO S.:** *"Curvature tensor and covariant derivatives"*, Annali di Mat. Pura et Appl., vol. 96 (1973), pp. 233-241.

[T_3] **TANNO S.:** *"Compact conformally flat Riemannian manifolds"*, Diff. Geom., vol. 8 (1973), pp. 71-74.

[K,K,J] **UN KYU KIM, IN-BAE KIM, JAE-BOK JUN:** *"On self-dual almost Hermitian 4-manifolds"*, Nihonkai Math. J., vol. 3 (1992), pp. 163-176.

[Y,K] **YANO K., KON M.:** *"Structures on manifolds"*, Series in Pure Mathematics, vol. 3, World Scientific.