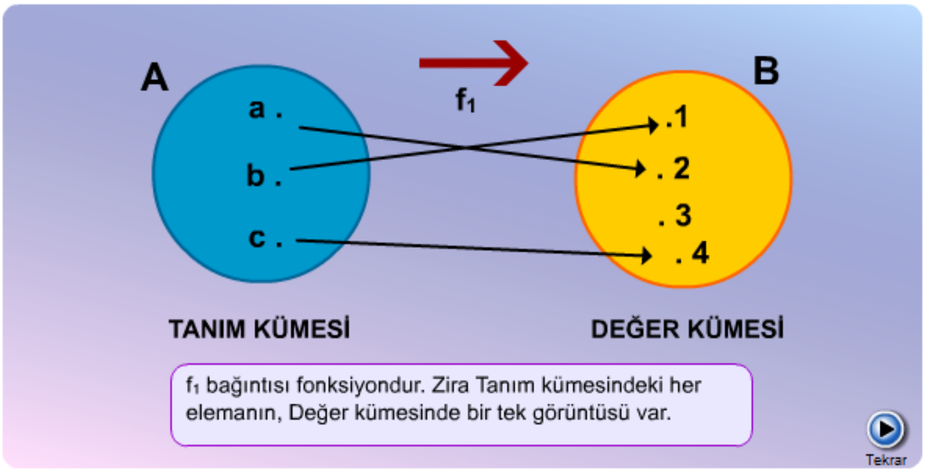
7.2 Fonksiyon ve Fonksiyon Tanımları (I)

Tanım kümesindeki her elemanın değer kümesinde bir ve yalnız bir görüntüsü varsa, tanım kümesinden değer kümesine olan bağıntıya ***fonksiyon*** denir.

Fonksiyonu " f " ile gösterirsek y = f (x) eşitliğinde x'e bağımsız değişken y'ye ise bağlı değişken adı verilir. Fonksiyon tek bir değişkene bağlı ise tek değişkenli, birden çok değişkene bağlı ise çok değişkenli fonksiyon adını alır. y = f (x) tek değişkenli, z = f(x,y,t,....) çok değişkenli fonksiyondur.

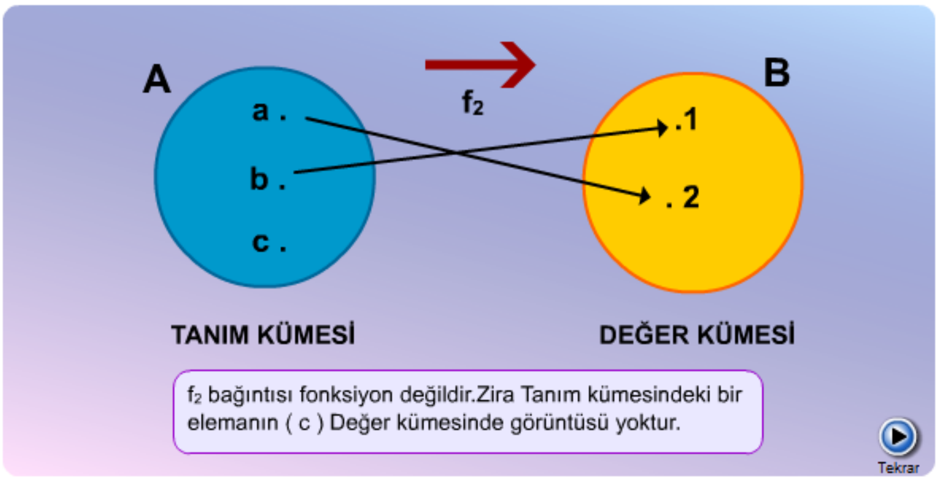


7.2.1 Fonksiyon ve Fonksiyon Tanımları (II)

Aşağıdaki şekilde f_2 bağıntısı bir fonksiyon değildir. Tanım kümesindeki bir elemanın, değer kümesinde görüntüsü yoktur.

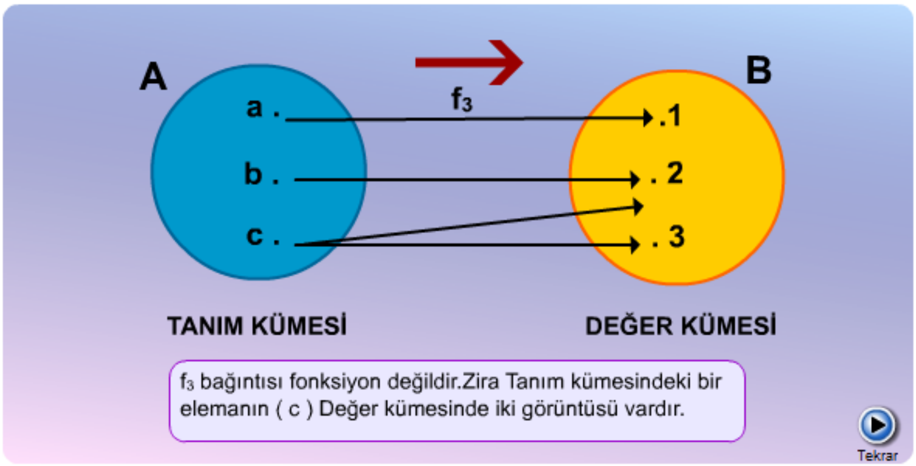
- $f_2(a)=2$
- $f_2(b)=1$

Fakat f_2 fonksiyonu görüntüsündeki "c" elemanını değer kümesinde hiç bir elemana götürememektedir.



7.2.2 Fonksiyon ve Fonksiyon Tanımları (III)

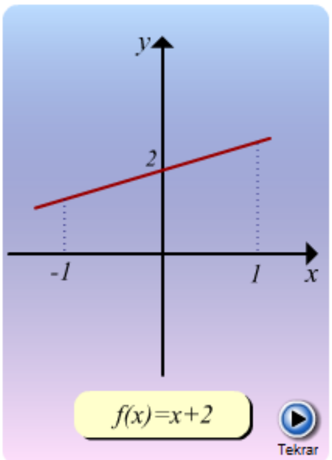
Aşağıdaki f_3 bağıntısını ifade eden şekilde tanım kümesindeki her elemana karşı değer kümesinde bir eleman bulunmaktadır. Fakat f_3 bağıntısı bir fonksiyon değildir. Çünkü tanım kümesindeki "c" elemanına değer kümesinde "2" ve "3" elemanları karşılık gelmektedir. Bu da fonksiyonun tanımına ters düşmektedir. Dolayısıyla f_3 bağıntısı fonksiyon değildir.



7.2.3 Fonksiyon Grafiği (I)

y = f(x) fonksiyonunun grafiği, bir dik koordinat sisteminde, x bağımsız değişkenin tanım aralığı içinde aldığı f(x) değerleriyle oluşturulan (x ,y) sayı çiftlerinin işaretlenmesiyle elde edilir.

(x,y) sayı çifleri bulunup dik koordinat düzleminde işaretlendikten sonra bir eğriyle birleştirilir. Bu eğri fonksiyonun grafiğini oluşturur.

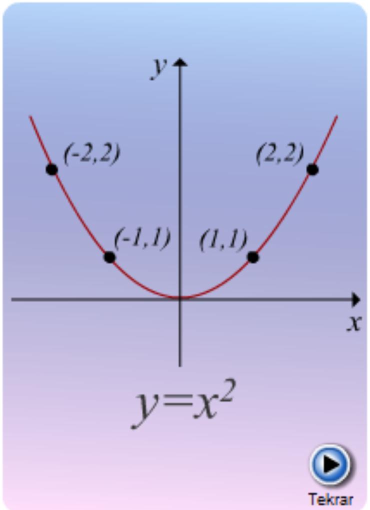


7.2.4 Fonksiyon Grafiği (II)

Örneğin, [-3 , 3] aralığında tanımlı y = x^2 fonksiyonunun grafiğini çizmek için önce (x,y) sayı çiftleri belirlenir.

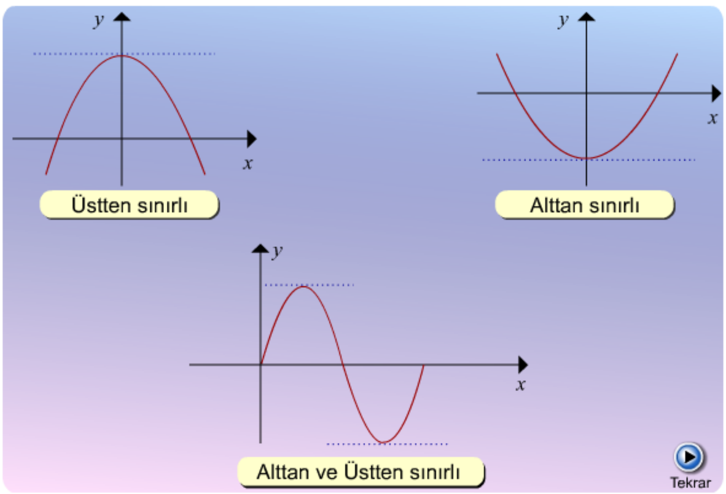
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = f(x) = x^2$	9	4	1	0	1	4	9

Bu sayı çiftleri bir dik koordinat sisteminde işaretlenerek fonksiyonun grafiği elde edilir.



7.2.5 Sınırlı Fonksiyonlar (I)

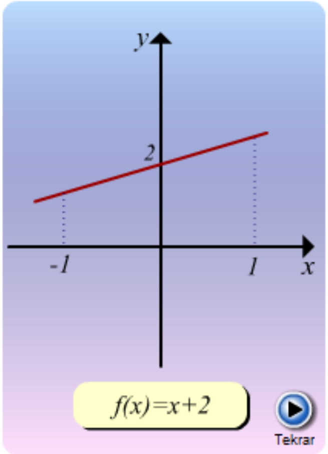
Tanım aralığı içindeki her x elemanı için $f(x) \leq U$ olacak şekilde bir $U \in R$ varsa, f(x) fonksiyonuna bu aralık içinde ***üstten sınırlıdır*** denir. $U \in R$ sayısına da ***üst sınır*** adı verilir. Tanım aralığı içindeki her x elemanı için $f(x) \geq A$ olacak şekilde bir $A \in R$ varsa, f(x) fonksiyonuna bu aralık içinde ***alttan sınırlıdır*** denir. A $\in$ R sayısına ise ***alt sınır*** denir. Bu aralık içindeki her x elemanı için A $\leq$ f(x) $\leq$ U olacak şekilde A ve U $\in$ R varsa, f(x) fonksiyonuna ***sınırlı*** veya ***alttan ve üstten sınırlı*** denir.



7.2.6 Sınırlı Fonksiyonlar (II)

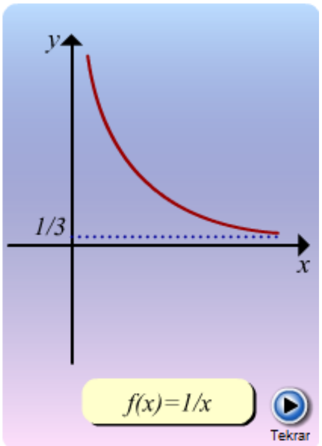
Örnek1 :

$y = f(x) = x + 2$ fonksiyonu $[-1 , 1]$ aralığında sınırlıdır. Üst sınır $U = 3$, alt sınır ise $A = 1$ dir.



Örnek2 :

$y = f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu $(0 , 3)$ aralığında üstten sınırlı değildir. Zira x'i sıfıra ne kadar yakın seçersek f(x)'i o kadar büyük bulabiliriz. Dolayısıyla bir üst sınır yoktur. Alt sınır ise $A = \frac{1}{3}$ dür.



7.2.7 Monoton Fonksiyonlar

Bir aralığın herhangi iki noktası x_1 ve x_2 olduğuna göre; $x_1 < x_2$ oldukça $f(x_1) \leq f(x_2)$ ise f(x) fonksiyonuna bu aralık içinde ***monoton artan fonksiyon*** denir. $f(x) < f(x_2)$ ise fonksiyon ***kesin olarak artandır***.

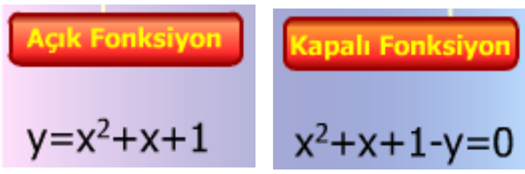
Eğer $x_1 < x_2$ oldukça $f(x_1) \geq f(x_2)$ ise fonksiyon ***monoton azalandır*** $f(x_1) > f(x_2)$ ise ***kesin olarak azalandır***.

Kesin olarak artan veya azalan bir fonksiyon aynı zamanda monoton artan veya monoton azalandır.

Bir fonksiyonun monoton artan veya azalan bir fonksiyon olması için kesin olarak artan veya azalan bir fonksiyon olması yeter şarttır.

7.2.8 Açık Fonksiyon-Kapalı Fonksiyon

Bağlı değişken y ile bağımsız değişken x arasındaki ilişki y'ye göre çözülmüşse fonksiyona ***açık fonksiyon***, aksi halde ***kapalı fonksiyon*** denir.



7.2.9 Ters Fonksiyon

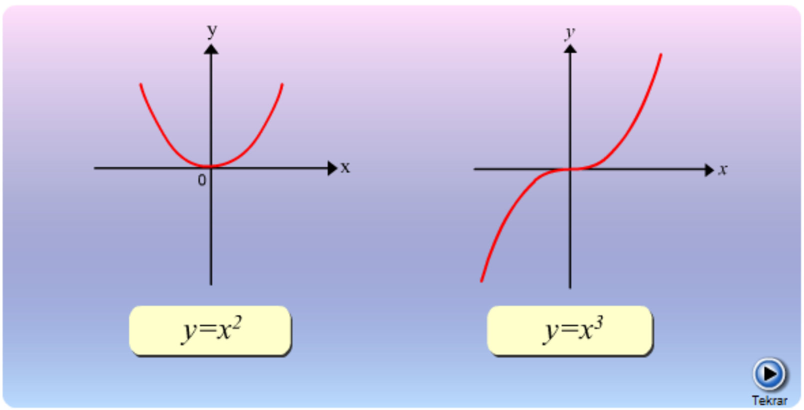
Eğer x'in f(x) şeklinde gösterilen bir fonksiyonu y ise x'de y'nin $x = f^{-1}(y)$ şeklinde gösterilen bir fonksiyonu olarak tanımlanabilir. Bu fonksiyona ***ters fonksiyon*** denir.

Fonksiyon	Ters Fonksiyonu
$f(x)=x+3$	$f^{-1}(x)=x-3$
$f(x)=\sin(x)$	$f^{-1}(x)=\arcsin(x)$
$f(x)=\log_a(x)$	$f^{-1}(x)=a^x$

7.2.10 Tek Fonksiyon – Çift Fonksiyon

[a,b] kapalı aralığında tanımlı bir y= f(x) fonksiyonu x değişkeninin mutlak değerce eşit (simetrik) pozitif ve negatif değerleri için aynı büyüklüklere sahipse yani, f(x) = f(-x) ise bu fonksiyona ***çift fonksiyon*** denir. Çift fonksiyonda simetri ekseni OY eksenidir. y= f(x) fonksiyonu x değişkeninin mutlak değerce eşit, simetrik değerleri için aynı fakat işareti farklı değerler alıyorsa yani, f(x) = -f(-x) ise bu fonksiyona ***tek fonksiyon*** denir. Tek fonksiyonun simetri merkezi koordinat eksenlerinin başlangıç noktasıdır.

Örneğin $y = x^2$ fonksiyonu çift fonksiyon , $y = x^3$ fonksiyonu ise tek fonksiyondur ve grafikleri aşağıdaki şekildeki gibidir.



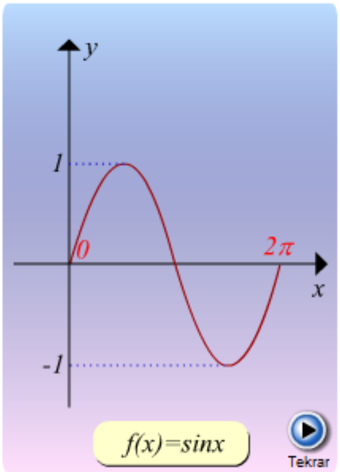
7.2.11 Periyodik Fonksiyon

y = f(x) fonksiyonu, x değişkenin birbirinden belirli bir uzaklık kadar farklı değerleri için aynı büyüklükleri alıyorsa bu fonksiyona ***periyodik fonksiyon*** denir. Fonksiyonun periyodu T ise apsisleri x ve x +T olan noktaların ordinatları arasında f(x) = f(x+T) bağıntısı vardır.

Örneğin :

f (x) = sin (x) periyodik fonksiyondur. Çünkü f(x) = sin (x) = sin (x+2 π) dir.

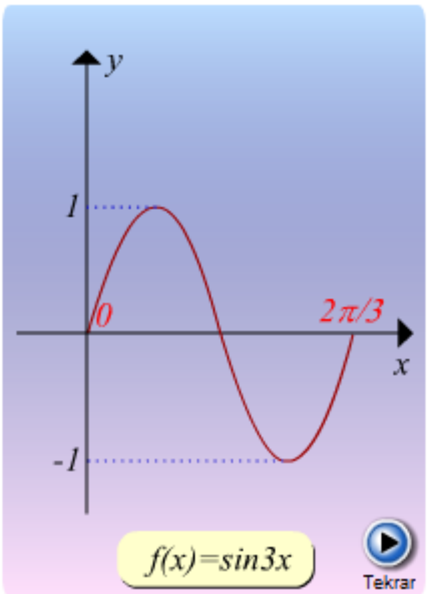
yani ; T = 2 π dir.



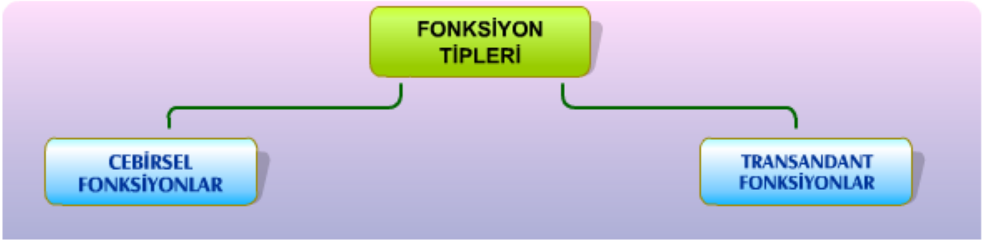
7.2.12 Bileşke Fonksiyon (Fonksiyon Fonksiyonu)

u = g(x) olmak üzere y = f (u) şeklindeki fonksiyonlara ***bileşke fonksiyon*** denir ve y = f(g(x)) şeklinde de gösterilebilir.

Örneğin : f(x)=sinx ve g(x)=3x ise y=f(g(x))=sin(3x)=sin3x olarak gösterilebilir.



7.3 Fonksiyon Tipleri



7.3.1 Cebirsel Fonksiyonlar

Cebirsel fonksiyonlar 3 başlık altında toplanabilir.

7.3.1.1 Tam Rasyonel Fonksiyonlar (Polinomlar)

$x \in R$ ve $n \in N$ olmak üzere,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_1 x + a_0$$

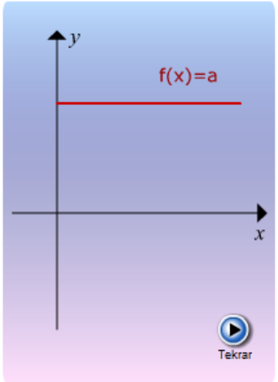
şeklindeki fonksiyonlara ***tam rasyonel fonksiyon*** denir. Burada a_0 , a_1 , ...$a_n \in R$ olup sabit büyüklüklerdir. Bunlara katsayı adı verilir. $n \in N$ sayısı $a_n \neq 0$ koşuluyla polinomun derecesini belirtir.

Örnek:

$f(x) = x^2-3x+1$ ikinci dereceden,

$f(x) = x+3$ birinci dereceden birer tam rasyonel fonksiyondur.

$f(x) = a.x^n$ fonksiyonunda $n = 0$ ise bu fonksiyona ***sabit fonksiyon*** denir. Bu durumda fonksiyonun $f(x) = a$ olacağı açıktır.



7.3.1.2 Kesirli Rasyonel Fonksiyonlar

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \ldots\ldots\ldots a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} \ldots\ldots\ldots b_1 x + b_0}$$

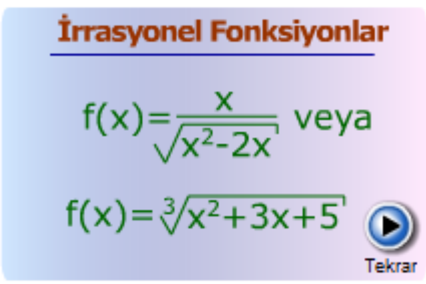
Yandaki şekildeki gibi iki tam rasyonel fonksiyonun oranı olarak tanımlanan fonksiyonlara ***kesirli rasyonel fonksiyonlar*** denir.

Örnek:

7.3.1.3 İrrasyonel Fonksiyonlar

y=f(x) fonksiyonunda değişken kök içinde ise ya da diğer bir ifadeyle değişkene kök alma işlemi de uygulanıyorsa bu fonksiyonlara ***irrasyonel fonksiyonlar*** denir.

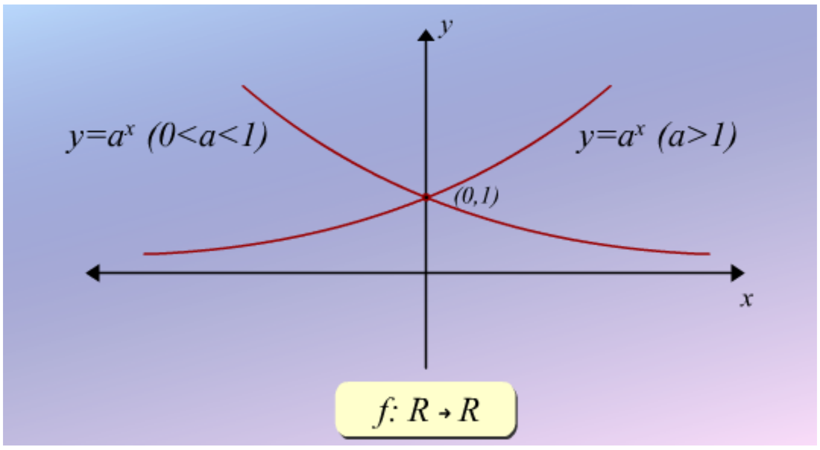
Örnek:



7.3.2 Transandant (Elemanter) Fonksiyonlar

7.3.2.1 Üstel Fonksiyon

$y = a^x$ ($x \in R$, $a \in R+$, $a \neq 1$) şeklindeki ($-\infty$, $+\infty$) aralığında tanımlı fonksiyonlardır.



Özellikleri :

a > 1 ise

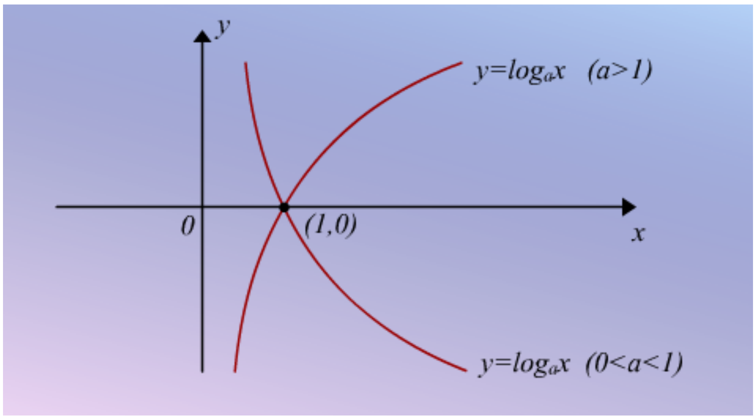
- Fonksiyon süreklidir.
- Fonksiyon artandır.
- $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = 0$
- x = 0 için y = 1
- y = 0 için $a^x \neq 0$ (x eksenini kesmez)

0 < a < 1 ise

- Fonksiyon süreklidir.
- Fonksiyon azalandır.
- $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$
- x= 0 için y = 1
- y = 0 için $a^x \neq 0$ (x eksenini kesmez)

7.3.2.2 Logaritma Fonksiyonu

$y = \log_a x$ $(x,a \in R+,\ a \neq 1)$ şeklinde $(0,+\infty)$ aralığında tanımlı, ters fonksiyonu $x = a^y$ olan fonksiyonlardır.



Özellikleri :

a > 1 ise

- Fonksiyon süreklidir.
- Fonksiyon artandır.
- $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$
- $y = 0$ için $\log_a x = 0 \Rightarrow a^0 = x \quad \Rightarrow x = 1$ dir.

0 < a < 1 ise

- Fonksiyon süreklidir.
- Fonksiyon azalandır.
- $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$
- $y = \log_a x = 0 \Rightarrow a^0 = x \Rightarrow x = 1$ dir.

7.3.2.3 Trigonometrik Fonksiyonlar

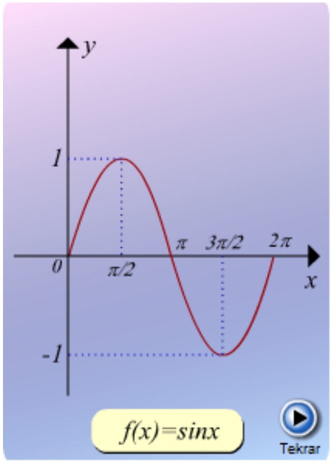
Trigonometrik Fonksiyonlar 4 başlık altında toplanabilir.

7.3.2.3.1 y = sinx Fonksiyonu

Özellikleri :

- Fonksiyon süreklidir.
- Periyodiktir (T = 2 π)
- Tek fonksiyondur (f(x) = -f(-x))
- Fonksiyon [-1 , +1] aralığında değerler alır.

X	0	π/2	π	3π/2	2π
y = sinx	0	1	0	-1	0

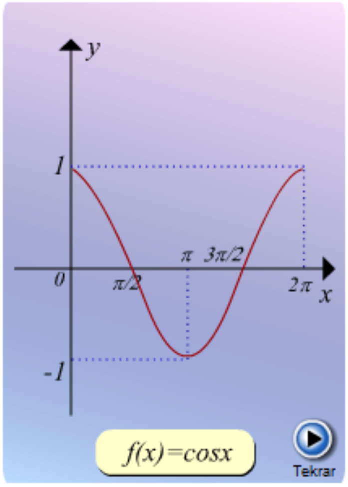


7.3.2.3.2 y = cosx Fonksiyonu

Özellikleri :

- Fonksiyon süreklidir.
- Periyodiktir (T = 2 π)
- Çift fonksiyondur (f(x) = f(-x))
- Fonksiyon [-1 , +1] aralığında değerler alır.

X	0	π/2	π	3π/2	2π
y = cosx	1	0	-1	0	1

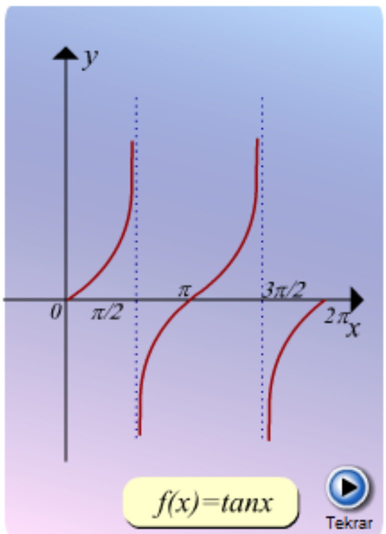


7.3.2.3.3 y = tanx Fonksiyonu

Özellikleri :

- Fonksiyon periyot aralığı içinde x = $\frac{\pi}{2}+k\pi$ (k $\in$Z) için kesiklidir.
- Periyodiktir (T = π)
- Tek fonksiyondur (f(x) = -f(-x))
- Fonksiyon (-∞, +∞) aralığında değerler alır.
- ($\pi/2$, $3\pi/2$) aralığında artandır.

X	0	π/2	π	3π/2	2π
y = tanx	1	+ ∞ ‖ - ∞	0	+ ∞ ‖ - ∞	0

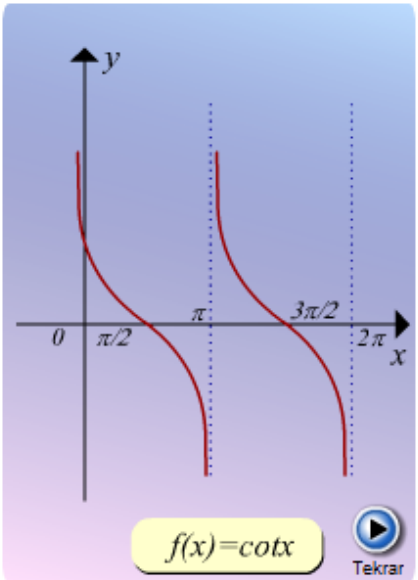


7.3.2.3.4 y=cotx Fonksiyonu

Özellikleri :

- Fonksiyon bir periyot aralığı içinde x = k π (k $\in$ Z) için kesiklidir.
- Periyodiktir (T = π)
- Tek fonksiyondur (f(x) = -f(-x))
- Fonksiyon (-∞, +∞) aralığında değerler alır.
- (0, π) arlığında azalandır

X	0	π/2	π	3π/2	2π
y = cotx	-∞ ‖ +∞	0	- ∞ ‖ +∞	0	- ∞ ‖ +∞



7.3.2.4 Ters Trigonometrik Fonksiyonlar

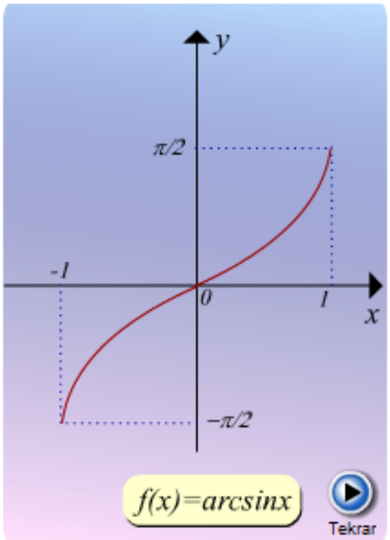
Trigonometrik fonksiyonlar yardımıyla elde edilen fonksiyonlardır. Örneğin, y=sinx trigonometrik fonksiyonun ters fonksiyonu x = arc siny dir. Bu fonksiyonların grafikleri trigonometrik fonksiyonların y = x doğrusuna göre simetrileri alınarak bulunabilir.

Ters Trigonometrik Fonksiyonlar, 3 başlık altında toplanabilir.

7.3.2.4.1 y = arcsinx Fonksiyonu

Ters fonksiyonu x = siny olan fonksiyondur. x $\in$[-1, +1] ve y $\in$[- $\pi/2$,+ $\pi/2$] aralığında değerler alır. Sürekli ve artan fonksiyondur.

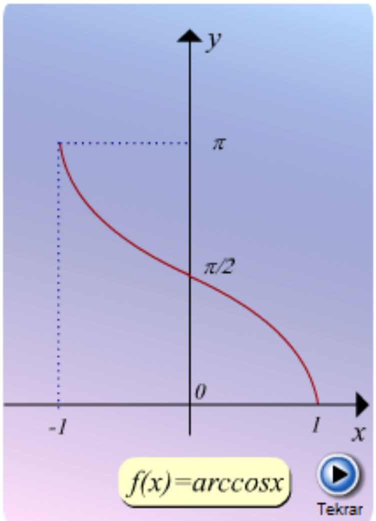
x	-1	0	1
y=arcsinx	$\frac{-\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$



7.3.2.4.2 y = arccosx Fonksiyonu

Ters fonksiyonu x = cosy olan fonksiyondur. x $\in$[-1 , 1] ve y $\in$[0 , π] aralığında değerler alır. Sürekli ve azalan bir fonksiyondur.

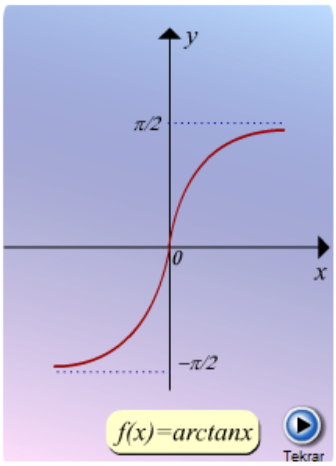
x	-1	0	1
y=arccosx	π	$\frac{\pi}{2}$	0



7.3.2.4.3 y = arctanx Fonksiyonu

Ters fonksiyonu x = tan y olan bir fonksiyon olup x $\in(-\infty, +\infty)$ ve y $\in(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$ aralığında değerler alır. Artan bir fonksiyondur.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y=arctanx	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$



7.3.2.5 Hiperbolik Fonksiyonlar

e^x ve e^{-x} üstel fonksiyonları yardımıyla tanımlanan sürekli fonksiyonlardır. Bu fonksiyonlar:

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$cothx = \frac{chx}{shx} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

dir. Yukarıda verdiğimiz fonksiyonlar sırası ile; sinüs hiperbolik x , cosinüs hiperbolik x , tanjant hiperbolik x ,kotanjant hiperbolik x diye okunur shx ve chx bağıntıları taraf tarafa toplanır ve çıkarılırsa

$chx + shx = e^x$	$chx - shx = e^{-x}$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerin taraf tarafa çarpılmasıyla ;

$$ch^2x - sh^2x = 1$$

bağıntısı bulunur. Bu bağıntı

$$\cos^2x + \sin^2x = 1$$

bağıntısını anımsatmaktadır ve geometrik anlamda benzeri bir yorumu vardır. Bunu şu şekilde açıklayabiliriz : x değiştiği zaman koordinatları

$$X = \cos x \, , \; Y = \sin x$$

olan nokta denklemi

$$X^2 + Y^2 = 1$$

dairesini çizer. Bu bakımdan cosx ve sinx fonksiyonlarına dairesel fonksiyonlarda denir. Benzer şekilde , x değiştiğinde koordinatları

$$X = \text{ch}x \ , \ Y = \text{sh}x$$

olan nokta , denklemi

$$X^2 - Y^2 = 1$$

olan ikizkenar hiperbol üzerinde hareket eder. Yukarıda tanımladığımız fonksiyonlardaki hiperbolik terimi buradan gelmektedir.

Yukarıda verilen formüller yardımıyla;

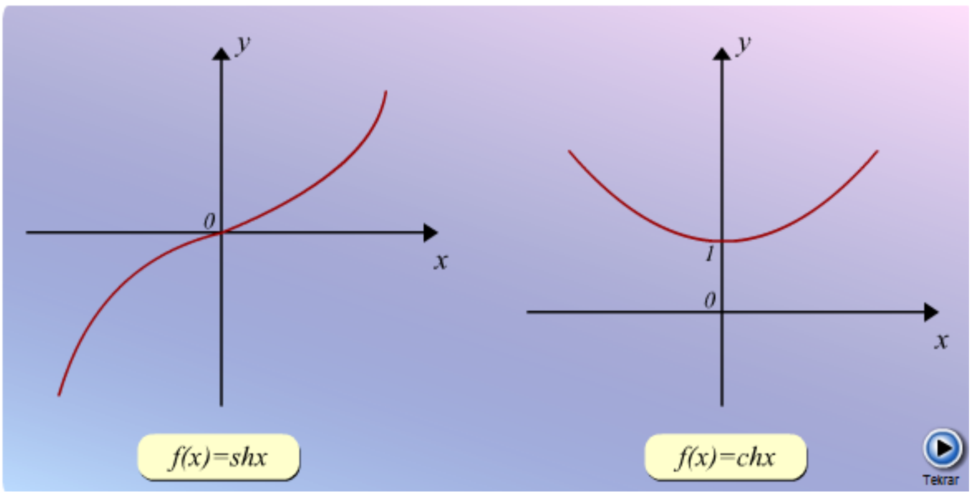
$$\text{ch}(-x) = \text{ch}x \text{ ve } \text{sh}(-x) = -\text{sh}x$$

olarak elde edilir. Bu nedenle chx fonksiyonu çift fonksiyon, shx ise tek fonksiyondur. x ne olursa olsun, chx > 0 dır. Ancak , shx'in işareti x'in işareti ile aynıdır, yani x < 0 için shx<0 , x > 0 için shx > 0 dır. Özel olarak ch0 = 1 ve sh0 = 0 dır.

shx daima artan bir fonksiyondur; chx ise x < 0 için azalan, x >0 için artan bir fonksiyondur ve x = 0 için bir minimumu vardır. Kolayca görüleceği üzere,

$$\lim_{x \to \pm\infty} \text{ch}x = +\infty \ , \quad \lim_{x \to -\infty} \text{sh}x = +\infty \ , \quad \lim_{x \to +\infty} \text{sh}x = +\infty$$

Hiperbolik fonksiyonlar periyodik değildir. Bu iki fonksiyonun grafikleri aşağıdaki gibidir.



x	$-\infty$	0	$+\infty$	x	$-\infty$	0	$+\infty$
y = shx	$-\infty$	0	$+\infty$	y = chx	$+\infty$	1	$+\infty$

$$\mathrm{thx} = \frac{\mathrm{shx}}{\mathrm{chx}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

th(-x) = -th x olduğundan thx tek bir fonksiyondur.

$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{thx} = -1 \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} \mathrm{thx} = 1$$

x ne olursa olsun, daima -1 < thx < 1 dir.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y = thx	- 1	0	1