

第3章

信号的频域分析

所谓信号的频域分析就是把虚指数信号(序列)或正弦信号(序列)作为基本信号,研究如何将任意信号(序列)分解为一系列基本信号的线性组合。

本章首先介绍如何将连续周期信号展开为三角函数形式和复指数形式的傅里叶级数,建立周期信号频谱的概念,再由傅里叶级数引出非周期信号傅里叶变换的定义,通过对傅里叶变换性质的深入研究体现频域分析方法的实用价值,最后介绍离散信号的频域分析方法。

3.1 连续时间周期信号的傅里叶级数

一般来说,对于常用的周期为 T_1 的周期信号 $f(t)$,都满足如下一组条件(称为狄里赫利条件):

- (1) 在一个周期内,如果有间断点存在,则间断点的数目应是有限个;
- (2) 在一个周期内,极大值和极小值的数目应是有限个;
- (3) 在一个周期内,信号是绝对可积的,即 $\int_{t_0}^{t_0+T_1} |f(t)| dt < \infty$ 。

那么,可将 $f(t)$ 展开成傅里叶级数形式。

3.1.1 周期信号的傅里叶级数

1. 三角形式的傅里叶级数展开

设满足狄里赫利条件的周期信号 $f(t)$,周期为 T_1 ,可分解为三角函数形式的傅里叶级数为:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)] \quad (3.1)$$

其中: $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ 称为基波频率;

a_0, a_n, b_n 为傅里叶系数:

$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) dt \quad (3.2)$$

$$a_n = \frac{2}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt \quad (3.3)$$

$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt \quad (3.4)$$

式中积分区间通常取 $0 \sim T_1$ 或 $-\frac{T_1}{2} \sim \frac{T_1}{2}$ 。

由式(3.3)~(3.4)表明, a_n 、 b_n 都是离散变量 n 的函数。

其中: a_n 是 n 的偶函数, 即 $a_{-n} = a_n$; b_n 是 n 的奇函数, 即 $b_{-n} = -b_n$ 。

将式(3.1)进行三角函数变换得

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.5)$$

其中

$$\begin{cases} A_0 = a_0 \\ A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \varphi_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n} \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} a_0 = A_0 \\ a_n = A_n \cos \varphi_n \\ b_n = -A_n \sin \varphi_n \end{cases}$$

式(3.5)的物理意义:

满足狄里赫利条件的非正弦周期信号 $f(t)$ 可以利用傅里叶级数展开的方法分解为一个直流分量与一系列不同频率, 不同幅值的谐波分量(正弦分量)相叠加的形式。

其中:

① n 为谐波次数, $n\omega_1$ 称为谐波角频率。当 $n=1$ 时, $A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ 称为 $f(t)$ 的基波分量; $n>1$ 时, $A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$ 称为 $f(t)$ 的高次谐波分量, 如 $n=2$, 称 $A_2 \cos(2\omega_1 t + \varphi_2)$ 为 $f(t)$ 的二次谐波分量。 n 为偶数时, 称为偶次谐波, n 为奇数时, 则称为奇次谐波。

利用这样分解形式的分析方法也称为谐波分析。

② 如果将 n 换成 $-n$, 则有

$A_{-n} = A_n$, 则 A_n 为离散变量 n 的偶函数; $\varphi_{-n} = -\varphi_n$, 则 φ_n 为离散变量 n 的奇函数。

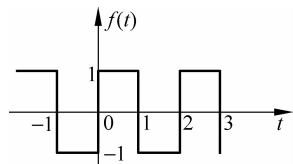


图 3-1 例 3.1 图

【例 3.1】 试求图 3-1 所示方波的傅里叶级数表达式。

解: (1) 写出给定方波在一个周期内的表达式:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \frac{T_1}{2} \\ -1, & \frac{T_1}{2} < t < T_1 \end{cases}$$

(2) 利用式(3.3)、式(3.4)求系数:

$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} f(t) dt = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1/2} 1 \cdot dt + \frac{1}{T_1} \int_{T_1/2}^{T_1} -1 \cdot dt = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1/2} \cos(n\omega_1 t) \cdot dt + \frac{1}{T_1} \int_{T_1/2}^{T_1} -\cos(n\omega_1 t) \cdot dt = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt = \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1/2} \sin(n\omega_1 t) \cdot dt + \frac{2}{T_1} \int_{T_1/2}^{T_1} -\sin(n\omega_1 t) \cdot dt$$

$$= \frac{4}{T_1} \int_0^{T_1/2} \sin(n\omega_1 t) \cdot dt = \frac{2}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数} \\ \frac{4}{n\pi}, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

2. 复指数形式的傅里叶级数展开

利用欧拉公式将式(3.1)整理得:

$$f(t) = a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n - jb_n) e^{jn\omega_1 t} + (a_n + jb_n) e^{-jn\omega_1 t}] \quad (3.6)$$

令

$$\dot{A}_n = a_n - jb_n = |A_n| \angle \varphi_n \quad (3.7)$$

其中: $|A_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

$$\varphi_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n}$$

说明 \dot{A}_n 的模和幅角分别为周期信号 $f(t)$ 的第 n 次谐波的振幅 A_n 和初相角 φ_n , 所以称 \dot{A}_n 为 $f(t)$ 的第 n 次谐波的复数振幅。

由 a_n 与 b_n 对 n 的奇偶性可知

$$\dot{A}_{-n} = a_{-n} - jb_{-n} = a_n + jb_n = \dot{A}_n^* \quad (3.8)$$

将式(3.7)与式(3.8)代入式(3.6)得

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [\dot{A}_n e^{jn\omega_1 t} + \dot{A}_n^* e^{-jn\omega_1 t}] = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{A}_n^* e^{-jn\omega_1 t} + a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{A}_n e^{jn\omega_1 t} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n'=-\infty}^{-1} \dot{A}_{n'} e^{jn'\omega_1 t} + \frac{1}{2} \cdot A_0 e^{j0\omega_1 t} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{A}_n e^{jn\omega_1 t} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_n e^{jn\omega_1 t} \end{aligned} \quad (3.9)$$

式中: $A_0 = 2a_0$

令 $\dot{F}_n = \frac{1}{2} \dot{A}_n$ 则有

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{F}_n e^{jn\omega_1 t} \quad (3.10)$$

式(3.10)为周期信号 $f(t)$ 的复指数形式的傅里叶级数展开式。

其中

$$\begin{aligned} \dot{F}_n &= \frac{1}{2} \dot{A}_n = \frac{1}{2} [a_n - jb_n] = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos n\omega_1 t dt - j \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin n\omega_1 t dt \right] \\ &= \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) [\cos n\omega_1 t - j \sin n\omega_1 t] dt = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \end{aligned}$$

即复系数

$$\dot{F}_n = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \quad (3.11)$$

值得注意的是,在式(3.10)中出现了负频率($-n\omega_1$),在实际工程中无意义,只是为了数学运算, ($-n\omega_1$)与($n\omega_1$)一定是成对出现的,它们的和构成了一个频率为 $n\omega_1$ 的正弦分量,即

$$\frac{1}{2} \dot{A}_n^* e^{-jn\omega_1 t} + \frac{1}{2} \dot{A}_n e^{jn\omega_1 t} = \frac{1}{2} [A_n e^{-j\varphi_n} e^{-jn\omega_1 t} + \frac{1}{2} A_n e^{j\varphi_n} e^{jn\omega_1 t}] = A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$$

引入傅里叶级数的复指数形式有如下优点:

- (1) 复指数振幅 $\dot{A}_n = 2 \dot{F}_n$ 同时描述了 $f(t)$ 的第 n 次谐波的振幅 A_n 和初相角 φ_n 。
- (2) 为研究周期信号 $f(t)$ 的频谱提供了途径和方便。

3. 信号的对称性与傅里叶系数的关系

由例 3.1 可以看出,当周期信号 $f(t)$ 的波形具有某种对称性时,其相应的傅里叶系数会呈现出一定的特征。周期信号的对称性大致分两类,一类是对整个周期对称,如奇函数或偶函数,这种对称性决定了展开式中是否含有正弦项或余弦项;另一类对称性是指波形前半周期与后半周期是否相同或镜像关系,这种对称性决定了展开式中是否含有偶次谐波或奇次谐波。

1) $f(t)$ 为实偶对称信号

如果以 T_1 为周期的实周期信号 $f(t)$ 具有下列关系:

$$f(-t) = f(t) \quad (3.12)$$

则 $f(t)$ 为 t 的偶函数,其信号形式相对于坐标轴的纵轴左右对称。

取 $t_0 = -\frac{T_1}{2}$, 则 $f(t) \sin n\omega_1 t$ 为奇函数

$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin n\omega_1 t dt = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) dt = \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos n\omega_1 t dt = \frac{4}{T_0} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cdot \cos n\omega_1 t dt$$

则式(3.1)可以简化为

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_1 t \quad (3.13)$$

而

$$\dot{F}_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{1}{2}a_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos n\omega_1 t dt \quad (3.14)$$

可见实偶信号 $f(t)$ 的傅里叶系数 \dot{F}_n 是实函数,且是 n 的偶函数,所以实偶对称信号的傅里叶级数展开式中不包含正弦项,只含有直流分量及余弦分量。

2) $f(t)$ 为实奇对称信号

如果以 T_1 为周期的实周期信号 $f(t)$ 具有下列关系:

$$f(t) = -f(-t) \quad (3.15)$$

则表示信号 $f(t)$ 为 t 的奇函数,其波形相对于坐标原点是斜对称的。

取 $t_0 = -\frac{T_1}{2}$, 则有

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) dt = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos n\omega_1 t dt = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin n\omega_1 t dt = \frac{4}{T_0} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin n\omega_1 t dt$$

则式(3.1)可简化为

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_1 t) \quad (3.16)$$

$$\dot{F}_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = -\frac{2}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin n\omega_1 t dt \quad (3.17)$$

可见实奇信号 $f(t)$ 的傅里叶系数 \dot{F}_n 是虚数, 且是 n 的奇函数, 所以其傅里叶级数展开式中不包含直流项和余弦项, 只可能含有正弦项。

3) $f(t)$ 为半波重叠信号

如果以 T_0 为周期的周期信号 $f(t)$ 具有下列关系

$$f(t) = f\left(t \pm \frac{T_0}{2}\right) \quad (3.18)$$

则表示周期信号 $f(t)$ 的波形平移半个周期后与原波形重合, 称为半波重叠信号。图 3-2 为此类信号的一个实例。

由波形可见, 这时信号的基波周期为 $T_1 = \frac{T_0}{2}$, 对应基本

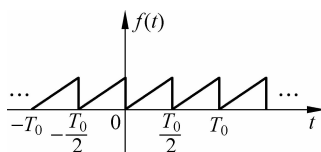


图 3-2 半波重叠信号

角频率 $\omega_1 = 2\omega_0 = 2\frac{2\pi}{T_1}$

$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} f(t) dt = \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} f(t) \cos n\omega_1 t dt = \frac{4}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} f(t) \cos 2n\omega_0 t dt$$

$$b_n = \frac{4}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} f(t) \sin 2n\omega_0 t dt$$

则式(3.1)可表示为:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2n\omega_0 t + b_n \sin 2n\omega_0 t) \quad (3.19)$$

而

$$\dot{F}_n = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} f(t) e^{-j2n\omega_0 t} dt \quad (3.20)$$

可见, 半波重叠信号 $f(t)$ 中只有偶次谐波分量, 而无奇次谐波分量。尽管半波重叠周期信号的傅里叶级数展开式中只含有偶次谐波, 但其可能既有正弦分量又有余弦分量。

4) $f(t)$ 为半波镜像信号

如果以 T_0 为周期的周期信号 $f(t)$ 具有下列关系

$$f(t) = -f\left(t \pm \frac{T_0}{2}\right) \quad (3.21)$$

则表示周期信号 $f(t)$ 的波形平移半个周期后与原波形相对于横轴形成镜像对称,称为半波镜像信号。如图 3-3 为半波镜像信号的一个实例。

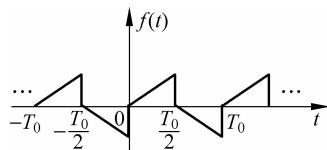


图 3-3 半波镜像信号

构造一个周期为 T_0 的周期信号 $f_1(t)$,它在第一个周期内的取值为

$$f_1(t) = \begin{cases} f(t), & 0 \leq t \leq \frac{T_0}{2} \\ 0, & \frac{T_0}{2} \leq t \leq T_0 \end{cases} \quad (3.22)$$

则由图 3-3 可知

$$f(t) = f_1(t) - f_1\left(t - \frac{T_0}{2}\right)$$

设周期信号 $f_1(t)$ 的傅里叶级数为

$$f_1(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t) \quad (3.23)$$

则

$$\begin{aligned} f_1\left(t - \frac{T_0}{2}\right) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(n\omega_1 t - \frac{T_0}{2}n\omega_1\right) + b_n \sin\left(n\omega_1 t - \frac{T_0}{2}n\omega_1\right) \right] \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_1 t - n\pi) + b_n \sin(n\omega_1 t - n\pi)] \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n a_n \cos n\omega_1 t + (-1)^n b_n \sin n\omega_1 t] \end{aligned}$$

所以

$$f(t) = f_1(t) - f_1\left(t - \frac{T_0}{2}\right) = \sum_{n=1, n \text{ 为奇数}}^{\infty} 2[a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t] \quad (3.24)$$

可见,半波镜像周期信号的傅里叶级数展开式中将只含有奇次谐波分量,而无直流与偶次谐波分量。

由以上分析可以看出,在对周期信号进行傅里叶级数展开之前,了解信号本身的对称特性,可以大大减少计算工作量。

3.1.2 傅里叶级数的基本性质

周期信号的傅里叶级数具有一系列重要性质,这些性质不仅有助于深入理解傅里叶级数的基本概念,而且还可以利用傅里叶级数的性质简化其计算。为了表述傅里叶级数的性质,设 $f(t)$ 及其傅里叶级数 \dot{F}_n 的对应关系记为 $f(t) \leftrightarrow \dot{F}_n$ 。

1. 线性特性

设 $f(t)$ 与 $g(t)$ 均为以 T 为周期的周期信号,它们的傅里叶系数分别为:

$$f(t) \leftrightarrow \dot{F}_n, \quad g(t) \leftrightarrow \dot{G}_n$$

则有

$$af(t) \pm bg(t) \leftrightarrow a\dot{F}_n \pm b\dot{G}_n \quad (3.25)$$

其中, a, b 为常数。

表明, 由于 $f(t)$ 与 $g(t)$ 同为周期为 T 的周期信号, 则其线性组合 $af(t) \pm bg(t)$ 也是周期为 T 周期信号, 其傅里叶系数等于 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的傅里叶系数的同一线性组合。式(3.25)可以由傅里叶级数的定义直接证明。

线性特性可推广到多个具有相同周期的信号。

2. 时移特性

设 $f(t)$ 是以 T 为周期的周期信号, 它的傅里叶系数为

$$f(t) \leftrightarrow \dot{F}_n$$

则有

$$f(t-t_1) \leftrightarrow e^{-jn\omega_1 t_1} \dot{F}_n \quad (3.26)$$

说明 $f(t-t_1)$ 的傅里叶系数与 $f(t)$ 傅里叶系数幅值相同, 只有 $-n\omega_1 t_1$ 的相位移。

【例 3.2】 求图 3-4(a) 所示周期信号 $g(t)$ 的傅里叶级数展开式。

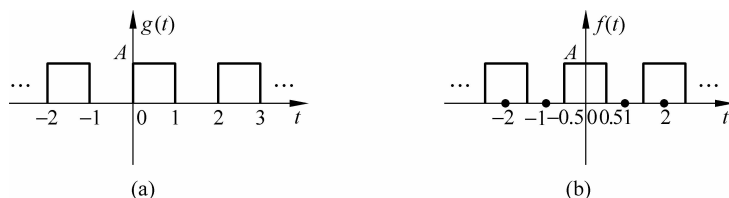


图 3-4 例 3.2 的周期信号

解: 由图可知信号的周期为 $T=2$, 脉宽 $\tau=1$, 基波角频率 $\omega_1=\pi$, 为此构造一同周期的周期信号 $f(t)$ 如图 3-4(b) 所示, 则 $g(t)=f(t-0.5)$ 。

由于 $f(t)$ 为偶函数, 则 $b_n=0$ 。

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A dt = \frac{\tau A}{T} = \frac{A}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_1 t dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A \cos n\omega_1 t dt = \frac{2A}{n\pi} \sin\left(\frac{n\omega_1 \tau}{2}\right) = \frac{2A}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

则

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{A}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2A}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos n\omega_1 t \right] \\ &= \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \left[\cos\pi t - \frac{1}{3} \cos 3\pi t + \frac{1}{5} \cos 5\pi t - \dots \right] \end{aligned}$$

由傅里叶级数的时移特性有

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \left[\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{3} \cos\left(3\pi t - \frac{3\pi}{2}\right) + \frac{1}{5} \cos\left(5\pi t - \frac{5\pi}{2}\right) - \dots \right] \\ &= \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \left[\sin\pi t + \frac{1}{3} \sin 3\pi t + \frac{1}{5} \sin 5\pi t + \dots \right] \end{aligned}$$

由此例可见, 由于 $f(t)$ 具有对称性, 其傅里叶系数计算比较简单, 再利用时移特性, 可以方便地求出 $g(t)$ 的傅里叶系数。

3. 卷积特性

设 $f(t)$ 和 $g(t)$ 均为周期为 T 的周期信号。它们的傅里叶系数分别为

$$f(t) \leftrightarrow \dot{F}_n, \quad g(t) \leftrightarrow \dot{G}_n$$

其卷积信号定义为

$$x(t) = \int_0^T f(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad (3.27)$$

$x(t)$ 也为同一周期的周期信号, 其傅里叶系数为

$$x(t) \leftrightarrow T \dot{F}_n \dot{G}_n \quad (3.28)$$

【例 3.3】 求如图 3-5(a) 所示周期三角波信号 $g(t)$ 的傅里叶系数展开式。

解: 首先构造一个周期为 T 的方波信号如图 3-5(b) 所示, 则 $f(t)$ 和 $f(t)$ 的周期卷积可得

$$g(t) = \int_0^T f(\tau)f(t-\tau)d\tau$$

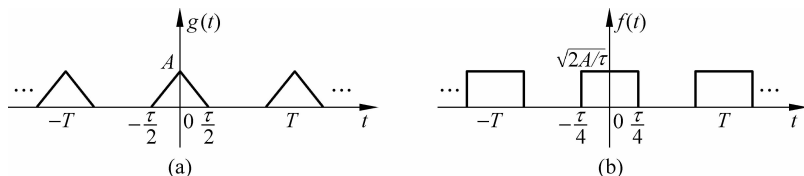


图 3-5 例 3.3 的周期信号

$f(t)$ 的傅里叶系数:

$$\begin{aligned} \dot{F}_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{4}}^{\frac{\tau}{4}} \sqrt{2A/\tau} e^{-jn\omega_1 t} dt \\ &= \frac{\tau}{2T} \sqrt{2A/\tau} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1 \tau}{4}\right) \end{aligned}$$

由卷积性质可得 $g(t)$ 的傅里叶系数 \dot{G}_n 为

$$\dot{G}_n = T(\dot{F}_n)^2 = \frac{A\tau}{2T} \text{Sa}^2\left(\frac{n\omega_1 \tau}{4}\right)$$

所以周期信号 $g(t)$ 的傅里叶级数展开式为

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A\tau}{2T} \text{Sa}^2\left(\frac{n\omega_1 \tau}{4}\right) e^{jn\omega_1 t} = \frac{A\tau}{2T} + \frac{A\tau}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \text{Sa}^2\left(\frac{n\omega_1 \tau}{4}\right) \cos n\omega_1 t$$

4. 微分特性

设 $f(t)$ 是以 T 为周期的周期信号, 其傅里叶系数为

$$f(t) \leftrightarrow \dot{F}_n$$

则 $f(t)$ 的导数 $f'(t)$ 的傅里叶系数为

$$f'(t) \leftrightarrow jn\omega_1 \dot{F}_n \quad (3.29)$$

除此之外, 周期信号的傅里叶级数的基本性质还有共轭特性、反转特性等, 见表 3-1。

表中 $f(t) \leftrightarrow \dot{F}_n, g(t) \leftrightarrow \dot{G}_n$ 。

表 3-1 傅里叶级数基本特性

性质	周期信号	傅里叶系数
线性特性	$af(t) \pm bg(t)$	$a\dot{F}_n \pm b\dot{G}_n$
共轴特性	$f^*(t)$	\dot{F}_{-n}^*
反转特性	$f(-t)$	\dot{F}_{-n}
时移特性	$f(t-t_1)$	$e^{jn\omega_1 t_1} \dot{F}_n$
频移特性	$f(t)e^{jn\omega_1 t}$	\dot{F}_{n-m}
卷积特性	$\int_0^T f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$T\dot{F}_n\dot{G}_n$
微分特性	$\frac{df(t)}{dt}$	$jn\omega_1 \dot{F}_n$
Parseval	$\frac{1}{T} \int_0^T f(t) ^2 dt$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{F}_n ^2$

3.1.3 连续周期信号的频谱分析

1. 周期信号的频谱及其特点

连续周期信号的傅里叶级数展开为我们提供了在频域中认识周期信号特征的重要手段。任何一个满足狄里赫利条件的连续周期信号都可以分解为直流分量和无穷多个各次谐波分量的线性组合,从而可在频域内方便地予以比较。

为了直观地反映周期信号中各频率分量的分布情况,可将各频率分量的振幅和相位随频率变化的关系用图形表示,称为“频谱图”。频谱图包括振幅频谱和相位频谱。

由于

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{F}_n e^{jn\omega_1 t} \quad (3.30)$$

而

$$\dot{F}_n = \frac{1}{2} \dot{A}_n = \frac{1}{2} (a_n - jb_n) = |F_n| e^{j\varphi_n}$$

1) 幅度频谱

为了直观地表示出信号所含各分量的振幅,以频率(或角频率)为横坐标,以各次谐波的振幅 A_n 或虚指数函数的幅度 $|\dot{F}_n|$ 为纵坐标,可画出如图 3-6(a)和图 3-6(b)所示的线图,称为幅度(振幅)频谱,简称幅度谱。图中的每条竖线代表该频率分量的幅度,称为谱线。连接各谱线顶点的曲线(如图中虚线所示)称为包络线,它反映了各频率分量幅度随频率变化的情况。需要说明的是,图 3-6(a)中,信号分解为各余弦分量,图中每一条谱线表示各次谐波的振幅(称为单边幅度谱),而图 3-6(b)中,信号分解为各虚指数函数,图中每一条谱线表示各分量的幅度 $|\dot{F}_n|$ (称为双边幅度谱),其中 $|\dot{F}_n| = |\dot{F}_{-n}| = \frac{1}{2} A_n$ 。

2) 相位频谱

以频率(角频率)为横坐标,以各次谐波的初相位 φ_n 为纵坐标,可画出如图 3-6(c)和

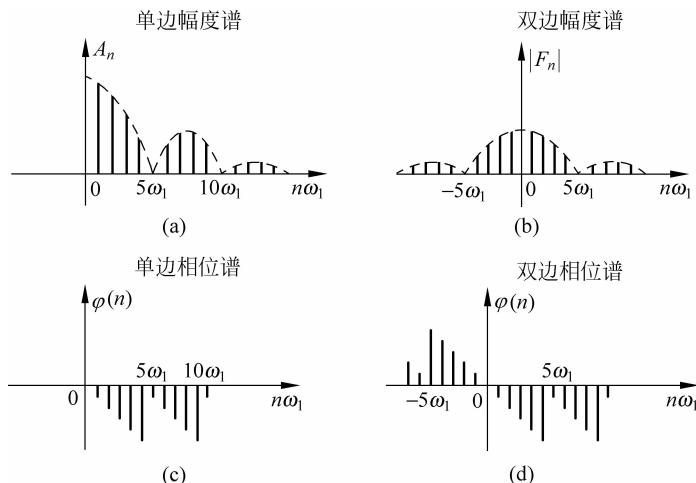


图 3-6 周期信号的频谱

图 3-6(d) 所示的线图, 称为相位频谱, 简称相位谱。

在实际工作中, 信号的幅度谱和相位谱都可以通过频谱分析仪测量得到。

周期信号 $f(t)$ 的频谱清晰地描述了信号中的频率成分, 即构成信号的各次谐波的幅度和相位。若已知信号的频谱, 则可应用式 (3.30) 重建信号。所以频谱提供了另一种描述信号 $f(t)$ 的方法——信号的频域描述。信号的频域描述和时域描述从不同的角度展现了信号的特征, 这些特征是深入分析和研究信号特性的基础。

一般在进行频域分析时, 多采用幅度谱来描述周期信号, 相位谱只在信号重建时起作用。故在无特殊说明的情况下, 今后所说的频谱一般是指幅度谱。

由图 3-6 可以看出, 周期信号频谱具有如下特点:

(1) 离散性。频谱图都是由间隔为 ω_1 的谱线组成, 每根谱线代表一个谐波分量。这样的频谱称为不连续频谱或者离散频谱。

不同周期的信号, 其频谱分布的形状不同, 但都是以基频 ω_1 为间隔分布的。由于谱线的间隔角 $\omega_1 = 2\pi/T_1$, 所以信号的周期决定离散频谱的谱线间隔大小。信号的周期 T_1 越大, 其基频 ω_1 就越小, 谱线越密, 反之, T_1 越小, 则谱线越疏。

(2) 谐波性。频谱中的谱线只能在基频 ω_1 或其整数倍的频率上出现, 表示周期信号可分解为各次谐波分量的线性组合。

(3) 收敛性。频谱中各谱线的高度, 随谐波次数的增高而逐渐减小, 当谐波次数无限增多时, 谐波分量的幅度趋于无穷小。尽管不同周期信号的幅度谱的衰减速度不同, 但都是最终衰减为零。

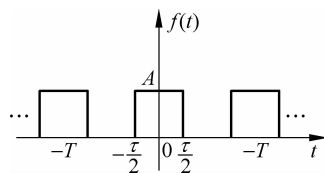


图 3-7 周期矩形脉冲

2. 周期信号的频谱分析

现以周期矩形脉冲信号(如图 3-7 所示)为例说明怎样进行周期信号的频谱分析, 并且给出信号带宽的概念。

图 3-7 为最典型常用的周期矩形脉冲信号。它的脉冲宽度为 τ , 高度为 A , 周期为 T , 基波角频率为 $\omega_1 = 2\pi/T$ 。