第 1 章　行　列　式

本章介绍用行列式的性质及展开定理计算行列式,介绍利用 Cramer 法则求解 n 元线性方程组的方法.

本章重点　n 阶行列式的性质、展开定理和计算方法.

本章难点　行列式的计算.

一、主要内容

n 阶行列式的定义,n 阶行列式的性质,代数余子式,行列式展开定理,Cramer 法则.

二、教学要求

1. 理解 n 阶行列式的定义.
2. 熟练掌握行列式的性质.
3. 熟练掌握行列式的计算方法.
4. 熟练掌握行列式按行(列)展开定理.
5. 掌握 Cramer 法则.

三、例题选讲

例 1.1　已知 3□452□为一个 6 级排列,将数字 1 和 6 填入□内,使其成为奇排列.

解　我们可以将数字 1 和 6 随意填入两□内,然后求此排列的逆序数. 如果逆序数是奇数,该排列即为所求;如果逆序数为偶数,由定理 1.1,将数字 1 和 6 的位置对调,便得所求排列.

现将数字 1 填入第 1 个□内,将数字 6 填入第 2 个□内,得排列 314526,则

$$\tau(314526) = 2 + 0 + 1 + 1 + 0 = 4.$$

即排列 314526 为偶排列,由定理 1.1,将数字 1 和 6 的位置对调,便得奇排列 364521.

例 1.2 计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

分析 对于元素是数字的行列式,通常运用行列式的性质将其化为三角行列式来计算,或将其某一行(列)化成有较多 0 元素之后,再按该行(列)展开降阶.

解 方法 1

$$D \xlongequal[(-1)\mathrm{r}_2+\mathrm{r}_4]{\mathrm{r}_1+\mathrm{r}_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\mathrm{r}_3+\mathrm{r}_4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

方法 2

$$\begin{aligned} D &\xlongequal{\text{按第 1 列展开}} 1\cdot A_{11}+0\cdot A_{21}+(-1)A_{31}+0\cdot A_{41} \\ &= (-1)^{1+1}M_{11}-(-1)^{3+1}M_{31} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -1-(-3)=2. \end{aligned}$$

注 也可按第 2 列或第 2 行或第 4 行展开.

方法 3

$$D \xlongequal{\mathrm{r}_1+\mathrm{r}_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第 1 列展开}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2.$$

例 1.3　计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c+d & 1 \\ b & c & a+d & 1 \\ c & d & a+b & 1 \\ d & a & b+a & 1 \end{vmatrix}.$$

分析　将第 1 列、第 2 列加到第 3 列，然后提取公因子.

解

$$D \overset{c_1+c_3}{\underset{c_2+c_3}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} a & b & a+b+c+d & 1 \\ b & c & a+b+c+d & 1 \\ c & d & a+b+c+d & 1 \\ d & a & a+b+c+d & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c+d)\begin{vmatrix} a & b & 1 & 1 \\ b & c & 1 & 1 \\ c & d & 1 & 1 \\ d & a & 1 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

例 1.4　计算 5 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 8 & -2 & -3 \\ 2 & -8 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -6 \\ -4 & 3 & -5 & 6 & 0 \end{vmatrix}.$$

解　由

$$D=D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -8 & 2 & 3 \\ -2 & 8 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 6 \\ 4 & -3 & 5 & -6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^5 D,$$

故 $D=0$.

注　若 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

满足 $a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$,则称 D 为反对称行列式.此题是奇数阶反对称行列式,故 $D=0$.

例 1.5 计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

分析 各行元素之和相等.

解

$$D\xlongequal[\text{第 1 列}]{\text{各列加到}}\begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{去第 1 行}]{\text{后 3 行分别减}}x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 0 & 0 & x & -x \\ 0 & x & 0 & -x \\ 0 & 0 & 0 & -x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第 1 列展开}}x\begin{vmatrix} 0 & x & -x \\ x & 0 & -x \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix}$$

$$=x^4.$$

例 1.6 计算 $n+1$ 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix},\quad \text{其中 } a_i\neq 0,i=1,2,\cdots,n.$$

分析 这是 $|\diagdown|$ 型行列式,可用主对角线元素化其为上(下)三角形来计算.

解　方法 1

$$D \xlongequal[i=2,3,\cdots,n+1]{c_i \times \frac{1}{a_{i-1}}} \prod_{i=1}^{n} a_i \begin{vmatrix} a_0 & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n+1]{(-1)c_i + c_1} \prod_{i=1}^{n} a_i \begin{vmatrix} a_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \left(a_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) \prod_{i=1}^{n} a_i.$$

方法 2

$$D \xlongequal[i=2,3,\cdots,n+1]{r_i \times \left(-\frac{1}{a_{i-1}}\right) + r_1} \begin{vmatrix} a_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$= \left(a_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) \prod_{i=1}^{n} a_i.$$

注　此题的行列式结构特殊，一些行列式的计算都可先化成$|\diagdown|$，再按照此题的方法计算，如例 1.6.

例 1.7　计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix},$$

其中 $x_i \neq a_i, i=1,2,\cdots,n$.

分析　行列式的特点为第 j 列$(j=1,2,\cdots,n)$除元素 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$外都

相同,所以后 $n-1$ 行分别减去第 1 行化成例 1.5 行列式的结构,再用例 1.5 的方法求解.

解　后 $n-1$ 行分别减去第 1 行,则

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1-x_1 & x_2-a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1-x_1 & 0 & x_3-a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1-x_1 & 0 & 0 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}(x_i-a_i)\begin{vmatrix} \dfrac{x_1}{x_1-a_1} & \dfrac{a_2}{x_2-a_2} & \dfrac{a_3}{x_3-a_3} & \cdots & \dfrac{a_n}{x_n-a_n} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}(x_i-a_i)\begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{a_i}{x_i-a_i} & \dfrac{a_2}{x_2-a_2} & \dfrac{a_3}{x_3-a_3} & \cdots & \dfrac{a_n}{x_n-a_n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x_i-a_i}\right)\prod_{i=1}^{n}(x_i-a_i).$$

例 1.8　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ a & x & a & \cdots & a & a \\ a & a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix}.$$

分析　行列式中行(列)各元素之和相等,故将第 $2,3,\cdots,n$ 列(行)加到第 1 列(行),提出公因子 $x+(n-1)a$,然后再用后 $n-1$ 行分别减去第 1 行.

解

$$D\overset{\mathrm{c}_i+\mathrm{c}_1}{\underset{i=2,3,\cdots,n}{=\!=\!=\!=\!=\!=}}\begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & x & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+(n-1)a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 1 & x & a & \cdots & a \\ 1 & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

注　在行列式计算中，若(行)列之和相等，都可考虑此方法，如例 1.8.

例 1.9　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-m & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3-m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}.$$

分析　此行列式各行元素之和相同，所以将后 $n-1$ 列加到第 1 列，提取公因式 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-m$.

解

$$D_n=\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n}x_i-m & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_i-m & x_2-m & x_3 & \cdots & x_n \\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_i-m & x_2 & x_3-m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_i-m & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-m\right)\begin{vmatrix}1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ 1 & x_2-m & x_3 & \cdots & x_n\\ 1 & x_2 & x_3-m & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-m\end{vmatrix}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-m\right)\begin{vmatrix}1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ 0 & -m & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & -m & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -m\end{vmatrix}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-m\right)(-m)^{n-1}.$$

例 1.10 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n\end{vmatrix}.$$

分析 此行列式先按第 n 行(列)展开,再利用计算公式.

解

$$D\xlongequal{\text{按第 } n \text{ 行展开}}(-1)^{n+n}\cdot n\begin{vmatrix} & & & & 1\\ & & & 2 & \\ & & 3 & & \\ & \iddots & & & \\ n-1 & & & & \end{vmatrix}$$

$$=n(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(n-1)!$$

$$=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!.$$

例 1.11 计算 $2n$ 阶行列式

$$D_{2n}=\begin{vmatrix}n & & & & & & & n+1\\ & n-1 & & & & & n & \\ & & \ddots & & & \iddots & & \\ & & & 1 & 2 & & & \\ & & & 3 & 4 & & & \\ & & \iddots & & & \ddots & & \\ & n+1 & & & & & n+2 & \\ n+2 & & & & & & & n+3\end{vmatrix}.$$

解　方法 1

把 D_{2n} 中的第 $2n$ 行依次与第 $2n-1$ 行、…、第 2 行对调共作了 $2n-2$ 次相邻对换，再把第 $2n$ 列与第 $2n-1$ 列、…、第 2 列对调，得

$$D_{2n}=(-1)^{2n-2}\cdot(-1)^{2n-2}\begin{vmatrix} n & n+1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ n+2 & n+3 & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & n-1 & & & & n \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & ⋰ & \\ & & & & 1 & 2 & & \\ & & & & 3 & 4 & & \\ & & & ⋰ & & \ddots & \\ 0 & 0 & n+1 & & & & n+2 \end{vmatrix}$$

$$=D_{2(n-1)}\begin{vmatrix} n & n+1 \\ n+2 & n+3 \end{vmatrix}=(-2)D_2(n-1).$$

以此为递推公式，得

$$D_{2n}=(-2)D_{2(n-1)}=\cdots=(-2)^{n-1}D_2=(-2)^n.$$

方法 2

$$D_{2n}\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第 1 列}}n\begin{vmatrix} n-1 & & & & n & 0 \\ & \ddots & & ⋰ & & \\ & & 1 & 2 & & \\ & & 3 & 4 & & \\ & ⋰ & & \ddots & & \\ n+1 & & & & n+2 & \\ 0 & & & & & n+3 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{2n+1}(n+2)\begin{vmatrix} 0 & & & & & n+1 \\ n-1 & & & & n & \\ & \ddots & & ⋰ & & \\ & & 1 & 2 & & \\ & & 3 & 4 & & \\ & ⋰ & & \ddots & & \\ n+1 & & & & n+2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=n(n+3)D_{2(n-1)}-(n+1)(n+2)D_{2(n-1)},$$

故有

$$D_{2n}=-2D_{2(n-1)}=(-2)^2D_{2(n-2)}=\cdots$$

$$=(-2)^{n-1}D_2=(-2)^{n-1}\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=(-2)^n.$$

注 此题方法称为递推法,即寻找递推公式降阶.

例 1.12 计算 $n+1$ 阶行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix}a&-1&0&\cdots&0\\ax&a&-1&\cdots&0\\ax^2&ax&a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\ax^n&ax^{n-1}&ax^{n-2}&\cdots&a\end{vmatrix},\quad a\neq 0.$$

解 方法 1 从第 1 列开始到第 $n-1$ 列,依次用后一列乘$(-x)$加到前一列上,得

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix}a+x&-1&0&\cdots&0\\0&a+x&-1&\cdots&0\\0&0&a+x&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&&a\end{vmatrix}=a(a+x)^n.$$

方法 2

$$D_{n+1}\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第 1 行}}aD_n+(-1)^{1+2}(-1)\begin{vmatrix}ax&-1&0&\cdots&0\\ax^2&a&-1&\cdots&0\\ax^3&ax&a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\ax^n&ax^{n-2}&ax^{n-3}&\cdots&a\end{vmatrix}$$

$$=aD_n+x\begin{vmatrix}a&-1&0&\cdots&0\\ax&a&-1&\cdots&0\\ax^2&ax&a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\ax^{n-1}&ax^{n-2}&ax^{n-3}&\cdots&a\end{vmatrix}$$

$$=aD_n+xD_n=(a+x)D_n.$$

即

$$D_{n+1}=(a+x)D_n=(a+x)^2D_{n-1}=\cdots=(a+x)^{n-1}D_2$$

$$=(a+x)^{n-1}\begin{vmatrix}a&-1\\ax&a\end{vmatrix}=a(a+x)^n.$$

方法 3

$$D_{n+1}\xlongequal{c_1\times\frac{1}{a}}a\begin{vmatrix}1&-1&0&\cdots&0\\x&a&-1&\cdots&0\\x^2&ax&a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\x^n&ax^{n-1}&ax^{n-2}&\cdots&a\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+c_2}a\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0\\x&a+x&-1&\cdots&0\\x^2&(a+x)x&a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\x^n&(a+x)x^{n-1}&ax^{n-2}&\cdots&a\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第 1 行}}a(a+x)\begin{vmatrix}1&-1&0&\cdots&0\\x&a&-1&\cdots&0\\x^2&ax&a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\x^{n-1}&ax^{n-2}&ax^{n-3}&\cdots&a\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{以此类推}}a(a+x)^2\begin{vmatrix}1&-1&0&\cdots&0\\x&a&-1&\cdots&0\\x^2&ax&a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\x^{n-2}&ax^{n-3}&ax^{n-4}&\cdots&a\end{vmatrix}$$

$$=\cdots$$

$$=a(a+x)^{n-1}\begin{vmatrix}1&-1\\x&a\end{vmatrix}$$

$$=a(a+x)^n.$$

例 1.13　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1&1&1&\cdots&1\\1&1+a_2&1&\cdots&1\\1&1&1+a_3&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&1+a_n\end{vmatrix},$$

其中 $a_i\neq0,i=1,2,\cdots,n$.

解　方法 1　后 $n-1$ 行分别减去第 1 行得

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0\\ -a_1 & 0 & a_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{\frac{a_1}{a_i}\mathrm{c}_i+\mathrm{c}_1}\begin{vmatrix}1+a_1+\sum\limits_{i=2}^{n}\dfrac{a_1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & & a_n\end{vmatrix}$$

$$=\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\prod_{i=1}^{n}a_i.$$

方法 2 用加边法.

$$D_n=D_{n+1}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n+1]{(-1)\mathrm{r}_1+\mathrm{r}_i}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n+1]{\frac{1}{a_{i-1}}\mathrm{c}_i+\mathrm{c}_1}\begin{vmatrix}1+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}$$

$$=\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\prod_{i=1}^{n}a_i.$$

方法 3　用数学归纳法.

当 $n=2$ 时，$D_2=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1\\ 1 & 1+a_2\end{vmatrix}=(1+a_1)(1+a_2)-1$

$$=a_1a_2\left(1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right).$$

设当 $n=k$ 时，$D_k=a_1a_2\cdots a_k\left(1+\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{a_i}\right)$ 成立.

当 $n=k+1$ 时，

$$D_{k+1}=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_{k+1}\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{成两个行列式之和}]{\text{按第 }k+1\text{ 列拆}}\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 0\\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 0\\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a_{k+1}\end{vmatrix}\text{（拆项法）}$$

$$\xlongequal[\text{前 }k\text{ 列分别减去第 }k+1\text{ 列}]{\text{第 1 个行列式}}\begin{vmatrix}a_1 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}+a_{k+1}D_k$$

$$=a_1a_2a_3\cdots a_k+a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}\left(1+\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{a_i}\right)$$

$$=a_1a_2\cdots a_{k+1}\left(1+\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{a_i}\right).$$

由数学归纳法得

$$D_n = a_1 a_2 \cdots a_n \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right).$$

方法4 由方法3的拆项法得

$$\begin{aligned} D_n &= a_1 a_1 \cdots a_{n-1} + a_n D_{n-1} \\ &= a_1 a_2 \cdots a_{n-1} + a_n (a_1 a_2 \cdots a_{n-2} + a_{n-1} D_{n-2}) \\ &= a_1 a_2 \cdots a_{n-1} + a_1 a_2 \cdots a_{n-2} a_n + a_n a_{n-1} D_{n-2} \\ &= \cdots = \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right)\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right). \end{aligned}$$

注 此题共给出4种做法,可见元素是字母的行列式的计算技巧性强,难度较大,要善于把握行列式元素的结构特征,准确地选择行列式的计算方法.

例1.14 计算四阶行列式

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 \end{vmatrix}.$$

分析 此行列式很像Vandermonde行列式,但缺少3次幂,因而采用“加边法”添加上3次幂,使新的行列式成为Vandermonde行列式.

解 设

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & y \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & y^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 & y^3 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 & y^4 \end{vmatrix},$$

则 $D_4 = -A_{45}$,其中 A_{45} 是元素 y^3 的代数余子式.由Vandermonde行列式知

$$D_5 = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant 4} (x_i - x_j) \cdot \prod_{i=1}^{4} (y - x_i).$$

另一方面将由 D_5 按第5列展开,得

$$D_5 = A_{15} + yA_{25} + y^2 A_{35} + y^3 A_{45} + y^4 A_{55}.$$

比较 D_5 的两个表达式中 y^3 的系数,且 $D_4 = -A_{45}$,有

$$D_4 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant 4} (x_i - x_j).$$

例 1.15　计算 $n+1$ 阶行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

分析　逐次对换行,即把最后一行依次与前面各行交换到第 1 行,新的最后一行再依次与前面各行交换到第 2 行,这样继续下去,共经过$\frac{n(n+1)}{2}$次行的交换(也称将行列式上下翻转)后得到 Vandermonde 行列式.

解

$$\begin{aligned} D_{n+1}&=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ a^2 & (a-1)^2 & \cdots & (a-n)^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix} \\ &=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n+1}[a-i+1-(a-j+1)] \\ &=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n+1}(j-i) \\ &=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n+1}(i-j) \\ &=n!(n-1)!\cdots 3!2!1!. \end{aligned}$$

注　也可将此行列式上下翻转,再左右翻转后进行计算.

例 1.16　计算三对角行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

解　将 D_n 按第 1 行展开,得

$$D_n=(a+b)D_{n-1}-ab\begin{vmatrix}1 & ab & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b\end{vmatrix}$$

$$=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2},$$

即得递推公式

$$D_n=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2}.$$

由以上关系式可得

$$\begin{aligned}D_n&=aD_{n-1}=b(D_{n-1}-aD_{n-2})=b^2(D_{n-2}-aD_{n-3})\\&=\cdots=b^{n-2}(D_2-aD_1)=b^{n-2}\left(\begin{vmatrix}a+b & ab\\ 1 & a+b\end{vmatrix}-a(a+b)\right)\\&=b^{n-2}[(a+b)^2-ab-a(a+b)]=b^n,\end{aligned}$$

于是得

$$\begin{aligned}D_n&=aD_{n-1}+b^n=a^2D_{n-2}+ab^{n-1}+b^n=\cdots\\&=a^{n-1}D_1+a^{n-2}b^2+\cdots+ab^{n-1}+b^n\\&=a^n+a^{n-1}b+\cdots+ab^{n-1}+b^n=\begin{cases}(n+1)a^n, & a=b,\\ \dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}, & a\neq b.\end{cases}\end{aligned}$$

注 也可按如下方法求解:由递推公式可得

$$\begin{cases}D_n-aD_{n-1}=b^n,\\ D_n-bD_{n-1}=a^n,\end{cases}$$

由该方程组解得

$$D_n=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}\quad(a\neq b).$$

例 1.17 设

$$D=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 4 & 1\\ 2 & 0 & 3 & 0\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{vmatrix}.$$

求 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$,其中 $A_{4j}(j=1,2,3,4)$为元素 a_{4j}的代数余子式.

分析　直接计算行列式某一行(列)的元素的代数余子式之和太麻烦，通常把行列式的相应行(列)的元素换成 1，再计算新的行列式.

解　把所给行列式的第 4 行全换成 1，再按第 4 行展开，有

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot A_{41} + 1\cdot A_{42} + 1\cdot A_{43} + 1\cdot A_{44}.$$

即

$$A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1 + r_4} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第 2 列}} (-1)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -19.$$

例 1.18　计算 6 阶行列式

$$D_6 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_1 & x_2 & 0 & 0 & x_3 & 0 \\ a_1 & b_1 & 1 & 1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & x_1 & x_2 & c_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & 0 & 0 & x_3^2 & 0 \\ a_3 & b_3 & x_1^2 & x_2^2 & c_3 & x_3^2 \end{vmatrix}.$$

解　利用 Laplace 定理展开，选择按 1，2，5 行展开. 这三行中有一个三阶非零子式，即

$$D_6 = (-1)^{1+2+5+3+4+6} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}$$

$$= -(x_2 - x_1)^2 (x_3 - x_1)^2 (x_3 - x_2)^2.$$

例 1.19 设 α,β,γ 是方程 $x^3+px+g=0$ 的根,证明:

$$D=\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \gamma & \alpha & \beta\\ \beta & \gamma & \alpha\end{vmatrix}=0.$$

解 因 α,β,γ 是方程 $x^3+px+g=0$ 的根,而此方程不含 x^2 的项,由根与系数的关系知 $\alpha+\beta+\gamma=0$,于是

$$D=\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \gamma & \alpha & \beta\\ \beta & \gamma & \alpha\end{vmatrix}\xlongequal[c_3+c_1]{c_2+c_1}\begin{vmatrix}\alpha+\beta+\gamma & \beta & \gamma\\ \alpha+\beta+\gamma & \alpha & \beta\\ \alpha+\beta+\gamma & \gamma & \alpha\end{vmatrix}=0.$$

例 1.20 当 λ 取何值时,齐次线性方程组

$$\begin{cases}(5-\lambda)x+2y+2z=0,\\ 2x+(6-\lambda)y=0,\\ 2x+(4-\lambda)z=0\end{cases}$$

有非零解.

解 若齐次线性方程组有非零解,则系数行列式 $D=0$,由

$$\begin{aligned}D&=\begin{vmatrix}5-\lambda & 2 & 2\\ 2 & 6-\lambda & 0\\ 2 & 0 & 4-\lambda\end{vmatrix}\\ &=(5-\lambda)(6-\lambda)(4-\lambda)-4(6-\lambda)-4(4-\lambda)\\ &=(5-\lambda)(2-\lambda)(8-\lambda),\end{aligned}$$

得 $\lambda_1=2$ 或 $\lambda_2=5$ 或 $\lambda_3=8$.

例 1.21 设

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0\\ c_{11} & \cdots & c_{1m} & b_{11} & \cdots & b_{1n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} & b_{n1} & \cdots & b_{nn}\end{vmatrix}$$

$$D_1=\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1m}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mm}\end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & \cdots & b_{nn}\end{vmatrix}.$$

证明 $D=D_1D_2$.

证明 记 $D=\det(d_{ij})$,其中

$$d_{ij}=a_{ij},\quad i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,m;$$

$$d_{m+i,m+j}=b_{ij}\,,\quad i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n.$$

在行列式

$$D=\begin{vmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{m1} & \cdots & d_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ d_{m+1,1} & \cdots & d_{m+1,m} & d_{m+1,m+1} & \cdots & d_{m+1,m+n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{m+n,1} & \cdots & d_{m+n,m} & d_{m+n,m+1} & \cdots & d_{m+n,m+n} \end{vmatrix}$$

中任取一个均布项

$$d_{1r_1}\cdots d_{mr_m}d_{m+1,r_{m+1}}\cdots d_{m+n,r_{m+n}}.$$

由于当 $i\leqslant m,j>m$ 时，$d_{ij}=0$，因此 $r_1,\cdots,r_m$ 只有在 $1,\cdots,m$ 中选取时，该均布项才可能不为 0，而当 $r_1,\cdots,r_m$ 在 $1,\cdots,m$ 中选取时，$r_{m+1},\cdots,r_{m+n}$ 只能在 $m+1,\cdots,m+n$ 中选取. 于是 D 中可能不为零的均布项可以记为

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{mp_m}b_{1q_1}\cdots b_{nq_n},$$

这里 $p_i=r_i,q_i=r_{m+i}-m$. 设 l 为排列 $p_1\cdots p_m(m+q_1)\cdots(m+q_n)$ 的逆序数，以 t,s 分别表示排列 $p_1p_2\cdots p_m$ 及 $q_1q_2\cdots q_n$ 的逆序数，应有 $l=t+s$. 于是

$$\begin{aligned} D &= \sum_{p_1\cdots p_m}\sum_{q_1\cdots q_n}(-1)^l a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{mp_m}b_{1q_1}b_{2q_2}\cdots b_{nq_n} \\ &= \sum_{p_1\cdots p_m}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{mp_m}\sum_{q_1\cdots q_n}(-1)^s b_{1q_1}b_{2q_2}\cdots b_{nq_n} \\ &= D_1D_2. \end{aligned}$$

□

四、疑难问题解答

1. 为什么说在一个 n 阶行列式 D 中等于 0 的元素个数大于 n^2-n，则行列式 D 的值等于 0.

答　n 阶行列式中共有 n^2 个元素，若 n^2 个元素中等于 0 的元素大于 n^2-n，则不等于 0 的元素就小于 $n^2-(n^2-n)=n$，即 n 阶行列式中不等于 0 的元素最多有 $n-1$ 个，而行列式每一项是取自不同行、不同列的 n 个元素乘积，从而每一项中至少有一个 0 元素，故其行列式的值为零.

2. 余子式与代数余子式有什么特点？它们之间有什么联系？

答　n 阶行列式 D 的元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 和代数余子式 A_{ij} 仅与 a_{ij} 所在的位置有关，而与元素 a_{ij} 所在的行、列的其他元素无关.

它们之间的联系是 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，且当 $i+j$ 为偶数时，二者相同；当 $i+j$ 为奇数时，二者互为相反数.

五、常见错误类型分析

1. 计算

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & ka_{33} \end{vmatrix}.$$

错误解法

$$D=k^2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

错因分析 行列式某行(列)有公因子时,可将每一行(列)的公因子提出.

正确解法

$$D=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

或

$$D=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & ka_{33} \end{vmatrix}.$$

2. 计算

$$D=\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}.$$

错误解法

$$D\xlongequal[c_3\text{ 拆开}]{\text{按 } c_1,c_2}\begin{vmatrix} ax & ay & az \\ ay & az & ax \\ az & ax & ay \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} by & bz & bx \\ bz & bx & by \\ bx & by & bz \end{vmatrix}$$

$$=a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}+b^3\begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$=(a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}.$$