第5章 图像傅里叶变换的MATLAB实现

计算机图像处理中，所谓图像变换就是为达到图像处理的某种目的而使用的一种数学技巧。图像函数经过变换后处理起来较变换前更加简单和方便，由于这种变换是对图像函数而言的，所以称为图像变换。现在研究的图像变换基本都是正交变换，通过正交变换可以减少图像数据的相关性，获取图像的整体特点，有利于用较少的数据量来表示原始图像，这对图像的分析、存储以及传输都是非常有意义的。

5.1 傅里叶变换的物理意义

从纯粹的数学意义上看，傅里叶变换是将一个图像函数转换为一系列周期函数来处理；从物理效果看，傅里叶变换是将图像从空间域转换到频域，其逆变换是将图像从频域转换到空间域。换言之，傅里叶变换的物理意义是将图像的灰度分布函数变换为图像的频率分布函数，傅里叶逆变换是将图像的频率分布函数变换为灰度分布函数。实际上，对图像进行二维傅里叶变换得到的频谱图，就是图像梯度的分布图。傅里叶频谱图上看到的明暗不一的亮点，实际上是图像上某一点与邻域点差异的强弱，即梯度的大小，也即该点的频率大小。如果频谱图中暗的点数更多，那么实际图像是比较柔和的；反之，如果频谱图中亮的点数多，那么实际图像一定是尖锐的，边界分明且边界两边像素差异较大。

5.2 傅里叶变换的定义

傅里叶变换分为一维连续傅里叶变换、一维离散傅里叶变换、二维连续傅里叶变换、二维离散傅里叶变换等。

5.2.1 一维连续傅里叶变换

假设函数 $f(x)$ 为实变量，且在 $(-\infty,+\infty)$ 内绝对可积，则 $f(x)$

的傅里叶变换定义如下：

$$F(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\pi ux}\,\mathrm{d}x$$

假设 $F(u)$可积，求 $f(x)$的傅里叶变换定义为：

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} F(u)\mathrm{e}^{2\mathrm{j}\pi ux}\,\mathrm{d}u$$

在积分区间内，$f(x)$必须满足只含有限个第一类间断点、有限个极值点和绝对可积的条件，并且 $F(u)$也是可积的。正、反傅里叶变换称为傅里叶变换对，并且是可逆的。正、反傅里叶变换的唯一区别是幂的符号。$F(u)$为一个复函数，由实部和虚部构成，如式(5-1)所示。

$$F(u)=R(u)+\mathrm{j}I(u) \tag{5-1}$$

由于 $F(u)$为复函数，根据复数的特点，可以知道复数的模和实部、虚部之间的关系，如式(5-2)所示；复数在实平面上的向量角度和实部、虚部之间的关系，如式(5-3)所示。

$$|F(u)|=\sqrt{[R(u)^2+I(u)^2]} \tag{5-2}$$

$$\theta(u)=\arctan\left[\frac{I(u)}{R(u)}\right] \tag{5-3}$$

其中，$|F(u)|$称为 $f(x)$的振幅谱或傅里叶谱；$F(u)$称为 $f(x)$的幅值谱；$\theta(u)$称为 $f(x)$的相位谱；$E(u)=F^2(u)$，$E(u)$称为 $f(x)$的能量谱。

5.2.2 一维离散傅里叶变换

对于有限长序列 $f(x)(x=0,1,\cdots,N-1)$，定义一维离散傅里叶变换对如下：

$$F(u)=\mathrm{DFT}[f(x)]=\sum_{x=0}^{N-1} f(x)W^{ux},\quad u=0,1,\cdots,N-1 \tag{5-4}$$

$$f(x)=\mathrm{IDFT}[F(u)]=\frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1} F(u)W^{-ux},\quad x=0,1,\cdots,N-1 \tag{5-5}$$

其中，$W=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}}$，称为变换核。由式(5-4)可见，给定序列 $f(x)$，可以求出其傅里叶谱 $F(u)$；反之由傅里叶谱 $F(u)$也可以求出 $f(x)$。离散傅里叶变换对可以简记为：

$$f(x)\leftrightarrow F(u) \tag{5-6}$$

离散傅里叶变换的矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} F(0) \\ F(1) \\ \vdots \\ F(N-1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & \cdots & W^0 \\ W^0 & W^{1\times1} & W^{2\times1} & \cdots & W^{(N-1)\times1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ W^0 & W^{1\times(N-1)} & W^{2\times(N-1)} & \cdots & W^{(N-1)\times(N-1)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(N-1) \end{bmatrix} \tag{5-7}$$

$$\begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(N-1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & \cdots & W^0 \\ W^0 & W^{-1\times1} & W^{-2\times1} & \cdots & W^{-(N-1)\times1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ W^0 & W^{-1\times(N-1)} & W^{-2\times(N-1)} & \cdots & W^{-(N-1)\times(N-1)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F(0) \\ F(1) \\ \vdots \\ F(N-1) \end{bmatrix} \tag{5-8}$$

5.2.3 二维连续傅里叶变换

从一维傅里叶变换很容易推广到二维傅里叶变换。

如果假设 $f(x,y)$为实变量，并且 $E(u,v)$可积，则存在以下傅里叶变换对，其中，u、v为频率变量：

$$F(u,v)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi(ux+vy)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5-9}$$

其逆变换为：

$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}F(u,v)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi(ux+vy)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{5-10}$$

与一维傅里叶变换一样，二维傅里叶变换可写为如下形式。

振幅谱为：

$$|F(u,v)|=\sqrt{[R^2(u,v)+I^2(u,v)]} \tag{5-11}$$

相位谱为：

$$\theta(u)=\arctan\left[\frac{I(u,v)}{R(u,v)}\right]$$

能量谱为：

$$p(u,v)=|F(u,v)|^2=[R^2(u,v)+I^2(u,v)] \tag{5-12}$$

振幅谱表明了各正弦分量出现了多少次，而相位谱信息表明了各正弦分量在图像中出现的位置。对于整幅图像来说，只要各正弦分量保持原相位，幅值就不那么重要了。所以大多数实用滤波器都只能影响幅值，而几乎不改变其相位信息。

5.2.4 二维离散傅里叶变换

一幅静止的数字图像可以看成二维数据阵列，因此，数字图像处理主要是二维数据处理。一维的 DFT 和 FFT 是二维离散信号处理的基础。

将一维离散傅里叶变换推广到二维，则二维离散傅里叶变换对被定义为：

$$F[f(x,y)]=F(u,v)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)} \tag{5-13}$$

$$F^{-1}[F(u,v)]=f(x,y)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}F(u,v)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)} \tag{5-14}$$

式中，$u,x=0,1,2,\cdots,M-1$；$v,y=0,1,2,\cdots,N-1$；x,y 为时域变量；u,v 为频域变量。

同一维离散傅里叶变换一样，系数 $1/MN$ 可以在正变换或逆变换中；也可以在正变换和逆变量前分别乘以 $1/\sqrt{MN}$，只要两式系数的乘积等于 $1/MN$ 即可。

二维离散函数的复数形式、指数形式、振幅、相角、能量谱的表示类似于二维连续函数相应的表达式。

下面通过一个矩形函数来帮助读者加深对二维傅里叶变换的理解。函数 $f(m,n)$只

在矩形中心区域有值，取值为1，其他区域取值为0，为了简单起见，将 $f(m,n)$ 显示为连续形式，矩形函数图如图5-1所示。

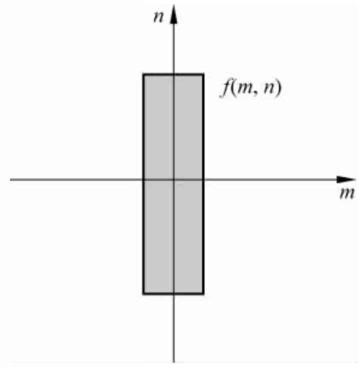

图 5-1　矩形函数图

图5-2显示了其二维离散傅里叶变换后的振幅谱图，其中最大值是 $F(0,0)$，是 $f(m,n)$ 所有元素的和。从图5-2中可以看出：高频部分水平方向的能量比垂直方向的能量更高，这是因为水平方向为窄脉冲，垂直方向为宽脉冲，而窄脉冲比宽脉冲含有更多的高频成分。

另一种显示二维傅里叶变换的方法是将 $\log_2|F(u,v)|$ 作为像素值，使用不同颜色来表示像素值的大小，如图5-3所示。

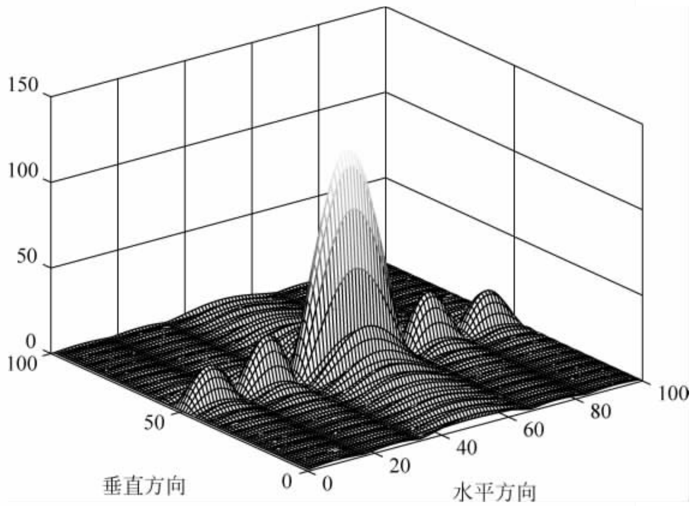

图 5-2　矩形函数的二维傅里叶变换振幅谱

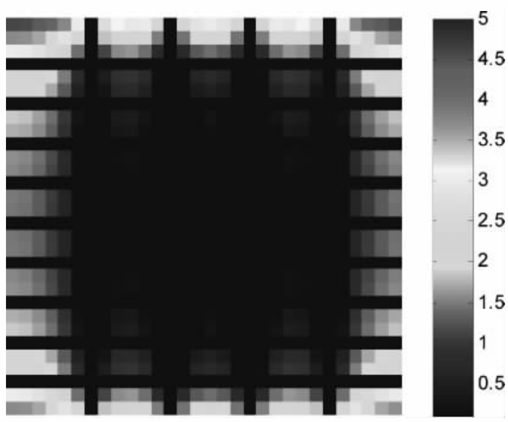

图 5-3　傅里叶变换幅度的对数显示

5.3 二维离散傅里叶变换的性质

离散傅里叶变换建立了函数在空间域与频域之间的转换关系，使在空间域难以显示的特征在频域中能够十分清楚地显示出来。在数字图像处理中，经常需要利用这种转换关系和转换规律。下面介绍二维离散傅里叶变换的基本性质。

1. 可分离性

如果图像函数 $f(x,y)$的傅里叶变换为 $F(u,v)$，图像函数 $g(x,y)$的傅里叶变换为 $G(u,v)$，则图像函数 $h(x,y)=f(x,y)\cdot g(x,y)$，它的傅里叶变换 $H(u,v)=F(u,v)\cdot G(u,v)$。

2. 线性

如果图像函数 $f_1(x,y)$的傅里叶变换为 $F_1(u,v)$，图像函数 $f_2(x,y)$的傅里叶变换函数为 $F_2(u,v)$，则 $af_1(x,y)+bf_2(x,y)$的傅里叶变换为 $aF_1(u,v)+bF_2(u,v)$。

3. 共轭对称性

如果 $f(x,y)$是实函数，则它的傅里叶变换具有共轭对称性：

$$F(u,v) = F^*(-u,-v)$$
$$|F(u,v)| = |F(-u,-v)|$$

其中，$F^*(u,v)$是 $F(u,v)$的复共轭。

4. 位移性

如果图像函数 $f(x,y)$的傅里叶变换为 $F(u,v)$，则 $f(x-x_0,y-y_0)$的傅里叶变换为 $F(u,v)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi(ux_0+vy_0)/N}$，$f(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi(u_0x+v_0y)/N}$的傅里叶变换为 $F(u-u_0,v-v_0)$。

5. 尺度变换性

如果图像函数 $f(x,y)$的傅里叶变换为 $F(u,v)$，则图像函数 $f(ax,by)$的傅里叶变换为$\frac{1}{|ab|}F\left(\frac{u}{a},\frac{v}{b}\right)$。

6. 周期性

傅里叶变换和逆变换均以 N 为周期，即：

$$F(u,v) = F(u+N,v) = F(u,v+N) = F(u+N,v+N)$$

傅里叶变换的周期性表明，尽管 $F(u,v)$对无穷多个 u 和 v 的值重复出现，但只需根据任意周期内的 N 个值就可以从 $F(u,v)$得到 $f(x,y)$。也就是说，只需一个周期内的变换就可以将 $F(u,v)$完全确定。这一性质对于 $f(x,y)$在空间域中也同样成立。

7. 旋转不变性

如果引入极坐标，使

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} u = \omega\cos\varphi \\ v = \omega\cos\varphi \end{cases}$$

则 $f(x,y)$和 $F(u,v)$分别表示为 $f(r,\theta)$，$F(\omega,\varphi)$。

在极坐标中，存在以下的变换对：

$$f(r,\theta+\theta_0)\Leftrightarrow F(\omega,\varphi+\theta_0)$$

该式表明，如果 $f(x,y)$在空域旋转 θ_0 角度，则相应的傅里叶变换 $F(u,v)$在频域上也旋转同一角度 θ_0。

8. 卷积性

如果图像函数 $f(x,y)$的傅里叶变换为 $F(u,v)$，图像函数 $g(x,y)$的傅里叶变换为 $G(u,v)$，则图像函数 $h_1(x,y)=f(x,y)*g(x,y)$，它的傅里叶变换 $H_1(u,v)=F(u,v)\cdot G(u,v)$；图像函数 $h_2(x,y)=f(x,y)\cdot g(x,y)$，它的傅里叶变换 $H_2(u,v)=F(u,v)*G(u,v)$。

5.4 傅里叶变换的实现

在 MATLAB 中，通过 fft 函数进行一维离散傅里叶变换，通过 ifft 函数进行一维离散傅里叶逆变换。这两个函数用法可通过 MATLAB 帮助文档了解。MATLAB 同时提供了 fft2 函数进行二维离散傅里叶变换，fft 函数与 fft2 函数的关系为 fft2(X)=fft(fft(X).').'。fft2 函数与 ifft2 函数的调用格式为：

Y = fft2(X)：返回二维离散傅里叶变换，结果 Y 和 X 的大小相同。其等价于变换形式 fft(fft(X).').'。

Y = fft2(X,m,n)：在变换前，把 X 截短或者添加 0 成 m×n 的数组，返回结果大小为 m×n。

Y = ifft2(X)：运用快速傅里叶逆变换(IFFT)算法，计算矩阵 X 的二维离散傅里叶逆变换值 Y。Y 与 X 的维数相同。

Y = ifft2(X,m,n)：计算矩阵 X 的二维离散傅里叶逆变换矩阵 Y。在变换前先将 X 补零到 m×n 矩阵。如果 m 或 n 比 X 的维数小，则将 X 截短。Y 的维数为 m×n。

y = ifft2(…, 'symmetric')：强制认为矩阵 X 为共轭对称矩阵计算矩阵 X 的二维离散傅里叶逆变换值 Y。

y = ifft2(…, 'nonsymmetric')：不强制认为矩阵 X 为共轭对称矩阵 X 的二维离散傅里叶逆变换值 Y。

【例 5-1】 实现图像的傅里叶变换。

```
>> clear all;
```

```
I = imread('cameraman.tif');                %导入图像
subplot(131);imshow(I);
title('原始图像');
J = fft2(I);                                %图像傅里叶变换
subplot(132);imshow(J);
title('傅里叶变换后图像');
K = ifft2(J)/255;                           %傅里叶逆变换
subplot(133);imshow(K);
title('傅里叶逆变换后图像')
```

运行程序,效果如图 5-4 所示。

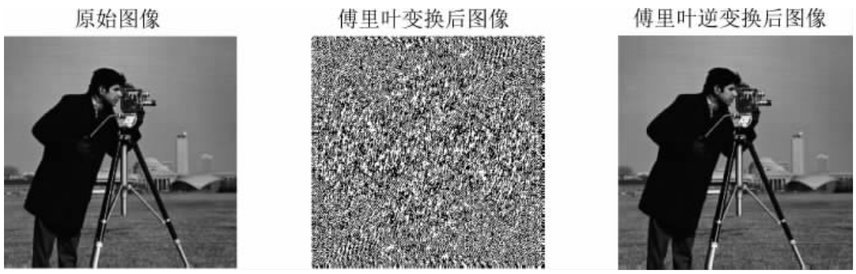

图 5-4 图像的傅里叶变换

在 MATLAB 中,可以通过 fftshift 函数将变换后的坐标原点移到频谱图窗口中央,坐标原点是低频,向外是高频。fftshift 函数的调用格式为:

Y = fftshift(X):把 fft 函数、fft2 函数和 fftn 函数输出的结果的零频率部分移到数组的中间。对于观察傅里叶变换频谱中间零频率部分十分有效。对于向量,fftshift(X)把 X 左右部分交换一下;对于矩阵,fftshift(X)把 X 的第一、第三象限和第二、第四象限交换;对于高维数组,fftshift(X)在每维交换 X 的半空间。

Y = fftshift(X,dim):把 fftshift 操作应用到 dim 维上。

【例 5-2】 图像变亮后进行傅里叶变换。

```
>> clear all;
I = imread('peppers.png');
J = rgb2gray(I);                            %将彩色图像转换为灰度图像
J = J * exp(1);                             %变亮
J(find(J > 255)) = 255;
K = fft2(J);                                %傅里叶变换
K = fftshift(K);                            %平移
L = abs(K/256);
figure;
subplot(121);imshow(J);
title('变亮后的图像');
subplot(122);imshow(uint8(L));              %频谱图
title('频谱图');
```

运行程序,效果如图 5-5 所示。

图 5-5　灰度图像变亮后进行傅里叶变换

5.5　傅里叶变换的应用

通过傅里叶变换将图像从时域转换到频域，对其进行相应处理，例如滤波和增强等；再通过傅里叶变换将图像从频域转换到时域。

5.5.1　在图像特征定义中的应用

傅里叶变换可用于与卷积密切相关的运算（correlation）。数字图像处理中的相关运算通常用于匹配模板，可用于对某些模板对应的特征进行定位。

【例 5-3】 假如希望在图像 text. tif 中定位字母 a，如图 5-6(a)所示，可以采用下面的方法定位。

解析：将包含字母 a 的图像与图像 text. png 进行相关运算，也就是对字母 a 的图像和图像 text. png 进行傅里叶变换，然后利用快速卷积的方法，计算字母 a 和图像 text. png 的卷积，提取卷积运算的峰值，即得到在图像 text. png 中对应字母 a 的定位结果。

```
>> clear all;
bw = imread('text.png');
a = bw(32:45,88:98);
subplot(1,2,1),imshow(bw);
title('原始图像');
subplot(1,2,2),imshow(a);
title('模板图像')
```

运行程序，效果如图 5-6 所示。

将模板 a 和 text. png 图像进行相关运算，就是先分别对其进行快速傅里叶变换，然后利用快速卷积的方法，计算模板和 text. png 的卷积。如图 5-7 所示，提取卷积运算结果的最大值，即图 5-7 右图所示的白色亮点，即得到图像 text. png 中字母 a 的定位结果。

```
>> clear all;
bw = imread('text.png');
a = bw(32:45,88:98);                                  % 从图像中提取字母 a
C = real(ifft2(fft2(bw). * fft2(rot90(a,2),256,256)));
```

```
subplot(121),imshow(C,[]);
title('模板与卷积')
max(C(:))
thresh = 60                                    %设定门限
subplot(122),imshow(C > thresh)
title('字母 a 定位')
```

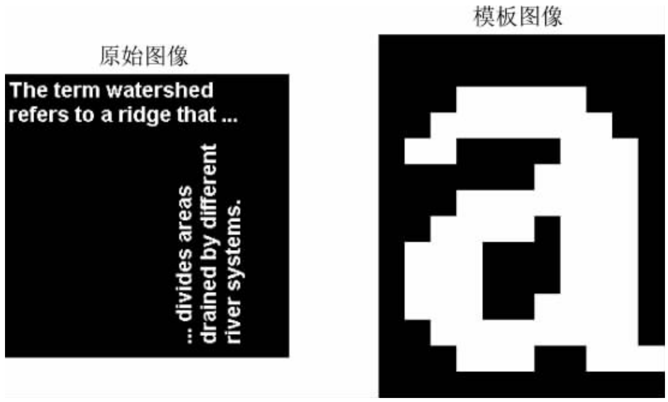

图 5-6　在图形中定位字母 a

运行程序,输出如下,效果如图 5-7 所示。

```
ans =
    68
thresh =
    60
```

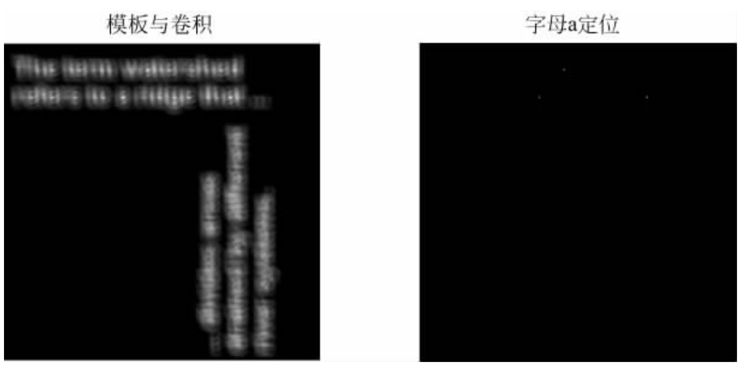

图 5-7　字母 a 的识别效果

5.5.2　在滤波器中的应用

巴特沃斯低通滤波器的传递函数为:

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + [D(u,v)/D_0]^{2n}}$$

其中，D_0 为截止频率，$D(u,v)=\sqrt{u^2+v^2}$。由于进行了中心化，频率的中心为$\left(\frac{M}{2},\frac{N}{2}\right)$，因此 $D(u,v)=\left[\left(u-\frac{M}{2}\right)^2+\left(v-\frac{N}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$。参数 n 为巴特沃斯滤波器的阶数，n 越大滤波器的形状越陡峭。

巴特沃斯高通滤波器的传递函数为：

$$H(u,v)=\frac{1}{1+[D_0/D(u,v)]^{2n}}$$

其参数的意义和巴特沃斯低通滤波器相同。

【例 5-4】 对图像进行巴特沃斯低通滤波器。

```
>> clear all;
I = imread('cameraman.tif');
I = im2double(I);
J = fftshift(fft2(I));                                    %傅里叶变换和平移
[x,y] = meshgrid(-128:127,-128:127);                      %产生离散数据
z = sqrt(x.^2 + y.^2);
D1 = 10;D2 = 35;                                          %滤波器的截止
n = 6;                                                    %滤波器的阶数
H1 = 1./(1 + (z/D1).^(2 * n));                            %滤波器
H2 = 1./(1 + (z/D2).^(2 * n));
K1 = J. * H1;
K2 = J. * H2;
L1 = ifft2(ifftshift(K1));                                %傅里叶逆变换
L2 = ifft2(ifftshift(K2));
subplot(131);imshow(I);
title('原始图像');
subplot(132);imshow(L1);                                  %显示载频频率为 10Hz
title('巴特沃斯低通滤波器(10Hz)');
subplot(133);imshow(L2);                                  %载频频率为 35Hz
title('巴特沃斯低通滤波器(35Hz)');
```

运行程序，效果如图 5-8 所示。

图 5-8　图像的巴特沃斯低通滤波效果

在程序中读入灰度图像，接着对图像进行二维离散傅里叶变换和平移，然后设计巴特沃斯低通滤波器，在频域对图像进行滤波，最后进行二维离散傅里叶逆变换。