第3章 多维随机变量及其分布

CHAPTER 3

第2章我们只讨论了一个随机变量的情况，但在很多实际问题中，试验结果通常需要用两个或两个以上的随机变量才能描述. 例如，炮弹弹着点的位置需要由它的横坐标X和纵坐标Y来确定，而横坐标和纵坐标是定义在同一个样本空间的两个随机变量. 再如，在制定我国的服装标准时，需同时考虑人体的上身长、臂长、胸围、下肢长、腰围、臀围等多个变量. 在很多情况下，对于同一个试验结果的各个随机变量之间，一般有某种联系，因而需要把它们作为一个整体来研究.

3.1 多维随机变量及其分布函数

3.1.1 二维随机变量

定义1 设随机试验E的样本空间为$\Omega=\{\omega\}$，$X(\omega)$，$Y(\omega)$分别是定义在同一个样本空间上的两个随机变量，称(X,Y)为定义在Ω上的**二维随机变量**(two-dimension random variables)或**二维随机向量**.

例如，炮弹弹着点的位置需由它的横坐标X和纵坐标Y来确定，这里(X,Y)是二维随机变量.

类似地，设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是定义在同一个样本空间Ω上的n个随机变量，称$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为***n*维随机变量**.

通常把二维或二维以上的随机变量称为多维随机变量. 相对于多维随机变量，称随机变量X为一维随机变量.

3.1.2 二维随机变量的联合分布函数

类似于一维随机变量，我们讨论二维随机变量的分布函数.

定义 2 设(X,Y)是二维随机变量,对任意实数 x,y,事件$\{X\leqslant x\}$与$\{Y\leqslant y\}$同时发生的概率 $P(\{X\leqslant x\}\cap\{Y\leqslant y\})$称为$(X,Y)$的**分布函数**或随机变量 X 和 Y 的**联合分布函数**(unity distribution function),记为 $F(x,y)$,即

$$F(x,y)=P(\{X\leqslant x\}\cap\{Y\leqslant y\})=P(X\leqslant x,Y\leqslant y).$$

若将二维随机变量(X,Y)看成是平面上随机点的坐标,则分布函数$F(x,y)$在(x,y)处的函数值就是随机点(X,Y)落在点(x,y)左下方无穷矩形域内的概率(参见图 3-1(a)). 由图 3-1(b),容易算出随机点(X,Y)落在矩形区域 $x_1<x\leqslant x_2,y_1<y\leqslant y_2$ 内的概率为

$$P(x_1<X\leqslant x_2,y_1<Y\leqslant y_2)=F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)-F(x_1,y_2).$$

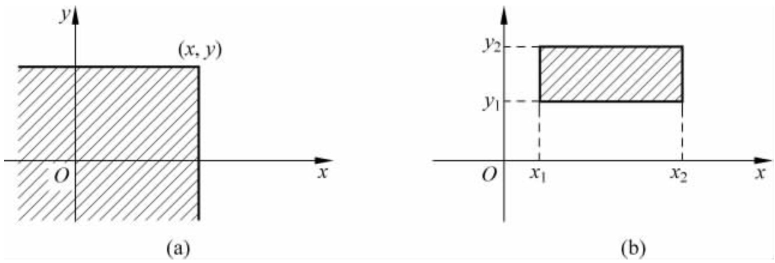

图 3-1

二维随机变量(X,Y)的分布函数 $F(x,y)$具有如下 4 条性质:

(1) 单调性 $F(x,y)$是分别关于变量 x 和 y 的不减函数,即当 $x_1<x_2$ 时,有

$$F(x_1,y)\leqslant F(x_2,y);\text{当 } y_1<y_2 \text{ 时,有 } F(x,y_1)\leqslant F(x,y_2).$$

(2) 有界性 $0\leqslant F(x,y)\leqslant 1$,且

$$F(-\infty,y)=0,\quad F(x,-\infty)=0,\quad F(-\infty,-\infty)=0,\quad F(+\infty,+\infty)=1.$$

(3) 右连续性 $F(x,y)$关于 x 右连续,关于 y 右连续,即

$$F(x+0,y)=F(x,y),\quad F(x,y+0)=F(x,y).$$

(4) 非负性 对于任意的实数 x_1,x_2,y_1,y_2, $x_1<x_2,y_1<y_2$,有

$$P(x_1<X\leqslant x_2,y_1<Y\leqslant y_2)=F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)-F(x_1,y_2)\geqslant 0.$$

3.1.3 二维随机变量的边缘分布函数

若二维随机变量(X,Y)的分布函数为 $F(x,y)$,则(X,Y)中随机变量 X 的分布函数称为(X,Y)关于 X 的边缘分布函数,记为 $F_X(x)$,即

$$F_X(x)=P(X\leqslant x)=P(X\leqslant x,Y<+\infty)=F(x,+\infty).$$

同理,二维随机变量(X,Y)关于 Y 的边缘分布函数,记为 $F_Y(y)$,即

$$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(X<+\infty,Y\leqslant y)=F(+\infty,y).$$

【例 1】 设二维随机变量(X,Y)的分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-y}), & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求 $P(0<X\leqslant 1,0<Y\leqslant 1)$，$P(0<X\leqslant 1)$.

解 $P(0<X\leqslant 1,0<Y\leqslant 1)=F(1,1)-F(1,0)-F(0,1)+F(0,0)$

$$=(1-e^{-2})(1-e^{-1})-0-0+0=(1-e^{-2})(1-e^{-1})$$

$$\approx 0.5466.$$

由边缘分布函数的定义，可得

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\begin{cases}1-e^{-2x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

则 $P(0<X\leqslant 1)=F_X(1)-F_X(0)=1-e^{-2}\approx 0.8647$.

3.1.4 n 维随机变量的联合分布函数

与二维随机变量类似，可定义 n 维随机变量的联合分布函数与边缘分布函数.

对任意 n 个实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，则 n 个事件$\{X_1\leqslant x_1\}$，$\{X_2\leqslant x_2\}$，$\cdots$，$\{X_n\leqslant x_n\}$同时发生的概率

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P(X_1\leqslant x_1,X_2\leqslant x_2,\cdots,X_n\leqslant x_n)$$

称为 n 维随机变量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的分布函数或随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的联合分布函数.

n 维随机变量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的边缘分布函数也可类似地定义，例如，其关于随机变量 X_1，(X_1,X_2)，(X_1,X_2,X_3)的边缘分布函数可分别表示为

$$F_{X_1}(x_1)=F(x_1,+\infty,+\infty,\cdots,+\infty),$$

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=F(x_1,x_2,+\infty,\cdots,+\infty),$$

$$F_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3)=F(x_1,x_2,x_3,+\infty,\cdots,+\infty).$$

习题 3.1

1. 判断

$$F(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}+(1-e^{-x})(1-e^{-y}), & x>0,y>0,\\ \dfrac{1}{2}, & \text{其他}\end{cases}$$

是否可以作为二维随机变量(X,Y)的分布函数?

2. 一电子器件包含两部分,分别以X,Y记这两部分的寿命(单位:h),设(X,Y)的分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-0.01x}-e^{-0.01y}+e^{-0.01(x+y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求:(1)$P(0<X\leqslant 100,0<Y\leqslant 100)$;(2)$P(0<X\leqslant 100)$.

3. 设二维随机变量(X,Y)的分布函数为

$$F(x,y)=A\left(B+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3}\right),\quad -\infty<x,y<+\infty.$$

求:(1)常数A,B;(2)$P(X\leqslant 2,Y\leqslant 3)$.

3.2 二维离散型随机变量

3.2.1 二维离散型随机变量的联合分布律

定义 1 若二维随机变量(X,Y)的所有可能取值是有限或可列个数对,则称(X,Y)是**二维离散型随机变量**(two-dimension discrete random variable).

定义 2 设二维离散型随机变量(X,Y)的所有可能取值为$(x_i,y_j)(i,j=1,2,\cdots)$,则称

$$p_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j),\quad i,j=1,2,\cdots$$

为二维离散型随机变量(X,Y)的**分布律**,或随机变量X和Y的**联合分布律**.

类似一维随机变量的分布律,(X,Y)的分布律需满足如下两个条件:

(1) 非负性 $p_{ij}\geqslant 0(i,j=1,2,\cdots)$;

(2) 规范性 $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=1$.

另外也可用表格表示二维离散型随机变量(X,Y)的分布律:

$X\backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\cdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

注 求二维离散型随机变量的分布律，关键是写出其所有可能的取值及取值的概率，通常写完后应验证所有概率的和是否为1.

【例1】 口袋中有五件产品，其中两件次品，三件正品，从袋中随机地取两次，每次取一件，取后放回. 设随机变量 X,Y 分别表示第一次、第二次取到的正品数，试求(X,Y)的分布律及 $P(X+Y=1)$.

解 随机变量 X,Y 的所有可能取值均为0,1,则

$$P(X=0,Y=0)=\frac{2\times 2}{5\times 5}=\frac{4}{25},\quad P(X=0,Y=1)=\frac{2\times 3}{5\times 5}=\frac{6}{25}.$$

同理可得

$$P(X=1,Y=0)=\frac{3\times 2}{5\times 5}=\frac{6}{25},\quad P(X=1,Y=1)=\frac{3\times 3}{5\times 5}=\frac{9}{25}.$$

于是(X,Y)的分布律为

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{4}{25}$	$\frac{6}{25}$
1	$\frac{6}{25}$	$\frac{9}{25}$

$$P(X+Y=1)=P(X=1,Y=0)+P(X=0,Y=1)=\frac{6}{25}+\frac{6}{25}=\frac{12}{25}.$$

【例2】 设随机变量 X 在1,2,3,4四个整数中等可能地取一个值，另一个随机变量 Y 在 $1\sim X$ 中等可能地取一整数值，试求(X,Y)的分布律及 $P(X=Y)$.

解 随机变量 X,Y 的所有可能取值均为1,2,3,4.

当 $1\leqslant j\leqslant i\leqslant 4$ 时，由乘法公式得

$$P(X=i,Y=j)=P(X=i)P(Y=j\mid X=i)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{i}=\frac{1}{4i}.$$

当 $j>i$ 时，$P(X=i,Y=j)=0$.

于是(X,Y)的分布律为

$X \backslash Y$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

$$\begin{aligned}P(X=Y)=&P(X=1,Y=1)+P(X=2,Y=2)+P(X=3,Y=3)+\\&P(X=4,Y=4)\\=&\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}=\frac{25}{48}.\end{aligned}$$

3.2.2 二维离散型随机变量的边缘分布律

定义 3 设(X,Y)为离散型的二维随机变量，其分布律为

$$p_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j),\quad i,j=1,2,\cdots.$$

对 j 求和所得的分布律

$$p_{i\cdot}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=\sum_{j=1}^{\infty}P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i),\quad i=1,2,\cdots$$

称为关于 X **的边缘分布律**(marginal distribution law).

类似地，对 i 求和可得 Y 的边缘分布律

$$p_{\cdot j}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=\sum_{i=1}^{\infty}P(X=x_i,Y=y_j)=P(Y=y_j),\quad j=1,2,\cdots.$$

边缘分布律也可以用如下表格表示.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$\sum_{j=1}^{\infty}p_{1j}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$\sum_{j=1}^{\infty}p_{2j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$p_{\cdot j}$	$\sum_{i=1}^{\infty}p_{i1}$	$\sum_{i=1}^{\infty}p_{i2}$	$\cdots$	$\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}$	$\cdots$	1

上表中，中间部分是(X,Y)的分布律，而边缘部分是(X,Y)关于 X 和关于 Y 的边缘分布律，这也是“边缘分布律”这个名词的来源.

【例 3】 求本节例 2 中二维随机变量(X,Y)关于 X 和关于 Y 的边缘分布律.

解 由本节例 2 中的分布律,可知

$$p_{1\cdot}=\frac{1}{4}+0+0+0=\frac{1}{4},\quad p_{2\cdot}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+0+0=\frac{1}{4}.$$

同理可求得 $p_{3\cdot}=p_{4\cdot}=\frac{1}{4}$.

$$p_{\cdot 1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}=\frac{25}{48},\quad p_{\cdot 2}=0+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}=\frac{13}{48}.$$

同理可求得 $p_{\cdot 3}=\frac{7}{48}$,$p_{\cdot 4}=\frac{1}{16}$.

列表得

$X \backslash Y$	1	2	3	4	$p_{i\cdot}$
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{4}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{25}{48}$	$\frac{13}{48}$	$\frac{7}{48}$	$\frac{1}{16}$	1

或写成

X	1	2	3	4
$p_{i\cdot}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Y	1	2	3	4
$p_{\cdot j}$	$\frac{25}{48}$	$\frac{13}{48}$	$\frac{7}{48}$	$\frac{1}{16}$

3.2.3 二维离散型随机变量的相互独立性

第 1 章中我们定义了两个事件的独立性,即如果有 $P(AB)=P(A)P(B)$,则称事件 A,B 相互独立. 现在把此概念推广到两个离散型随机变量上.

设有二维离散型随机变量(X,Y),如果记 $A=\{X=x_i\}$,$B=\{Y=y_j\}$,则由 $P(AB)=P(A)P(B)$得 $P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j)$. 由此可得下面的定义.

定义 4 设(X,Y)为二维离散型随机变量，其分布律为

$$p_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j),\quad i,j=1,2,\cdots.$$

若对(X,Y)的所有可能取值(x_i,y_j)，有

$$P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j),\quad i,j=1,2,\cdots,$$

则称随机变量 X 和 Y **相互独立**.

类似地，如果记 $A=\{X\leqslant x\}$，$B=\{Y\leqslant y\}$，可推出如下定义.

定义 5 设 $F(x,y)$及 $F_X(x)$，$F_Y(y)$分别是二维随机变量(X,Y)的分布函数及边缘分布函数，若对所有的$(x,y)\in\mathbb{R}^2$，有

$$F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y),$$

则称随机变量 X 和 Y **相互独立**.

【例 4】 设随机变量 X 与 Y 的联合分布律为

X \ Y	-1	0	1
-1	0.2	0.5	0
2	0.1	0.1	k

(1)求常数 k；(2)判断随机变量 X 与 Y 的独立性.

解 (1) $k=1-0.2-0.5-0.1-0.1=0.1$.

(2) 由已知可得，X 和 Y 的边缘分布律如下：

X \ Y	-1	0	1	$p_{i\cdot}$
-1	0.2	0.5	0	0.7
2	0.1	0.1	0.1	0.3
$p_{\cdot j}$	0.3	0.6	0.1	1

因为 $P(X=-1,Y=1)=0$，$P(X=-1)P(Y=1)=0.7\times0.1=0.7$，所以

$$P(X=-1,Y=1)\neq P(X=-1)P(Y=1),$$

即 X 与 Y 不相互独立.

【例 5】 设二维离散型随机变量(X,Y)的分布律为

X \ Y	1	2	3
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$
2	$\frac{1}{3}$	α	β

且 X 与 Y 相互独立，求 α,β.

解 由已知可求，X 和 Y 的边缘分布律如下：

X \ Y	1	2	3	$p_{i\cdot}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	α	β	$\frac{1}{3}+\alpha+\beta$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}+\alpha$	$\frac{1}{18}+\beta$	1

因为 X 与 Y 相互独立，故

$$\begin{cases}P(X=1,Y=2)=P(X=1)P(Y=2),\\P(X=1,Y=3)=P(X=1)P(Y=3),\end{cases}\quad \text{即}\quad \begin{cases}\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{9}+\alpha\right),\\\dfrac{1}{18}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{18}+\beta\right),\end{cases}$$

由此解得 $\alpha=\frac{2}{9},\beta=\frac{1}{9}$.

习题 3.2

1. 一口袋中有三个球，其中两个红球，一个白球，取两次，每次取一个，考虑两种情况：(1)放回抽样；(2)不放回抽样. 定义随机变量 X,Y 如下：

$$X=\begin{cases}1, & \text{若第一次取出的是红球},\\0, & \text{若第一次取出的是白球};\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & \text{若第二次取出的是红球},\\0, & \text{若第二次取出的是白球}.\end{cases}$$

试分别就(1)、(2)两种情况，写出(X,Y)的分布律.

2. 设(X,Y)的分布律为

X \ Y	0	1
0	0.56	0.24
1	0.14	0.06

求 $P\left(X\leqslant\frac{1}{2},Y\leqslant\frac{1}{2}\right),P(X\geqslant 1),P\left(X<\frac{1}{2}\right)$.

3. 设随机变量(X,Y)只能取下列数组中的值：$(0,0)$，$(-1,1)$，$\left(-1,\frac{1}{3}\right)$，$(2,0)$，且取这些值的概率依次为$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{12}$，$\frac{5}{12}$. 求：(1)此二维随机变量的分布律；(2)$X$和$Y$的边缘分布律；(3)判断$X$和$Y$是否相互独立？并说明理由.

4. 甲乙两人独立地各进行两次射击，已知甲的命中率为0.2，乙的命中率为0.5，以X和Y分别表示甲和乙的命中次数，求(X,Y)的分布律.

5. 设随机变量X和Y有如下的分布律：

X	0	1
p_i	0.5	0.5

Y	-1	0	1
p_i	0.25	0.5	0.25

且$P(XY=0)=1$.

(1)求X和Y的联合分布律；(2)判断X和Y是否相互独立？为什么？

6. 设二维随机变量(X,Y)的分布律为

X \ Y	0	2
0	$\frac{1}{3}$	a
2	b	$\frac{1}{6}$

已知事件$\{X=0\}$与事件$\{X+Y=2\}$相互独立，求a，b的值.

7. 随机变量Y服从参数$\lambda=1$的指数分布，随机变量

$$X_k=\begin{cases}0, & Y\leqslant k,\\ 1, & Y>k,\end{cases}\quad k=1,2.$$

求(X_1,X_2)的分布律及边缘分布律.

3.3 二维连续型随机变量

3.3.1 二维连续型随机变量的概率密度

定义 1 对于二维随机变量(X,Y)的分布函数$F(x,y)$，如果存在非负函数$f(x,y)$，