Resolución del examen de Selectividad de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II Andalucía – Junio de 2009

Antonio Francisco Roldán López de Hierro *

18 de junio de 2009

Opción A

Ejercicio 1 Sea la igualdad $A \cdot X + B = A$, donde A, X y B son matrices cuadradas de la misma dimensión.

(a) **(1 punto)** Despeje la matriz X en la igualdad anterior, sabiendo que A tiene inversa.

(b) **(2 puntos)** Obtenga la matriz X en la igualdad anterior, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN : **Apartado (a).** Primero se despeja $A \cdot X$ (pasando B restando al segundo miembro) y luego se multiplica por la inversa de A por la izquierda:

$$A \cdot X + B = A \quad \Leftrightarrow \quad A \cdot X = A - B \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (A - B) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad I \cdot X = A^{-1} \cdot A - A^{-1} \cdot B \quad \Leftrightarrow \quad X = I - A^{-1} \cdot B,$$

donde I es la matriz identidad de la misma dimensión que A. También hubiese valido $X = A^{-1} \cdot (A - B)$.

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot (A - B) = I - A^{-1} \cdot B}$$

Apartado (b). Teniendo en cuenta que el determinante de A es 1, su matriz inversa es:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj} A^T = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

* Profesor del *I.E.S. Acci* de Guadix (Granada) - http://www.ies-acci.com/antonioroldan/

De esta forma, podemos calcular la matriz X utilizando el apartado anterior:

$$X = I_2 - A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -19 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 19 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Concluimos que la matriz X solicitada es:

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -4 & 19 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}.}$$

■

Ejercicio 2 Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & \text{si } x < 0, \\ \dfrac{x}{x+1}, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

(a) **(2 puntos)** Analice la continuidad y la derivabilidad de la función f en su dominio.

(b) **(0'5 puntos)** Determine la asíntota horizontal, si la tiene.

(c) **(0'5 puntos)** Determine la asíntota vertical, si la tiene.

Solución: **Apartado (a).** En el intervalo abierto $\mathbb{R}^- =]-\infty, 0[$, la función f está definida de forma polinómica (un trozo de parábola), por lo que es continua y derivable en este intervalo. De la misma forma, En el intervalo abierto $\mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$, la función f está definida de forma racional (un trozo de hipérbola), de manera que el denominador no se anula en todo este intervalo (sólo lo hace en $x = -1$). Por tanto, en este otro intervalo, f también es continua y derivable. Hemos deducido, pues, que f es continua y derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, y queda por estudiar qué ocurre en $x = 0$.

- $f(0) = \dfrac{0}{0+1} = 0;$
- $\left. \begin{cases} f(0^-) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(x^2 + x\right) = 0 \\ f(0^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{0}{0+1} = 0 \end{cases} \right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0;$
- $f(0) = 0 = \lim\limits_{x \to 0} f(x).$

De las tres propiedades anteriores deducimos que f es continua en $x = 0$ y, por tanto, es continua en $\mathbb{R}$. Estudiamos a continuación su derivabilidad en $x = 0$. En puntos distintos de cero su primera derivada se obtiene derivando cada trozo:

$$x \neq 0, \quad f'(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{si } x < 0, \\ \dfrac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Estudiamos si existen los límites laterales de la función primera derivada en $x = 0$:

- $f'\left(0^-\right) = \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (2x+1) = 0+1 = 1;$
- $f'\left(0^+\right) = \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(0+1)^2} = 1.$

Como f es continua en $\mathbb{R}$, derivable alrededor de $x = 0$ y en este punto existen los límites laterales de la función derivada y son iguales, concluimos que f es derivable en $x = 0$ y su derivada en este punto coincide con los límites laterales de la derivada en dicho punto.

La función f es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

Apartado (b). A la izquierda (en $-\infty$), f no posee ninguna asíntota horizontal, pues coincide con una función parabólica (es todo caso, se dice que posee una *rama parabólica*). Se comprueba de una manera sencilla que:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \left(x^2 + x\right) = \lim_{x\to +\infty} \left((-x)^2 + (-x)\right) = \lim_{x\to +\infty} \left(x^2 - x\right) = +\infty.$$

Sin embargo, a la derecha (en $+\infty$), f coincide con una función hiperbólica, que posee una asíntota horizontal. Es sencillo calcular:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x+1} = 1.$$

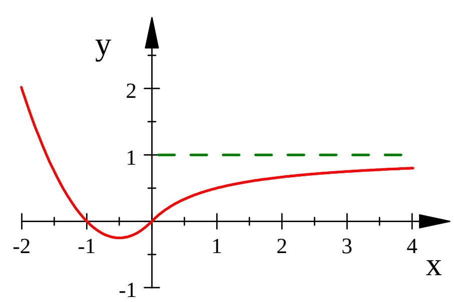
Por consiguiente, la recta $y = 1$ es asíntota horizontal de f (a la derecha).

La recta $y = 1$ es asíntota horizontal de la función f (a la derecha).

Apartado (c). La función f no posee ninguna asíntota vertical pues es continua en todo $\mathbb{R}$.

■

Dibujamos la función f para comprobar algunos de los datos del ejercicio anterior.



Ejercicio 3 Un turista que realiza un crucero tiene un 50 % de probabilidad de visitar Cádiz, un 40 % de visitar Sevilla y un 30 % de visitar ambas ciudades. Calcule la probabilidad de que:

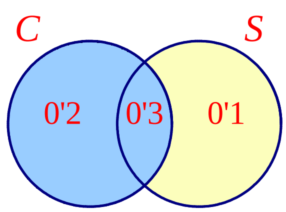
(a) **(0'5 puntos)** Visite al menos una de las dos ciudades.

(b) **(0'5 puntos)** Visite únicamente una de las dos ciudades.

(c) **(0'5 puntos)** Visite Cádiz pero no visite Sevilla.

(d) **(0'5 puntos)** Visite Sevilla, sabiendo que ha visitado Cádiz.

Solución : Llamemos C y S a los sucesos "elegido/a un/a turista al azar, éste/a visita Cádiz" o "Sevilla", respectivamente. Según los datos del enunciado, $p(C) = 0'5$, $p(S) = 0'4$ y $p(C \cap S) = 0'3$. Con estos datos, podemos realizar el siguiente *diagrama de Venn*:



De esta forma, todos los apartados son inmediatos. No obstante, utilizamos algunas fórmulas para justificarlos:

(a) $p(C \cup S) = p(C) + p(S) - p(C \cap S) = 0'5 + 0'4 - 0'3 = 0'6.$

(b) $p(\text{"una sóla ciudad"}) = p(C \setminus S) + p(S \setminus C) = (p(C) - p(C \cap S)) + (p(S) - p(C \cap S)) =$
$$= \big(0'5 - 0'3\big) + \big(0'4 - 0'3\big) = 0'2 + 0'1 = 0'3.$$

(c) $p(C \setminus S) = p(C) - p(C \cap S) = 0'5 - 0'3 = 0'2.$

(d) $p\left(\dfrac{S}{C}\right) = \dfrac{p(C \cap S)}{p(C)} = \dfrac{0'3}{0'5} = \dfrac{3}{5} = 0'6.$

(a) $p(C \cup S) = 0'6.$	**(b)** $p(\text{"una sóla ciudad"}) = 0'3.$
(c) $p(C \setminus S) = 0'2.$	**(d)** $p\left(\dfrac{S}{C}\right) = 0'6.$

■

Ejercicio 4 El tiempo (en horas) que permanecen los coches en un determinado taller de reparación es una variable aleatoria con distribución Normal de desviación típica 4 horas.

(a) **(1 punto)** Se eligieron, al azar, 16 coches del taller y se comprobó que, entre todos, estuvieron 136 horas en reparación. Determine un intervalo de confianza, al 98.5 %, para la media del tiempo que permanecen los coches en ese taller.

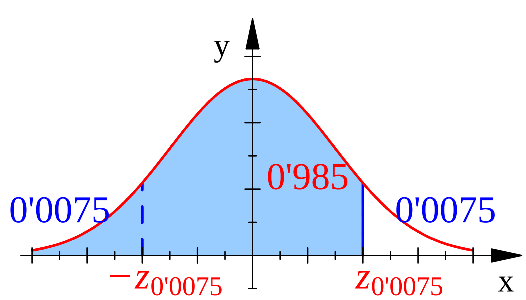
(b) **(1 punto)** Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra que permita estimar la media del tiempo que permanecen en reparación los coches en ese taller con un error en la estimación no superior a una hora y media y con el mismo nivel de confianza del apartado anterior.

Solución: Llamemos X a la variable aleatoria que mide el "tiempo (en horas) que permanece un coche, elegido al azar, en ese taller de reparación". De esta variable sabemos que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma = 4)$, donde la media μ es desconocida.

Apartado (a). Si se eligieron 16 coches al azar y, entre todos, estuvieron 136 horas en el taller, podemos decir que la media del tiempo que estuvieron estos coches en el taller es de $\bar{x} = 136/16 = 8'5$ horas. Como X sigue una distribución Normal, el intervalo de confianza para la media del tiempo que permanecen los coches en ese taller es:

$$I.C. = \left] \ \bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \right[.$$

Para aplicar esta fórmula, es necesario calcular el valor crítico $z_{\alpha/2}$ al nivel de confianza del 98'5 % (o lo que es lo mismo, a un nivel de significación $\alpha = 1'5\ \% = 0'015$). Para ello, recordamos que el número $z_{\alpha/2}$ es el único número real que cumple que $p\left(Z > z_{\alpha/2}\right) = \alpha/2 = 0'0075$, siendo Z una variable con distribución Normal estándar. Como disponemos de una tabla de colas a la izquierda, traducimos esta condición con el suceso opuesto, es decir, $p\left(Z \leq z_{\alpha/2}\right) = 1 - 0'0075 = 0'9925$. Buscamos este valor en la tabla de la distribución Normal estándar, encontrando el valor crítico $z_{\alpha/2} = z_{0'0075} = 2'43$, como se aprecia en el siguiente gráfico.



$Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$

De esta forma, el intervalo de confianza es:

$$I.C. = \left]\ \bar{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \right[= \left]\ 8'5 \pm 2'43\ \frac{4}{\sqrt{16}}\ \right[=]\ 8'5 \pm 2'43\ [=]\ 6'07, 10'93\ [\,.$$

$$\boxed{I.C. = \left]\ 6'07, 10'93\ \right[\,.}$$

Esto significa que el tiempo medio, μ, de permanencia de los coches en ese taller está entre 6'07 y 10'93 horas, al 98'5 % de confianza.

Apartado (b). Por otro lado, supongamos que queremos determinar un intervalo de confianza para la media μ con un error máximo de $E = 1'5$ horas al 98'5 % de confianza. Entonces debemos tomar una muestra aleatoria de un tamaño n que verifique:

$$n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2}\ \sigma}{E}\right)^2,$$

donde $z_{\alpha/2}$ es el mismo valor crítico que en el apartado anterior. Con estos datos, el tamaño mínimo n que debemos tomar en una muestra verifica:

$$n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2}\ \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2'43 \cdot 4}{1'5}\right)^2 = 6'48^2 = 41'9904.$$

Por consiguiente, para que el error cometido por el correspondiente intervalo de confianza para μ sea inferior a una hora y media, al 98'5 % de confianza, el menor número de coches que debemos tomar en una muestra aleatoria es de 42 de ellos.

$$\boxed{\text{42 coches.}}$$

■

Opción B

Ejercicio 1 (a) **(1'5 puntos)** Dibuje el recinto definido por las siguientes restricciones:

$$x + y \geq 2, \quad x - y \leq 0, \quad y \leq 4, \quad x \geq 0.$$

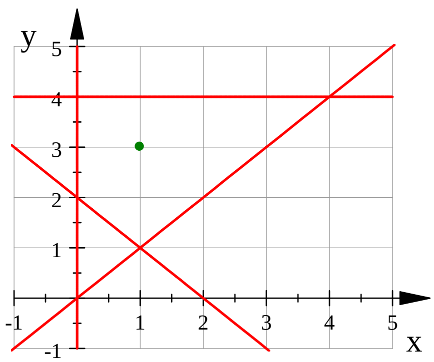
(b) **(1 punto)** Determine el máximo y el mínimo de la función $F(x, y) = x + y$ en el recinto anterior y los puntos donde se alcanzan.

(c) **(0'5 puntos)** ¿Pertenece el punto $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ al recinto anterior? Justifique la respuesta.

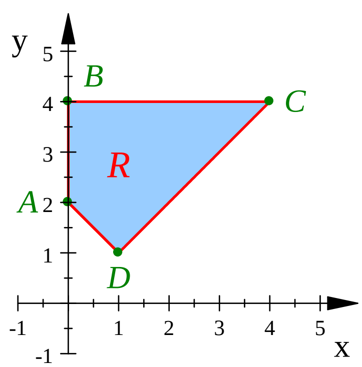
Solución : **Apartado (a).** Llamemos R al recinto determinado por las desigualdades anteriores. Para dibujar el recinto R, determinamos un par de puntos de cada recta (por ejemplo, donde corta a los ejes de coordenadas) que delimita el recinto, la cual se consigue estableciendo la iguadad en cada desigualdad.

$$x+y=2 \rightarrow \begin{cases} (2,0)\,, \\ (0,2)\,; \end{cases} \quad x-y=0 \rightarrow \begin{cases} (0,0)\,, \\ (1,1)\,. \end{cases} \quad y=4 \rightarrow \begin{cases} (0,4)\,, \\ (1,4)\,. \end{cases} \quad x=0 \rightarrow \begin{cases} (0,0)\,, \\ (0,1)\,. \end{cases}$$

Con estos puntos, ya podemos dibujar los bordes del recinto.



Buscamos cuál de estos recintos verifica todas las condiciones dadas, resultando el recinto en el que está el punto $(1,3)$ (marcado en el dibujo anterior). De esta forma, el recinto R es el siguiente:



Los vértices de la región R determinada por las restricciones dadas son:

$$A\,(0,2)\,, \quad B\,(0,4)\,, \quad C\,(4,4)\,, \quad D\,(1,1)\,.$$

Apartado (b). Consideremos la función $F\,(x,y)=x+y$. El *Teorema Fundamental de la Programación Lineal* afirma que la función F alcanza máximo y mínimo absolutos en la región acotada R, y que estos extremos deben estar situados en ciertos vértices del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores:

$$F\,(0,2)=2, \qquad F\,(0,4)=4, \qquad F\,(4,4)=8, \qquad F\,(1,1)=2.$$

Esto significa lo siguiente.

> El valor máximo de F en la región R es 8 y se alcanza en el punto $(4, 4)$. Igualmente, el valor mínimo de la función F en el recinto R es 2 y se alcanza en todos los puntos del segmento cerrado de extremos $(0, 2)$ y $(1, 1)$.

Apartado (c). El punto $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ no cumple la inecuación $x+y \geq 2$, ya que $\frac{1}{3}+\frac{4}{3} = \frac{5}{3} = 1'\widehat{6} < 2$. Por tanto, no pertenece al recinto R.

$$\boxed{\text{El punto } \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) \text{ no pertenece al recinto dado.}}$$

■

Ejercicio 2 Un estudio acerca de la presencia de gases contaminantes en la atmósfera de una ciudad indica que el nivel de contaminación viene dado por la función:

$$C(t) = -0'2t^2 + 4t + 25, \quad 0 \leq t \leq 25 \quad (t = \text{años transcurridos desde el año 2000}).$$

(a) **(1 punto)** ¿En qué año se alcanzará un máximo en el nivel de contaminación?

(b) **(1 punto)** ¿En qué año se alcanzará el nivel de contaminación cero?

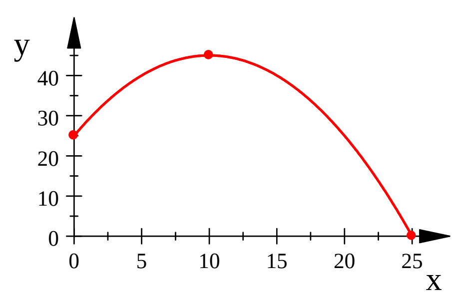
(c) **(1 punto)** Calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $C(t)$ en $t = 8$. Interprete el resultado anterior relacionándolo con el crecimiento o decrecimiento.

Solución: Como la función C es claramente un trozo de parábola cóncava, no nos cuesta ningún trabajo dibujarla. Su vértice está situado en:

$$t_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-0'4} = 10.$$

Con tres puntos de una tabla de valores (los extremos del intervalo de definición y el vértice de la parábola) podemos dibujar la función C:

t	$C(t)$
0	25
10	45
25	0



Apartado (a). El máximo de la función C está en $t = 10$, pues es su vértice. Por tanto, como partimos del año 2000,

el año de máxima contaminación será el año 2010.

Apartado (b). La función anterior únicamente vale cero (corta al eje de abscisas) cuando $t = 25$, por lo que deducimos que:

el año de contaminación cero será el año 2025.

Apartado (c). La pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $C = C(t)$ en $t = 8$ es la derivada $C'(8)$. Como $C'(t) = -0'4t + 4$, resulta que $C'(8) = -3'2 + 4 = 0'8 > 0$. Por consiguiente,

la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $C = C(t)$ en $t = 8$ es $C'(8) = 0'8$. Que esta pendiente sea positiva significa que la función $C = C(t)$ es estrictamente creciente en $t = 8$, es decir, el nivel de contaminación crece en 2008.

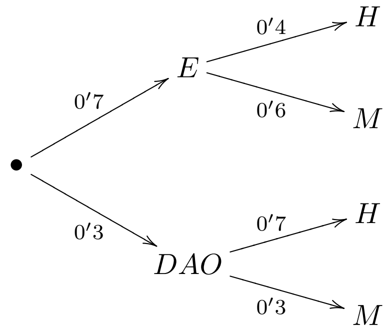
■

Ejercicio 3 En un centro escolar, los alumnos de 2^o de Bachillerato pueden cursar, como asignaturas optativas, Estadística o Diseño Asistido por Ordenador (DAO). El 70 % de los alumnos estudia Estadística y el resto DAO. Además, el 60 % de los alumnos que estudia Estadística son mujeres y, de los alumnos que estudian DAO son hombres el 70 %.

(a) **(1 punto)** Elegido un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre?

(b) **(1 punto)** Sabiendo que se ha seleccionado una mujer, ¿cuál es la probabilidad de que estudie Estadística?

Solución : Llamemos E y DAO a los sucesos "elegido/a un/a alumno/a al azar, éste/a estudia Estadística" o "Diseño Asistido por Ordenador", respectivamente. De la misma forma, llamemos H y M a los sucesos "elegido/a un/a alumno/a al azar, éste/a resulta ser hombre" o "mujer", respectivamente. El enunciado nos dice que $p(E) = 0'7$, por lo que $p(DAO) = 0'3$ ya que hay que elegir obligatoriamente alguna de las dos asignaturas. También sabemos que $p(M/E) = 0'6$, de donde $p\,(H/E) = 0'4$, y además $p\,(H/DAO) = 0'7$, de donde $p\,(M/DAO) = 0'3$. Con todas estas probabilidades construimos el siguiente diagrama en árbol:



Apartado (a). Aplicando el *Teorema de la Probabilidad Total*, deducimos que la probabilidad de que una persona, seleccionada al azar, sea un hombre es:

$$p(H) = p\,(E) \cdot p\left(\frac{H}{E}\right) + p\,(DAO) \cdot p\left(\frac{H}{DAO}\right) =$$

$$= 0'7 \cdot 0'4 + 0'3 \cdot 0'7 = 0'49.$$

Apartado (b). Como hay un 49 % de hombres, debe haber un 51 % de mujeres, por lo que $p\,(M) = 0'51$. Aplicando la definición de probabilidad condicionada:

$$p\left(\frac{E}{M}\right) = \frac{p\,(E \cap M)}{p\,(M)} = \frac{p\,(E) \cdot p\,\left(\frac{M}{E}\right)}{p\,(M)} = \frac{0'7 \cdot 0'6}{0'51} = \frac{0'42}{0'51} = \frac{42}{51} \approx 0'82353.$$

$$\boxed{\textbf{(a)}\quad p\,(H) = 0'51. \qquad \textbf{(b)}\quad p\left(\frac{E}{M}\right) = \frac{42}{51} \approx 0'82353.}$$

■

Ejercicio 4 En un estudio de mercado del automóvil en una ciudad se ha tomado una muestra aleatoria de 300 turismos, y se ha encontrado que 75 de ellos tienen motor diésel. Para un nivel de confianza del 94 %:

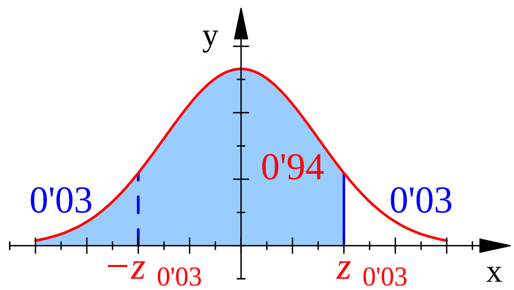
(a) **(1'5 puntos)** Determine un intervalo de confianza de la proporción de turismos que tienen motor diésel en esa ciudad.

(b) **(0'5 puntos)** ¿Cuál es el error máximo de la estimación de la proporción?

Solución: **Apartado (a).** Como hay 75 coches con motor diésel en una muestra de tamaño $n = 300$, la proporción muestral de coches con motor diésel es $\hat{p} = 75/300 = 0'25$. Dado que $n \geq 30$, $n \cdot \hat{p} = 300 \cdot 0'25 = 75 \geq 5$ y $n \cdot (1 - \hat{p}) = 300 \cdot 0'75 = 225 \geq 5$, podemos utilizar la aproximación de *De Moivre* para obtener la fórmula de intervalo del confianza para la proporción poblacional de coches en esa ciudad con motor diésel, que es:

$$I.C. = \left]\ \hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}}\ \right[.$$

Para aplicar esta fórmula, es necesario calcular el valor crítico $z_{\alpha/2}$ al nivel de confianza del 94 % (o lo que es lo mismo, a un nivel de significación $\alpha = 6\ \% = 0'06$). Para ello, recordamos que el número $z_{\alpha/2}$ es el único número real que cumple que $p\left(Z > z_{\alpha/2}\right) = \alpha/2 = 0'03$, siendo Z una variable con distribución Normal estándar. Como disponemos de una tabla de colas a la izquierda, traducimos esta condición con el suceso opuesto, es decir, $p\left(Z \leq z_{\alpha/2}\right) = 1 - 0'03 = 0'97$. Buscamos este valor en la tabla de la distribución Normal estándar, encontrando el valor crítico $z_{\alpha/2} = 1'88$ (realmente no es el valor exacto, pero es mejor aproximación que 1’89).



$Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

De esta forma, el intervalo de confianza es:

$$I.C. = \left] \ \hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}} \ \right[= \left] \ 0'25 \pm 1'88\sqrt{\frac{0'25 \cdot 0'75}{300}} \ \right[= \left] \ 0'25 \pm 0'047 \ \right[= \left] \ 0'203, 0'297 \ \right[.$$

Esto significa que, al 94 % de confianza, la proporción de coches con motor diésel en esa ciudad está en el intervalo:

$$\boxed{I.C. = \left] \ 0'203, 0'297 \ \right[,}$$

es decir, entre el 20’3 % y el 29’7 %.

Apartado (b). Si el intervalo de confianza es el anterior, el error máximo que puede cometer este intervalo (determinado al 94 % de confianza) es:

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}} = 1'88\sqrt{\frac{0'25 \cdot 0'75}{300}} = 0'047 = 4'7\ \%.$$

$$\boxed{\text{El error máximo de la estimación de la proporción es del 4'7 \%.}}$$

■