

UNIVERSIDAD DE GRANADA



COMPLEMENTOS DE FORMACIÓN PARA
INGENIERÍA ELECTRÓNICA

TRANSMISIÓN DE DATOS

Ángel de la Torre Vega

Dpto. Teoría de la Señal, Telemática y Comunicaciones

ORGANIZACIÓN DE LA ASIGNATURA

ORGANIZACIÓN DE LA ASIGNATURA

Asignatura: TRANSMISIÓN DE DATOS
Tipo: Complementos de Formación para Ingeniería Electrónica
Profesor: Ángel de la Torre Vega
Dpto: Teoría de la Señal, Telemática y Comunicaciones
Ubicación: E.T.S.I.I.T., planta 2, despacho 22
Material: <http://www.ugr.es/~atv>

Horario:

Teoría:	Aula A4
	Martes de 13 a 14 Miércoles de 13 a 14
Prácticas:	Salas 5 y 7 de ordenadores
	Miércoles de 8 a 10, sala 7 Miércoles de 10 a 12, sala 7 Miércoles de 16 a 18, sala 5 (petición 66 - 2005/06)

ORGANIZACIÓN DE LA ASIGNATURA

- Distribución de créditos (6 créditos en total):
 - Teoría: 3 créditos (30 horas)
 - Prácticas: 3 créditos (30 horas)

- Prácticas de laboratorio:
 - Prácticas de simulación
 - Software de simulación: MATLAB + SIMULINK
 - 10 sesiones de 2 horas

- Evaluación:
 - Examen final de teoría y problemas
 - Prácticas: trabajo en laboratorio y memoria de prácticas

CONTENIDOS

- Tema 1: INTRODUCCIÓN
- Tema 2: ANÁLISIS DE SEÑALES
- Tema 3: TRANSMISIÓN DE SEÑALES
- Tema 4: SISTEMAS DE COMUNICACIÓN DIGITAL
- Tema 5: MODULACIÓN DE AMPLITUD (Modulación lineal)
- Tema 6: MODULACIÓN ANGULAR

Tema 1: INTRODUCCIÓN

1.1.- Sistemas de comunicación.

1.2.- Mensajes analógicos y digitales:

- Conversión A/D.
- Inmunidad al ruido de las señales digitales.

1.3.- SNR, ancho de banda y velocidad de transmisión.

1.4.- Modulación.

1.5.- Aleatoriedad, redundancia y codificación.

Tema 2: ANÁLISIS DE SEÑALES

2.1.- Introducción.

2.2.- Series trigonométrica y exponencial de Fourier.

2.3.- La transformada de Fourier. Existencia. Ejemplos.

2.4.- Propiedades de la transformada de Fourier.

2.5.- El teorema de muestreo:

- Error de aliasing.
- Reconstrucción de la señal.
- Muestreo real.
- Sistemas de comunicación por pulsos.
- Multiplexado temporal.

Tema 3: TRANSMISIÓN DE SEÑALES

3.1.- Transmisión sin distorsión en sistemas lineales:

- Filtros ideales.

3.2.- Distorsión provocada por el canal:

- Distorsión lineal y no-lineal. Efecto multipath.

3.3.- Ancho de banda y velocidad de transmisión.

3.4.- Densidad de energía espectral:

- Autocorrelación y densidad de energía espectral.
- Energía de señales moduladas.

3.5.- Densidad de potencia espectral:

- Autocorrelación y densidad de potencia espectral.
- Densidad de potencia espectral en señales moduladas.

3.6.- Densidad de potencia espectral del ruido.

Tema 4: SISTEMAS DE COMUNICACIÓN DIGITAL

- 4.1.- Conversión A/D. PCM y modulación delta.
- 4.2.- Multiplexado digital.
- 4.3.- Codificación de línea.
- 4.4.- Conformación de pulsos.
- 4.5.- Aleatorización (scrambling).
- 4.6.- Repetidores regenerativos. Ecualización.
- 4.7.- Probabilidad de error en detección.
- 4.8.- Comunicaciones M-arias.
- 4.9.- Sistemas digitales con portadora.

Tema 5: MODULACIÓN DE AMPLITUD

- 5.1.- Comunicaciones en banda base y con portadora.
- 5.2.- Modulación de amplitud: Doble banda lateral (DSB).
- 5.3.- Modulación de amplitud (AM).
- 5.4.- Modulación de amplitud: Banda lateral única (SSB):
 - Modulación en cuadratura de fase (QAM).
- 5.5.- Errores de frecuencia y fase en demodulación síncrona.
- 5.6.- Modulación de amplitud: Banda lateral residual (VSB).
- 5.7.- Sistemas digitales con portadora.
- 5.8.- Interferencia y ruido en sistemas AM.
- 5.9.- Multiplexado por división de frecuencia.
- 5.10.- El receptor superheterodino.

Tema 6: MODULACIÓN ANGULAR

6.1.- Ángulo generalizado y modulación angular:

- Modulación de fase (PM) y frecuencia (FM).

6.2.- Ancho de banda en modulación angular:

- FM de banda ancha (WBFM) y de banda estrecha (NBFM).

6.3.- Aplicaciones de FM.

6.4.- Generación de señales FM:

- Método indirecto de Armstrong.
- Generación directa.

6.5.- Demodulación de señales FM:

- Discriminadores y detectores de cruces por cero.
- Sistemas PLL.

6.6.- Interferencia y ruido en modulación angular:

- Preénfasis y deénfasis. Efecto umbral

6.7.- FM estéreo.

BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

- **B.P. Lathi: “Modern digital and analog communication systems”. Holt, Rinehart and Winston, Inc. 1989.**
- H. Stark, F.B. Tuteur, J.B. Anderson: “Modern electrical communications”. Prentice Hall. 1988.
- B.P. Lathi: “Introducción a la teoría y sistemas de comunicación”. Limusa. 1974.
- M. Faúndez Zanuy. “Sistemas de comunicaciones”. Marcombo. 2001.
- The MATLAB Curriculum Series: “The student edition of MATLAB”. Prentice Hall. 1992.
- “Simulink user’s guide”. The Math Works. 1993.

Tema 1:

INTRODUCCIÓN

Tema 1: INTRODUCCIÓN

1.1.- Sistemas de comunicación.

1.2.- Mensajes analógicos y digitales:

- Conversión A/D.
- Inmunidad al ruido de las señales digitales.

1.3.- SNR, ancho de banda y velocidad de transmisión.

1.4.- Modulación.

1.5.- Aleatoriedad, redundancia y codificación.

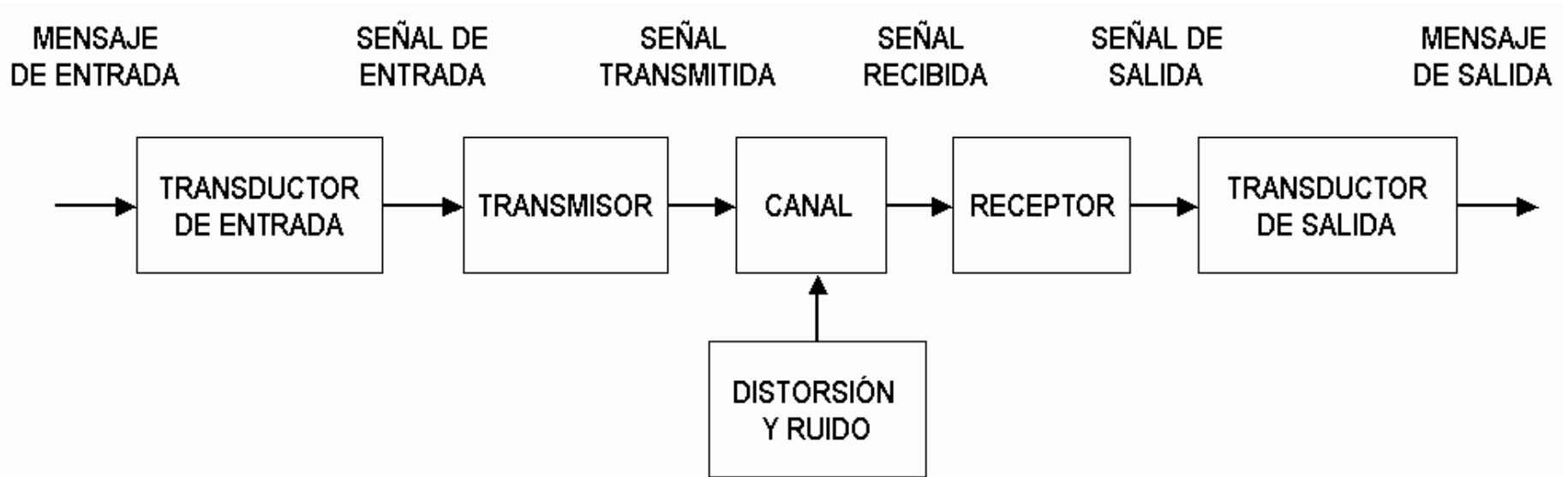
OBJETIVO DE LA ASIGNATURA

- TRANSMISIÓN DE DATOS:
 - TRANSMISIÓN DE INFORMACIÓN
 - SISTEMAS DE COMUNICACIONES

- Dos cuestiones básicas:
 - ¿Cómo funcionan los sistemas de comunicaciones?
 - ¿Cómo se comportan en presencia de ruido?

- Herramientas básicas:
 - Análisis de señales (análisis de Fourier)
 - Teoría de la Probabilidad

1.1.- SISTEMAS DE COMUNICACIÓN



- **Origen:** genera el mensaje.
- **Transductor de entrada:** convierte el mensaje de entrada en señal eléctrica (señal en banda-base).
- **Transmisor:** adapta la señal para transmisión (conversión A/D, modulación, pre-énfasis, etc.).
- **Canal:** medio físico de transmisión (atenuación, distorsión, ruido).
- **Receptor:** deshace las operaciones efectuadas por el transmisor.
- **Transductor de salida:** proporciona el mensaje en su forma original.

EFECTOS DEL CANAL:

- Distorsión lineal: Provocada por la característica de filtro del canal:
 - Atenúa las distintas componentes de frecuencia.
 - Desfasa las distintas componentes de frecuencia.
- Distorsión no lineal: Si la atenuación depende de la amplitud de la señal.
- Ruido: Señal aleatoria e impredecible añadida a la señal transmitida:
 - Externo: máquinas eléctricas, iluminación, tormentas, etc.
 - Interno: movimiento de electrones, difusión y recombinación de portadores, etc.

RELACIÓN SEÑAL - RUIDO (SNR):

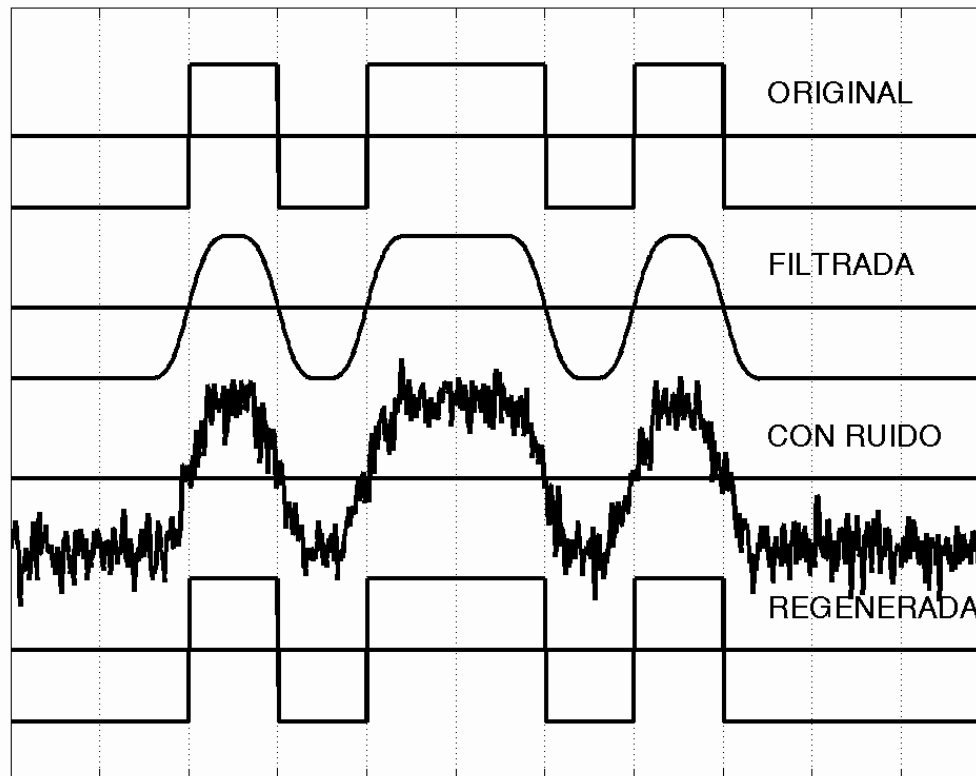
- SNR: Relación entre la potencia de la señal y la potencia del ruido.
- La SNR disminuye a lo largo del canal:
 - Cada vez más potencia de ruido.
 - Cada vez menos potencia de señal (por atenuación).

1.2.- MENSAJES ANALÓGICOS Y DIGITALES

- **Digitales:** Los mensajes están formados a partir de un alfabeto de símbolos discretos (ej. morse, texto escrito, etc.).
 - Binarios: dos símbolos (0 y 1) ó dos amplitudes ($-A/2$ y $+A/2$).
 - M -arios: M símbolos ó M amplitudes ($\pm A/2, \pm 3A/2, \dots$).
- **Analógicos:** Los mensajes están formados por una magnitud que puede tomar cualquier valor en un intervalo continuo (p.ej. imagen, voz, temperatura, etc.). La onda varía de forma continua con el mensaje.

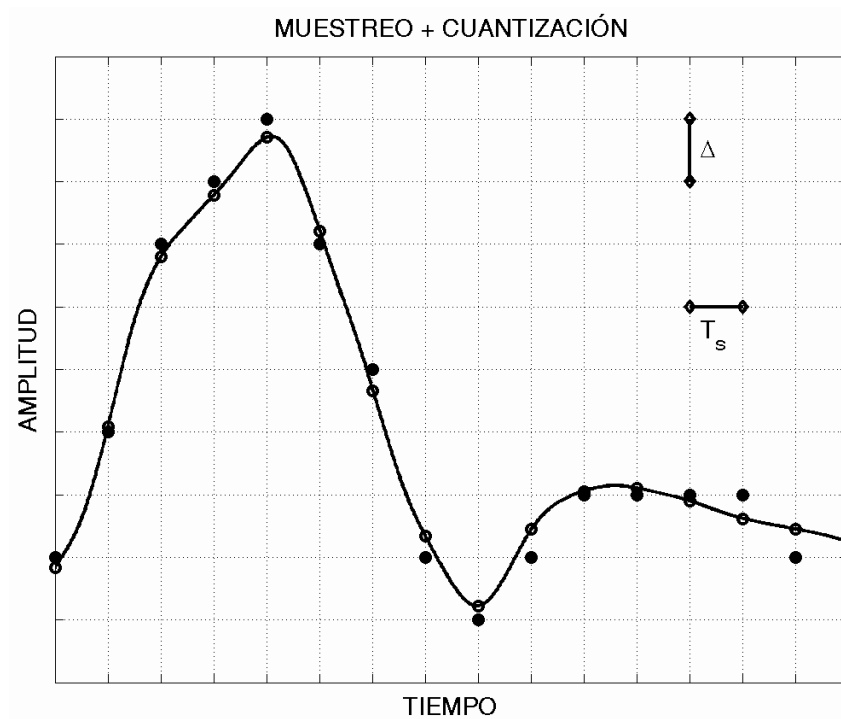
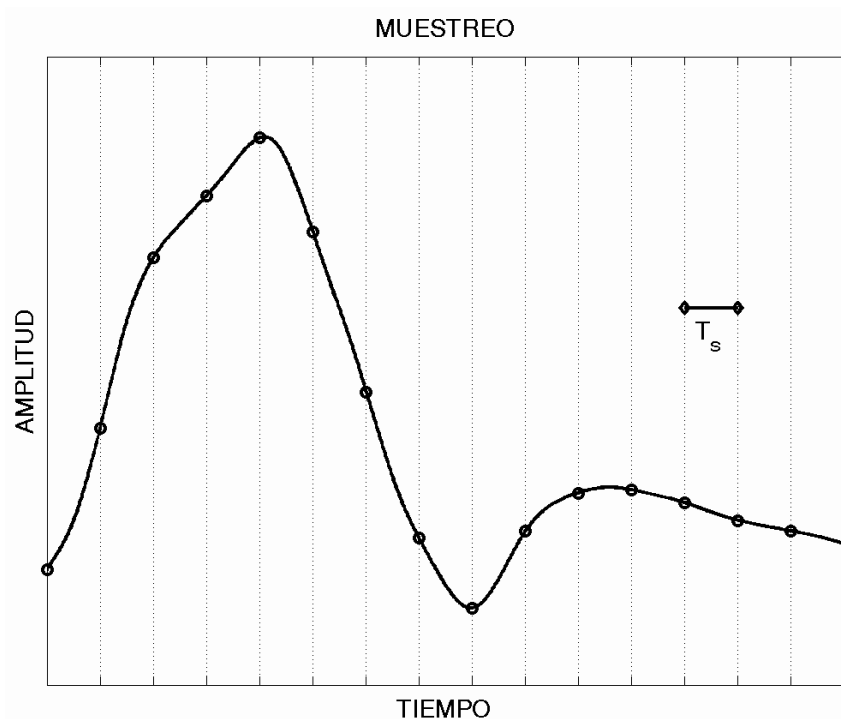
VENTAJAS DE LOS MENSAJES DIGITALES:

- **Robustez:** En la recepción, los mensajes digitales son más robustos frente a los efectos del canal, dado que la información no está codificada en la forma de onda, sino en la existencia o no de un pulso.
- **Regeneración:** El efecto regenerativo de los repetidores digitales permite reconstruir la forma original de los pulsos a lo largo del canal, eliminando el efecto acumulativo de la distorsión y el ruido del canal.



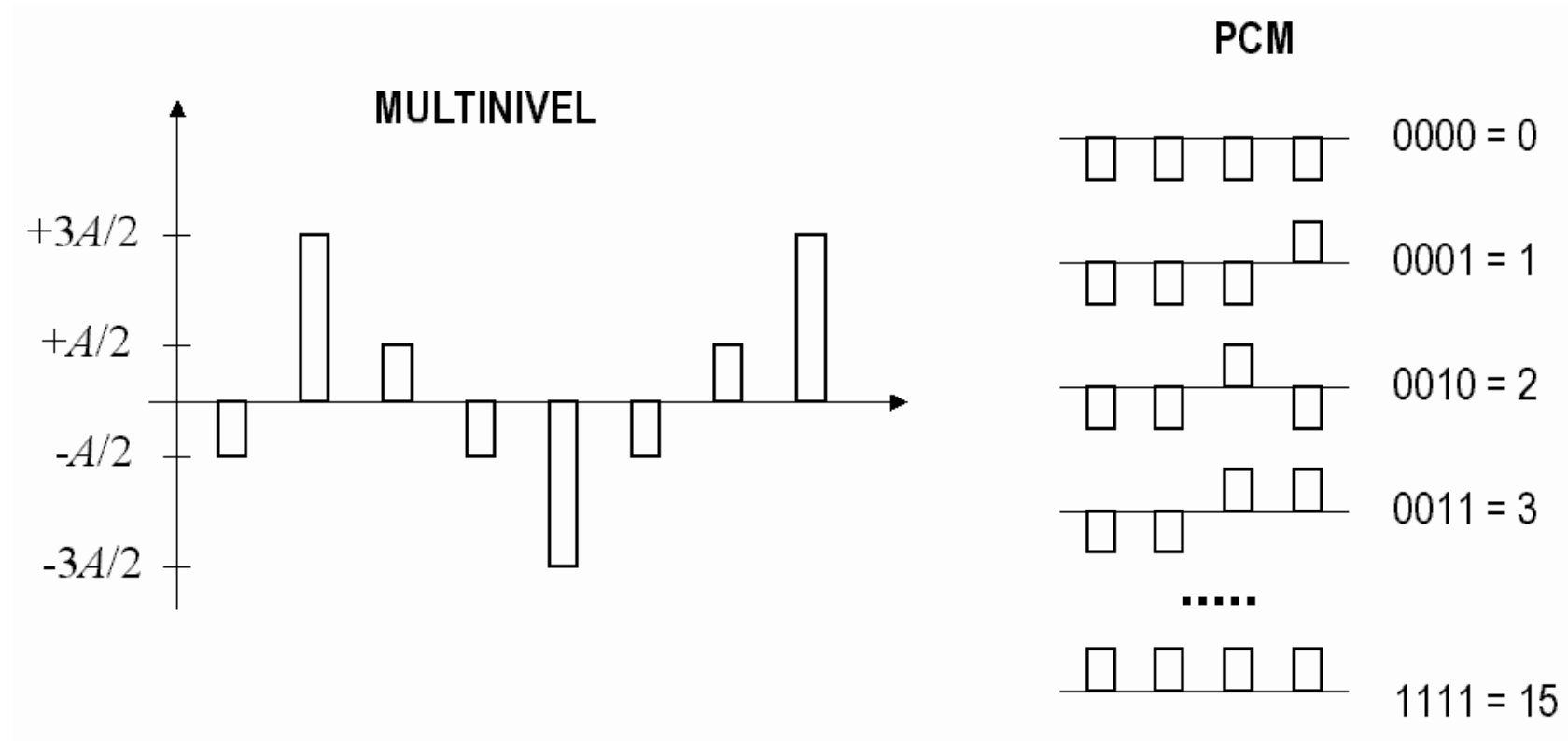
CONVERSIÓN A/D:

- **Objetivo:** Transmitir un mensaje analógico mediante técnicas digitales.
- **Muestreo:** Discretización temporal \Rightarrow Teorema de muestreo.
- **Cuantización:** Discretización de amplitud \Rightarrow Error de cuantización.



MODOS DE TRANSMISIÓN DIGITAL:

- **Multinivel:** Transmisión de un pulso de amplitud cuantizada (p.ej. $\pm A/2$, $\pm 3A/2$, $\pm 5A/2$, ...).
- **PCM:** Transmisión de m pulsos de amplitudes $\pm A/2$ como representación binaria del valor cuantizado de la amplitud.



INMUNIDAD AL RUIDO DE LAS SEÑALES DIGITALES:

- Con una separación A entre pulsos suficientemente grande (en torno a entre 5 y 10 veces la amplitud rms del ruido), la probabilidad de error es del orden de 10^{-6} .
- Queda el error de cuantización, que puede reducirse disminuyendo el intervalo de cuantización (si bien esto aumenta el número de pulsos a transmitir en PCM, y la potencia en multinivel).
- Gracias a los repetidores regenerativos, se puede eliminar el efecto acumulativo del ruido, y por tanto, construir enlaces de calidad prácticamente ilimitada.

1.3.- SNR, ANCHO DE BANDA Y VELOCIDAD DE TRANSMISIÓN

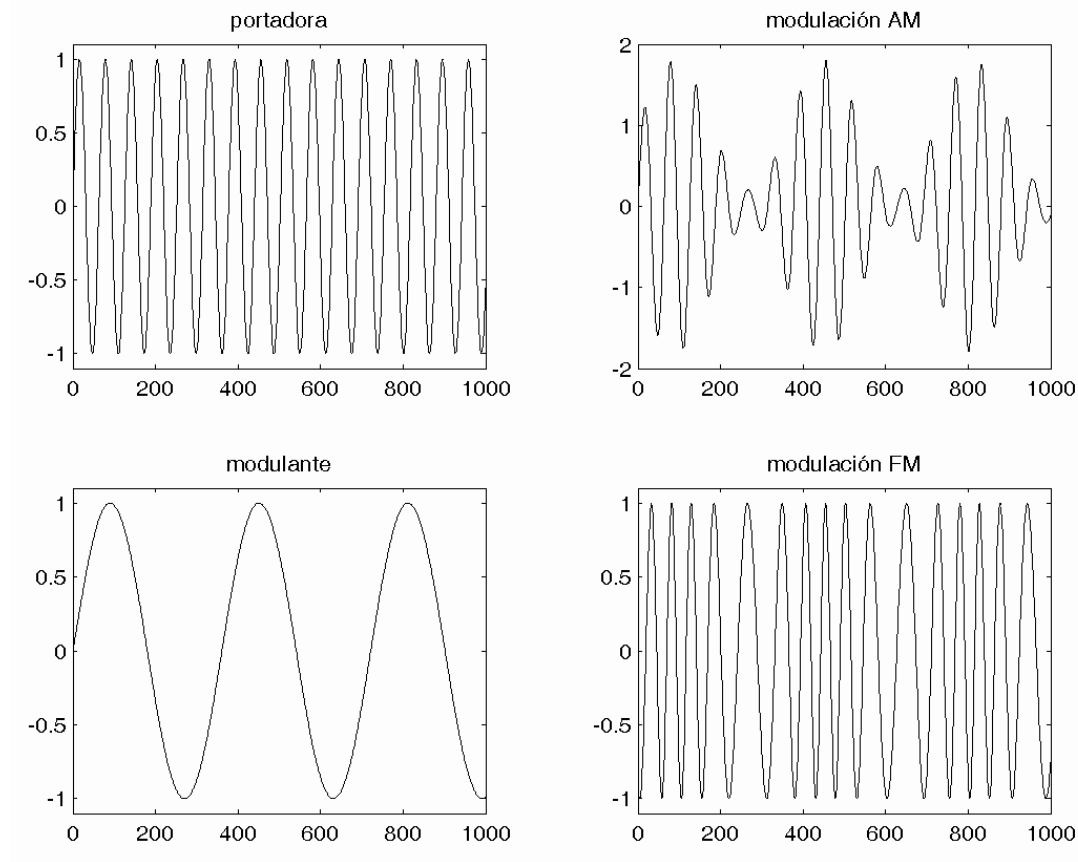
- **Ancho de banda B** : Es el rango de frecuencias a las que un canal puede transmitir con fidelidad razonable. Está relacionado con la velocidad de transmisión. Cuanto mayor sea la velocidad de transmisión, más ancho de banda se necesita.
- **Potencia S** : Está relacionada con la calidad de la comunicación. Si se aumenta S , aumenta la SNR y se pueden introducir más niveles.
- **Intercambio $S - B$** : Si aumentamos la potencia (mayor SNR) mayor capacidad de canal. Si aumentamos el ancho de banda, mayor capacidad de canal. Relación teórica:
$$\text{SNR}_2 = \text{SNR}_1^{(B_1/B_2)}.$$
- **Ecuación de Shannon**: Capacidad del canal C (máxima cantidad de información que puede transmitir un canal, en bits por segundo) dada por:

$$C = B \log_2(1 + \text{SNR})$$

Una determinada capacidad de canal se puede alcanzar mediante diferentes combinaciones de B y S .

1.4.- MODULACIÓN

- **Modulación:** Modificación de los parámetros de una portadora (la amplitud, la frecuencia, la fase).



MODULACIÓN:

- **Adaptación:** La modulación desplaza el rango de frecuencias de la señal, adaptándolo al canal.
- **Facilidad de radiación:** $100\text{Hz} - 3000\text{Hz} \Rightarrow 3000 \text{ km} - 100 \text{ km}$. Frecuencia de 1MHz equivale a longitud de onda de 300 m (antena de unos 30 m).
- **Transmisión simultánea:** Mediante multiplexado en frecuencia.
- **Intercambio SNR- B :** Se puede conseguir mediante el índice de modulación en FM.

1.5.- ALEATORIEDAD, REDUNDANCIA Y CODIFICACIÓN

- **Aleatoriedad:** Está relacionada con la cantidad de información de un mensaje. Cantidad de información:

$$I = -\log(P) = \log(1/P)$$

Se puede maximizar la velocidad de transmisión de un mensaje asociando códigos de longitud variable a los símbolos (p.ej. código Morse).

- **Redundancia:** Juega un papel importante en las comunicaciones. Añadiendo información redundante se pueden detectar y/o corregir errores.

Ejemplo: Si al código 0001 se le añade un pulso adicional (bit de paridad) para que el número de 1's sea par (paridad par), se obtiene 00011. Con este sistema, los códigos 10011 y 01011 se puede asegurar que son erróneos. Este sistema no detectaría errores en dos pulsos. Otros esquemas además de detectar errores de transmisión, permiten corregirlos.

Tema 2:

ANÁLISIS DE SEÑALES

Tema 2: ANÁLISIS DE SEÑALES

2.1.- Introducción.

2.2.- Series trigonométrica y exponencial de Fourier.

2.3.- La transformada de Fourier. Existencia. Ejemplos.

2.4.- Propiedades de la transformada de Fourier.

2.5.- El teorema de muestreo:

- Error de aliasing.
- Reconstrucción de la señal.
- Muestreo real.
- Sistemas de comunicación por pulsos.
- Multiplexado temporal.

2.1.- INTRODUCCIÓN

- Cualquier señal puede representarse como una superposición (discreta o continua) de funciones sinusoidales de diferentes amplitudes, frecuencias y fases.
- Espectro de una señal: Distribución de amplitudes, frecuencias y fases de las sinusoides que componen la señal.
- Representación en frecuencia: El espectro de una señal constituye una representación equivalente y alternativa a la representación temporal de la señal:
 - Representación en el dominio del tiempo $x(t)$.
 - Representación en el dominio de la frecuencia $X(f)$.

2.2.- SERIES Trigonométrica y Exponencial de FOURIER

- **Señal periódica:** verifica la propiedad: $g(t) = g(t + T_0)$ con $T_0 \neq 0$
- **Periodo:** mínimo valor de T_0 para el que se verifica la relación.
 - Una señal periódica se extiende desde $t = -\infty$ hasta $t = +\infty$.
 - Una señal periódica es invariante a desplazamientos temporales de valor $k \cdot T_0$.
- **Frecuencia fundamental:** $f_0 = 1/T_0$ (inverso del periodo).

Cualquier señal de la forma:

$$g(t) = a_0 + \sum_{n=1}^k a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t)$$

es periódica con periodo $T_0 = 1/f_0$. En efecto:

$$\begin{aligned} g(t + T_0) &= a_0 + \sum_{n=1}^k a_n \cos(2\pi n f_0 (t + T_0)) + b_n \sin(2\pi n f_0 (t + T_0)) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^k a_n \cos(2\pi n f_0 t + 2\pi n) + b_n \sin(2\pi n f_0 t + 2\pi n) = g(t) \end{aligned}$$

SERIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER

- La inversa también es cierta: Cualquier función periódica de periodo T_0 puede expresarse como suma de sinusoides de la forma:

$$g(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \quad \text{con} \quad \omega_0 = 2\pi f_0$$

- La frecuencia f_0 es la frecuencia fundamental, y nf_0 es el n -ésimo armónico. Por conveniencia se denota $\omega_0 = 2\pi f_0$.
- Los coeficientes a_n y b_n se pueden calcular (usando la propiedad de ortogonalidad de las funciones seno y coseno) del siguiente modo:

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} g(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} g(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

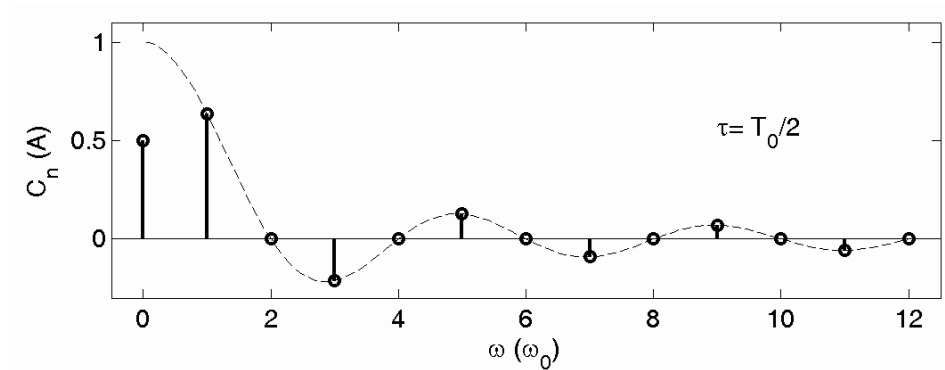
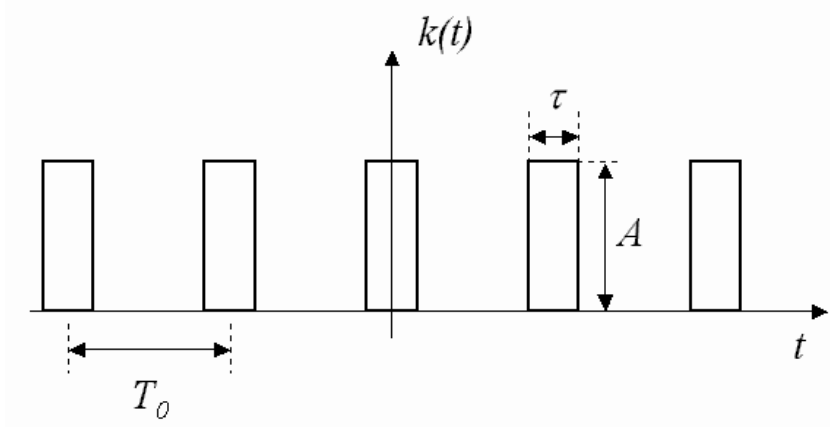
$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} g(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

$$g(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

$$C_0 = a_0 \quad C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\theta_n = -\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

EJEMPLO: SEÑAL RECTANGULAR PERIÓDICA



$$k(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} k(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A dt = \frac{A\tau}{T_0}$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{2A}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi\tau}{T_0}\right)$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A \sin(n\omega_0 t) dt = 0$$

$$k(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

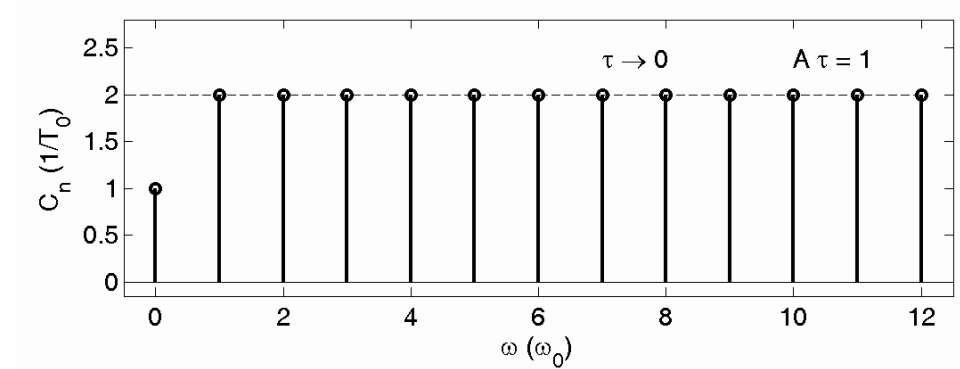
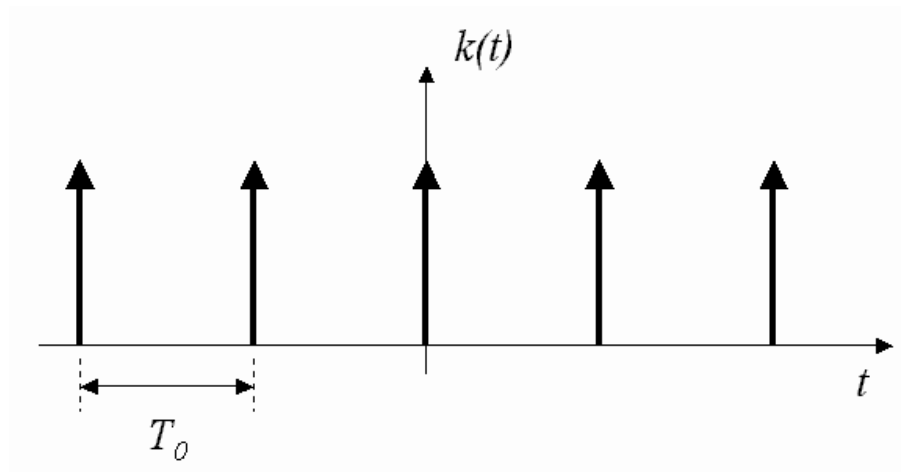
$$C_0 = \frac{A\tau}{T_0}$$

$$C_n = \frac{2A}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi\tau}{T_0}\right)$$

$$\theta_n = 0$$

Nota: el espectro de una señal periódica es discreto.

EJEMPLO: TREN DE IMPULSOS DELTA



El tren de impulsos delta se obtiene como el límite $\tau \rightarrow 0$ con $A\tau = 1$

$$k(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT_0) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

$$C_0 = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{A\tau}{T_0} = \frac{1}{T_0} \quad \theta_n = 0$$

$$C_n = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{2A}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi\tau}{T_0}\right) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{2A}{n\pi} \frac{n\pi\tau}{T_0} = \frac{2}{T_0}$$

SERIE EXPONENCIAL DE FOURIER

- Una senoide de frecuencia $n\omega_0$ puede expresarse en términos de exponenciales complejas:

$$e^{\pm jn\omega_0 t}$$

- Por tanto, una señal periódica de periodo T_0 puede expresarse como suma de exponenciales de la forma:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n e^{jn\omega_0 t} \quad \omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

- Los coeficientes se pueden obtener en la forma:

$$G_n = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} g(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

- La relación con los coeficientes a_n y b_n es:

$$a_0 = G_0$$

$$a_n = (G_n + G_{-n}) \qquad G_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$$

$$b_n = j(G_n - G_{-n}) \qquad G_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n)$$

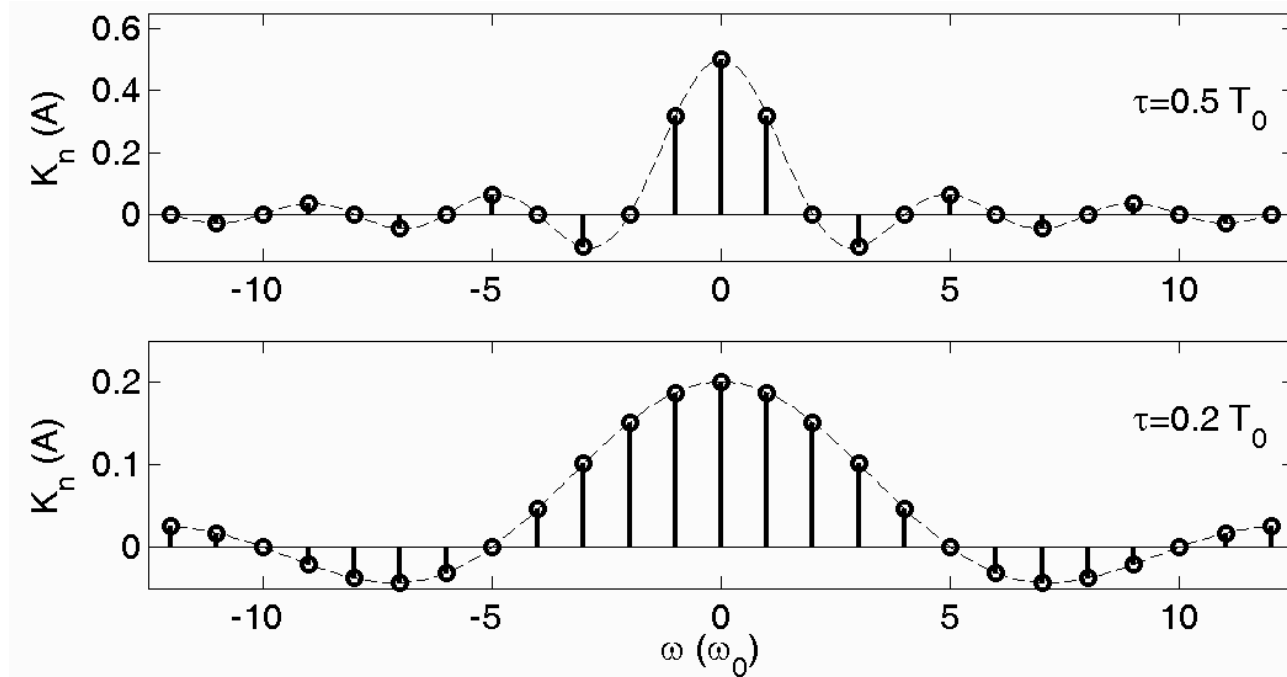
- Obsérvese que si la señal es real, a_n y b_n son reales, y G_n y G_{-n} son complejos conjugados.
- Estas relaciones se pueden deducir de las expresiones siguientes:

$$\cos(\alpha) = \operatorname{Re} \left(e^{j\alpha} \right) \qquad \sin(\alpha) = \operatorname{Im} \left(e^{j\alpha} \right)$$

$$e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2} \qquad \sin(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}$$

EJEMPLO: SEÑAL RECTANGULAR PERIÓDICA

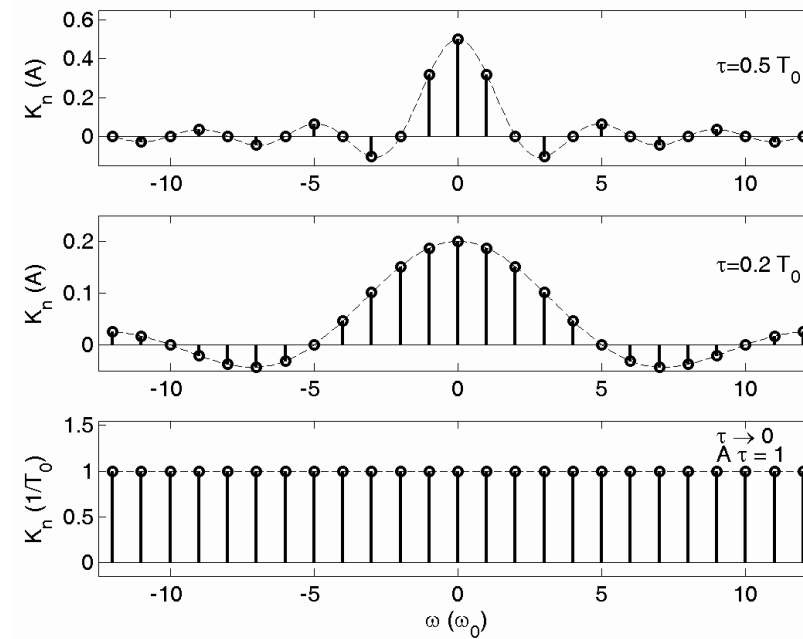


$$k(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$K_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{A}{n\pi} \sin\left(\frac{n\omega_0 \tau}{2}\right) = \frac{A}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi \tau}{T_0}\right)$$

$$K_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A dt = \frac{A\tau}{T_0}$$

EJEMPLO: TREN DE IMPULSOS DELTA



$$K_n = \frac{A}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi\tau}{T_0}\right)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} K_n = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{A}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi\tau}{T_0}\right) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{A}{n\pi} \frac{n\pi\tau}{T_0} = \frac{1}{T_0}$$

ESPECTRO EXPONENCIAL DE FOURIER

En las series exponenciales de Fourier aparecen términos de frecuencia negativa. En realidad, $e^{jn\omega_0 t}$ no es una senoide pura:

$$\cos(n\omega_0 t) = \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2} \quad \sin(n\omega_0 t) = \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j}$$

Reorganizando la serie exponencial:

$$g(t) = G_0 + \sum_{n=1}^{\infty} G_n e^{jn\omega_0 t} + G_{-n} e^{-jn\omega_0 t}$$

si $g(t)$ es real, podemos escribir $G_n = |G_n| e^{j\theta_n}$ $G_{-n} = |G_n| e^{-j\theta_n}$, lo que permite reescribir la serie del siguiente modo:

$$g(t) = G_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|G_n| \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

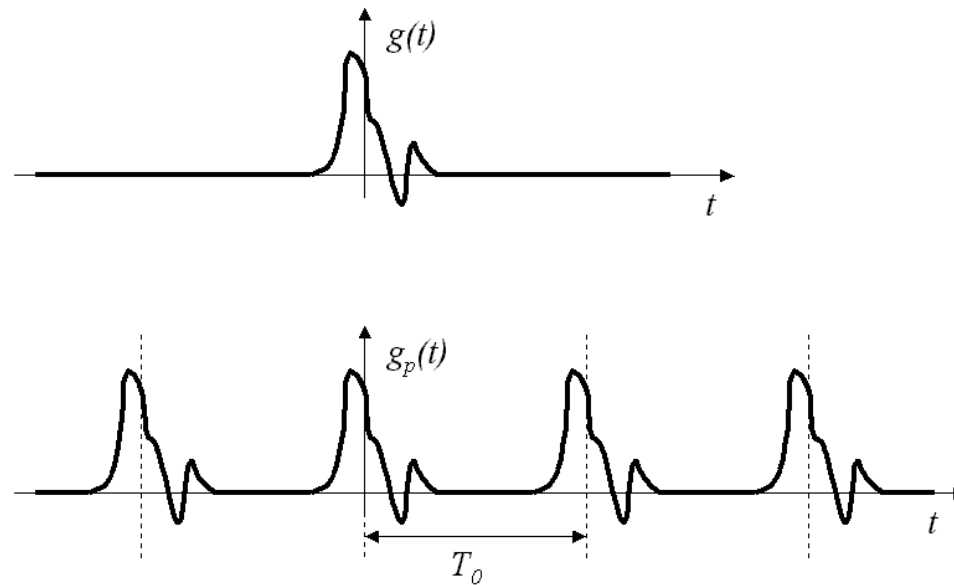
e identificando con la serie trigonométrica se obtiene la relación:

$$C_0 = G_0 \quad C_n = 2|G_n| = |G_n| + |G_{-n}|$$

de modo que el espectro de Fourier se puede obtener superponiendo la parte negativa del espectro exponencial sobre la parte positiva.

2.3.- LA TRANSFORMADA DE FOURIER

La extensión a señales no periódicas se puede realizar mediante el paso al límite ($T_0 \rightarrow \infty$) de la repetición periódica $g_p(t)$ de una señal no periódica $g(t)$.



$$g_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n e^{jn\omega_0 t} \quad G_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} g_p(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

En el límite $T_0 \rightarrow \infty$, se tiene que ω_0 es infinitesimal y se puede denotar con $\Delta\omega$:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\Delta\omega} \quad T_0 G_n = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} g_p(t) e^{-jn\Delta\omega t} dt \equiv G(n\Delta\omega)$$

$$g_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{G(n\Delta\omega)}{T_0} e^{jn\Delta\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{G(n\Delta\omega)\Delta\omega}{2\pi} \right] e^{jn\Delta\omega t}$$

$$g(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} g_p(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(n\Delta\omega) e^{jn\Delta\omega t} \Delta\omega \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$G(\omega) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} G(n\Delta\omega) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} g_p(t) e^{-jn\Delta\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt$$

En resumen:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt$$

La pareja de funciones $g(t)$ y $G(\omega)$ se denominan pares de transformadas de Fourier y se suelen denotar de la forma:

$$G(\omega) = \mathcal{F}[g(t)] \quad \text{y} \quad g(t) = \mathcal{F}^{-1}[G(\omega)]$$

o bien:

$$g(t) \leftrightarrow G(\omega)$$

Nótese que $G(\omega)$ es infinitesimal aunque proporcional al valor del espectro de Fourier de $g(t)$. También comparte las propiedades de simetría y linealidad de la serie exponencial de Fourier. $G(\omega)$ es una densidad espectral.

EXISTENCIA DE LA TRANSFORMADA

$$|G(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)e^{-j\omega t}| dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt$$

Por lo tanto, si la función $g(t)$ es *absolutamente integrable*, es decir, si:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt < \infty$$

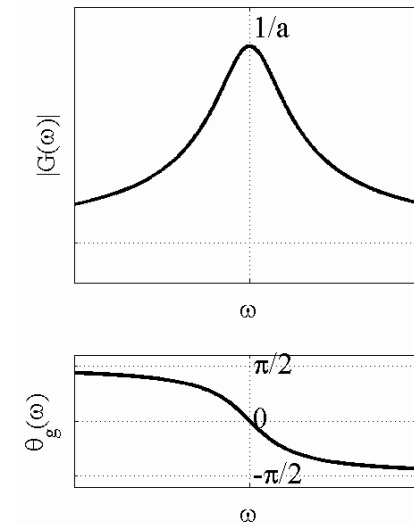
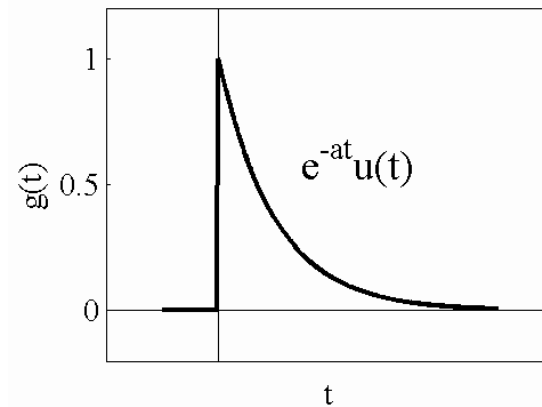
entonces su transformada existe.

También es condición suficiente que la señal sea de energía finita, es decir:

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt < \infty$$

Estas condiciones son suficientes pero no necesarias. Existen funciones (como el coseno), para las que se puede definir una transformada en el límite y que no verifican las condiciones anteriores.

Ejemplo 1: EXPONENCIAL



$$g(t) = e^{-at}u(t)$$

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-j\omega t}dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}dt = \frac{1}{a+j\omega} \quad a > 0$$

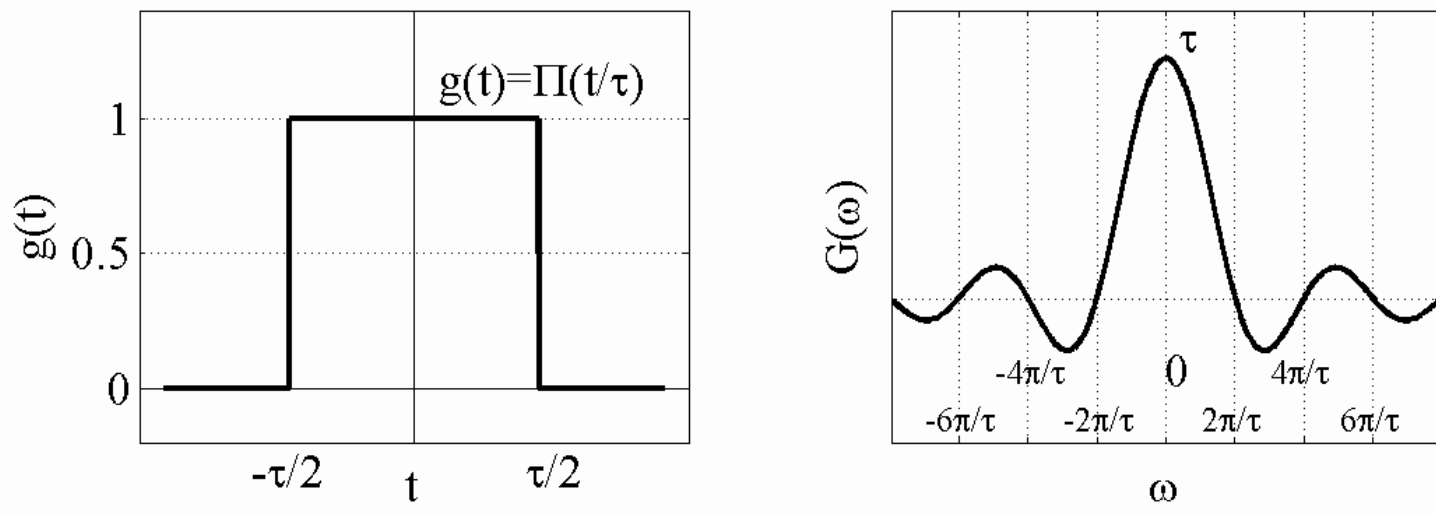
o separando módulo y fase:

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} e^{-j \tan^{-1}(\omega/a)}$$

$$|G(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$$

$$\theta_g(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Ejemplo 2: SEÑAL RECTANGULAR



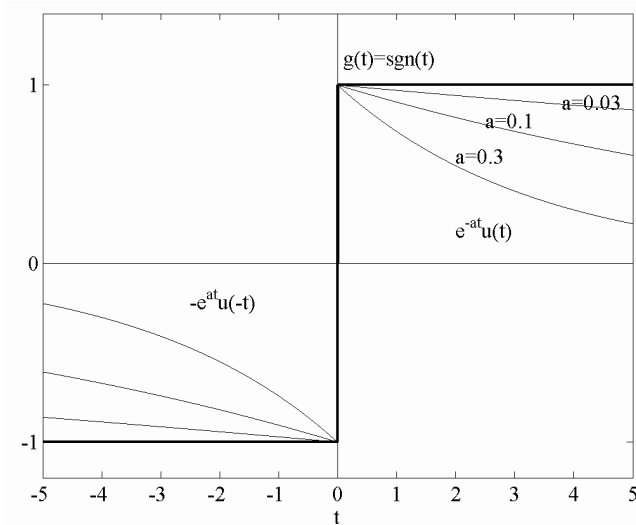
$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & |t| < 1/2 \\ 0 & |t| > 1/2 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}[\Pi(t/\tau)] = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega} \left(e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2} \right) = \tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}$$

$$\text{sinc}(\alpha) \equiv \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}$$

$$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \leftrightarrow \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)$$

Ejemplo 3: SEÑAL SIGNO



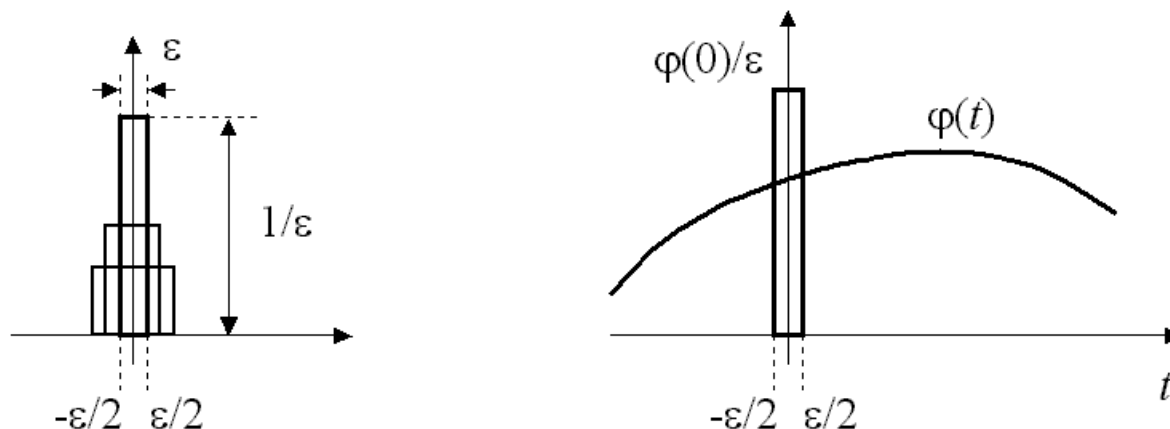
$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} +1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

$$\text{sgn}(t) = \lim_{a \rightarrow 0} \left[e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t) \right]$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\text{sgt}(t)] &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[\int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt - \int_0^{\infty} e^{-at} e^{j\omega t} dt \right] \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{1}{a + j\omega} - \frac{1}{a - j\omega} \right] = \frac{2}{j\omega} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{sgt}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}}$$

Ejemplo 4: SEÑAL DELTA DE DIRAC



Definición:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad \text{con} \quad \delta(t) = 0 \quad \forall t \neq 0$$

Propiedad de muestreo:

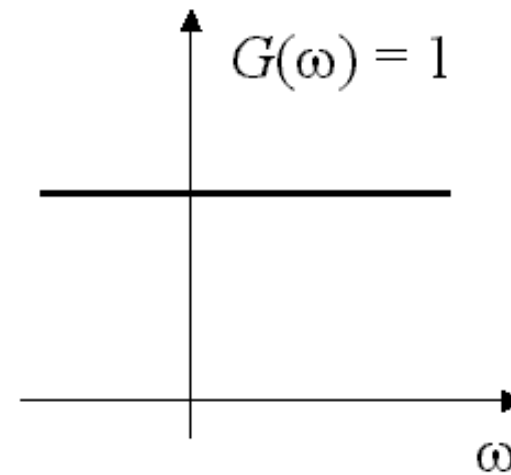
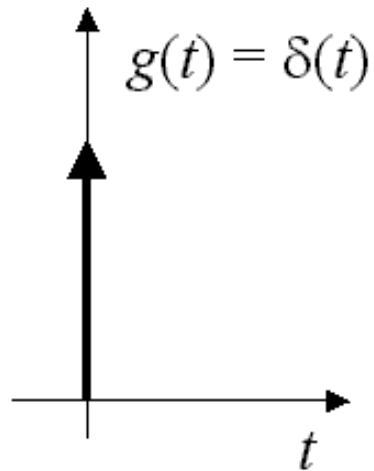
$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \delta(t) dt = \varphi(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \delta(t) dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(0)}{\epsilon} \int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} dt = \varphi(0)$$

Otras relaciones:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \delta(t - t_0) dt = \varphi(t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t - t_1) \delta(t - t_2) dt = \varphi(t_2 - t_1)$$

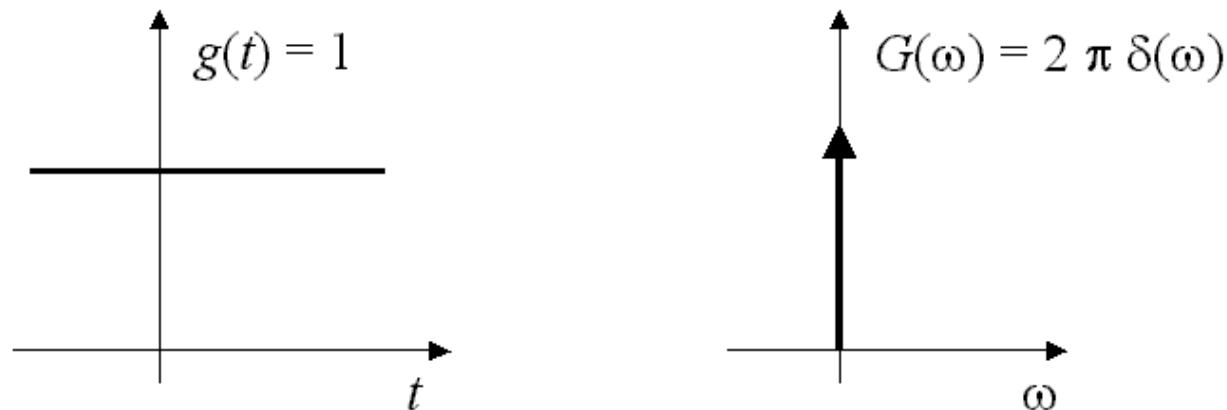


Aplicando la propiedad de muestreo se tiene:

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

$$\boxed{\delta(t) \leftrightarrow 1}$$

Ejemplo 5: SEÑAL CONSTANTE



Del ejemplo anterior, $\delta(t)$ es la transformada inversa de la función constante 1:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega$$

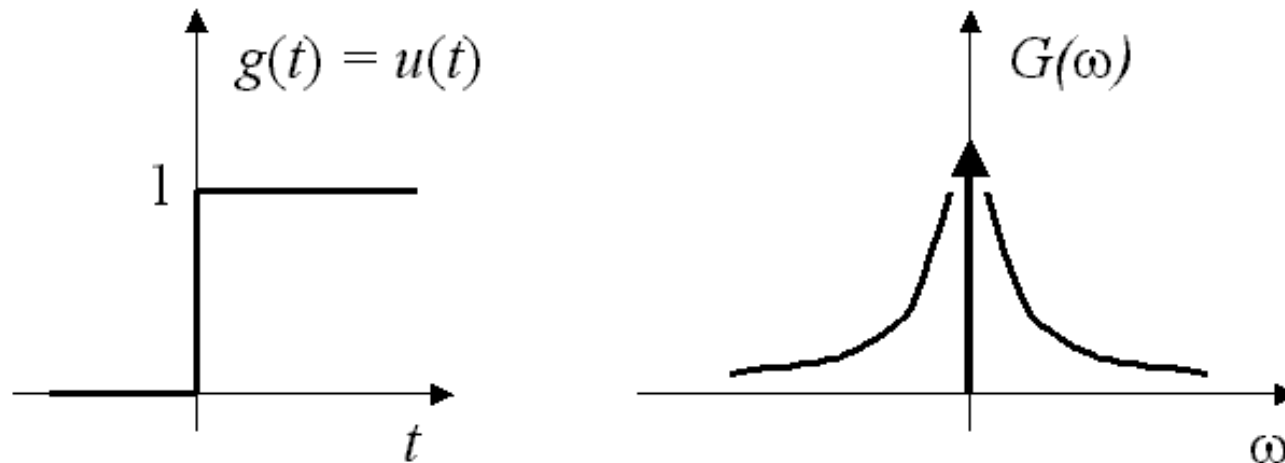
(expresión que puede considerarse como una definición de la delta de Dirac). Intercambiando las variables t y ω queda:

$$2\pi\delta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}[1]$$

donde la integral responde a la definición de la transformada de la función constante 1, y por tanto:

$$\boxed{1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)}$$

Ejemplo 6: ESCALÓN UNITARIO



Puesto que:

$$1 + \operatorname{sgn}(t) = 2u(t)$$

se tiene que:

$$\mathcal{F}[u(t)] = \frac{1}{2}[\mathcal{F}[1] + \mathcal{F}[\operatorname{sgn}(t)]] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$\boxed{\operatorname{sgn}(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}}$$

2.4.- PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

- 1.- Linealidad
- 2.- Dualidad o simetría
- 3.- Escalado
- 4.- Desplazamiento en t
- 5.- Desplazamiento en ω (modulación)
- 6.- Diferenciación temporal
- 7.- Diferenciación en frecuencia
- 8.- Transformada de la convolución
- 9.- Partes par/impar; partes real/imaginaria
- 10.- Teorema de Parseval

La transformada de Fourier define una representación alternativa de una señal en el *dominio de la frecuencia*. A través de las propiedades se muestra cómo determinadas operaciones en un dominio se manifiestan en el otro.

1.- LINEALIDAD

La transformada de Fourier es una operación lineal.

$$\left. \begin{array}{l} g(t) = k_1g_1(t) + k_2g_2(t) \\ g_1(t) \leftrightarrow G_1(\omega) \\ g_2(t) \leftrightarrow G_2(\omega) \end{array} \right\} \Rightarrow G(\omega) = k_1G_1(\omega) + k_2G_2(\omega)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} (k_1g_1(t) + k_2g_2(t))e^{-j\omega t} dt \\ &= k_1 \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)e^{-j\omega t} dt + k_2 \int_{-\infty}^{\infty} g_2(t)e^{-j\omega t} dt = k_1G_1(\omega) + k_2G_2(\omega) \end{aligned}$$

2.- DUALIDAD O SIMETRÍA

(Relación entre la *transformada de la transformada* y la *transformada inversa*)

$$\boxed{g(t) \leftrightarrow G(\omega) \Leftrightarrow G(t) \leftrightarrow 2\pi g(-\omega)}$$

Demostración:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega \Rightarrow (\omega \leftrightarrow t) \Rightarrow 2\pi g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t) e^{j\omega t} dt$$

$$(\omega \rightarrow -\omega) \Rightarrow 2\pi g(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t) e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}[G(t)]$$

3.- ESCALADO

Una compresión en un factor a del eje temporal da lugar a una expansión en un factor a del eje de frecuencias.

$$g(t) \leftrightarrow G(\omega) \Leftrightarrow g(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} G\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Demostración:

$$\mathcal{F}[g(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(at)e^{-j\omega t} dt = \begin{cases} \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-j(\omega/a)x} dx = \frac{1}{a} G\left(\frac{\omega}{a}\right) & a > 0 \\ \frac{1}{a} \int_{\infty}^{-\infty} g(x)e^{-j(\omega/a)x} dx = \frac{1}{-a} G\left(\frac{\omega}{a}\right) & a < 0 \end{cases}$$

- La función $g(at)$ representa la función $g(t)$ comprimida en el tiempo un factor a .
- La función $G(\omega/a)$ representa la función $G(\omega)$ expandida en frecuencia un factor a .
- Una compresión temporal es equivalente a una expansión en frecuencia (por ejemplo: aumentar la velocidad de reproducción de una cinta de cassette).
- Una expansión temporal es equivalente a una compresión en frecuencia (por ejemplo: reducir la velocidad de reproducción de una cinta de cassette).

4.- DESPLAZAMIENTO TEMPORAL

Un desplazamiento en el dominio del tiempo introduce una fase lineal en el dominio de la frecuencia.

$$g(t) \leftrightarrow G(\omega) \Leftrightarrow g(t - t_0) \leftrightarrow G(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[g(t - t_0)] &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t - t_0)e^{-j\omega t} dt = (t - t_0 = x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-j\omega(x+t_0)} dx = G(\omega)e^{-j\omega t_0}\end{aligned}$$

Nótese que el desplazamiento temporal no modifica la magnitud del espectro; únicamente introduce una fase lineal:

$$g(t) \leftrightarrow G(\omega) = |G(\omega)|e^{j\theta_g(\omega)} \Leftrightarrow g(t - t_0) \leftrightarrow |G(\omega)|e^{j(\theta_g(\omega) - \omega t_0)}$$

Ejemplo para la función coseno: $\cos(\omega(t - t_0)) = \cos(\omega t - \omega t_0)$

5.- DESPLAZAMIENTO EN FRECUENCIA (MODULACIÓN)

Multiplicar en el tiempo por $e^{j\omega_0 t}$ equivale a un desplazamiento de frecuencia.

$$g(t) \leftrightarrow G(\omega) \Leftrightarrow g(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow G(\omega - \omega_0)$$

Demostración:

$$\mathcal{F}[g(t)e^{j\omega_0 t}] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt = G(\omega - \omega_0)$$

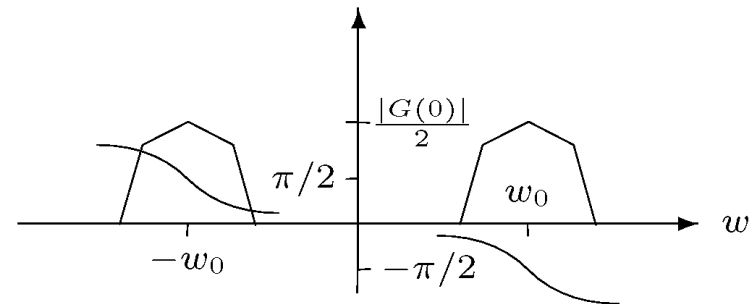
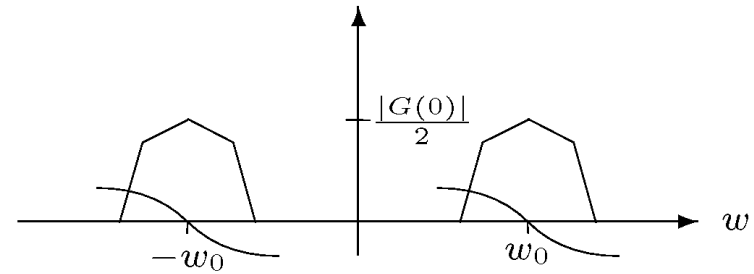
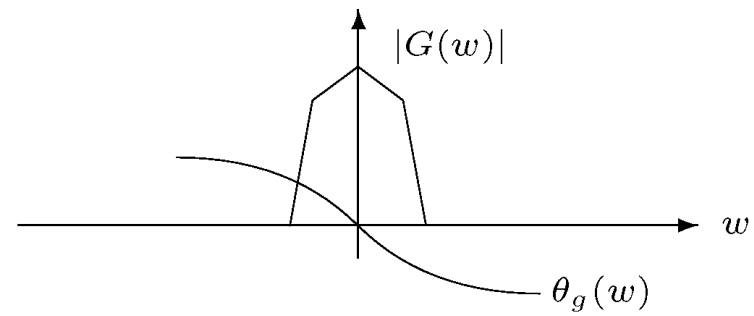
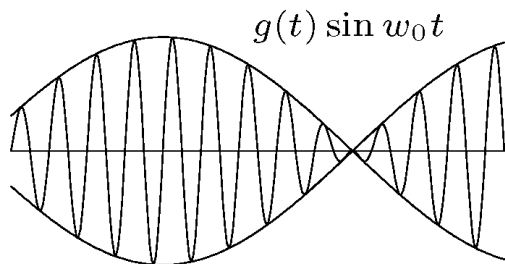
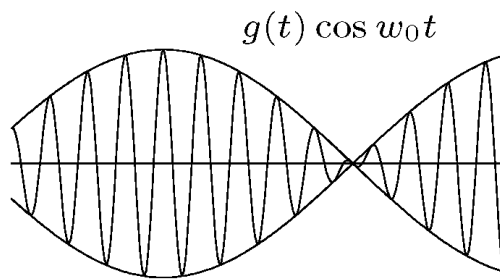
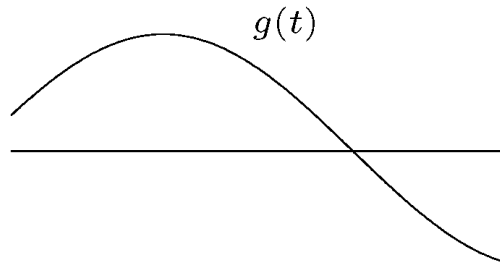
Ésta es una propiedad importante en comunicaciones. Se utiliza para desplazar el espectro de una señal a una frecuencia determinada. Multiplicando por una función seno o coseno en lugar de una exponencial, se tiene:

$$g(t) \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} (g(t)e^{j\omega_0 t} + g(t)e^{-j\omega_0 t}) \leftrightarrow \frac{1}{2} (G(\omega - \omega_0) + G(\omega + \omega_0))$$

$$g(t) \sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2j} (g(t)e^{j\omega_0 t} - g(t)e^{-j\omega_0 t}) \leftrightarrow \frac{1}{2j} (G(\omega - \omega_0) - G(\omega + \omega_0))$$

$$\text{o bien: } g(t) \sin(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2} \left(G(\omega - \omega_0)e^{-j\pi/2} + G(\omega + \omega_0)e^{j\pi/2} \right)$$

Modulación de señales senoidales



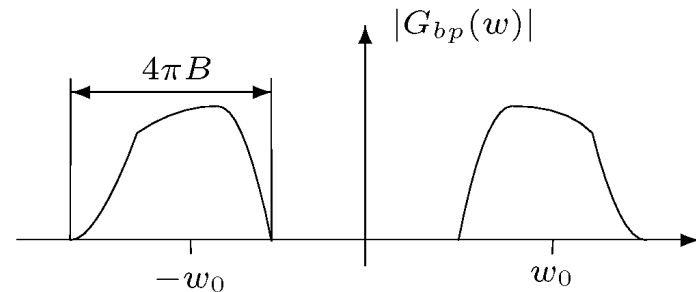
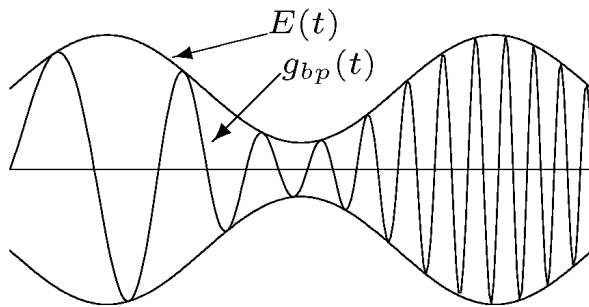
Descomposición de señales paso banda

Una señal paso banda genérica se descompone: $g_{bp} = g_c(t) \cos(\omega_0 t) + g_s(t) \sin(\omega_0 t)$

donde $g_c(t)$ y $g_s(t)$ son señales paso-baja.

Aunque $g_c(t) \cos(\omega_0 t)$ y $g_s(t) \sin(\omega_0 t)$ tienen espectros simétricos la combinación en general no, ya que:

$$a_1 e^{j\varphi_1} + a_2 e^{j\varphi_2} \neq (a_1 + a_2) e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$



Una señal paso-banda genérica también puede descomponerse en forma de envolvente $E(t)$ y fase $\theta(t)$:

$$g_{bp}(t) = E(t) \cos(\omega_0 t + \theta(t)) \quad \begin{cases} E(t) = +\sqrt{g_c(t)^2 + g_s(t)^2} \\ \theta(t) = -\tan^{-1} \left(\frac{g_s(t)}{g_c(t)} \right) \end{cases}$$

6.- DIFERENCIACIÓN TEMPORAL

Derivar con respecto al tiempo equivale a multiplicar por $j\omega$ el espectro.

$$g(t) \leftrightarrow G(\omega) \Leftrightarrow \frac{dg(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega G(\omega)$$

Demostración:

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t} dt$$

Integrando por partes se tiene:

$$G(\omega) = \left[-\frac{1}{j\omega} g(t)e^{-j\omega t} \right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{j\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dg(t)}{dt} e^{-j\omega t} dt$$

y como $g(t)$ es Fourier-transformable, $g(t)$ tiende a cero en el límite $t \rightarrow \pm\infty$ y por tanto,

$$j\omega G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dg(t)}{dt} e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F} \left[\frac{dg(t)}{dt} \right]$$

Generalización:

$$\frac{d^n g(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n G(\omega)$$

7.- DIFERENCIACIÓN EN FRECUENCIA

Derivar el espectro con respecto a la frecuencia equivale a multiplicar por $-jt$ la función en el dominio temporal.

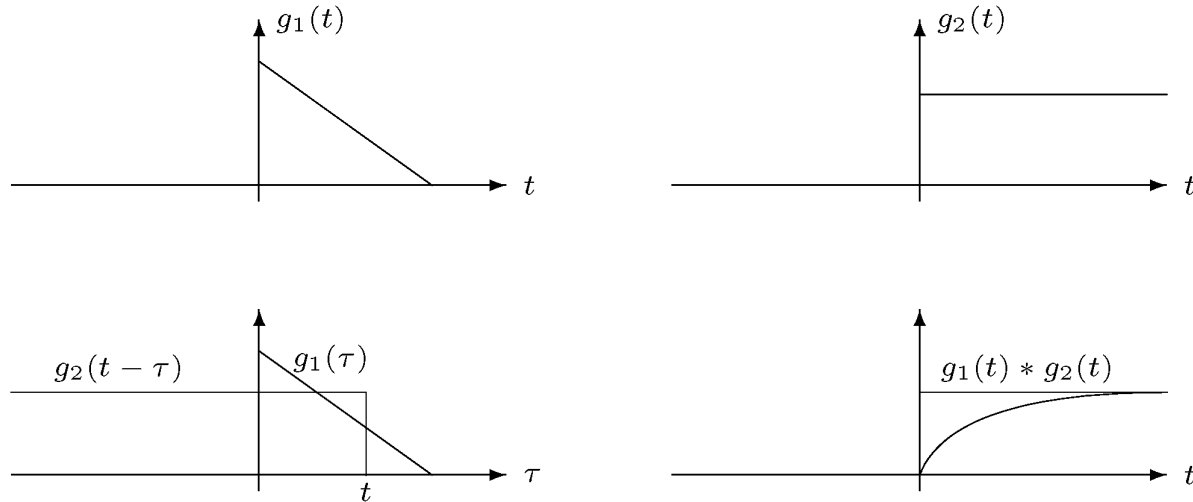
$$g(t) \leftrightarrow G(\omega) \Leftrightarrow -jtg(t) \leftrightarrow \frac{dG(\omega)}{d\omega}$$

Esta propiedad es la dual de la anterior.

Definición de convolución

La convolución se define como:

$$g_1 * g_2 = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\tau)g_2(t - \tau)d\tau$$



Verifica las propiedades conmutativa y distributiva respecto de la suma:

$$g_1 * g_2 = g_2 * g_1 \quad g_1 * (g_2 + g_3) = g_1 * g_2 + g_1 * g_3$$

8.- TRANSFORMADA DE LA CONVOLUCIÓN

La transformada de la convolución es el producto:

$$g_1(t) * g_2(t) \leftrightarrow G_1(\omega)G_2(\omega)$$

$$g_1(t)g_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}G_1(\omega) * G_2(\omega)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} g_1(t) * g_2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\tau)g_2(t - \tau) d\tau \\ \mathcal{F}[g_1(t) * g_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g_1(\tau)g_2(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\tau) \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} g_2(t - \tau)e^{-j\omega t} dt \right]}_{G_2(\omega)e^{-j\omega\tau}} d\tau = \\ &= G_2(\omega) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g_1(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau}_{G_1(\omega)} = G_1(\omega)G_2(\omega) \end{aligned}$$

9.- PARTES PAR/IMPARG, REAL/IMAGINARIA

Cualquier función se puede descomponer en sus partes par e impar:

$$g(t) = \underbrace{\frac{g(t) + g(-t)}{2}}_{\text{parte par}} + \underbrace{\frac{g(t) - g(-t)}{2}}_{\text{parte impar}}$$

Cualquier función se puede descomponer en sus partes real e imaginaria:

$$g(t) = \text{Re}(g(t)) + j\text{Im}(g(t))$$

- La transformada de una función PAR-REAL es PAR-REAL
- La transformada de una función IMPAR-REAL es IMPAR-IMAGINARIA
- La transformada de una función PAR-IMAGINARIA es PAR-IMAGINARIA
- La transformada de una función IMPAR-IMAGINARIA es IMPAR-REAL

Demostración:

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t) \quad G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cos(\omega t) dt + j \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \sin(\omega t) dt$$

10.- TEOREMA DE PARSEVAL

La propiedad:

$$g_1(t)g_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}G_1(\omega) * G_2(\omega)$$

se puede escribir como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)g_2(t)e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_1(u)G_2(\omega - u) du$$

Si hacemos $\omega = 0$ y $g_1 = g_2$ podemos escribir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)G(-\omega) d\omega$$

Para el caso de $g(t)$ real $G(-\omega) = G^*(\omega)$ y tenemos

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 d\omega$$

La energía de una señal real se puede calcular tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia.

RESUMEN DE PROPIEDADES

1.- Linealidad:

$$g = k_1g_1 + k_2g_2 \Leftrightarrow G = k_1G_1 + k_2G_2$$

2.- Dualidad o simetría:

$$G(t) \leftrightarrow 2\pi g(-\omega)$$

3.- Escalado:

$$g(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}G\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

4.- y 5.- Desplazamiento en t y en ω :

$$g(t - t_0) \leftrightarrow G(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

$$g(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow G(\omega - \omega_0)$$

6.- y 7.- Derivada en t y en ω :

$$\frac{dg(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega G(\omega)$$

$$-jtg(t) \leftrightarrow \frac{dG(\omega)}{d\omega}$$

8.- Convolución:

$$g_1(t) * g_2(t) \leftrightarrow G_1(\omega)G_2(\omega)$$

$$g_1(t)g_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}G_1(\omega) * G_2(\omega)$$

9.- Partes par/impar real/imag:

$$\begin{aligned} \text{PAR-REAL} &\leftrightarrow \text{PAR-REAL} \\ \text{PAR-IMAG} &\leftrightarrow \text{PAR-IMAG} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{IMPAR-REAL} &\leftrightarrow \text{IMPAR-IMAG} \\ \text{IMPAR-IMAG} &\leftrightarrow \text{IMPAR-REAL} \end{aligned}$$

10.- Teorema de Parseval (señales reales):

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 d\omega$$

2.5.- EL TEOREMA DE MUESTREO

Enunciado: *Una señal limitada en banda a B Hz (i.e. una señal cuya transformada de Fourier es nula para $|\omega| > 2\pi B$) queda determinada por sus valores (muestras) tomados a intervalos uniformes separados no más de $1/2B$ segundos (i.e. con una frecuencia no inferior a $2B$ Hz). La frecuencia $2B$ se denomina **frecuencia de Nyquist**.*

Demostración:

$$g_s(t) = g(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = g(t) \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_s t} = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t) e^{jn\omega_s t}$$

y aplicando la transformada de Fourier queda:

$$G_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(\omega - n\omega_s) \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

que es una superposición periódica del espectro $G(\omega)$ con separación ω_s . Si se cumple la condición $\omega_s = (2\pi/T_s) \geq 4\pi B$, no existe solapamiento entre las repeticiones del espectro, por estar la señal limitada en banda. Bajo esta condición se puede recuperar el espectro $G(\omega)$ original y consecuentemente, la señal original $g(t)$.

DEMOSTRACIÓN ALTERNATIVA DEL TEOREMA DE MUESTREO

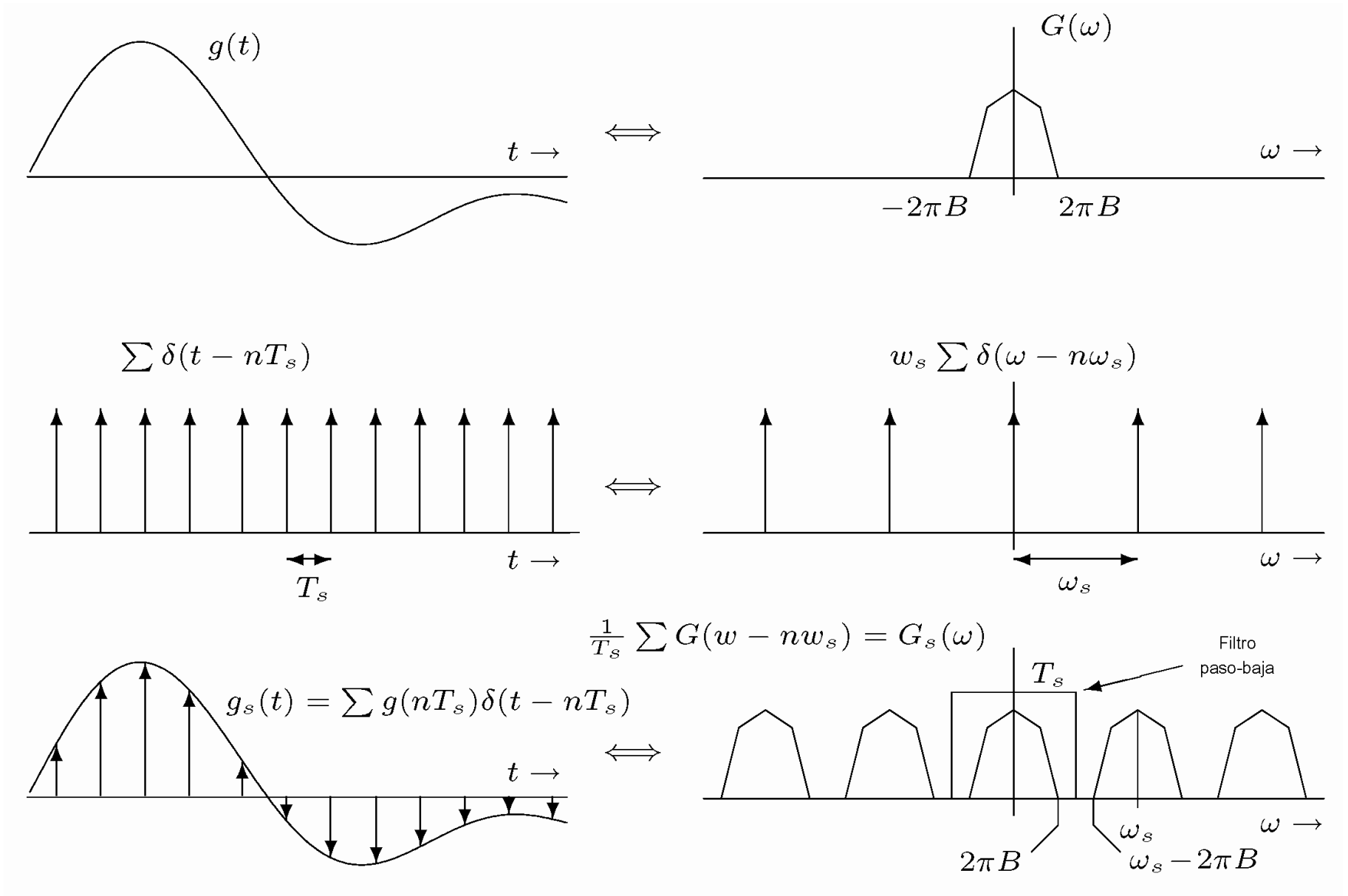
El Teorema de Muestreo puede demostrarse también del modo siguiente:

$$g_s(t) = g(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

y puesto que la transformada del producto es la convolución, entonces:

$$\begin{aligned} G_s(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \left[G(\omega) * \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s) \right] \\ &= \frac{\omega_s}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(\omega) * \delta(\omega - n\omega_s) \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(\omega - n\omega_s) \end{aligned}$$

MUESTREO EN LOS DOMINIOS t Y ω



RECONSTRUCCIÓN DE LA SEÑAL

Suponiendo que se cumple la condición $\omega_s = (2\pi/T_s) \geq 4\pi B$ (o bien $T_s \leq (1/2B)$), el espectro de la señal muestreada $G_s(\omega)$ es una repetición periódica y no solapada del espectro original $G(\omega)$. En esta situación es posible recuperar la señal original *filtrando paso-baja* la señal muestreada con una *frecuencia de corte* $\omega_0 = \omega_s/2$.

En el caso en que la frecuencia de muestreo ω_s sea igual a la frecuencia de Nyquist, el filtro debe ser de la forma:

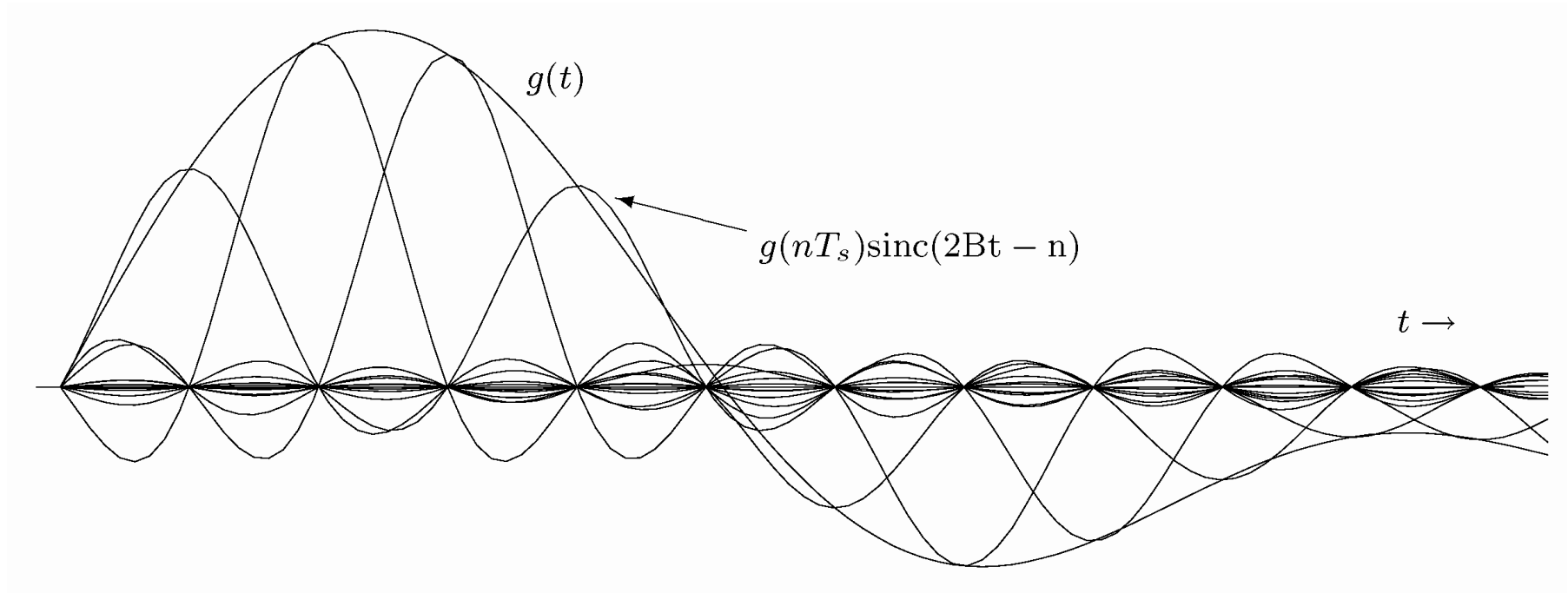
$$H(\omega) = T_s \Pi \left(\frac{\omega}{4\pi B} \right) \Leftrightarrow h(t) = \text{sinc}(2Bt)$$

La señal reconstruida y su espectro son:

$$G(\omega) = G_s(\omega)H(\omega) \Leftrightarrow g(t) = g_s(t) * h(t)$$

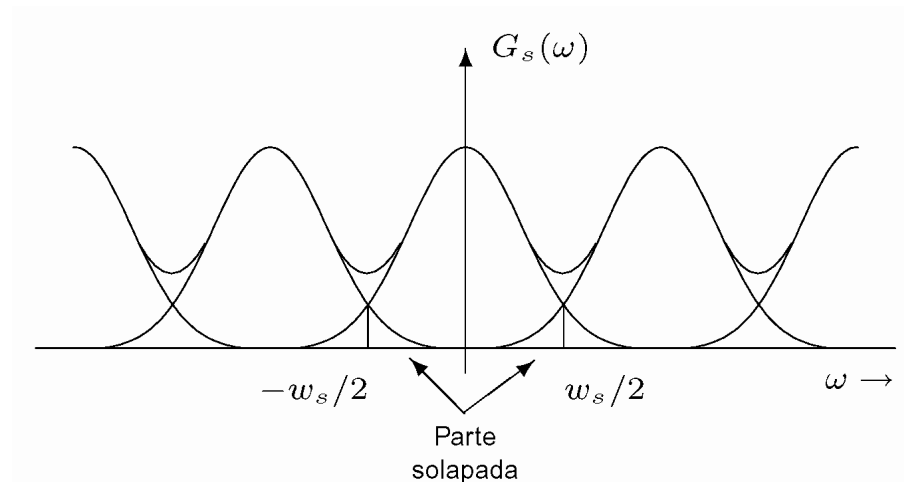
$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT_s) \text{sinc}(2B(t - nT_s)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT_s) \text{sinc}(2Bt - n)$$

de modo que la señal es reconstruida como una superposición de señales sinc desplazadas en el tiempo.



ERROR DE SOLAPAMIENTO (ALIASING)

Cuando una señal es submuestreada (i.e. muestreada a una frecuencia inferior a la de Nyquist), el espectro resultante $G_s(\omega)$ es una repetición solapada de espectros $G(\omega)$, y la señal ya no es reconstruible.



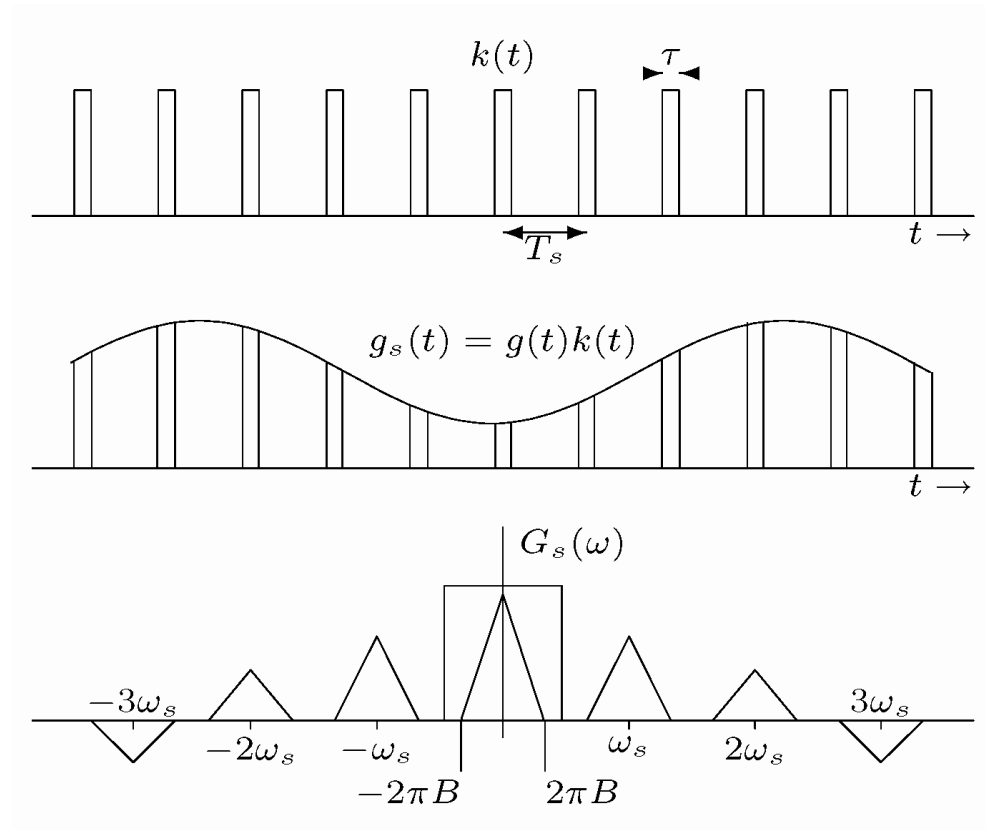
- En la práctica, no existen las señales limitadas en banda. Para evitar el aliasing, la señal es filtrada paso-baja antes del muestreo.
- Si se usa como frecuencia de muestreo la frecuencia de Nyquist, los filtros deben ser extremadamente abruptos y complejos de realizar. Para evitar esto, se usa una frecuencia de muestreo ligeramente superior (sobremuestreo).

Ejemplo: Para muestrear voz a 8 kHz con PCM, se filtra la señal a 3.5 kHz.

MUESTREO REAL

En la práctica, no se pueden realizar sistemas de muestreo que empleen señales delta de Dirac ideales, y en su lugar se emplean pulsos más o menos estrechos.

En esta situación también es posible la reconstrucción de la señal a partir de sus muestras si se respeta el criterio de Nyquist.



Si la señal $g(t)$ se multiplica por un tren periódico de pulsos $k(t)$:

$$k(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n e^{jn\omega_s t} \quad K_n = \frac{\tau}{T_s} \text{sinc} \left(\frac{n\pi\tau}{T_s} \right) \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

la señal muestreada es:

$$g_s(t) = g(t)k(t) = g(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n e^{jn\omega_s t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t) K_n e^{jn\omega_s t}$$

y la transformada de Fourier de la señal muestreada es:

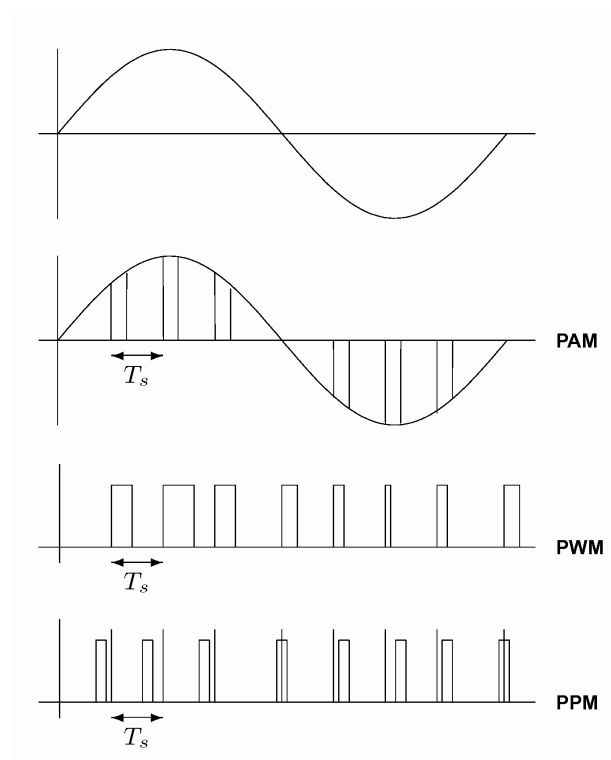
$$G_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n G(\omega - n\omega_s)$$

La expresión es similar a la obtenida muestreando con un tren de deltas de Dirac, salvo por los factores de escala K_n que multiplican a las repeticiones del espectro $G(\omega)$. Por tanto, la señal original puede recuperarse filtrando paso-baja como en el caso del muestreo ideal (y dividiendo por el factor K_0).

SISTEMAS DE COMUNICACIÓN POR PULSOS

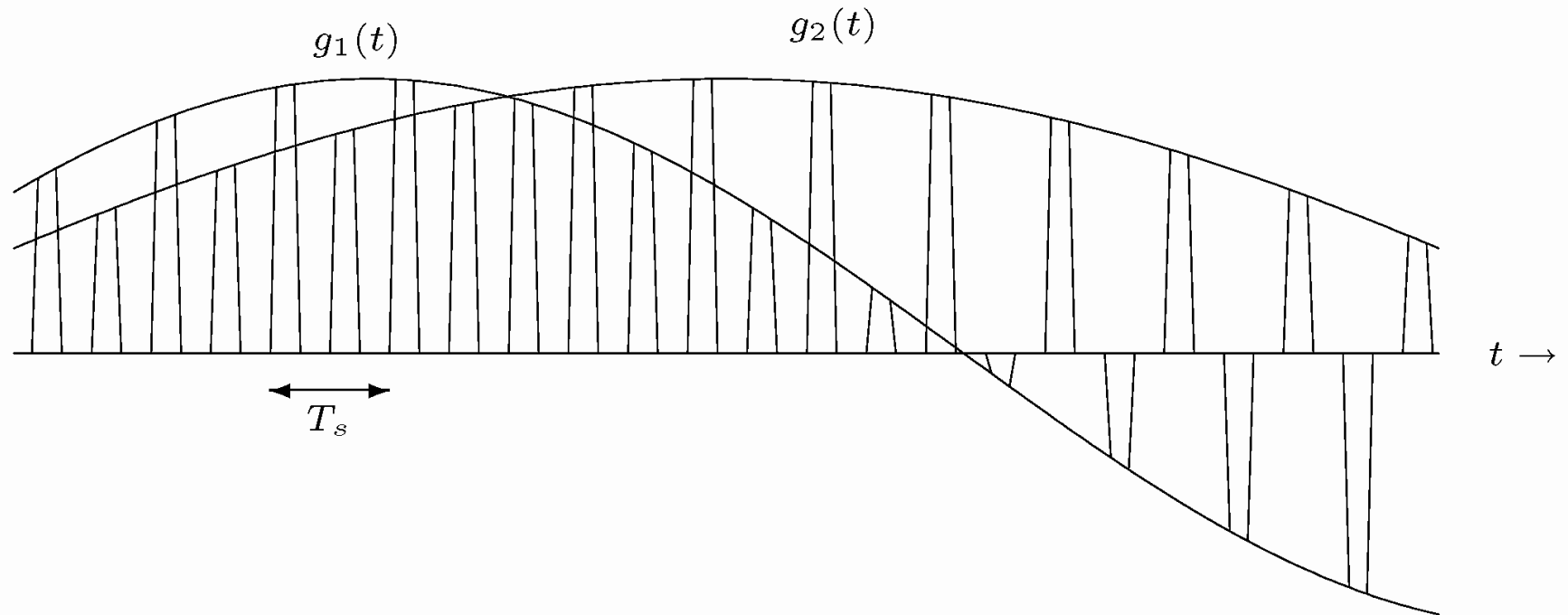
- El teorema de muestreo permite transmitir señales analógicas como trenes de pulsos.
- La señal es muestreada (y opcionalmente cuantizada), y los valores de las muestras modifican los parámetros de un tren de pulsos:

- **PAM:** Pulse Amplitude Modulation
- **PWM:** Pulse Width Modulation
- **PPM:** Pulse Position Modulation
- **PCM:** Pulse Code Modulation



MULTIPLEXADO TEMPORAL TDM (Time Division Multiplexing)

Los sistemas de comunicación por pulsos permiten transmitir varias señales por el mismo canal, ya que los pulsos no ocupan éste todo el tiempo:



El ejemplo ilustra multiplexado temporal para PAM, aunque la técnica es aplicable a sistemas PCM.

Tema 3:

TRANSMISIÓN DE SEÑALES

Tema 3: TRANSMISIÓN DE SEÑALES

3.1.- Transmisión sin distorsión en sistemas lineales:

- Filtros ideales.

3.2.- Distorsión provocada por el canal:

- Distorsión lineal y no-lineal. Efecto multipath.

3.3.- Ancho de banda y velocidad de transmisión.

3.4.- Densidad de energía espectral:

- Autocorrelación y densidad de energía espectral.
- Energía de señales moduladas.

3.5.- Densidad de potencia espectral:

- Autocorrelación y densidad de potencia espectral.
- Densidad de potencia espectral en señales moduladas.

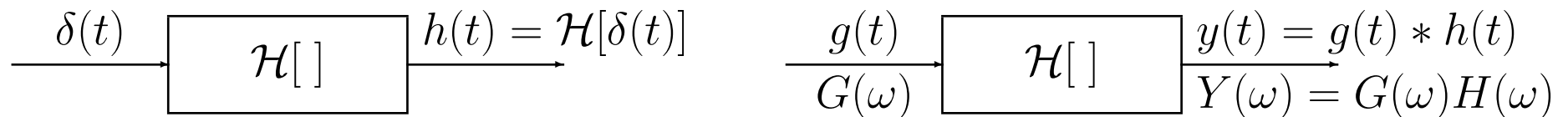
3.6.- Densidad de potencia espectral del ruido.

3.1.- TRANSMISIÓN SIN DISTORSIÓN EN SISTEMAS LINEALES

Un sistema lineal (p.ej. un canal lineal) verifica el **principio de superposición**:

$$\mathcal{H}[a_1g_1(t) + a_2g_2(t)] = a_1\mathcal{H}[g_1(t)] + a_2\mathcal{H}[g_2(t)]$$

Para un sistema **lineal e invariante en el tiempo**, se puede demostrar que la salida $y(t)$ es la convolución de la entrada $g(t)$ y la **respuesta al impulso** del sistema $h(t)$.



Para estos sistemas, se denomina **respuesta en frecuencia** a la transformada de Fourier de su respuesta impulso:

$$H(\omega) = \mathcal{F}[h(t)] = |H(\omega)|e^{j\theta_h(\omega)}$$

Estos sistemas quedan completamente especificados si se conoce su respuesta al impulso o, equivalentemente, si se conoce su respuesta en frecuencia.

EFECTO DE UN SISTEMA LINEAL. TRANSMISIÓN SIN DISTORSIÓN.

Cuando una señal $g(t)$ es transmitida a través de un sistema lineal, el espectro de salida es de la forma:

$$Y(\omega) = G(\omega)H(\omega) = |G(\omega)| |H(\omega)| e^{j[\theta_g(\omega) + \theta_h(\omega)]} = |Y(\omega)| e^{j\theta_y(\omega)}$$

y cada componente de frecuencia es amplificada por $|H(\omega)|$ y desfasada por $\theta_h(\omega)$, resultando en general una señal distorsionada.

Se dice que una señal es transmitida **sin distorsión** cuando la salida es una versión amplificada y retardada de la entrada: $y(t) = kg(t - t_d)$.

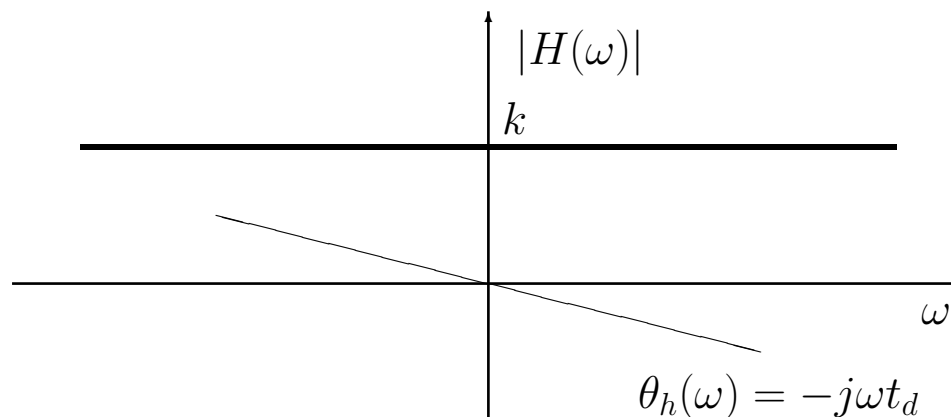
Puesto que:

$$\mathcal{F}[kg(t - t_d)] = kG(\omega)e^{-j\omega t_d}$$

la respuesta en frecuencia de tal sistema debe verificar:

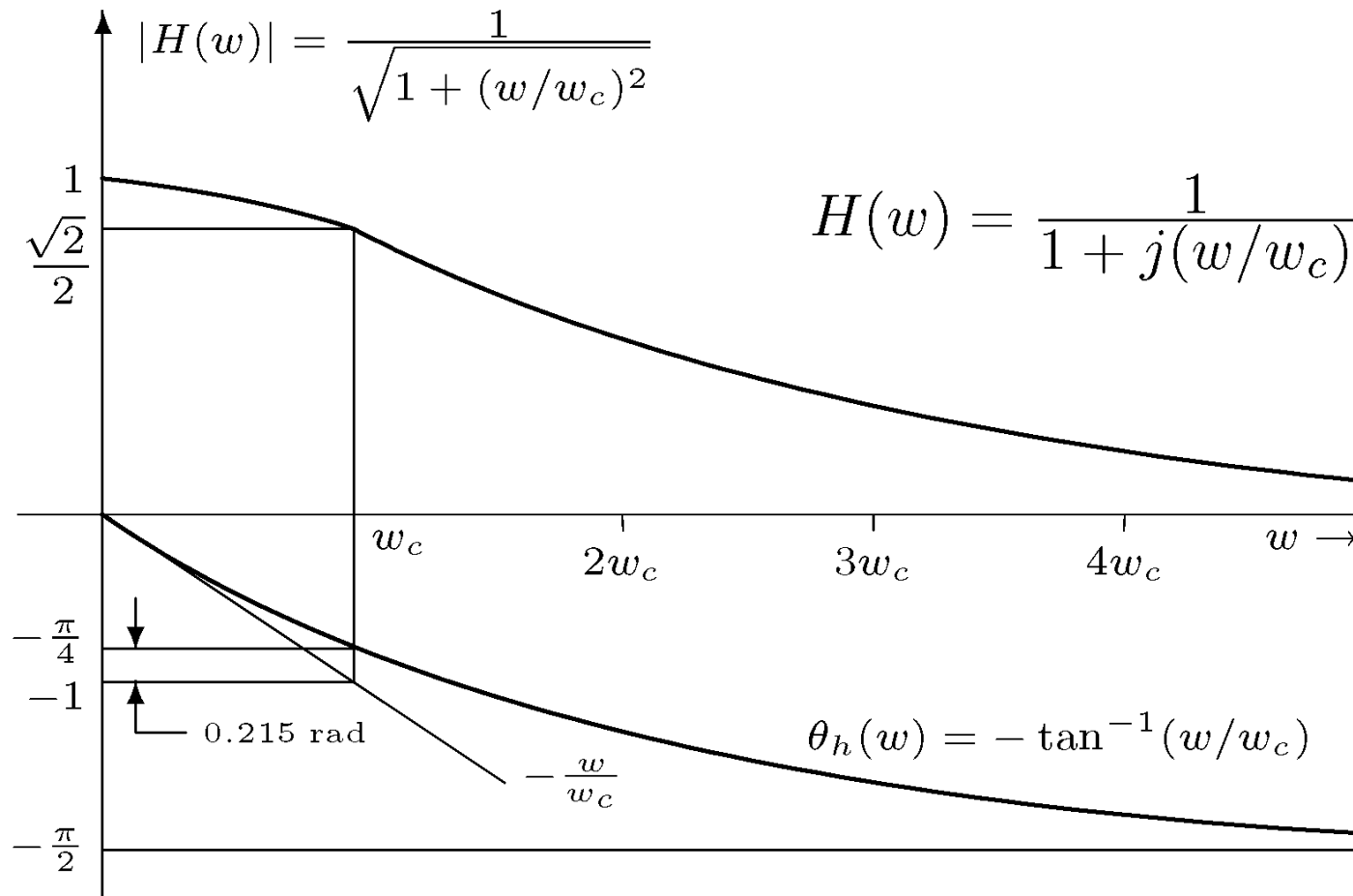
$$|H(\omega)| = k$$

$$\theta_h(\omega) = -\omega t_d$$



CANALES PASO-BAJA

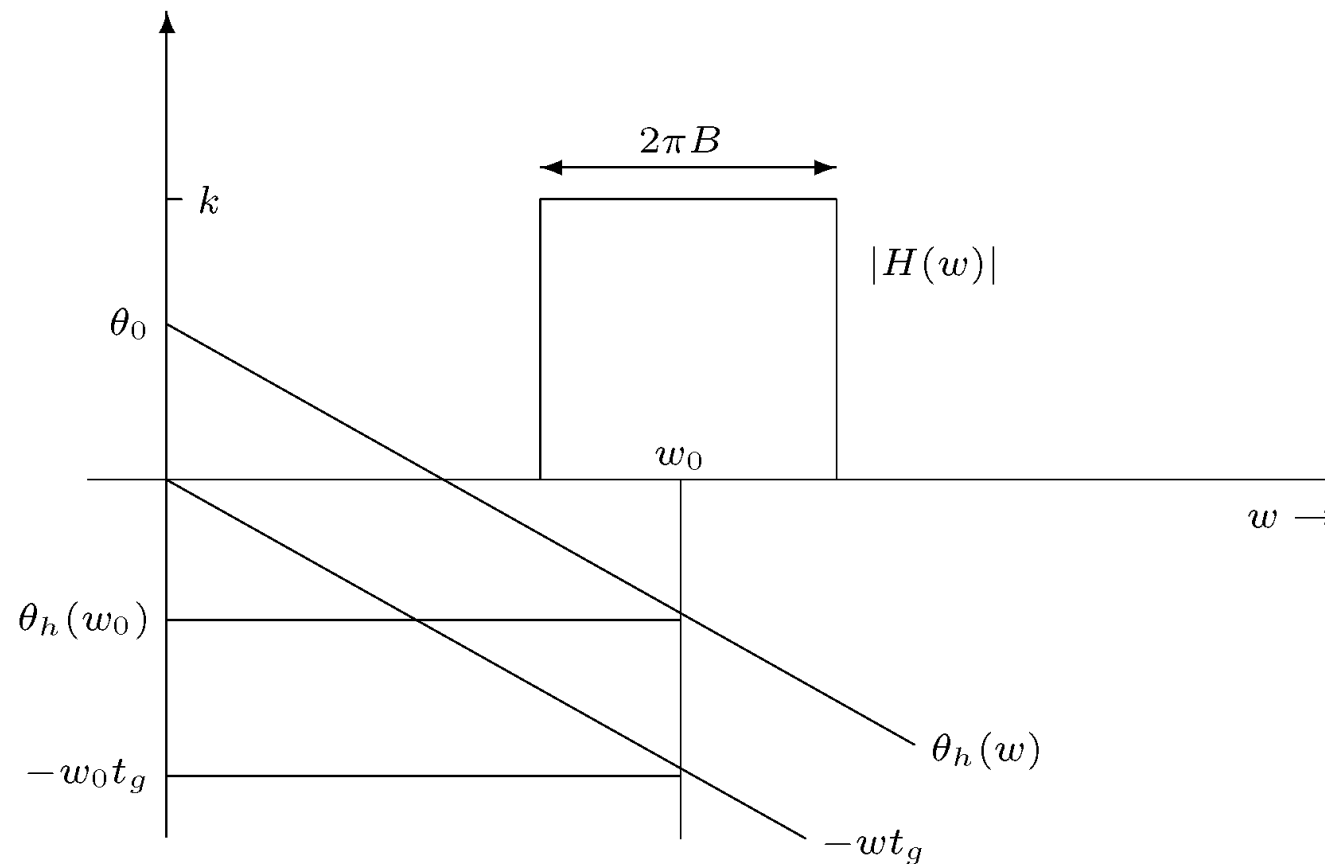
En la práctica no existen los canales con características ideales. Un canal puede aproximarse al comportamiento ideal en un cierto rango de frecuencias, denominado **ancho de banda**.



CANALES PASO-BANDA

En los canales paso-banda la transmisión sin distorsión se cumple en una banda de freq.:

$$|H(\omega)| = k \quad - \frac{d\theta_g(\omega)}{d\omega} = t_g = \text{Cte.} \quad \forall \omega \in [(\omega_0 - \pi B), (\omega_0 + \pi B)]$$



RETARDO DE GRUPO Y RETARDO DE FASE

Para una señal paso-banda genérica $g_{bp}(t) = g_c(t) \cos(\omega_0 t) + g_s(t) \sin(\omega_0 t)$ la condición de no-distorsión es:

$$\hat{g}_{bp}(t) = k[g_c(t - t_g) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + g_s(t - t_g) \sin(\omega_0 t + \varphi_0)]$$

dado que la información es portada por $g_c(t)$ y $g_s(t)$.

Si la ganancia es constante y la fase tiene pendiente constante ($\theta_h(\omega) = \theta_0 - \omega t_g$) en la banda de frecuencias que nos interesa, a la salida del canal tenemos:

$$\begin{aligned} \hat{g}_{bp}(t) &= k[g_c(t - t_g) \cos(\omega_0(t - t_g) + \theta_0) + g_s(t - t_g) \sin(\omega_0(t - t_g) + \theta_0)] \\ &= k[g_c(t - t_g) \cos(\omega_0 t + \theta_h(\omega_0)) + g_s(t - t_g) \sin(\omega_0 t + \theta_h(\omega_0))] \\ &= k[g_c(t - t_g) \cos(\omega_0(t - t_p)) + g_s(t - t_g) \sin(\omega_0(t - t_p))] \\ &= kE(t - t_g) \cos(\omega_0(t - t_p) + \theta_{bp}(t - t_g)) \end{aligned}$$

donde se han utilizado las definiciones siguientes:

$$t_g \equiv - \frac{d\theta_h(\omega)}{d\omega}$$

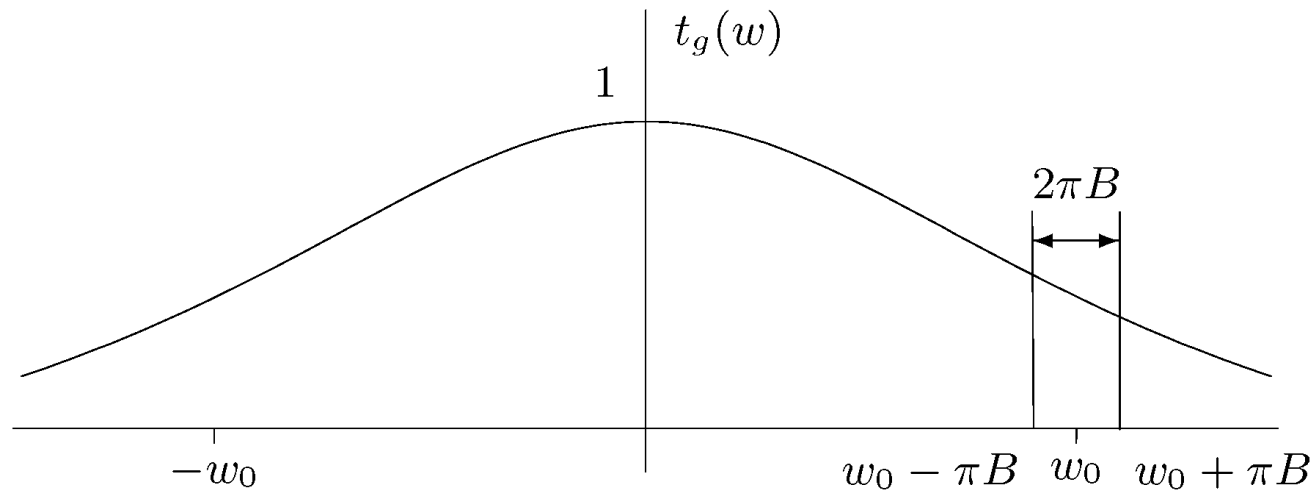
Retardo de grupo (o de envolvente)

$$t_p \equiv - \frac{\theta_h(\omega_0)}{\omega_0}$$

Retardo de fase

Que $h(t)$ sea real exige $\theta_h(\omega)$ impar, es decir, $\theta_h(\omega) = \theta_0 - \omega t_g$ (si $\omega > 0$) y $\theta_h(\omega) = -\theta_0 - \omega t_g$ (si $\omega < 0$).

Ejemplo: retardo de fase y de grupo para filtro paso-bajo



$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \quad |H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^2}} \quad \theta_h(\omega) = -\tan^{-1}(\omega/\omega_c)$$

$$t_p = -\frac{\tan^{-1}(\omega_0/\omega_c)}{\omega_0} \quad t_g = -\frac{d\theta_h(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^2} \frac{1}{\omega_c}$$

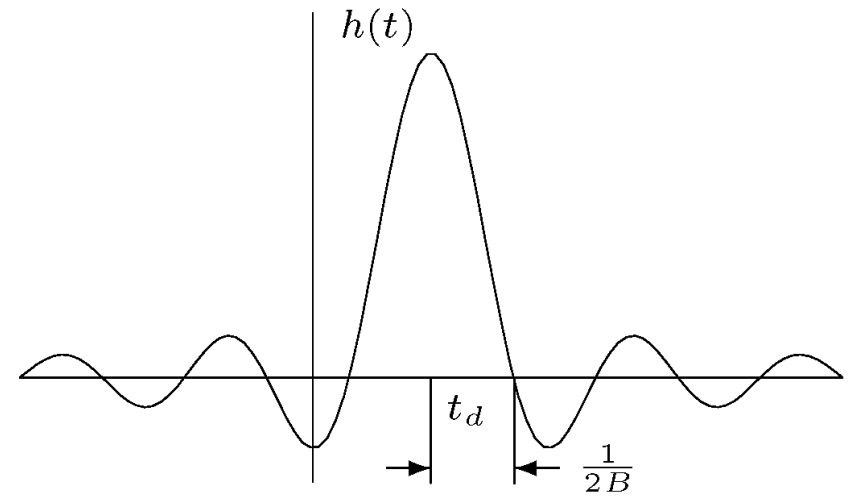
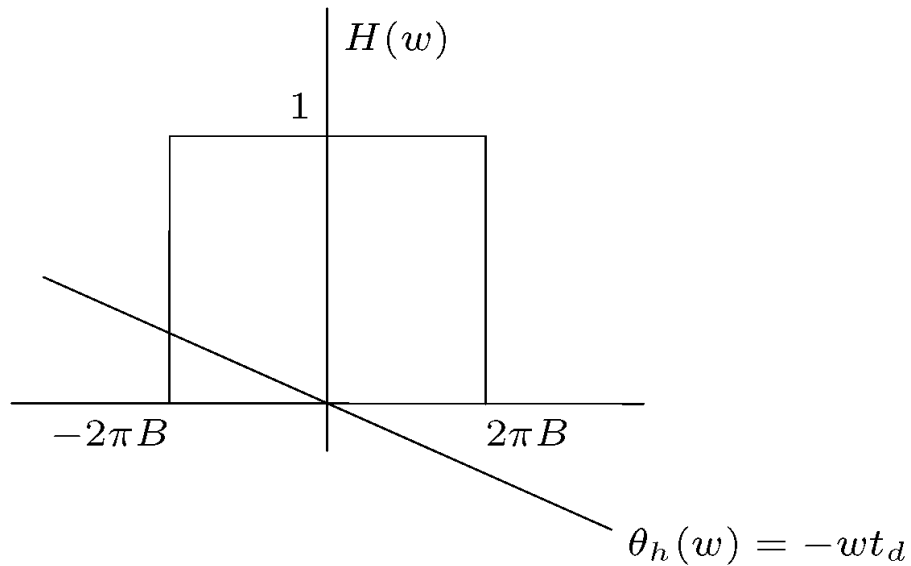
Supongamos: $\omega_c=10^3\text{rad/s}$; $\omega_0=10^4\text{rad/s}$; $2\pi B=100\text{rad/s}$;

$$t_p=0.1471 \text{ ms}; \quad H(\omega_0 - \pi B)=0.10000; \quad H(\omega_0)=0.09950; \quad H(\omega_0 + \pi B)=0.09901;$$

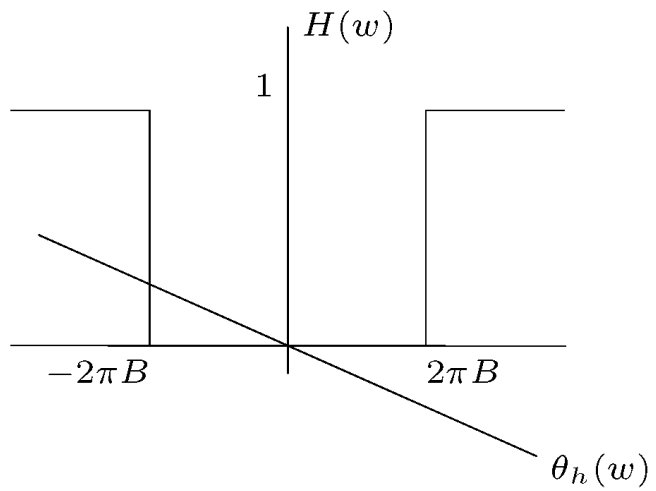
$$t_g(\omega_0 - \pi B)=9.9997\mu\text{s}; \quad t_g(\omega_0)=9.9010\mu\text{s}; \quad t_g(\omega_0 + \pi B)=9.8037\mu\text{s};$$

FILTROS IDEALES

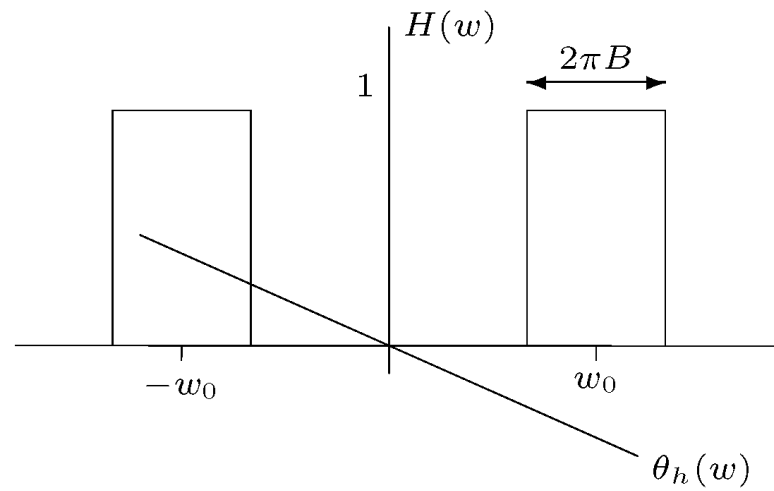
Los filtros ideales permiten transmisión sin distorsión sobre un determinado rango de frecuencias. Los tipos básicos son: **paso-baja**, **paso-alta** y **paso-banda**.



$$H(\omega) = \Pi\left(\frac{\omega}{4\pi B}\right) e^{-j\omega t_d} \quad h(t) = 2B \text{sinc}[2B(t - t_d)]$$



PASO-ALTA



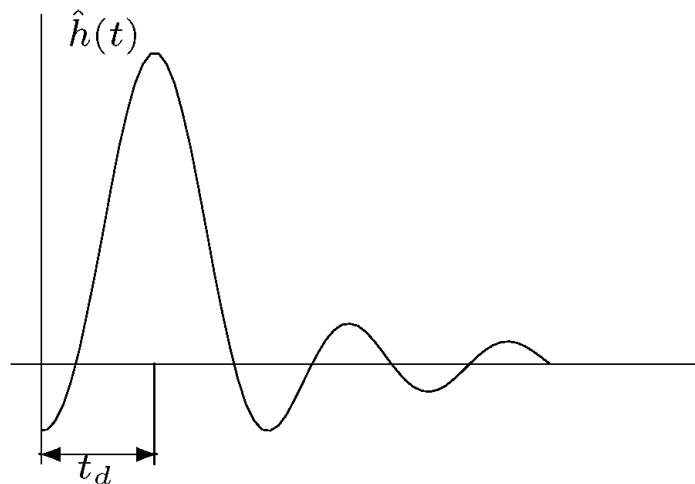
PASO-BANDA

Realizabilidad y causalidad de los filtros ideales

Realizabilidad: Un filtro ideal como los anteriores no es realizable ya que su respuesta al impulso $h(t)$ existe para valores $t < 0$, es decir, ante una excitación $\delta(t)$ aplicada en $t = 0$, la respuesta aparece antes que la excitación.

Causalidad: Para que un filtro sea realizable debe ser causal, es decir, su respuesta al impulso debe verificar: $h(t) = 0 \quad \forall t < 0$.

Esta condición puede conseguirse truncando la parte negativa de la respuesta al impulso del filtro: $\hat{h}(t) = h(t)u(t)$. Con un valor suficientemente alto del retardo t_d se puede conseguir una buena aproximación a las características ideales.



Convolución y causalidad. Diseño de filtros.

La salida de un sistema lineal invariante en el tiempo viene dada por la convolución:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau$$

La integral puede descomponerse en la parte causal y la no causal:

$$y(t) = \int_{-\infty}^0 h(\tau)x(t - \tau)d\tau + \int_0^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau$$

En la primera integral, valores negativos de τ corresponden a contribuciones de muestras futuras de $x(t - \tau)$ (señal de entrada) a la respuesta del sistema $y(t)$ (señal de salida).

Los filtros de Butterworth, Chebyshev, Elípticos, etc. proporcionan aproximaciones tradicionales a filtros selectivos en frecuencia, cada una de ellas con diferentes características.

Además de estas aproximaciones, se tienen también los filtros discretos o digitales, que se basan en el teorema de muestreo para procesar las muestras de la señal.

3.2.- DISTORSIÓN PROVOCADA POR EL CANAL

Cuando una señal se transmite a través de un canal, se ve distorsionada debido a las imperfecciones del mismo:

- Distorsión lineal:

La señal es distorsionada por un canal lineal no ideal.

- Distorsión no lineal:

La señal es distorsionada por un canal no-lineal (ganancia dependiente de la amplitud).

- Efecto multipath:

La señal recibida es superposición de varias versiones de la entrada, con distintas ganancias y retardos para cada una de ellas.

DISTORSIÓN LINEAL

Cuando una señal se transmite por un canal lineal de características no ideales de amplitud y/o fase, a la salida se obtiene una señal formada por una superposición de las distintas componentes de frecuencia, cada una de ellas con una ganancia y un retardo distintos.

Por tanto, a la salida se obtiene una versión distorsionada de la señal de entrada.

Interferencia Intersimbólica

Si la señal a transmitir es un pulso, debido a la distorsión lineal se produce un *ensanchamiento temporal*, pudiendo interferir con pulsos adyacentes en el tiempo (anteriores o posteriores). Por este motivo, la distorsión lineal puede producir interferencia en sistemas de multiplexado temporal (TDM).

Ejemplo: Considérese un pulso $g(t)$ limitado en banda a B Hz, transmitido a través de un canal lineal cuya respuesta en frecuencia es:

$$H(\omega) = \begin{cases} (1 + k \cos(T\omega))e^{-j\omega t_d} & |\omega| < 2\pi B \\ 0 & |\omega| > 2\pi B \end{cases}$$

La respuesta a la salida será:

$$R(\omega) = G(\omega)H(\omega) = G(\omega)[1 + k \cos(T\omega)]e^{-j\omega t_d}$$

$$= G(\omega)e^{-j\omega t_d} + G(\omega)[k \cos(T\omega)]e^{-j\omega t_d}$$

La transformada del coseno es:

$$\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

Por la propiedad de dualidad tenemos:

$$\pi[\delta(t - \omega_0) + \delta(t + \omega_0)] \leftrightarrow 2\pi \cos(\omega_0 \omega)$$

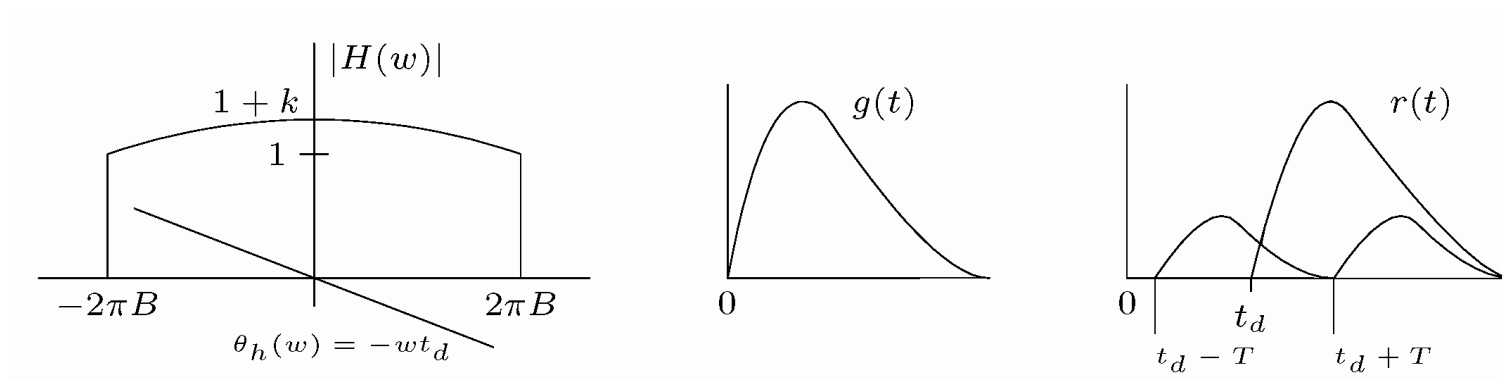
y cambiando ω_0 por T tenemos:

$$\frac{1}{2}[\delta(t - T) + \delta(t + T)] \leftrightarrow \cos(\omega T)$$

Aplicando el resultado, la respuesta es:

$$r(t) = g(t - t_d) + kg(t - t_d) * \frac{1}{2}[\delta(t - T) + \delta(t + T)]$$

$$r(t) = g(t - t_d) + \frac{k}{2}g(t - t_d + T) + \frac{k}{2}g(t - t_d - T)$$



DISTORSIÓN NO-LINEAL

La respuesta no-lineal de amplitud de un canal $r = f(g)$ puede desarrollarse en serie de McLaurin:

$$r(t) = a_0 + a_1g(t) + a_2g^2(t) + a_3g^3(t) + \dots + a_kg^k(t) + \dots$$

El espectro de Fourier de una de las potencias de la señal de entrada es:

$$g^k(t) \leftrightarrow \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{(k-1)} \overbrace{G(\omega) * G(\omega) * \dots * G(\omega)}^{k-1 \text{ convoluciones}}$$

y por lo tanto,

$$R(\omega) = 2\pi a_0\delta(\omega) + a_1G(\omega) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k}{(2\pi)^{(k-1)}} \overbrace{G(\omega) * G(\omega) * \dots * G(\omega)}^{k-1 \text{ convoluciones}}$$

Puesto que la *autoconvolución* de un espectro dobla su ancho de banda, el ancho de banda de $g^k(t)$ es k veces el de $g(t)$. Por ello, este tipo de distorsión es perjudicial en multiplexado FDM dado que puede provocar interferencia entre canales adyacentes.

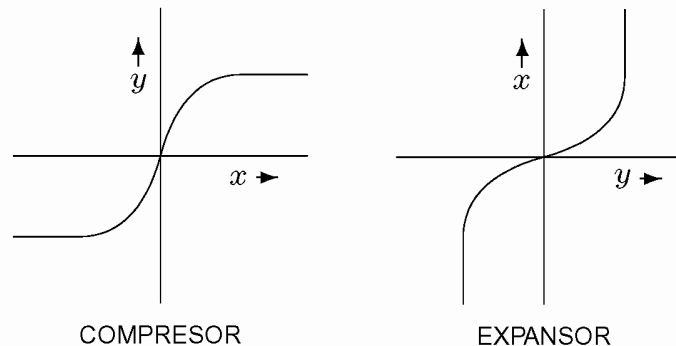
Ejemplo: Considérese un canal no lineal cuya característica de amplitud es de la forma $y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$. Si la entrada es una señal modulada en amplitud, $x(t) = g(t) \cos(\omega_c t)$, la salida será:

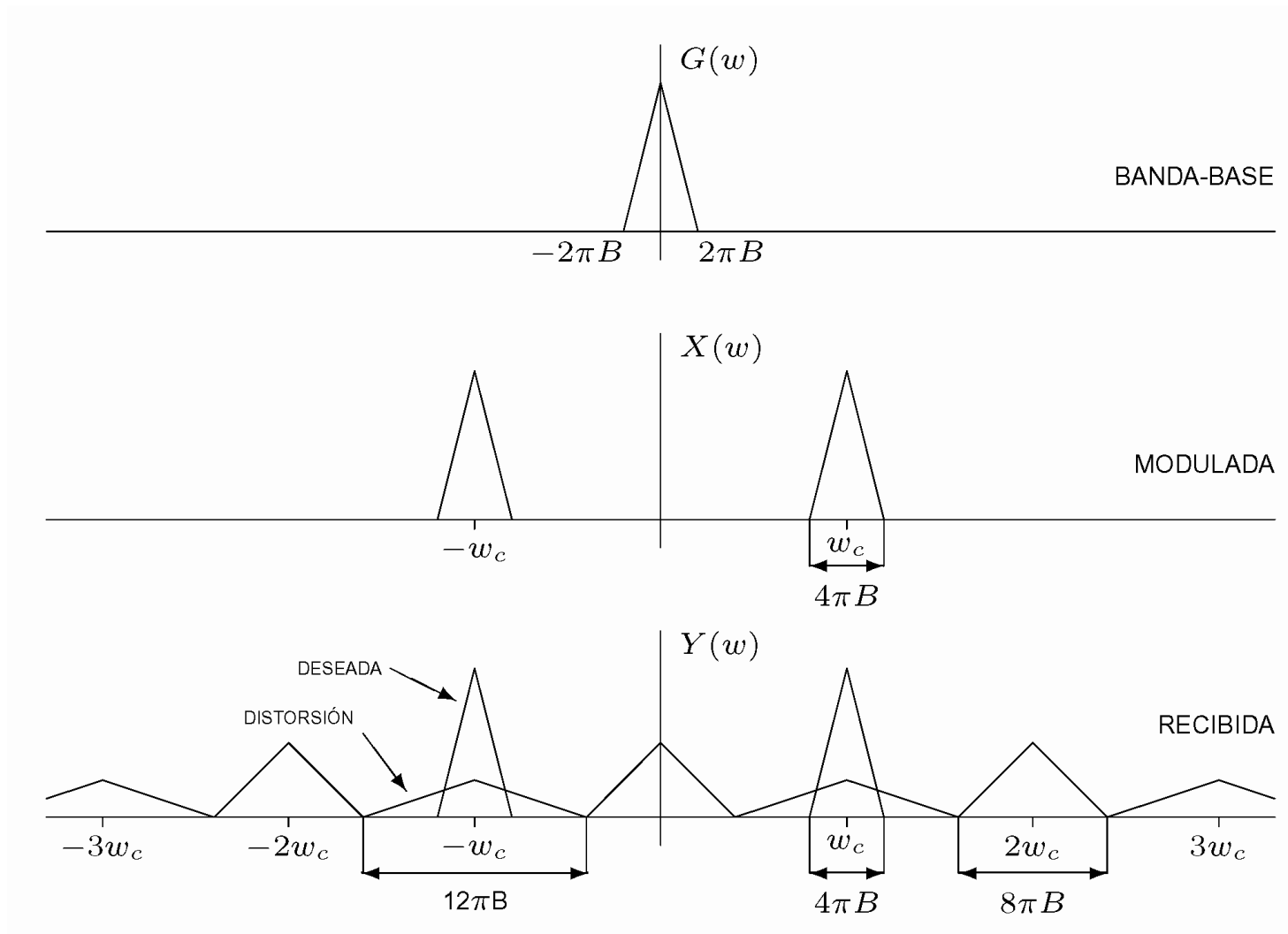
$$y(t) = a_1g(t) \cos(\omega_c t) + a_2g^2(t) \cos^2(\omega_c t) + a_3g^3(t) \cos^3(\omega_c t)$$

$$y(t) = \frac{a_2}{2}g^2(t) + \left[a_1g(t) + \frac{3a_3}{4}g^3(t) \right] \cos(\omega_c t) + \frac{a_2}{2}g^2(t) \cos(2\omega_c t) + \frac{a_3}{4}g^3(t) \cos(3\omega_c t)$$

El término correspondiente al rango de frecuencias deseado es $\cos(\omega_c t)$. En este rango de frecuencias aparece un término no deseado: $3a_3g^3(t)/4$.

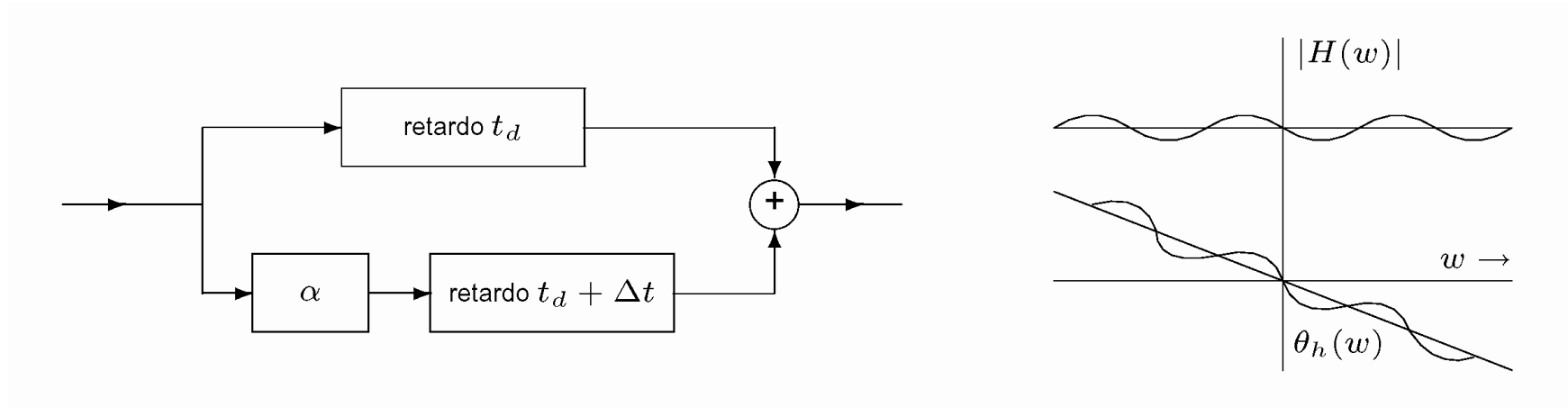
Dado que la distorsión es proporcional a la amplitud de la señal transmitida, es posible reducir este tipo de distorsión mediante un compresor:





EFECTO MULTIPATH

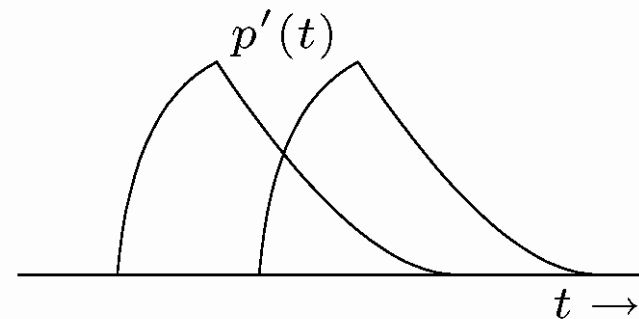
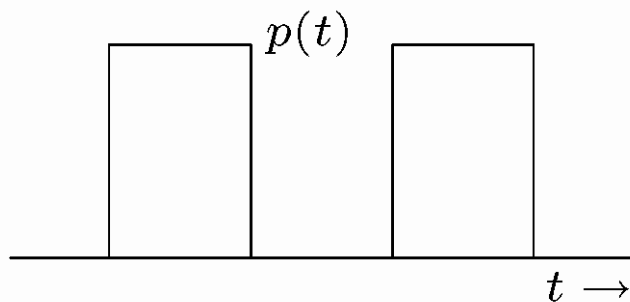
Este efecto se produce cuando la señal es interferida por una réplica retardada y atenuada de sí misma. Tiene lugar en transmisiones por radio debido a las ondas reflejadas en la ionosfera o en accidentes geográficos. Ocurre un efecto similar con los ecos producidos por discontinuidades en las líneas de transmisión.



$$\begin{aligned} H(\omega) &= e^{-j\omega t_d} + \alpha e^{-j\omega(t_d + \Delta t)} = e^{-j\omega t_d} (1 + \alpha e^{-j\omega \Delta t}) \\ &= e^{-j\omega t_d} (1 + \alpha \cos(\omega \Delta t) - j\alpha \sin(\omega \Delta t)) \\ &= \sqrt{1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos(\omega \Delta t)} e^{-j \left[\omega t_d + \tan^{-1} \left(\frac{\alpha \sin(\omega \Delta t)}{1 + \alpha \cos(\omega \Delta t)} \right) \right]} \end{aligned}$$

3.3.- ANCHO DE BANDA Y VELOCIDAD DE TRANSMISIÓN

- En un sistema de comunicación digital, la información se transmite en base a las amplitudes relativas de un tren de pulsos.
- Un pulso limitado en el tiempo tiene un ancho de banda infinito.
- Al transmitir los pulsos por un canal de ancho de banda finito, se dispersan temporalmente, interfiriendo con los pulsos adyacentes.
- Para evitar errores, es necesario separar los pulsos de forma que la interferencia sea pequeña y no produzca errores en el receptor.
- La velocidad de transmisión es proporcional al ancho de banda: Cuanto menor es el ancho de banda, mayor es la dispersión y mayor deberá ser la separación entre pulsos, lo que conduce a una menor velocidad de transmisión.



LÍMITE TEÓRICO DE VELOCIDAD DE TRANSMISIÓN

El teorema de muestreo establece que una señal limitada en banda a B Hz queda especificada usando $2B$ amplitudes independientes por segundo.

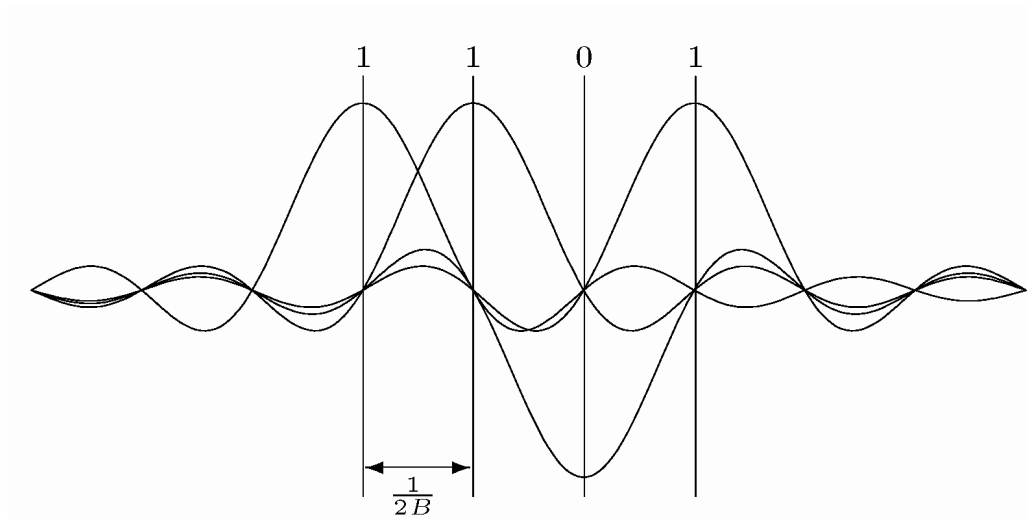
Por lo tanto, debe ser posible transmitir $2B$ amplitudes por segundo por un canal de ancho de banda B Hz, ya que a través de ese canal es posible transmitir la señal analógica limitada en banda a B Hz.

Para conseguir este límite teórico es necesario transmitir pulsos con separación temporal $1/2B$ de forma que no interfieran. Esto puede conseguirse eligiendo la forma de los pulsos de modo que cuando uno alcanza su valor máximo (referencia de amplitud), los demás se anulen:

$$p(\pm n/2B) = 0 \quad \forall n \neq 0 \quad p(0) \neq 0$$

Si nos limitamos a pulsos de ancho de banda B Hz, la única solución es:

$$p(t) = \text{sinc}(2Bt)$$



El problema de este método es que requiere una perfecta sincronización entre el ancho de banda y la velocidad de transmisión. Si no se da esta condición, aparece una interferencia que puede ser grande, dado que la función $\text{sinc}(2BT)$ decae como $1/n$ y la serie $\sum(1/n)$ no está acotada.

Nyquist mostró que se pueden encontrar pulsos de ancho de banda comprendido entre B y $2B$ que decaen más rápidamente que $1/t$, y por lo tanto provocan menor interferencia intersimbólica.

En resumen, el ancho de banda necesario para transmitir $2B$ pulsos varía entre $B\text{Hz}$ y $2B\text{Hz}$.

3.4.- DENSIDAD DE ENERGÍA ESPECTRAL

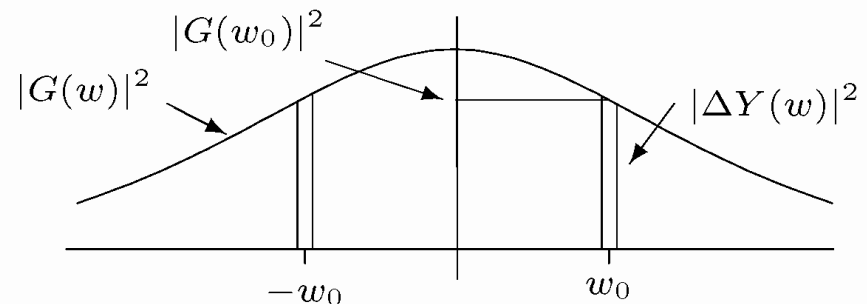
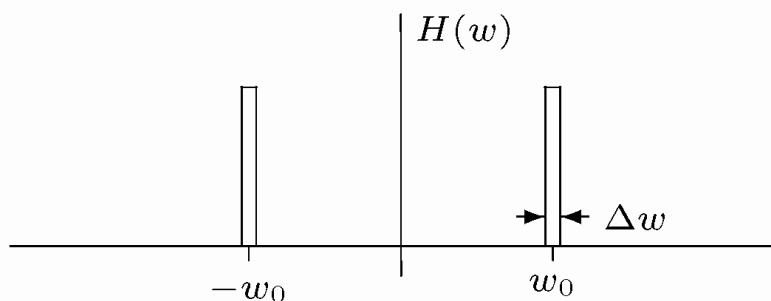
La energía de una señal real (si es finita) se calcula como (T. Parseval):

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 d\omega$$

Si la señal se pasa por un filtro estrecho $H(\omega)$ de ganancia unidad para un entorno $\Delta\omega$ alrededor de $\pm\omega_0$, se tiene:

$$\Delta Y(\omega) = G(\omega)H(\omega) \Rightarrow \Delta E_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 |H(\omega)|^2 d\omega = 2|G(\omega_0)|^2 \Delta f$$

Por tanto, $|G(\omega)|^2$ es una densidad de energía con unidades de energía/Hz.



AUTOCORRELACIÓN Y DENSIDAD DE ENERGÍA ESPECTRAL

El valor $2|G(\omega_0)|^2$ representa la contribución de la componente de frecuencia $f_0 = \omega_0/2\pi$ a la energía total de la señal $g(t)$. Se puede definir la función **densidad de energía espectral** $\Psi_g(\omega)$ como:

$$\Psi_g(\omega) \equiv |G(\omega_0)|^2 \quad E_g = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_g(\omega) d\omega = 2 \int_0^{\infty} \Psi_g(\omega) df$$

La función de **autocorrelación** se define como:

$$\psi_g(t) \equiv g(t) \circledast g(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)g(\tau + t)dt$$

y verifica que $\psi_g(t) \equiv g(t) \circledast g(t) = g(t) * g(-t)$.

$$g(t) \circledast g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)g(\tau + t)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau - t)g(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(-(t - \tau))g(\tau)d\tau = g(t) * g(-t)$$

Aplicando esta propiedad, para señales reales se puede demostrar que $\Psi_g(\omega)$ es la transformada de Fourier de $\psi_g(t)$:

$$\mathcal{F}[\psi_g(t)] = \mathcal{F}[g(t) * g(-t)] = G(\omega)G^*(\omega) = |G(\omega)|^2 = \Psi_g(\omega) \quad \boxed{\psi_g(t) \leftrightarrow \Psi_g(\omega)}$$

(ya que $g(-t) \leftrightarrow G(-\omega)$ por propiedad de escalado, y $G(-\omega) = G^*(\omega)$ para señales reales).

ENERGÍA DE SEÑALES MODULADAS

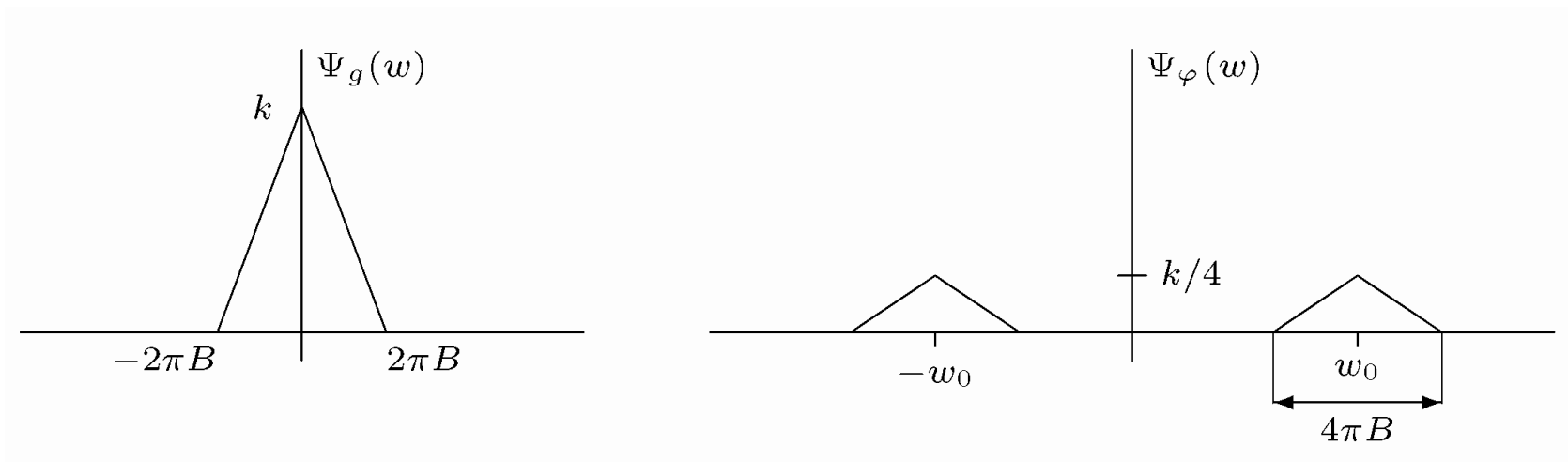
La energía de una señal modulada es la mitad que la de la señal en banda-base.

$$\varphi(t) = g(t) \cos(\omega_0 t) \quad \Phi(\omega) = \frac{1}{2}[G(\omega + \omega_0) + G(\omega - \omega_0)]$$

$$\Psi_\varphi(\omega) = \frac{1}{4}|G(\omega + \omega_0) + G(\omega - \omega_0)|^2$$

Si $\omega_0 \geq 2\pi B$, los espectros $G(\omega + \omega_0)$ y $G(\omega - \omega_0)$ no se solapan, y entonces:

$$\Psi_\varphi(\omega) = \frac{1}{4}[|G(\omega + \omega_0)|^2 + |G(\omega - \omega_0)|^2] = \frac{1}{4}[\Psi_g(\omega + \omega_0) + \Psi_g(\omega - \omega_0)]$$



3.5.- DENSIDAD DE POTENCIA ESPECTRAL

Cuando una señal $g(t)$ está definida en el intervalo $\pm\infty$ puede no tener una energía finita. Para este tipo de señales, se define la potencia en la forma:

$$P_g \equiv \overline{g^2(t)} \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g^2(t) dt$$

Para la señal $g(t)$ se puede definir otra $g_T(t)$ limitada a un intervalo T (de energía integrable) tal que:

$$E_{g_T} = \int_{-\infty}^{\infty} g_T^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G_T(\omega)|^2 d\omega$$

$$P_g = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{g_T}}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|G_T(\omega)|^2}{T} d\omega$$

Esta relación permite definir la **densidad de potencia espectral**:

$$S_g(\omega) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|G_T(\omega)|^2}{T}$$

$$P_g = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_g(\omega) d\omega = 2 \int_0^{\infty} S_g(\omega) df$$

AUTOCORRELACIÓN NORMALIZADA Y DENSIDAD DE POTENCIA ESPECTRAL

La **autocorrelación normalizada** se define como:

$$\mathcal{R}_g(t) \equiv \overline{g(\tau)g(\tau+t)}$$

$$\mathcal{R}_g(t) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(\tau)g(\tau+t)d\tau = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} g_T(\tau)g_T(\tau+t)d\tau = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\psi_{g_T}}{T}$$

de modo que la densidad de potencia espectral es la transformada de Fourier de la función autocorrelación normalizada:

$$\mathcal{F}[\mathcal{R}_g(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|G_T(\omega)|^2}{T} = S_g(\omega)$$

POTENCIA DE SEÑALES MODULADAS

Al igual que en el caso de la energía, se verifica que:

$$\varphi(t) = g(t) \cos(\omega_0 t) \quad \omega_0 \geq 2\pi B$$

$$S_\varphi(\omega) = \frac{1}{4}[S_g(\omega + \omega_0) + S_g(\omega - \omega_0)]$$

RELACIONES DE ENTRADA-SALIDA

$$\begin{array}{c} x(t) \\ \hline X(\omega) \end{array} \rightarrow \boxed{h(t)} \begin{array}{c} y(t) = x(t) * h(t) \\ \hline Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) \end{array}$$

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad \Rightarrow \quad Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

$$|Y(\omega)|^2 = |H(\omega)|^2 |X(\omega)|^2 \quad \Rightarrow \quad \Psi_y(\omega) = |H(\omega)|^2 \Psi_x(\omega)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|Y(\omega)|^2}{T} = |H(\omega)|^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X(\omega)|^2}{T} \quad \Rightarrow \quad S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_x(\omega)$$

3.6.- DENSIDAD DE POTENCIA ESPECTRAL DEL RUIDO

El ruido es una señal aleatoria de energía no-finita. Puede caracterizarse en base a su densidad de potencia espectral.

Podemos representar un ruido $n(t)$ en la forma:

$$n(t) = \sum_k C_k \cos(\omega_k t + \theta_k) \quad \begin{array}{l} \omega_k = k\Delta\omega \\ \Delta\omega \rightarrow 0 \end{array}$$

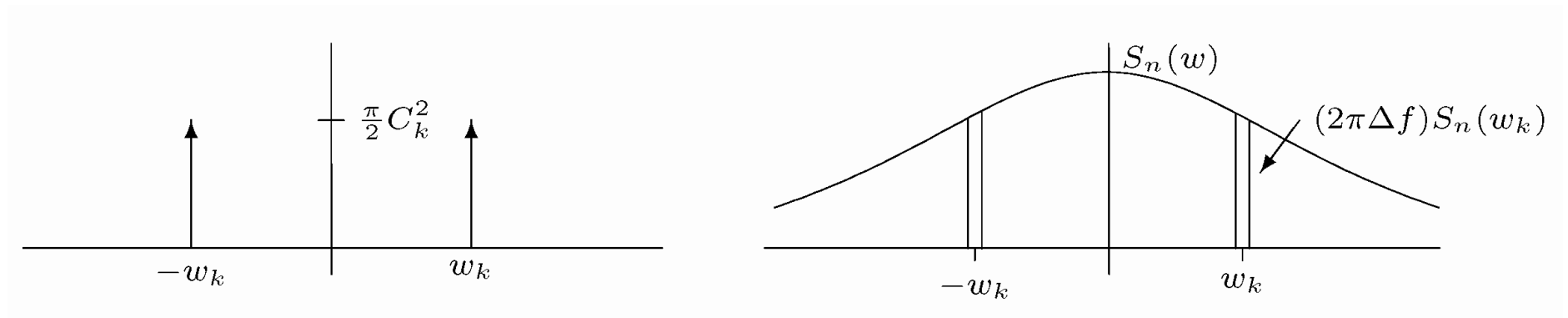
donde las fases θ_k son aleatorias. Los valores C_k se pueden determinar midiendo la potencia en una banda de ancho Δf .

En esta banda, la potencia es: $(2\Delta f)S_n(\omega_k)$

Por otra parte, la contribución a la densidad de potencia espectral del término $C_k \cos(\omega_k t + \theta_k)$ de la sumatoria es $C_k^2/2$ y por lo tanto,

$$\frac{C_k^2}{2} = (2\Delta f)S_n(\omega_k) \quad \Rightarrow \quad C_k^2 = 4S_n(\omega_k)\Delta f$$

de modo que podemos caracterizar un ruido a partir de su densidad de potencia espectral $S_n(\omega)$.



RUIDO BLANCO

Se denomina ruido blanco a un ruido cuya densidad de potencia espectral es constante.

Cuando un ruido blanco de densidad de potencia espectral $S_n(\omega) = \mathcal{N}/2$ se pasa por un filtro ideal de ancho de banda B , la potencia del ruido de salida es:

$$N_o = 2 \int_0^B S_n(\omega) df = 2 \left(\frac{\mathcal{N}}{2} B \right) = \mathcal{N} B$$

Tema 4:

SISTEMAS DE COMUNICACIÓN DIGITAL

Tema 4: SISTEMAS DE COMUNICACIÓN DIGITAL

4.1.- Conversión A/D. PCM y modulación delta.

4.2.- Multiplexado digital.

4.3.- Codificación de línea.

4.4.- Conformación de pulsos.

4.5.- Aleatorización (scrambling).

4.6.- Repetidores regenerativos. Ecualización.

4.7.- Probabilidad de error en detección.

4.8.- Comunicaciones M-arias.

4.9.- Sistemas digitales con portadora.

INTRODUCCIÓN

Los sistemas de comunicación digital están reemplazando a los sistemas analógicos.

Ventajas de los sistemas digitales:

- Mayor inmunidad al ruido y a los efectos de canal que los analógicos.
- Los repetidores regenerativos eliminan el efecto acumulativo del ruido. Esto es imposible en los sistemas analógicos.
- La implementación hardware es más flexible y permite la utilización de microprocesadores, conmutación digital y circuitos integrados VLSI.
- Las señales digitales se pueden codificar para obtener un error de transmisión extremadamente bajo.
- Los sistemas de comunicación digital son inherentemente más eficaces en la implementación del intercambio SNR-B.

4.1.- CONVERSIÓN A/D: PCM Y MODULACIÓN DELTA

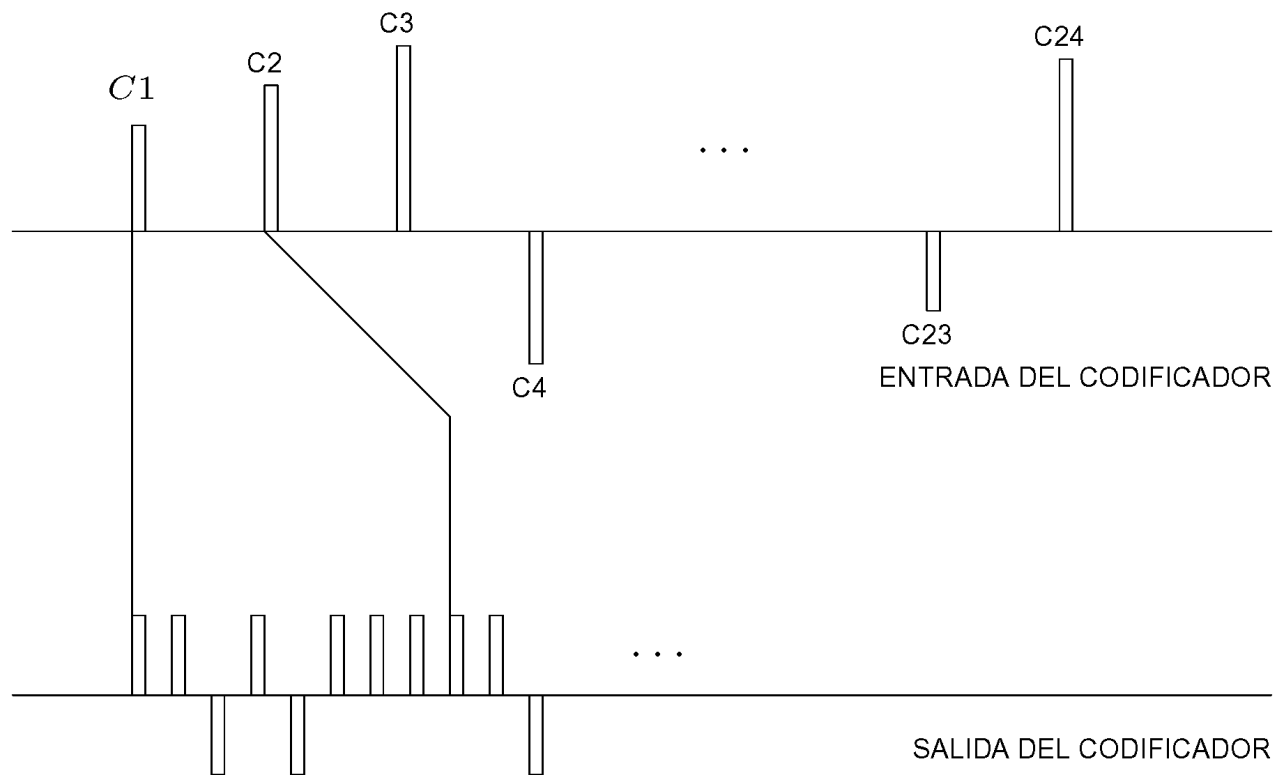
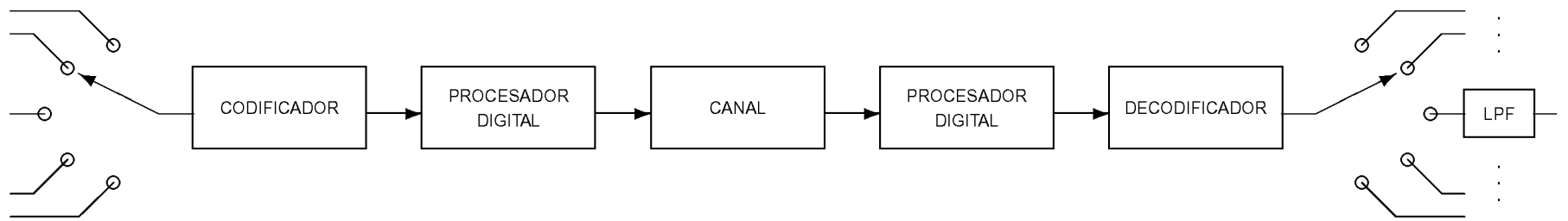
Ya se vio (tema 2) que es posible representar una señal analógica mediante una señal digital.

Vamos a analizar dos técnicas de conversión A/D:

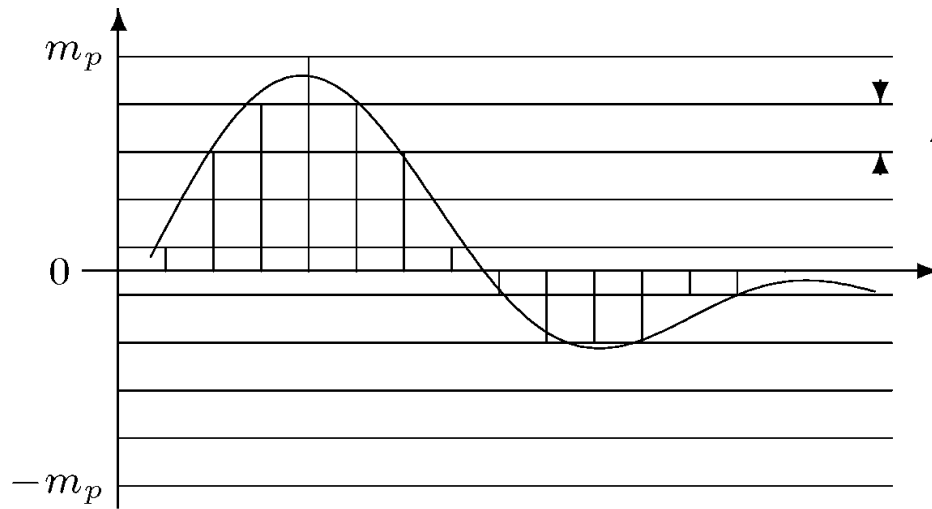
- PCM: Pulse Code Modulation
- DM: Delta Modulation

PCM

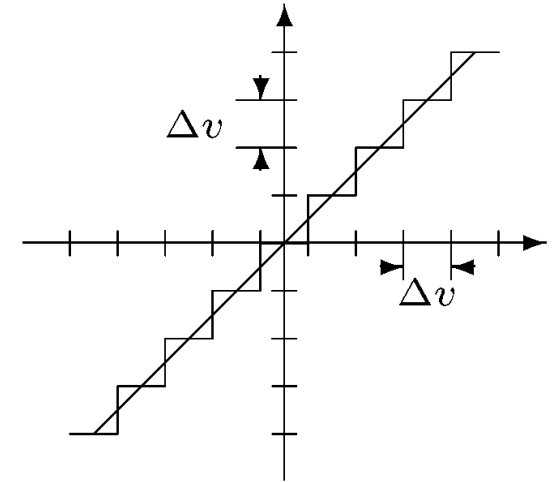
- Su desarrollo fue motivado por la necesidad de aumentar la capacidad de las líneas telefónicas.
- Primero se intentó mediante multiplexado en frecuencia de las líneas de 4 kHz de ancho de banda. 24 canales x 8 kHz = 192 kHz; 300 kHz serían suficientes.
- Problemas de ruido (transmisión analógica muy ruidosa a altas frecuencias).
- Se desarrolló un esquema basado en PCM con repetidores regenerativos:
 - 24 conferencias x 8 kHz x 8 bits/muestra = 1.5360 Mbits/seg. TDM.
 - 24 conferencias sobre un ancho de banda de 1.5440 MHz.



CUANTIZACIÓN



$$\Delta v = \frac{2m_p}{L}$$



$$m(t) = \sum_k m(kT_s) \text{sinc}(2Bt - k)$$

$$\hat{m}(t) = \sum_k \hat{m}(kT_s) \text{sinc}(2Bt - k)$$

ERROR DE CUANTIZACIÓN

$$m(t) = \sum_k m(kT_s) \text{sinc}(2Bt - k) \quad \hat{m}(t) = \sum_k \hat{m}(kT_s) \text{sinc}(2Bt - k)$$

$$q(t) = \hat{m}(t) - m(t) = \sum_k [\hat{m}(kT_s) - m(kT_s)] \text{sinc}(2Bt - k) = \sum_k q(kT_s) \text{sinc}(2Bt - k)$$

$$\overline{q^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} q^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left(\sum_k q(kT_s) \text{sinc}(2Bt - k) \right)^2 dt$$

$$\overline{q^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_k \sum_l q_k q_l \int_{-T/2}^{T/2} \text{sinc}(2Bt - k) \text{sinc}(2Bt - l) dt$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} \text{sinc}(2Bt - k) \text{sinc}(2Bt - l) dt = \frac{1}{2B} \delta_{k,l}$$

$$\overline{q^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2BT} \sum_k q^2(kT_s)$$

SNR asociada al ERROR DE CUANTIZACIÓN

$$N_q = \overline{q^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2BT} \sum_k q^2(kT_s) = \overline{q^2}$$

Asumiendo que el error es equiprobable en el intervalo $[-\Delta v/2, \Delta v/2]$, la potencia del error de cuantización se puede expresar en la forma:

$$N_q = \overline{q^2} = \int_{-\infty}^{\infty} q^2 p(q) dq = \frac{1}{\Delta v} \int_{-\Delta v/2}^{\Delta v/2} q^2 dq = \frac{(\Delta v)^2}{12} = \frac{m_p^2}{3L^2}$$

$$S_o = \overline{m^2(t)} \quad N_o = N_q = \frac{m_p^2}{3L^2} \quad \text{SNR} = \frac{S_o}{N_o} = 3L^2 \frac{\overline{m^2(t)}}{m_p^2}$$

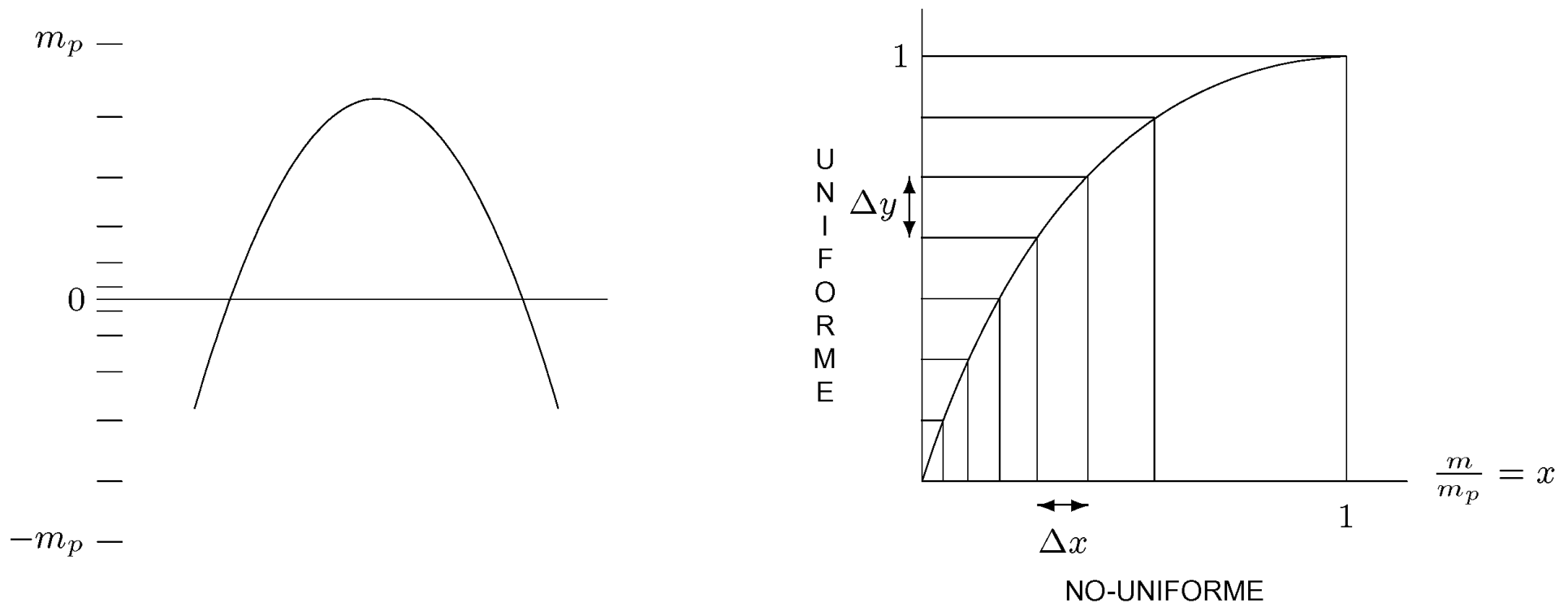
Inconvenientes:

- La SNR depende de la señal de entrada.
- Cuando la amplitud es pequeña, la SNR decrece rápidamente.
- Para la voz, las amplitudes pequeñas son más probables que las grandes.
- La mayor parte del tiempo se desaprovechan niveles de cuantización (SNR baja).

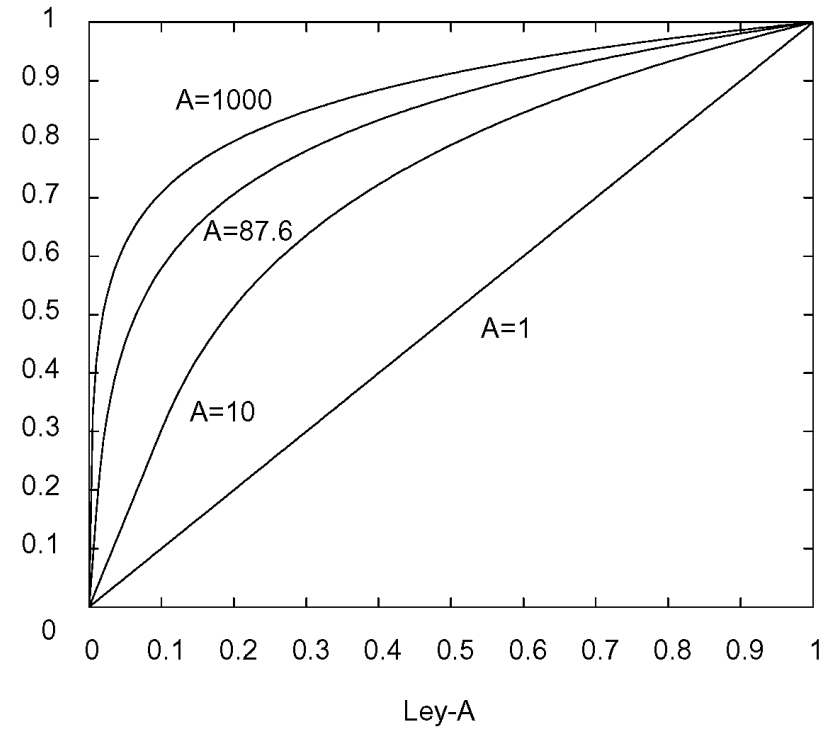
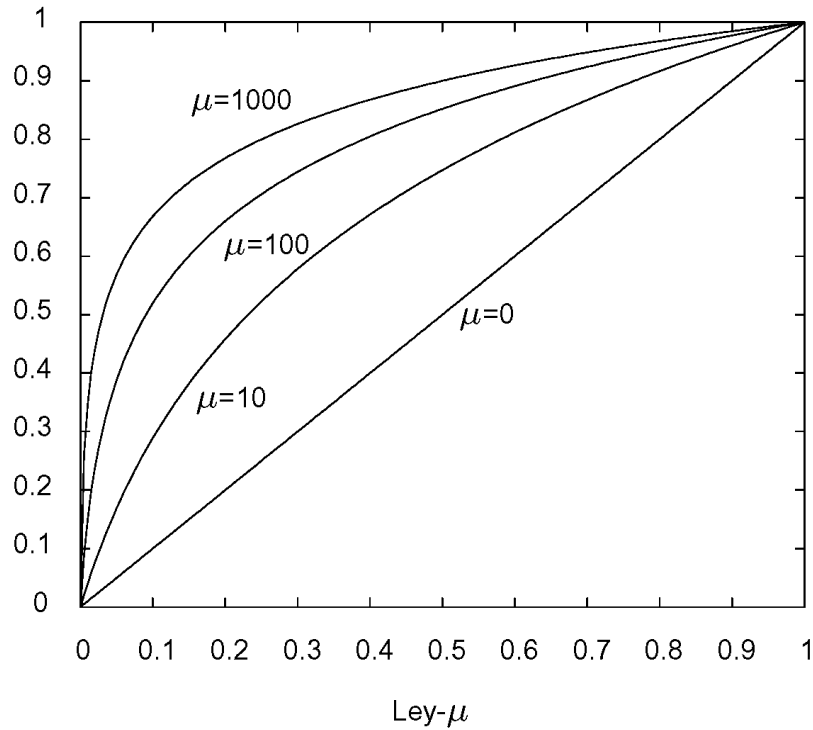
CUANTIZACIÓN NO UNIFORME (Compresión instantánea)

Solución: Para amplitudes pequeñas, cuantos pequeños; para amplitudes grandes, cuantos grandes:

Cuantización no uniforme o compresión instantánea: ley μ y ley A



Ley μ y ley A



$$y = \frac{\text{sgn}(m)}{\log(1 + \mu)} \log \left(1 + \mu \frac{|m|}{m_p} \right) \quad y = \begin{cases} \frac{A}{1+\log(A)} \left(\frac{m}{m_p} \right) & \frac{|m|}{m_p} \leq \frac{1}{A} \\ \frac{\text{sgn}(m)}{1+\log(A)} \left(1 + \log \left(A \frac{|m|}{m_p} \right) \right) & \frac{1}{A} < \frac{|m|}{m_p} \leq 1 \end{cases}$$

Estándar: $\mu=100$ y $\mu=255$ en USA; $A=87.6$ en Europa.

SNR en ley μ

Para n bits, $L = 2^n$ niveles de cuantización entre $-m_p$ y m_p .

Cuantización lineal:

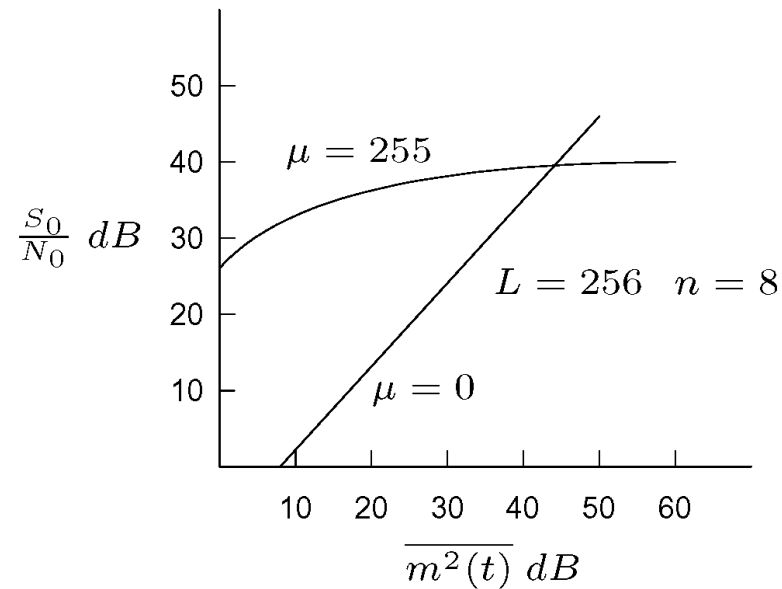
$$\text{SNR} = 3L^2 \left(\frac{\overline{m^2(t)}}{m_p^2} \right) = 3 \cdot 2^{2n} \left(\frac{\overline{m^2(t)}}{m_p^2} \right) \quad \text{SNR(dB)} = 10 \log_{10}(\text{SNR})$$

$$\text{SNR(dB)} = 10 \log_{10} \left(3 \frac{\overline{m^2(t)}}{m_p^2} \right) + n \cdot 10 \log_{10}(4) = 10 \log_{10} \left(3 \frac{\overline{m^2(t)}}{m_p^2} \right) + 6n$$

Cuantización ley μ :

$$\text{SNR(dB)} = 10 \log_{10} \left(\frac{3}{(\log(1 + \mu))^2} \right) + 6n - 10 \log_{10} \left[1 + \frac{m_p^2}{\mu^2 \overline{m^2(t)}} + \sqrt{2 \frac{m_p^2}{\mu^2 \overline{m^2(t)}}} \right]$$

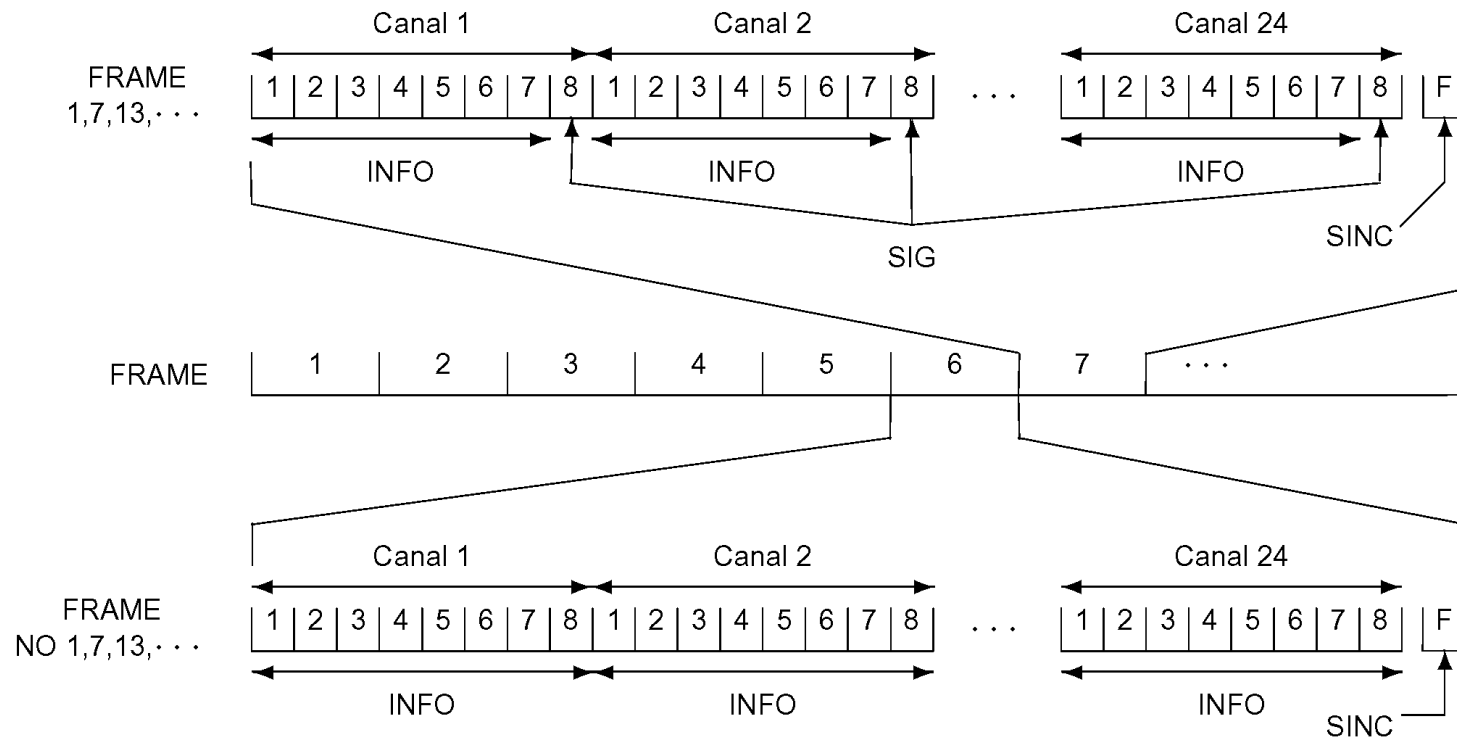
$$\text{SNR(dB)} \approx 10 \log_{10} \left(\frac{3}{(\log(1 + \mu))^2} \right) + 6n \quad \mu^2 \frac{\overline{m^2(t)}}{m_p^2} \gg 1$$



INTERCAMBIO ANCHO DE BANDA - SNR

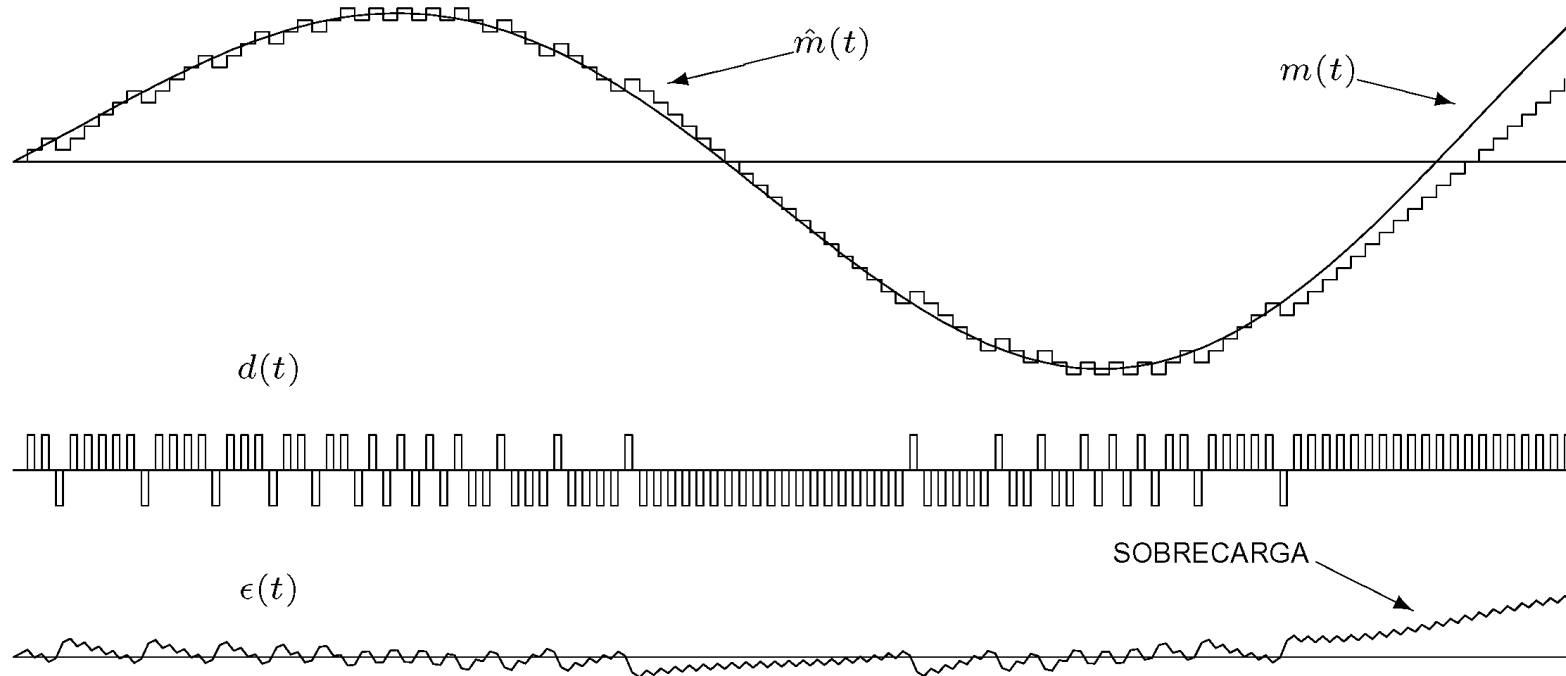
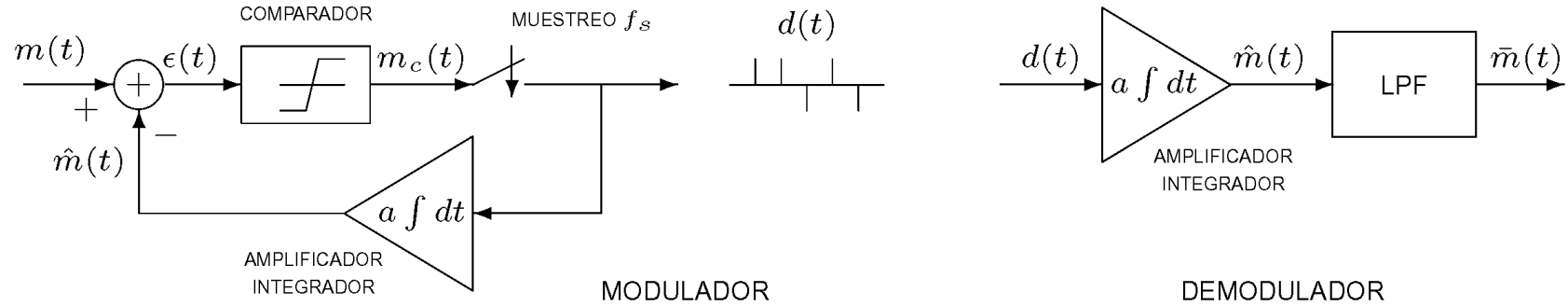
- Para voz: 8 bits/muestra x 8000 muestras/seg = 64 kbits/s
- Ancho de banda: 64 kHz (para B bits por segundo, entre $B/2$ Hz y B Hz)
- Portadora T1: 24 x 64 kHz = 1.5360 MHz (1.5440 con sincronización)
- Intercambio SNR-B: Incrementando un bit cuadruplica SNR (+6dB), incrementando el ancho de banda en un 12.5 %.

Señalización y sincronismo



- En portadora T1: un *frame* contiene 24 canales de 8 bits, más un bit de sincronismo (193 bits).
- Duración del frame $125\mu\text{s}$ (8000 frames/seg para tener 8kHz en cada canal).
- Bit-rate: $193 \text{ bits/frame} \times 8000 \text{ frames/seg} = 1.5440 \text{ Mbits/s} \Rightarrow B=1.5440 \text{ MHz}$.
- Secuencia de bits de sincronismo: 1010101....
- Cada 6 frames, el LSB se dedica a bit de señalización (1333 bits/s de señalización).
- En Europa: frames de 256 bits ($30 \times 8 = 240$ de señal + 16 de sincronismo y señalización). Total: 256 bits/frame $\times 8000 \text{ frames/seg} = 2.0480 \text{ Mbits/s} \Rightarrow B=2.0480 \text{ MHz}$.

MODULACIÓN DELTA (DM)



DM, PCM y DPCM

- En DM se codifica el signo de la pendiente de la señal (no su valor).
- En principio cabría esperar un gran error. Se compensa aumentando la frecuencia de muestreo (de 8 a 10 veces la de PCM).
- DPCM es una variante de DM usando k bits para codificar la pendiente (en lugar de uno).

Sobrecarga de pendiente

Supongamos σ el escalón generado por el integrador. Supongamos $T_s = 1/f_s$ el periodo de muestreo. La máxima pendiente de $\hat{m}(t)$ es σf_s . Si $|\dot{m}(t)| \geq \sigma f_s$ entonces $\hat{m}(t)$ no puede seguir a $m(t)$ y se produce “sobrecarga de pendiente”.

Condición de no sobrecarga: $|\dot{m}(t)| < \sigma f_s$.

Para un tono $m(t) = A \cos(\omega t)$, la condición de no sobrecarga es:

$$|\dot{m}(t)|_{max} = \omega A < \sigma f_s \quad \Rightarrow \quad A_{max} < \frac{\sigma f_s}{\omega}$$

Para señales de voz la condición de no sobrecarga se aproxima si se cumple para 800 Hz ($\omega = 2\pi 800$).

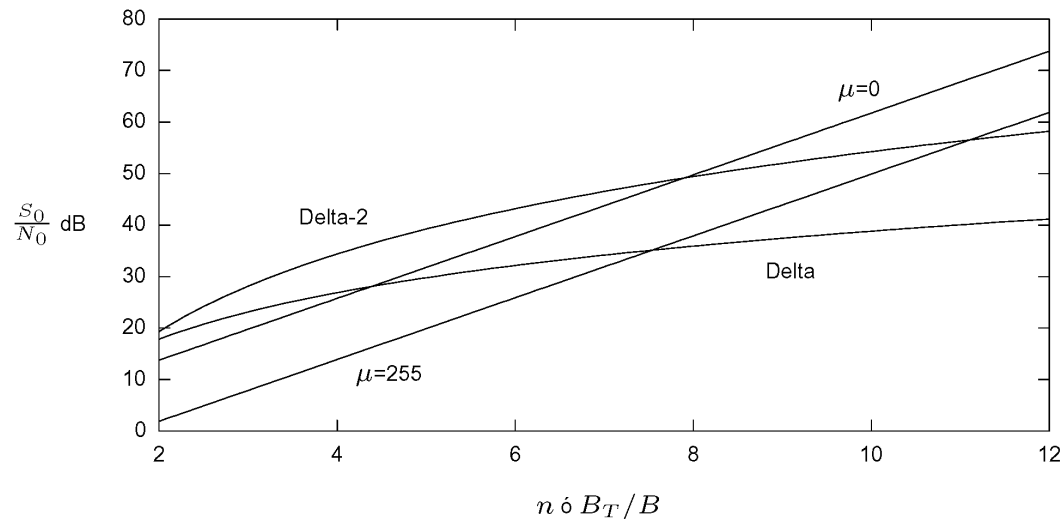
SNR de salida en Modulación Delta

Si suponemos $\epsilon(t)$ uniforme en $[-\sigma, \sigma]$, tenemos $\overline{\epsilon^2(t)} = \sigma^2/3$. Ruido uniformemente distribuido en $[0, f_s]$, solo afecta en el intervalo $[0, B]$:

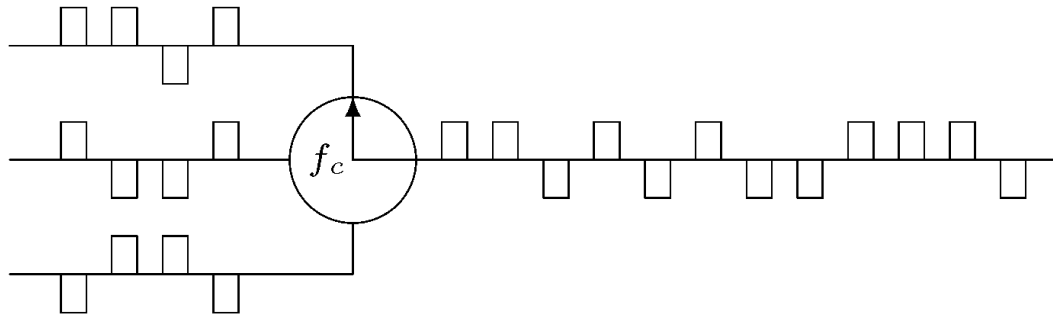
$$N_q = \frac{\sigma^2 B}{3f_s} \Rightarrow \frac{S_o}{N_o} = \frac{3f_s \overline{m^2(t)}}{\sigma^2 B}$$

Para que no haya sobrecarga, se requiere $m_p = \sigma f_s / \omega_r$, de modo que se tiene:

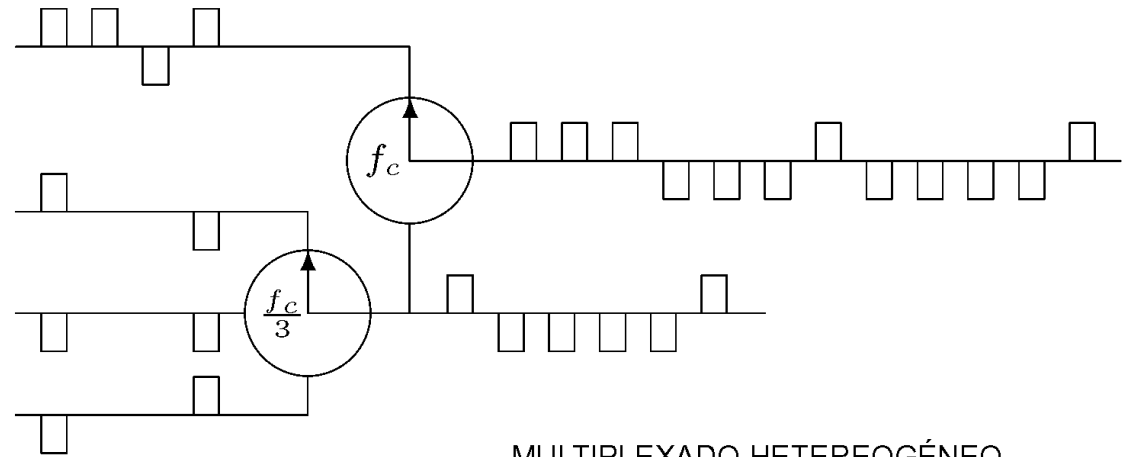
$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{3f_s^3 \overline{m^2(t)}}{\omega_r^2 m_p^2 B} \quad \left(\begin{array}{l} B_T = f_s/2 \\ B = 4000 \\ \omega_r = 800 \end{array} \right) \quad \frac{S_o}{N_o} = \frac{150}{\pi^2} \left(\frac{B_T}{B} \right)^3 \left(\frac{\overline{m^2(t)}}{m_p^2} \right)$$



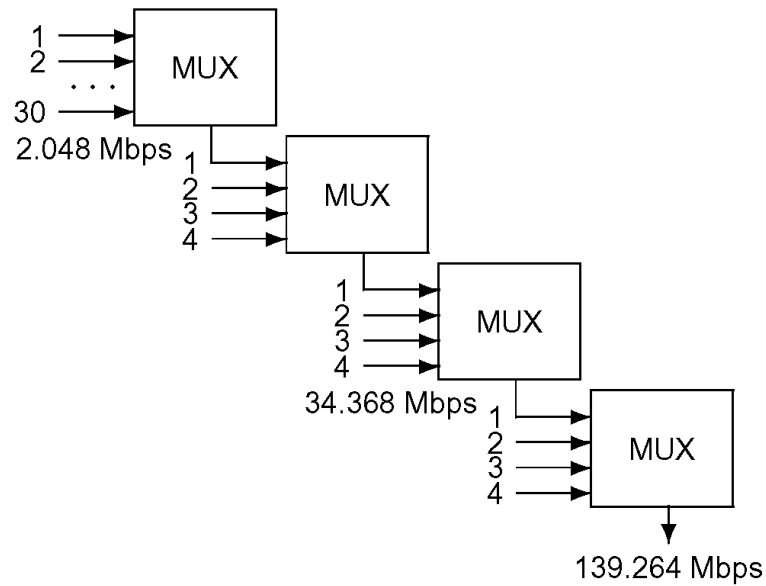
4.2.- MULTIPLEXADO DIGITAL



MULTIPLEXADO HOMOGÉNEO



MULTIPLEXADO HETEROGÉNEO



MULTIPLEXADO JERÁRQUICO (CCITT)

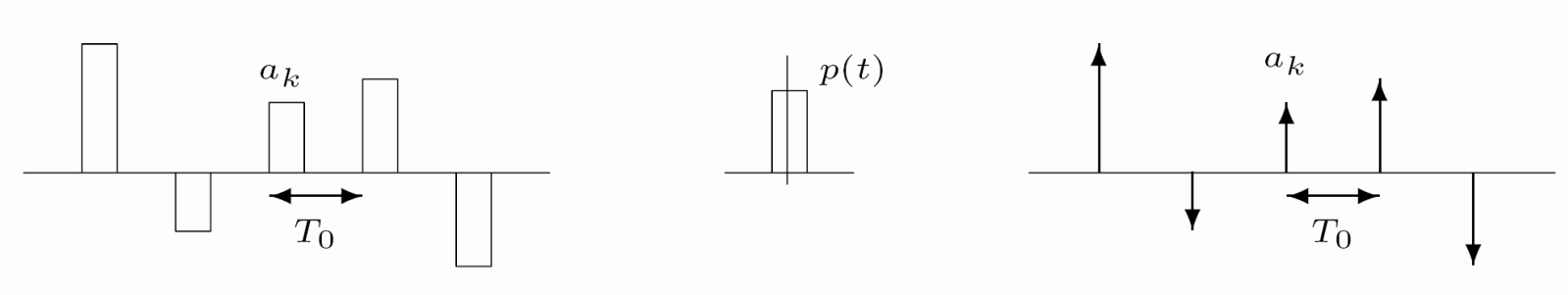
4.3.- CODIFICACIÓN DE LÍNEA

Se denomina CODIFICACIÓN DE LÍNEA a la forma de asignar pulsos a los ceros y unos para representar la señal digital.

Características deseables:

- Ancho de banda de transición lo menor posible.
- Eficiencia: para un ancho de banda dado, la menor ISI posible.
- Capacidad para la detección y corrección de errores.
- Densidad espectral favorable. Es deseable $PSD=0$ para $\omega=0$.
- Temporización: es deseable que se pueda extraer la velocidad de transmisión de la propia señal para sincronizar el muestreo de los bits.
- Transparencia: capacidad de transmitir correctamente una señal independientemente de la secuencia de bits que represente.

PSD de una señal digital



$$y(t) = p(t) * x(t) \quad x(t) = \sum_k a_k \delta(t - kT_0)$$

$$S_y(\omega) = |P(\omega)|^2 S_x(\omega) \quad S_x(\omega) = \mathcal{F}[\mathcal{R}_x(t)]$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_x(t) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(\tau) x(t + \tau) d\tau = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left(\sum_k a_k \delta(\tau - kT_0) \right) \left(\sum_l a_l \delta(\tau - lT_0 + t) \right) d\tau \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NT_0} \sum_k \sum_n a_k a_{k+n} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(\tau - kT_0) \delta((\tau - kT_0) + (t - nT_0)) d\tau \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NT_0} \sum_k \sum_n a_k a_{k+n} \delta(t - nT_0) = \frac{1}{T_0} \sum_n \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_k a_k a_{k+n} \right) \delta(t - nT_0) \end{aligned}$$

$$\mathcal{R}_x(t) = \frac{1}{T_0} \sum_n \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_k a_k a_{k+n} \right) \delta(t - nT_0)$$

Definiendo la autocorrelación de las muestras R_n como:

$$R_n \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_k a_k a_{k+n}$$

$$\mathcal{R}_x(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \delta(t - nT_0)$$

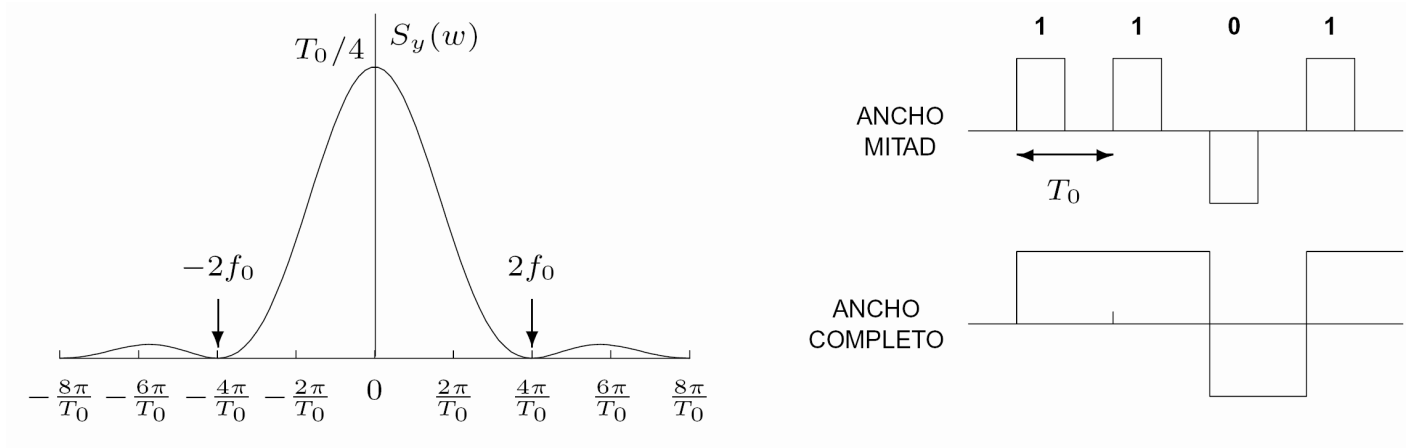
$$S_x(\omega) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n e^{-jn\omega T_0}$$

$$S_x(\omega) = \frac{1}{T_0} \left[R_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} R_n \cos(n\omega T_0) \right]$$

$$S_y(\omega) = \frac{|P(\omega)|^2}{T_0} \left[R_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} R_n \cos(n\omega T_0) \right]$$

La densidad de potencia espectral de una señal digital $S_y(\omega)$ es el producto de la densidad de energía espectral correspondiente a la forma de los pulsos $|P(\omega)|^2$ por la densidad de potencia espectral $S_x(\omega)$ asociada a la amplitud de los pulsos.

Codificación POLAR



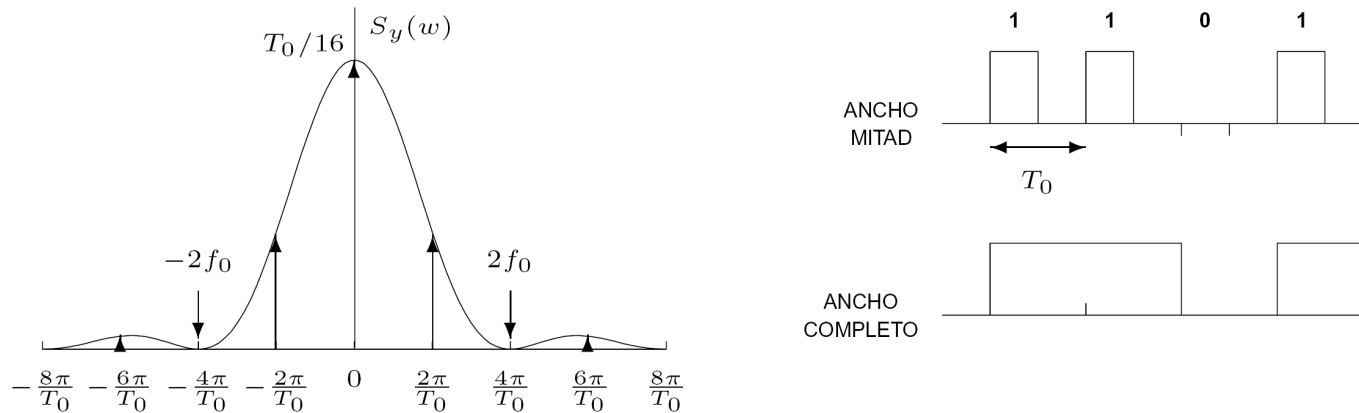
Un **1** se transmite como $p(t)$; un **0** como $-p(t)$.

$$R_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} N = 1 \quad R_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left[\frac{N}{2}(1) + \frac{N}{2}(-1) \right] = 0 \quad \forall n > 0$$

$$S_x(\omega) = \frac{1}{T_0} \quad P(\omega) = \frac{T_0}{2} \text{sinc} \left(\frac{\omega T_0}{4\pi} \right) \quad S_y(\omega) = |P(\omega)|^2 S_x(\omega) = \frac{T_0}{4} \text{sinc}^2 \left(\frac{\omega T_0}{4\pi} \right)$$

- | | |
|-------------------------------|---|
| Ancho de banda esencial: | $2f_0$ (4 veces límite teórico) para pulsos de ancho mitad. |
| Transparencia: | Codificación transparente (siempre hay pulso). |
| Temporización: | No hay información sobre bit rate (sí si se rectifica). |
| Detección/corrección errores: | No hay. |
| Comportamiento en DC: | PSD no se anula para DC. |

Codificación ON-OFF



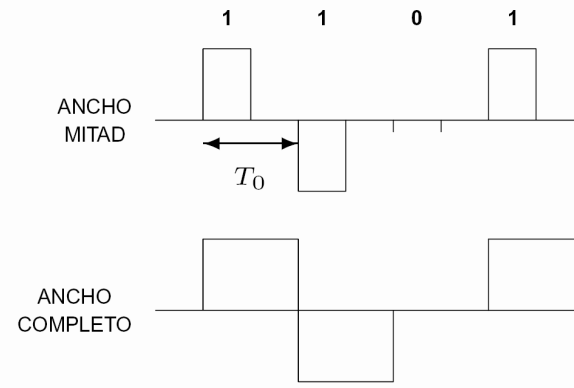
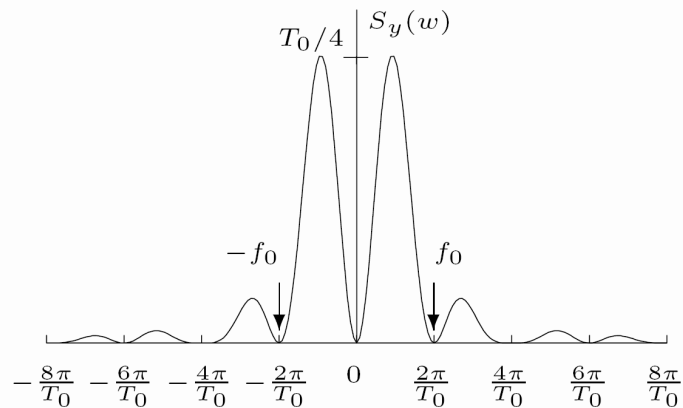
Un **1** se transmite como $p(t)$; un **0** como ausencia de pulso.

$$R_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left[\frac{N}{2}(1) + \frac{N}{2}(0) \right] = \frac{1}{2} \quad R_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left[\frac{N}{4}(1) + \frac{3N}{4}(0) \right] = \frac{1}{4} \quad \forall n > 0$$

$$S_x(\omega) = \frac{1}{4T_0} + \frac{2\pi}{4T_0^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta \left(\omega - \frac{2\pi n}{T_0} \right) \quad S_y(\omega) = \frac{T_0}{16} \text{sinc}^2 \left(\frac{\omega T_0}{4\pi} \right) \left[1 + \frac{2\pi}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta \left(\omega - \frac{2\pi n}{T_0} \right) \right]$$

Ancho de banda esencial:	$2f_0$ (4 veces límite teórico) para pulsos de ancho mitad.
Transparencia:	No transparente (no siempre hay pulso).
Eficiencia:	Requiere doble de potencia que codif. polar para separación similar
Temporización:	Hay información sobre bit rate.
Detección/corrección errores:	No hay.
Comportamiento en DC:	PSD no se anula para DC. Comportamiento pésimo (delta de Dirac en DC).

Codificación BIPOLAR (o pseudoternaria)



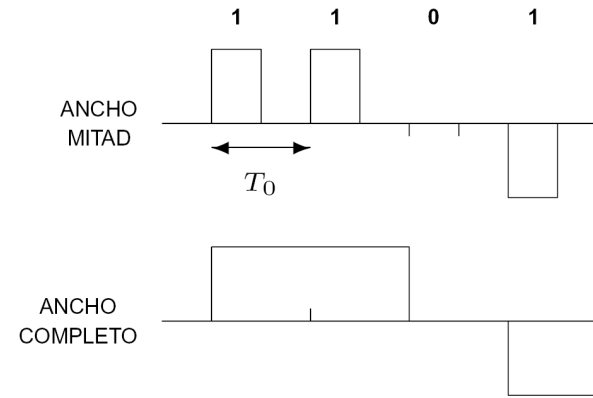
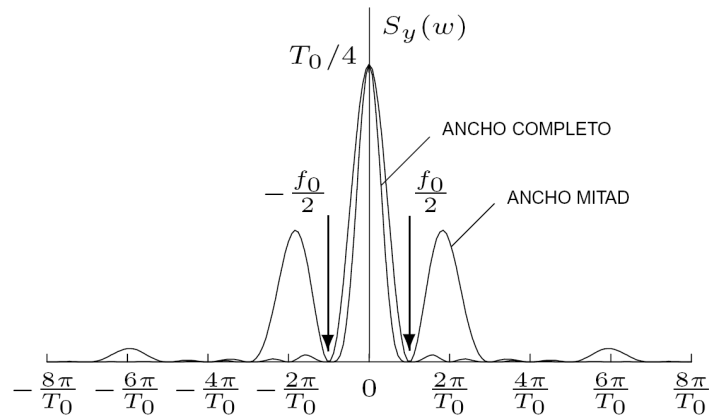
Un **1** se transmite como pulso opuesto al **1** anterior y un **0** como ausencia de pulso.

$$R_0 = \frac{1}{2} \quad R_1 = -\frac{1}{4} \quad R_n = 0 \quad \forall n > 1$$

$$S_y(\omega) = \frac{|P(\omega)|^2}{2T_0} (1 - \cos(\omega T_0)) = \frac{|P(\omega)|^2}{T_0} \sin^2\left(\frac{\omega T_0}{2}\right) = \frac{T_0}{4} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega T_0}{4\pi}\right) \sin^2\left(\frac{\omega T_0}{2}\right)$$

Ancho de banda esencial:	f_0 (2 veces límite teórico) para pulsos de ancho mitad.
Transparencia:	No transparente (no siempre hay pulso).
Eficiencia:	Requiere doble de potencia que codif. polar (3 símbolos)
Temporización:	No hay información sobre bit rate.
Detección/corrección errores:	Permite detectar algunos errores.
Comportamiento en DC:	PSD se anula para DC.

Codificación DUOBINARIA



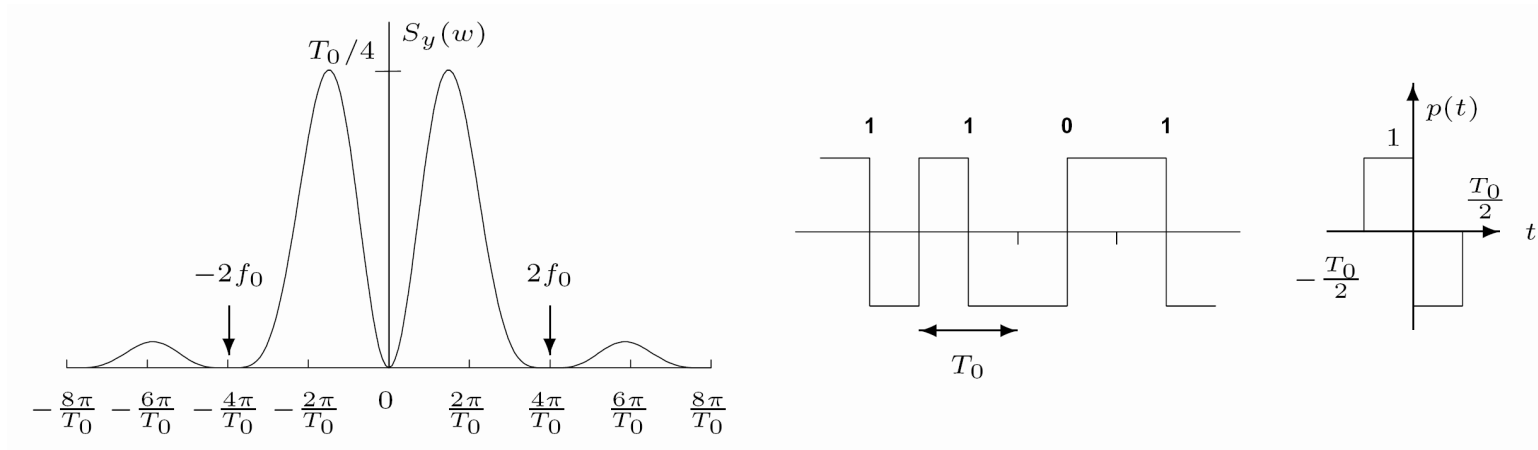
Un **1** se transmite como pulso igual al **1** anterior si el número de ceros entre ellos es par, y opuesto si es impar; un **0** como ausencia de pulso.

$$R_0 = \frac{1}{2} \quad R_1 = \frac{1}{4} \quad R_n = 0 \quad \forall n > 1$$

$$S_y(\omega) = \frac{|P(\omega)|^2}{2T_0} (1 + \cos(\omega T_0)) = \frac{|P(\omega)|^2}{T_0} \cos^2\left(\frac{\omega T_0}{2}\right) = \frac{T_0}{4} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega T_0}{4\pi}\right) \cos^2\left(\frac{\omega T_0}{2}\right)$$

- Ancho de banda esencial: $3f_0/2$ (3 lím. teó.) para p. de ancho mitad; $f_0/2$ para p. ancho completo.
- Transparencia: No transparente (no siempre hay pulso).
- Eficiencia: Requiere doble de potencia que codif. polar (3 símbolos)
- Temporización: No hay información sobre bit rate.
- Detección/corrección errores: Permite detectar algunos errores.
- Comportamiento en DC: PSD no se anula para DC.

Codificación SPLIT-PHASE



Para anular $S_y(0)$ se toma un pulso con $P(0) = 0$ y se aplica codificación polar. La condición necesaria es:

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)e^{-j\omega t} dt \quad P(0) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) dt = 0$$

$$P(\omega) = \frac{T_0}{2} \text{sinc} \left(\frac{\omega T_0}{4\pi} \right) e^{j\omega T_0/4} - \frac{T_0}{2} \text{sinc} \left(\frac{\omega T_0}{4\pi} \right) e^{-j\omega T_0/4} = jT_0 \text{sinc} \left(\frac{\omega T_0}{4\pi} \right) \sin \left(\frac{\omega T_0}{4} \right)$$

$$S_y(\omega) = \frac{|P(\omega)|^2}{T_0} = T_0 \text{sinc}^2 \left(\frac{\omega T_0}{4\pi} \right) \sin^2 \left(\frac{\omega T_0}{4} \right)$$

Características similares a codificación polar, pero con PSD nula para DC (ancho de banda 4 veces límite teórico; transparente; no hay información de bit rate; no permite detectar errores; anula PSD para DC).

4.4.- CONFORMACIÓN DE PULSOS

- Hemos visto cómo controlar $S_y(\omega) = |P(\omega)|^2 S_x(\omega)$ en base al patrón de pulsos o codificación de línea (controlando $S_x(\omega)$). La conformación de pulsos permite controlar $S_y(\omega)$ a través de la forma del pulso, es decir, de $p(t)$ y su transformada $P(\omega)$.
- Un pulso finito tiene un ancho de banda infinito. Cuando se transmite por un canal de ancho de banda finito, el pulso resultante será infinito en el tiempo, provocando ISI. Por otra parte, si elegimos un pulso de ancho de banda finito, será infinito en el tiempo, provocando también ISI.
- Una aproximación alternativa es elegir un pulso infinito en el tiempo pero que no interfiera con los pulsos adyacentes en los instantes de decisión (valores máximos). Esto se puede conseguir eligiendo un pulso limitado en banda de una forma adecuada.
- Nyquist propuso tres criterios para la conformación de pulsos.

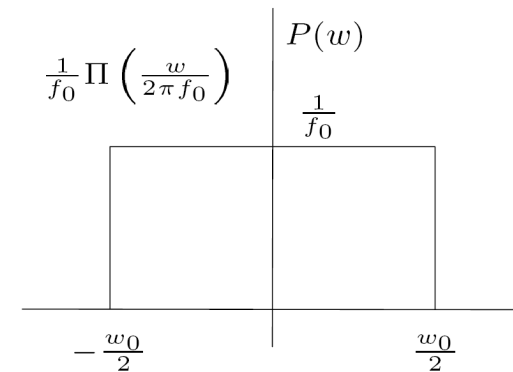
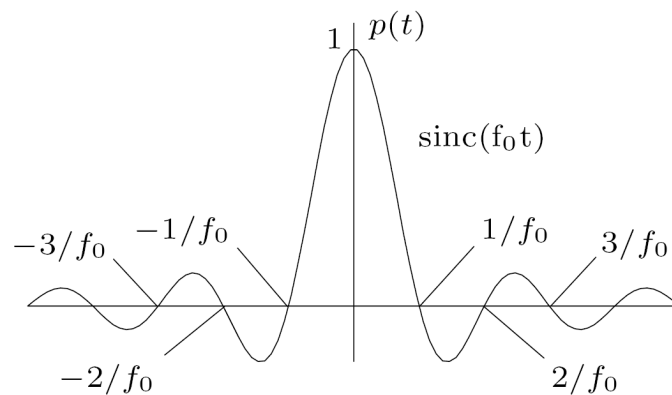
A continuación estudiamos los 3 criterios de Nyquist.

Primer criterio de Nyquist

Para conseguir ISI nula se debe usar un pulso que verifique:

$$p(0) \neq 0 \quad p(\pm nT_0) = 0 \quad \forall n \neq 0$$

donde T_0 es la separación entre pulsos. Si exigimos que el ancho de banda sea $f_0/2$ (con $f_0 = 1/T_0$), la única forma del pulso que cumple esta condición es la función $\text{sinc}(f_0 t)$:



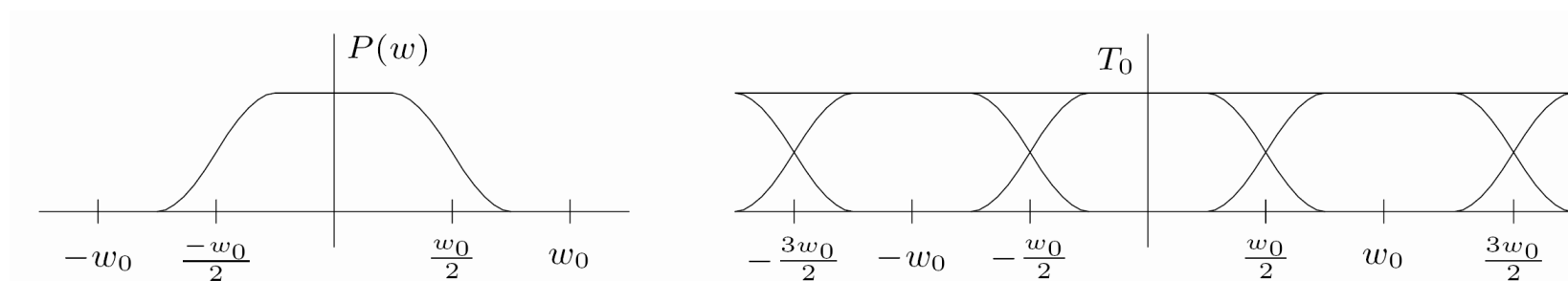
El inconveniente de este tipo de pulso es que la función $\text{sinc}(f_0 t)$ decae como $1/t$ y esto provoca una importante ISI cuando no hay sincronismo entre f_0 y T_0 .

Para evitar este inconveniente, Nyquist propuso pulsos que verifican la condición anterior, pero con ancho de banda entre $f_0/2$ y f_0 . La condición se puede expresar del siguiente modo:

$$p(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) = \delta(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(\omega - n\omega_0) = 1$$

es decir, la condición anterior implica que la suma de los espectros desplazados ω_0 tiene que ser constante. En el rango $0 < \omega < \omega_0$ la condición es:

$$P(\omega) + P(\omega - \omega_0) = T_0 \quad 0 < \omega < \omega_0$$



Haciendo $\omega = x + \omega_0/2$

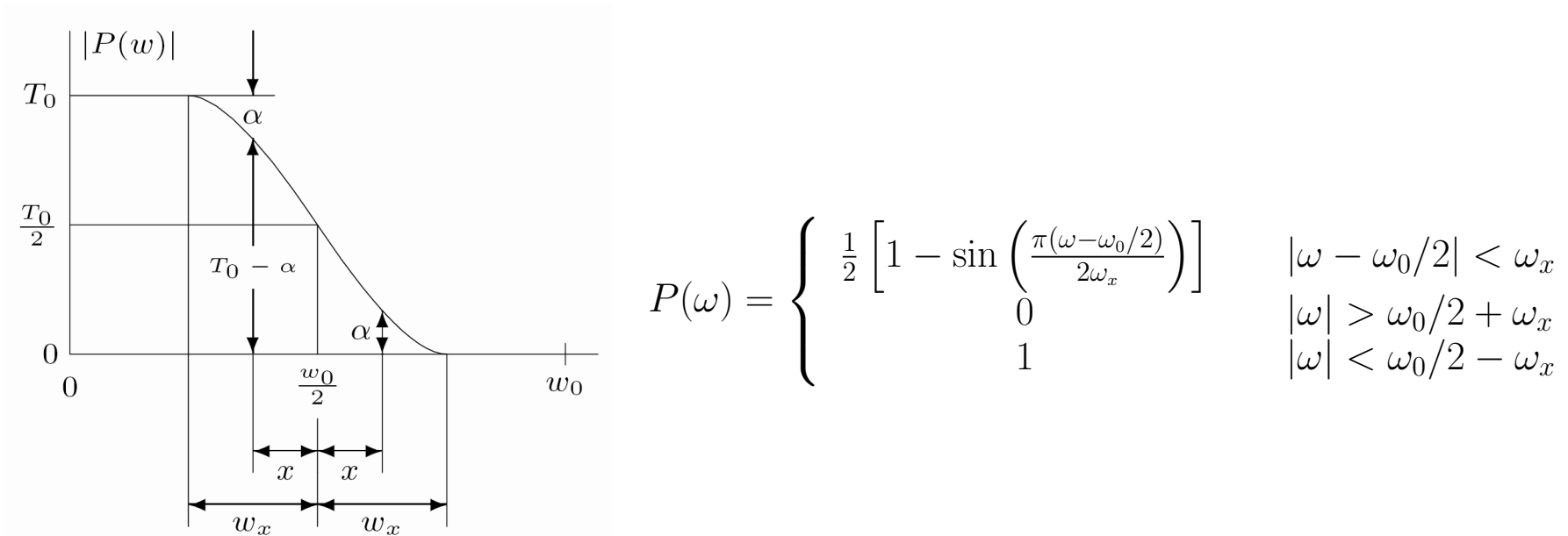
Usando que $P(-\omega) = P^*(\omega)$

$$P(\omega) = |P(\omega)|e^{-j\omega t_d}$$

$$P\left(x + \frac{\omega}{2}\right) + P\left(x - \frac{\omega}{2}\right) = T_0 \quad |x| < \frac{\omega_0}{2}$$

$$P\left(\frac{\omega}{2} + x\right) + P^*\left(\frac{\omega}{2} - x\right) = T_0$$

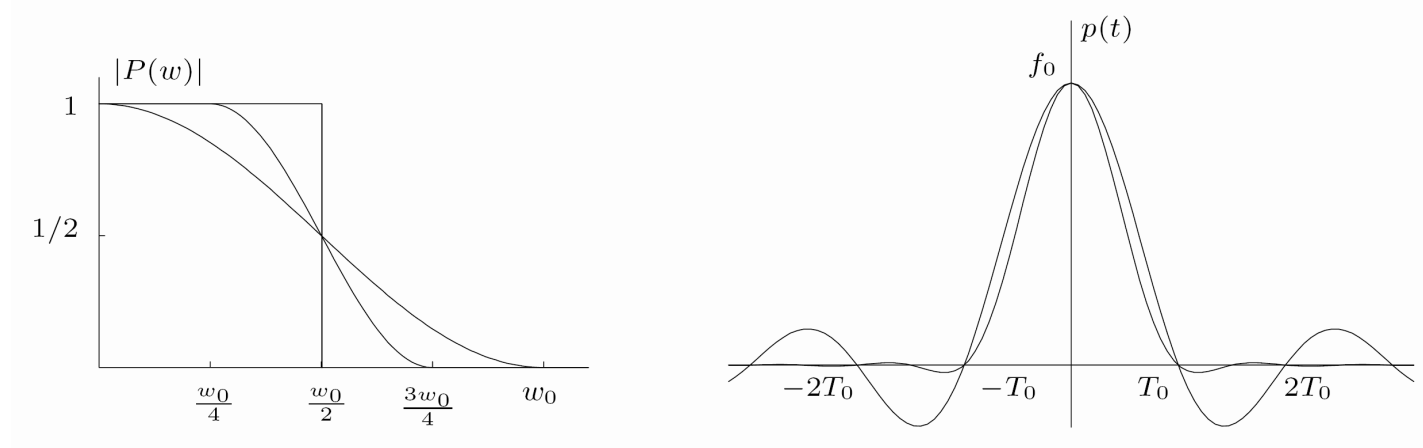
$$|P\left(\frac{\omega}{2} + x\right)| + |P^*\left(\frac{\omega}{2} - x\right)| = T_0$$



El ancho de banda es $\omega_0/2 + \omega_x$. Podemos definir $r = \omega_x/(\omega_0/2)$ donde $0 \leq r \leq 1$.

El ancho de banda se puede expresar como $B = (1 + r)f_0/2$ y r se denomina **exceso de ancho de banda** que se expresa en porcentaje.

Como $0 \leq r \leq 1$, entonces el ancho de banda es $f_0/2 \leq B < f_0$



Para ancho de banda completo ($r=100\%$) se tiene el pulso conocido como **coseno remontado**:

$$P(\omega) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{\omega}{2f_0} \right) \right) \Pi \left(\frac{\omega}{4\pi f_0} \right) = \cos^2 \left(\frac{\omega}{4f_0} \right) \Pi \left(\frac{\omega}{4\pi f_0} \right)$$

La forma temporal del pulso es:

$$p(t) = f_0 \frac{\cos(\pi f_0 t)}{1 - 4f_0^2 t^2} \text{sinc}(f_0 t)$$

y $p(t)$ decae con $1/t^3$, además de anularse en los instantes $kT_0/2$ con $|k| > 1$.

La forma general de los pulsos, para $r = 0$ y para $r = 1$ son:

$$p(t) = f_0 \frac{\cos(r\pi f_0 t)}{1 - 4r^2 f_0^2 t^2} \text{sinc}(f_0 t)$$

$$p(t)_{r=0} = f_0 \text{sinc}(f_0 t)$$

$$p(t)_{r=1} = f_0 \frac{\cos(\pi f_0 t)}{1 - 4f_0^2 t^2} \text{sinc}(f_0 t)$$

Segundo criterio de Nyquist

Este esquema duplica la velocidad de transmisión, manteniendo el ancho de banda mediante un “truco” que consiste en conformar los pulsos para f_0 y enviarlos a $2f_0$.

Un **1** se transmite como $p(t)$ que necesita T_0 para alcanzar su valor máximo. Sin embargo, transcurrido $T_0/2$ (ha alcanzado el valor $K/2$) se transmite un nuevo pulso. Si el nuevo pulso es un **1**, se superpondrán las amplitudes, alcanzando el valor K . Si es un **0** la superposición $K/2 - K/2$ anulará la amplitud. De igual modo, la secuencia **00** da lugar a amplitud $-K$ y la secuencia **01** a amplitud nula.

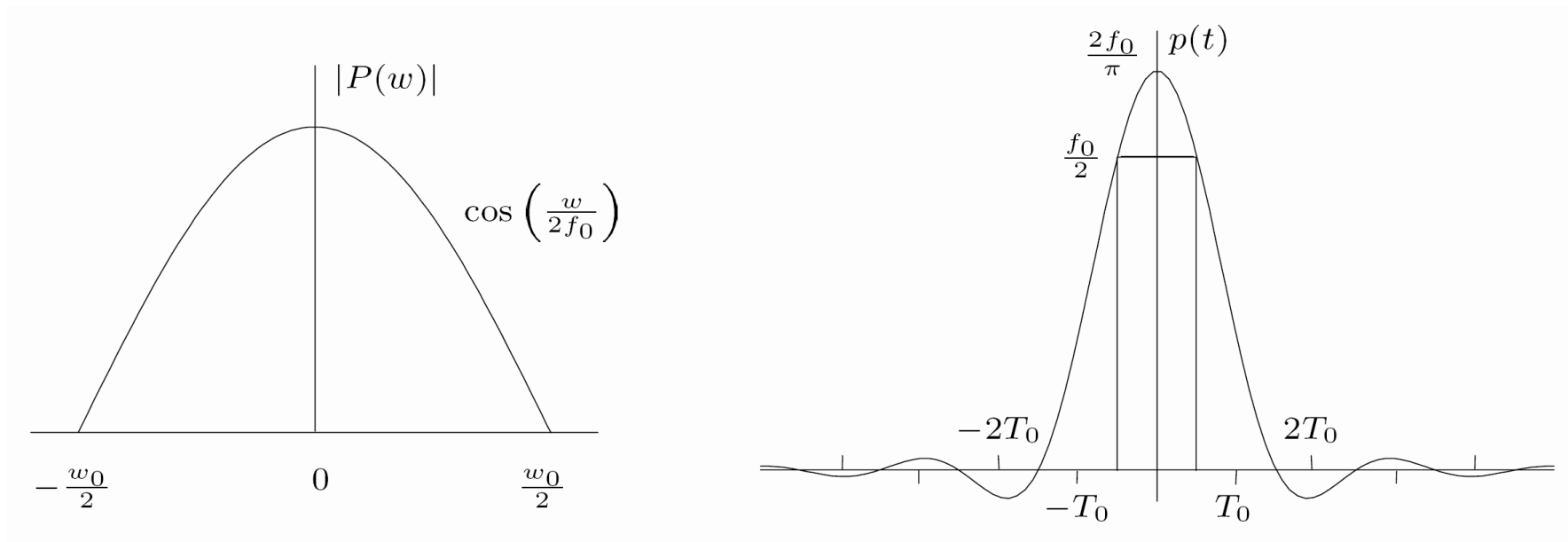
Amplitud recibida	Dígito transmitido
K	1 (anterior 1)
$-K$	0 (anterior 0)
0	Complemento del anterior

El segundo criterio de Nyquist establece qué forma deben tener los pulsos para poder realizar la transmisión bajo este esquema con ISI nula. La condición es:

$$p\left(\pm\frac{T_0}{2}\right) = K/2 \quad p\left(\pm\frac{nT_0}{2}\right) = 0 \quad n = 3, 5, 7, \dots$$

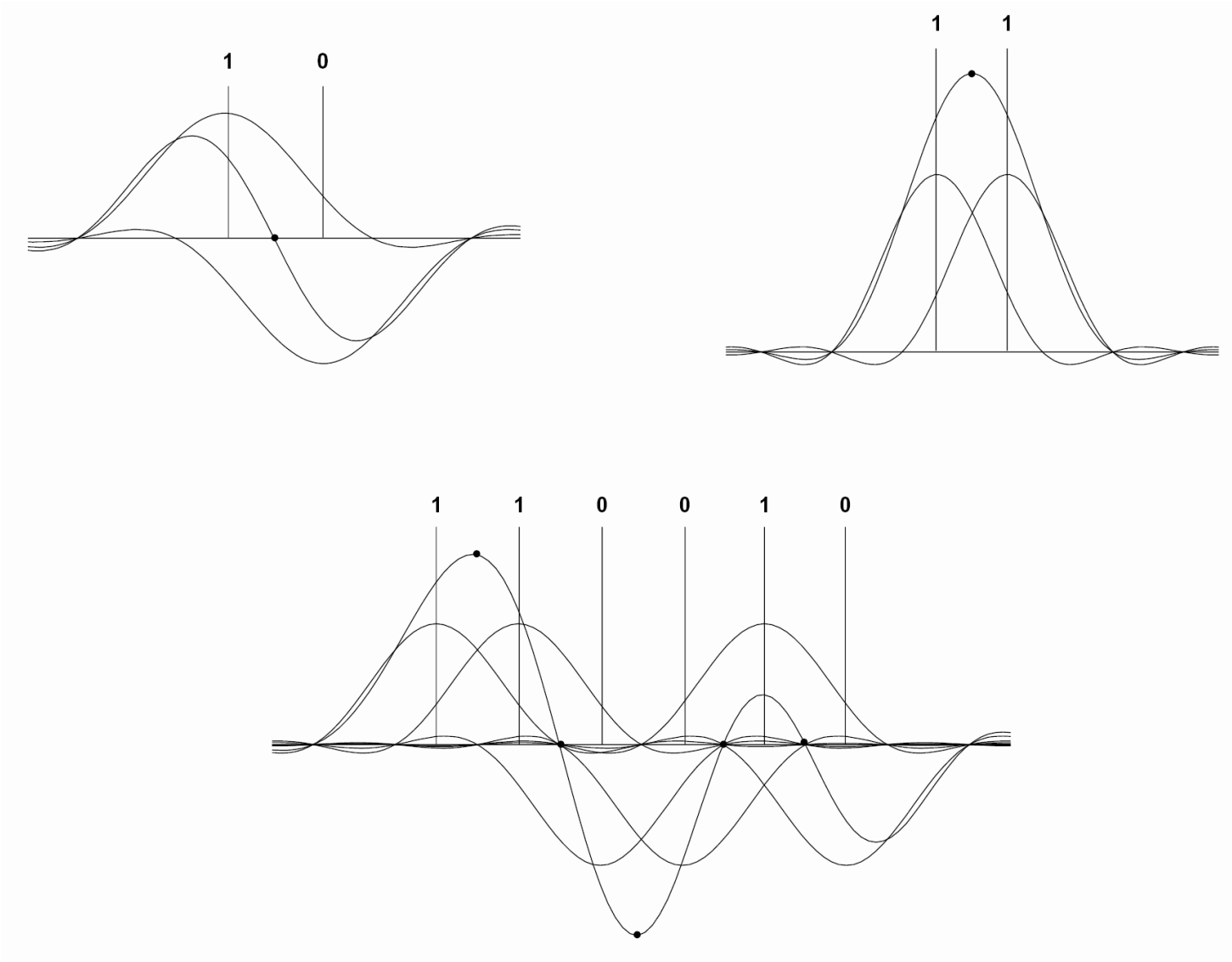
Para ancho de banda $f_0/2$, el único pulso que satisface este criterio es:

$$p(t) = \frac{f_0}{2} [\text{sinc}(f_0(t + T_0/2)) + \text{sinc}(f_0(t - T_0/2))] \leftrightarrow P(\omega) = \cos\left(\frac{\omega}{2f_0}\right) \Pi\left(\frac{\omega}{2\pi f_0}\right)$$



Transmitida	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0
Muestras		f_0	0	0	f_0	0	$-f_0$	$-f_0$	0	0	0
Recibida	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0

Inconveniente: propagación de errores.



Para evitar la propagación de errores, se usa **codificación diferencial**: para transmitir un **1** se envía un pulso igual al anterior; para transmitir un **0** se envía un pulso opuesto al anterior. Así, si recibimos $\pm f_0$, se transmitió un **1** y si recibimos un pulso nulo, se transmitió un **0**.

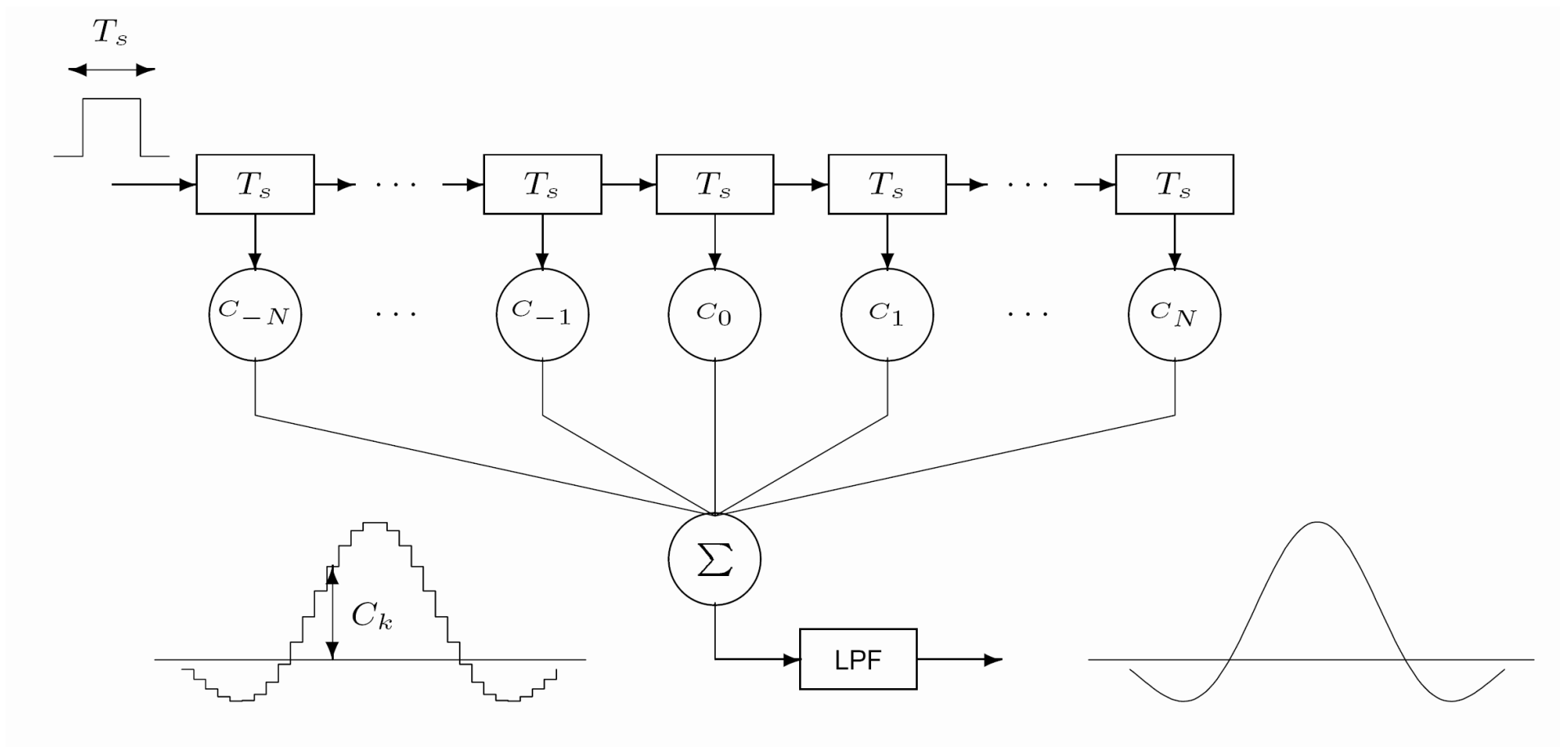
Tercer criterio de Nyquist

Se usan pulsos cuya área total en la zona del bit es no nula, y nula en la zona de los otros bits. Los bits se detectan integrando (calculando el área) de los pulsos recibidos. Un pulso que satisface este criterio es:

$$P(\omega) = \frac{1}{\text{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi f_0}\right)} \Pi\left(\frac{\omega}{2\pi f_0}\right)$$

Este esquema no se usa porque al integrar los pulsos se aumenta el ruido introducido por el canal.

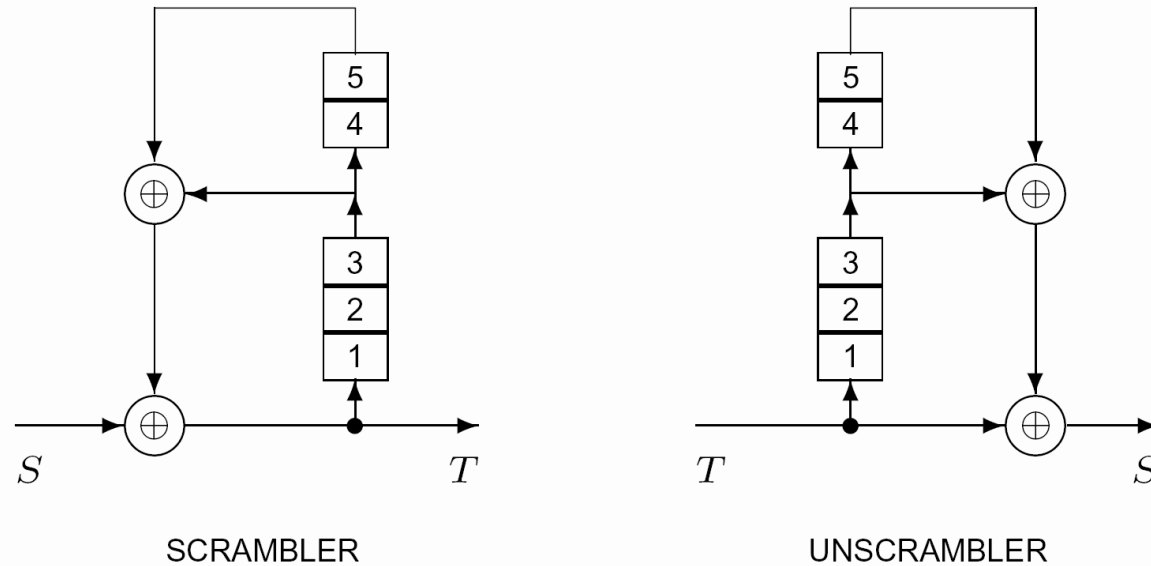
Conformación de pulsos



- No es necesario conformar estrictamente los pulsos en el emisor ya que se distorsionarán en el canal.
- En la práctica, se conforman también en el receptor mediante un proceso de ecualización.

4.5.- ALEATORIZACIÓN (SCRAMBLING)

Objetivo: evitar cadenas largas de **0**'s y **1**'s en las secuencias de bits.



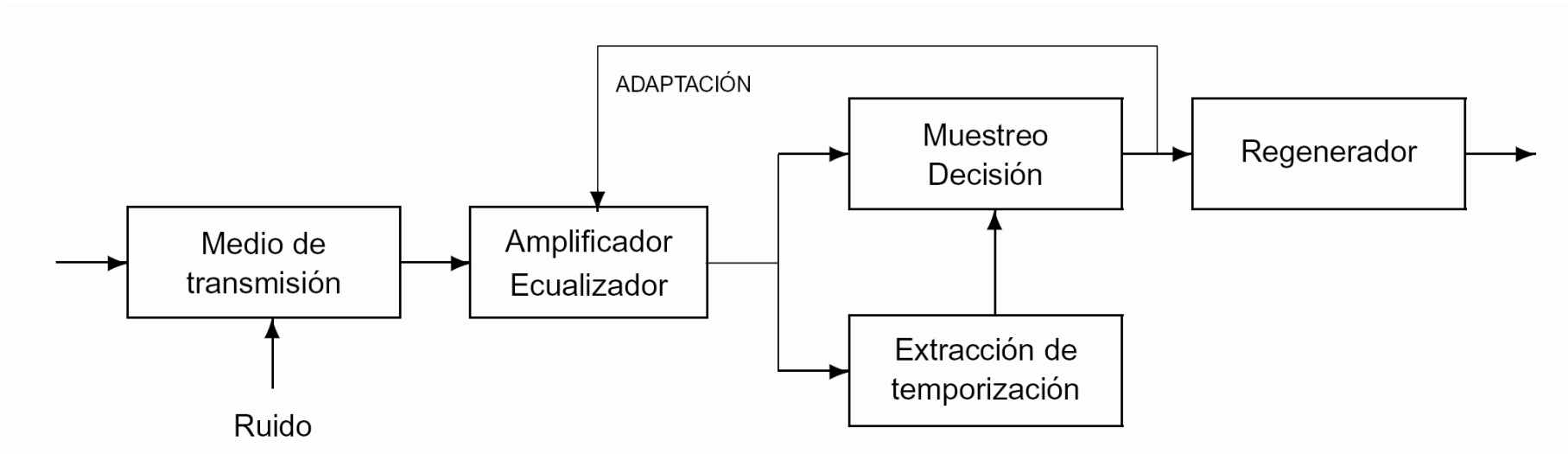
$$S \oplus (D^3T \oplus D^5T) = T$$

$$S \oplus (D^3T \oplus D^5T) \oplus (D^3T \oplus D^5T) = T \oplus (D^3T \oplus D^5T)$$

$$S = T \oplus (D^3T \oplus D^5T)$$

Inconveniente: un error en T causa múltiples errores en S .

4.6.- Repetidores regenerativos. Ecualización

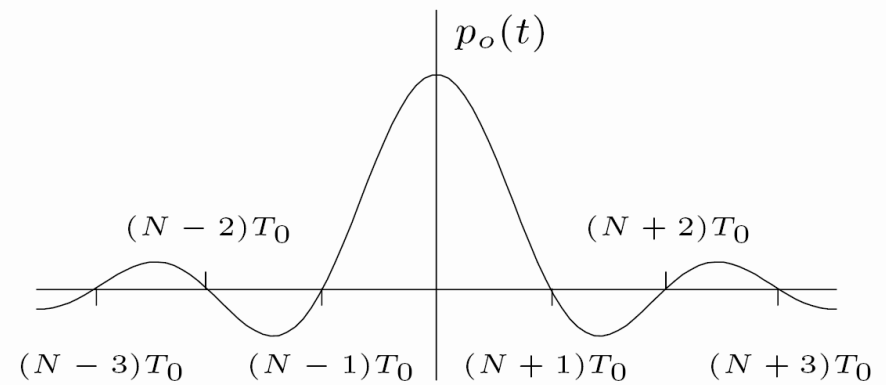
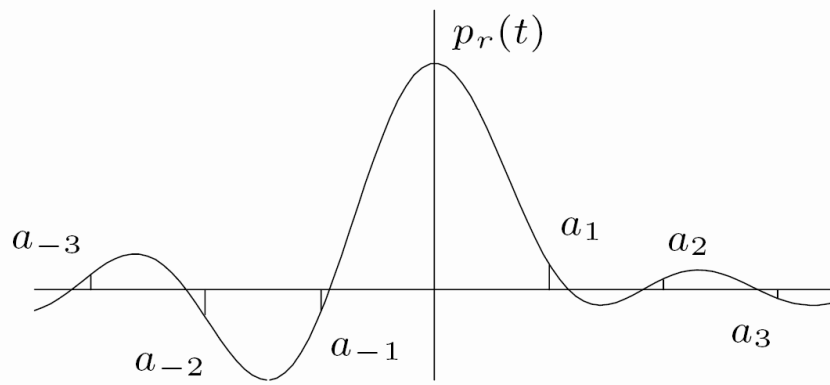


Amplificador/Ecualizador: Amplifica la señal y la filtra para minimizar la ISI.

Muestreo/Decisión: Se muestrea la señal al bit-rate y se comparan las muestras para decidir si el bit correspondiente es **0** ó **1**.

Temporización: En base a la señal recibida, se extrae la frecuencia de pulsos (bit-rate) para sincronizar el muestreo.

Regenerador: A partir de la secuencia de bits detectada, se genera una nueva señal (igual que el emisor).



$$p_o(t) = \sum_{n=-N}^N C_n p_r[t - (n + N)T_0]$$

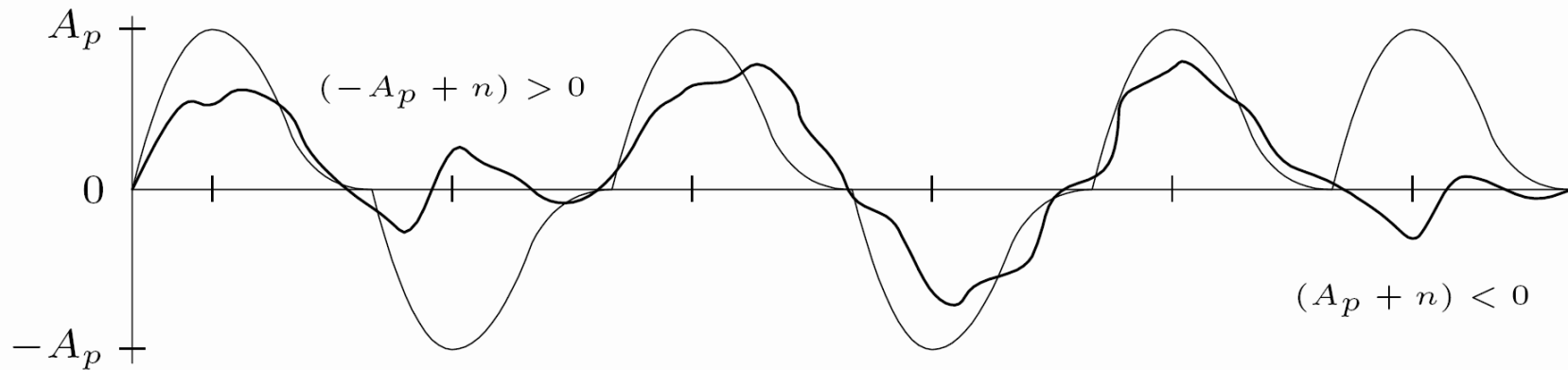
$$p_o[(k + N)T_0] = \sum_{n=-N}^N C_n p_r[(k + N)T_0]$$

$$p_o[(k + N)T_0] = \begin{cases} \pm 1 & k = 0 \\ 0 & k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N \end{cases}$$

Ecuación automática: Usando una secuencia especial de bits al inicio de la transmisión.

Ecuación adaptativa: Adaptando continuamente los valores de los pesos.

4.7.- Probabilidad de error en detección



- La detección se basa en muestrear los pulsos en su máximo y comparar con un determinado nivel (cero en el caso de codificación polar).
- La señal llega distorsionada y contaminada con ruido, lo que puede afectar al valor detectado.
- Se produce un error de detección en estos casos:

$$(-A_p + n) > 0 \quad \text{o} \quad (A_p + n) < 0$$

Ruido en codificación polar

$$P(\epsilon|0) = P((-A_p + n) > 0) = P(n > A_p)$$

$$P(\epsilon|1) = P((A_p + n) < 0) = P(n < -A_p) = P(n > A_p)$$

$$p(n) = \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} e^{-n^2/2\sigma_n^2} \quad \sigma_n = \sqrt{\overline{n^2}} \text{ (rms)} \quad \sigma_n^2 = \overline{n^2} \text{ (} P_n \text{)}$$

$$P(\epsilon|0) = P(\epsilon|1) = \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} \int_{A_p}^{\infty} e^{-n^2/2\sigma_n^2} dn = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{A_p/\sigma_n}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = Q\left(\frac{A_p}{\sigma_n}\right)$$

$$P(\epsilon) = P(\epsilon|1)P(1) + P(\epsilon|0)P(0) = \frac{1}{2}[P(\epsilon|0) + P(\epsilon|1)] = Q\left(\frac{A_p}{\sigma_n}\right)$$

A_p/σ_n	1	2	3	4	5	6
$P(\epsilon)$	0.1587	0.0227	0.00135	3.16×10^{-5}	2.87×10^{-7}	9.9×10^{-10}

Ruido en codificación ON-OFF

La situación es similar a codificación polar, salvo que la separación entre niveles es A_p en lugar de $2A_p$. La probabilidad de error es:

$$P(\epsilon) = Q\left(\frac{A_p}{2\sigma_n}\right)$$

Ruido en codificaciones pseudoternarias

Este caso es diferente ya que se detectan 3 niveles en lugar de dos:

$$P(\epsilon|0) = P(n < -A_p/2) + P(n > A_p/2) = 2P(n > A_p/2) = 2Q\left(\frac{A_p}{2\sigma_n}\right)$$

$$P(\epsilon|1) = \frac{1}{2}P(A_p + n < A_p/2) + \frac{1}{2}P(-A_p + n > -A_p/2) = P(n > A_p/2) = Q\left(\frac{A_p}{2\sigma_n}\right)$$

$$P(\epsilon) = \frac{1}{2} \left[2Q\left(\frac{A_p}{2\sigma_n}\right) + Q\left(\frac{A_p}{2\sigma_n}\right) \right] = \frac{3}{2}Q\left(\frac{A_p}{2\sigma_n}\right)$$

Comparación entre códigos

Potencia en codificación polar:

$$E_0 = E_1 = \frac{A_p^2 T_0 / 2}{T_0} = \frac{A_p^2}{2} \quad E = \frac{1}{2}[E_0 + E_1] = \frac{A_p^2}{2} \quad \Rightarrow \quad A_p = \sqrt{2E}$$

Potencia en codificación ON-OFF y pseudoternarios:

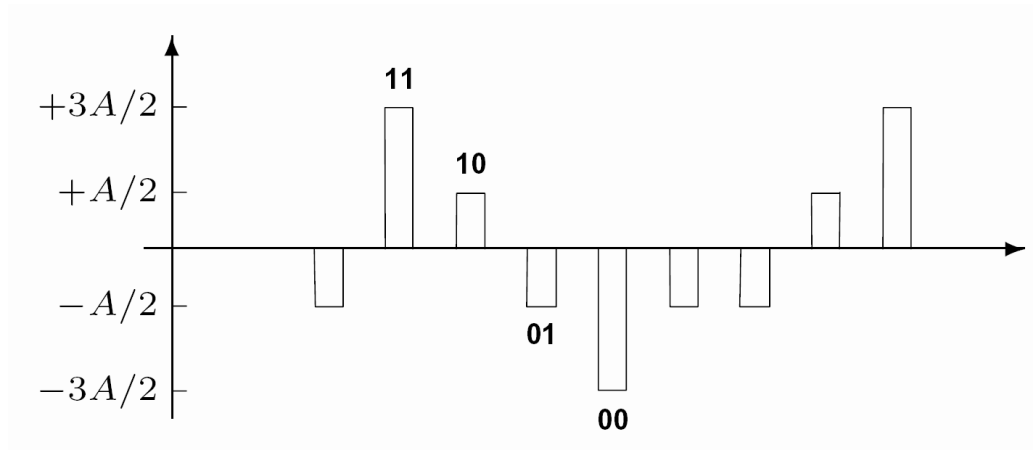
$$E_1 = \frac{A_p^2}{2} \quad E_0 = 0 \quad E = \frac{1}{2}[E_0 + E_1] = \frac{A_p^2}{4} \quad \Rightarrow \quad A_p = 2\sqrt{E}$$

POLAR	$P(\epsilon) = Q\left(\frac{\sqrt{2E}}{\sigma_n}\right)$
ON-OFF	$P(\epsilon) = Q\left(\frac{\sqrt{E}}{\sigma_n}\right)$
POSEUDOTERNARIAS	$P(\epsilon) = \frac{3}{2}Q\left(\frac{\sqrt{2E}}{\sigma_n}\right)$

4.8.- COMUNICACIONES M-ARIAS

- No hay por qué restringirse a la representación binaria. Pueden usarse sistemas de representación con M símbolos. Para ello es necesario utilizar M pulsos para representarlos.
- Hay muchas formas de seleccionar los M pulsos. Dos ejemplos son elegir pulsos de diferentes amplitudes (multinivel) o pulsos ortogonales.
- Al incrementar el número de símbolos se incrementa la cantidad de información que transporta la señal. El incremento de información aumenta la velocidad de transmisión a costa de aumentar la **potencia** y/o el **ancho de banda** necesarios.

Multinivel

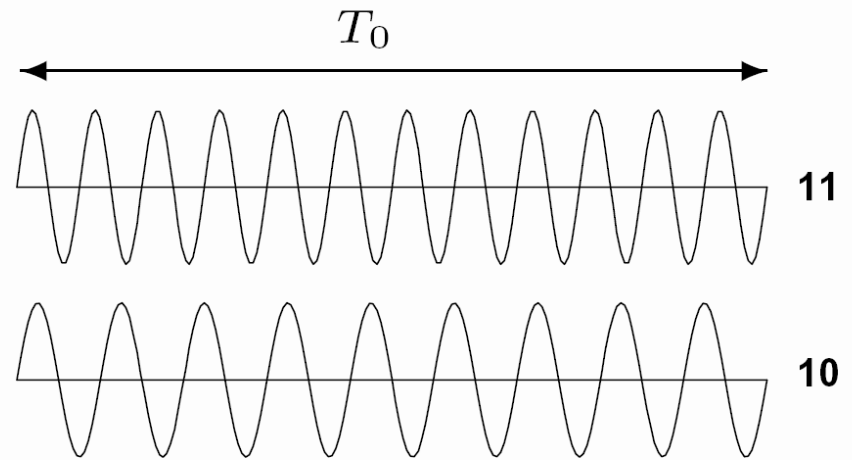
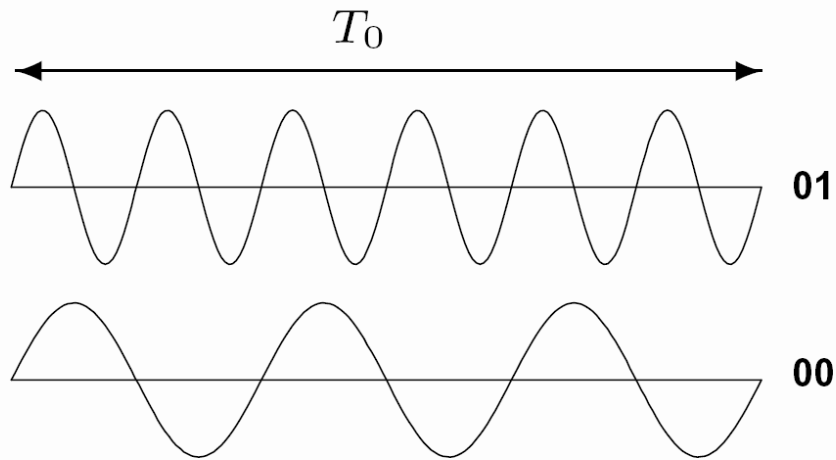


Bit-rate: La cantidad de información es $I_M = \log_2(M)$ bits/pulso. Si la velocidad de transmisión de pulsos es constante, la velocidad de transmisión de información (bit-rate) aumenta con el logaritmo de M .

Potencia: La amplitud de los pulsos (para separación constante) aumenta linealmente con M , y por lo tanto, la potencia aumenta con M^2 .

Ancho de banda: El ancho de banda es independiente de M ya que únicamente depende de la velocidad de transmisión y de la forma de los pulsos, pero no de sus amplitudes.

Señales ortogonales



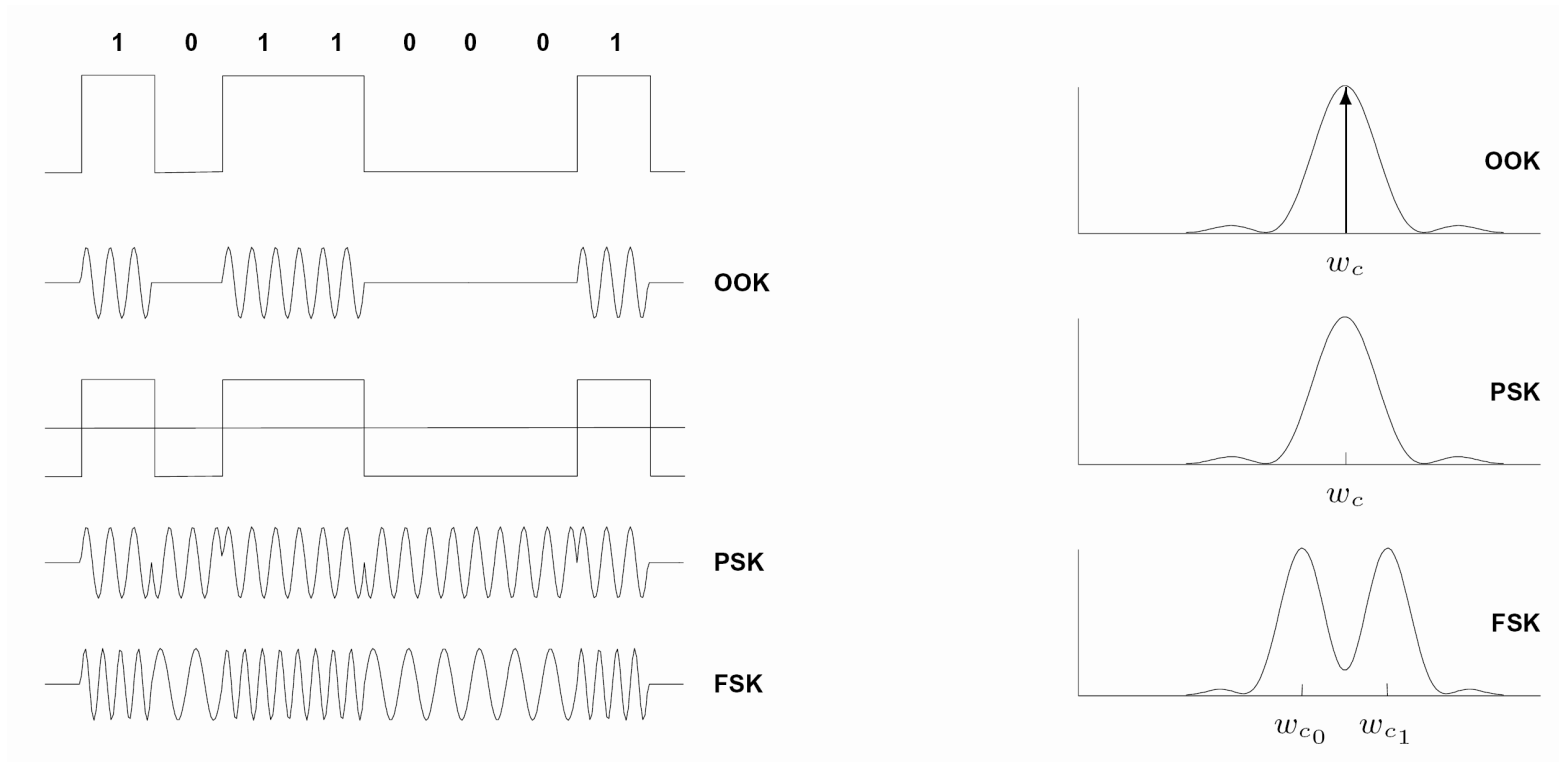
$$\int_0^{T_0} \varphi_i(t)\varphi_j(t)dt = \begin{cases} C & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \varphi_k(t) = \begin{cases} \sin(2\pi k f_0 t) & 0 < t < T_0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Bit-rate: $I_M = \log_2(M)$ bits/pulso: el bit rate aumenta con el logaritmo de M .

Potencia: Es independiente de M ya que la amplitud es constante.

Ancho de banda: Es proporcional a M .

4.9.- Sistemas de comunicación digitales con portadora



OOK ó ASK: (On-Off-Keying) Modulación de amplitud con una señal digital ON-OFF.

PSK: (Phase-Shift-Keying) Modulación de fase con señal digital polar.

FSK: (Frequency-Shift-Keying) Modulación bi-frecuencia.

Fórmulas de las diferentes codificaciones en sistemas de comunicación digital con portadora:

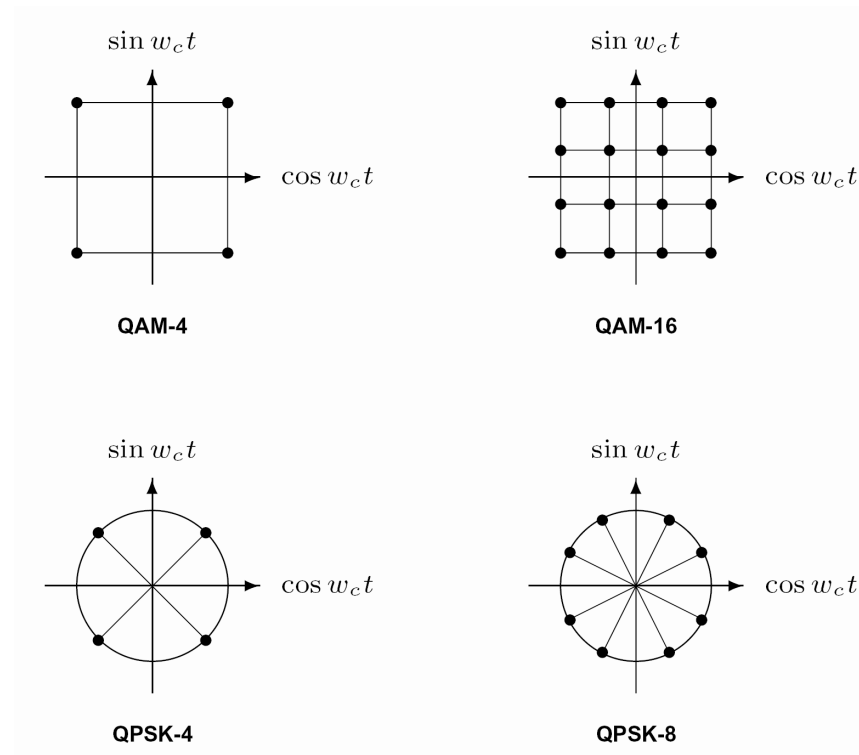
$$\begin{array}{l} \text{OOK} \\ \varphi_0(t) = 0 \\ \varphi_1(t) = A \cos(\omega_c t) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{PSK} \\ \varphi_0(t) = -A \cos(\omega_c t) = A \cos(\omega_c t + \pi) \\ \varphi_1(t) = A \cos(\omega_c t) = A \cos(\omega_c t + 0) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{FSK} \\ \varphi_0(t) = A \cos((\omega_c - \Delta\omega)t) \\ \varphi_1(t) = A \cos((\omega_c + \Delta\omega)t) \end{array}$$

Modulación en cuadratura. Constelaciones

$$p_i(t) = a_i p(t) \cos(\omega_c t) + b_i p(t) \sin(\omega_c t) = r_i p(t) \cos(\omega_c t + \theta_i) \quad i = 1, \dots, 16$$



QPSK: Modulación con amplitud constante.

QAM: Modulación donde se modifica amplitud y fase. QAM-4 coincide con QPSK-4.

Tema 5:

MODULACIÓN LINEAL

Tema 5: MODULACIÓN LINEAL

- 5.1.- Comunicaciones en banda base y con portadora.
- 5.2.- Modulación de amplitud: Doble banda lateral (DSB).
- 5.3.- Modulación de amplitud (AM).
- 5.4.- Modulación de amplitud: Banda lateral única (SSB):
 - Modulación en cuadratura de fase (QAM).
- 5.5.- Errores de frecuencia y fase en demodulación síncrona.
- 5.6.- Modulación de amplitud: Banda lateral residual (VSB).
- 5.7.- Sistemas digitales con portadora.
- 5.8.- Interferencia y ruido en sistemas AM.
- 5.9.- Multiplexado por división de frecuencia.
- 5.10.- El receptor superheterodino.

Comunicaciones en banda-base y con portadora

Banda-base: Sin modulación. El espectro no está desplazado.

Con portadora: Las señales modulan una portadora.