UNIDAD DIDÁCTICA 13

# Representación gráfica de funciones

El ser humano, a lo largo de la historia, ha utilizado las representaciones gráficas como expresión o como interpretación de situaciones, objetos o fenómenos. En estas representaciones están implícitas y se perciben de forma clara las características o propiedades más notables de la situación, objeto o fenómeno representado.

La curva o representación gráfica de una función nos permite visualizar sus características asociadas más importantes en cuanto a continuidad, monotonía, extremos relativos, etc. Por tanto, es muy importante la representación de las curvas o gráficas de las funciones.

En esta unidad didáctica utilizaremos las características generales de las funciones con el fin de construir sus respectivas representaciones gráficas.

**Representación de un bisonte en las cuevas de Altamira, Cantabria, España.**

## ESQUEMA CONCEPTUAL

**REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES**

- **DOMINIO**

  $Dom\ f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\}$

- **CONJUNTO IMAGEN O RECORRIDO**

  $Im\ f = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R}$ con $f(x) = y\}$

- **PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES**

  • Eje $OX$ $\left.\begin{array}{l} y = f(x) \\ y = 0 \end{array}\right\}$

  • Eje $OY$ $\left.\begin{array}{l} y = f(x) \\ x = 0 \end{array}\right\}$

- **SIMETRÍAS**

  • Función par o simétrica respecto $OY$.

  $f(x) = f(-x);\ \forall x \in Dom\ f$

  • Función impar o simétrica respecto del origen.

  $f(x) = -f(-x);\ \forall x \in Dom\ f$

- **PERIODICIDAD**

  $f(x) = f(x + KT);\ \forall K \in \mathbb{Z}$

  $T$: período principal

- **ASÍNTOTAS**

  • Verticales: $x = x_0$

  • Horizontales: $y = y_0$

  • Oblicuas: $y = mx + b$

- **MONOTONÍA Y EXTREMOS RELATIVOS**

- **TIPO DE CONCAVIDAD Y PUNTOS DE INFLEXIÓN**

- **INTERVALOS DE SIGNO CONSTANTE**

## ACTIVIDAD INICIAL

1. En las siguientes funciones estudia las características: dominio, los puntos de corte con los ejes, las simetrías, la periodicidad, las asíntotas, la monotonía, los extremos relativos, el tipo de concavidad y la existencia o no de puntos de inflexión.

   a) $y = 2x^2 - 8x$ b) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$

# desarrollo de contenidos

## 1 Dominio y recorrido de una función

### Dominio de una función $f$

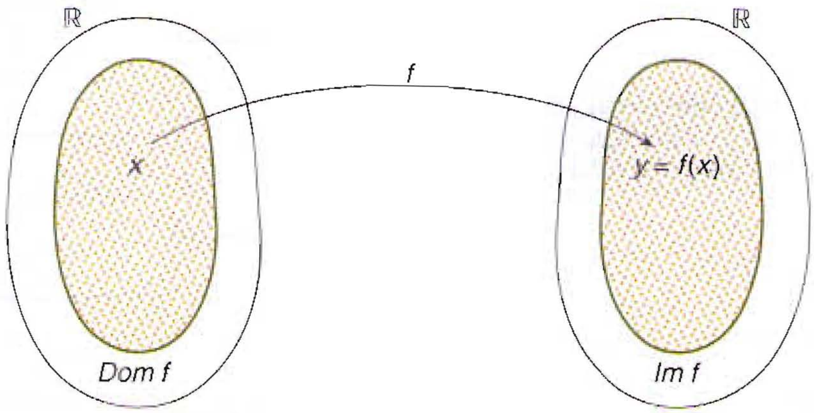
**Dominio de una función $f$** es el conjunto de valores de $\mathbb{R}$ que puede tomar la variable independiente para los cuales está definida la función.

$$Dom\ f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\}$$

### Conjunto imagen o recorrido

**Conjunto imagen o recorrido de una función** es el conjunto de valores de $\mathbb{R}$ que toma la variable dependiente.

$$Im\ f = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R} \text{ con } f(x) = y\}$$




**Dominio de las funciones más usuales**

- Funciones polinómicas

  $Dom\ f = \mathbb{R}$

- Funciones racionales fraccionarias

  $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

  $Dom\ f = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$

- Funciones irracionales $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$
  - Si $n$ es impar, $Dom\ f = \mathbb{R}$
  - Si $n$ es par, $Dom\ f = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \geq 0\}$

- Funciones trigonométricas
  - $\left.\begin{array}{l} f(x) = sen\,[g(x)] \\ f(x) = cos\,[g(x)] \end{array}\right\} Dom\ f = \mathbb{R}$
  - $f(x) = tg\,[g(x)]$

  $Dom\ f = \left\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq \dfrac{\pi}{2} + K\pi;\ K \in \mathbb{Z}\right\}$

- Funciones exponenciales

  $f(x) = a^x;\ a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1$

  $Dom\ f = \mathbb{R}$

- Funciones logarítmicas

  $f(x) = log_a\,[g(x)]$

  $Dom\ f = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) > 0\}$

## ACTIVIDAD RESUELTA

**1. Determina el dominio de las funciones:**

**a)** $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ **b)** $g(x) = \ln (x^2 - 9)$

a) Como $f$ es una función irracional de índice par, su dominio es:

$$Dom\ f = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{x-1}{x+2} \geq 0\right\}$$

Resolviendo la inecuación correspondiente, obtenemos:

$$Dom\ f = (-\infty, -2) \cup [1, +\infty) = \mathbb{R} - [-2, 1)$$

b) La función $g$ es de tipo logarítmico, por lo que su dominio será:

$$Dom\ g = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 9 > 0\}$$

Resolviendo la inecuación correspondiente, obtenemos:

$$Dom\ g = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty) = \mathbb{R} - [-3, 3]$$

# 2 Puntos de corte con los ejes. Simetría. Periodicidad

## ■ Puntos de corte con los ejes

Son los puntos en los cuales la gráfica de la función $f$ corta el eje de abscisas $y$/o el eje de ordenadas.

Para determinar los **puntos de corte con el eje de abscisas *OX*** se resuelve el sistema:

$$\left.\begin{aligned} y &= f(x) \\ y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

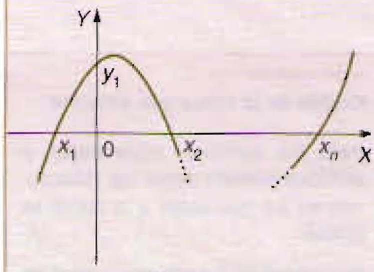
Las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ proporcionan los cortes con $OX$: $(x_1, 0), (x_2, 0), \ldots, (x_n, 0)$.

Para determinar los **puntos de corte con el eje de abscisas *OY*** se resuelve el sistema:

$$\left.\begin{aligned} y &= f(x) \\ x &= 0 \end{aligned}\right\}$$

La solución $y_1$ proporciona el punto de corte con $OY$: $(0, y_1)$.

**Cortes con los ejes**




Cortes con $OX$:

$(x_1, 0)$; $(x_2, 0)$; …; $(x_n, 0)$

Cortes con $OY$:

$(0, y_1)$

## ■ Simetrías

Interesa estudiar las simetrías de una función de cara a su representación gráfica. Si la función es par o impar es suficiente representar la gráfica correspondiente a las abscisas positivas.

Puede ocurrir que una función sea par, impar o ninguna de las dos cosas. Para determinar si existe o no simetría, hacemos el siguiente estudio:

- **Una función es par o simétrica respecto del eje de ordenadas** si se verifica:

$$f(x) = f(-x);\ \forall x \in Dom\ f$$

- **Una función es impar o simétrica respecto del origen de coordenadas** si se verifica:

$$f(x) = -f(-x);\ \forall x \in Dom\ f$$

**Visualización de las simetrías**

- **Simetría respecto del eje de ordenadas.** Una función con este tipo de simetría define una simetría axial de eje $OY$, por lo que esta simetria se visualiza colocando un espejo con su canto coincidente con $OY$ y perpendicular al plano $OXY$.
- **Simetría respecto del origen de coordenadas.** Una función con este tipo de simetría define una simetría central o un giro de centro el origen de coordenadas y amplitud 180°, por lo que esta simetría se visualiza fácilmente mediante este giro.

## ■ Periodicidad

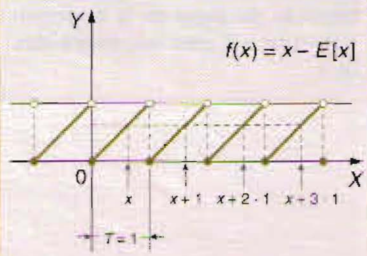
La función mantisa $f(x) = x - E[x]$, o función que nos da la parte decimal de un número real, es periódica de período 1, pues verifica:

$$f(x) = f(x + K \cdot 1);\ K \in \mathbb{Z}$$

$$T = 1,\ \text{período principal}$$

Observamos que la gráfica de esta función correspondiente al intervalo $[0, T] = [0, 1]$ se repite de forma indefinida. Esto ocurre en cualquier función periódica.

Por tanto, para representar gráficamente una función periódica es suficiente con representar la parte correspondiente al intervalo $[0, T]$, siendo $T$ el período principal. La gráfica de $f$ la obtenemos por repetición de la obtenida en $[0, T]$.




$f(x) = f(x + 1) = f(x + 2 \cdot 1) =$
$f(x + 3 \cdot 1) = \ldots = f(x + K \cdot 1)$

# 3 Asíntotas y ramas infinitas

En la unidad didáctica 9. Límites de funciones, se realizó el estudio de las diversas asíntotas y ramas infinitas o parabólicas de una función.

Recuperamos de forma resumida las definiciones ya conocidas.

**Cortes de la curva y la asíntota**

Para las asíntotas horizontales y oblicuas pueden darse las situaciones en las que estas y la curva se corten.

Para localizar los citados puntos de corte hay que resolver el sistema de ecuaciones formado por la ecuación de la función y la ecuación de la asíntota.

Cortes con asíntotas horizontales

$$\left.\begin{array}{l} y = f(x) \\ y = y_0 \end{array}\right\}$$

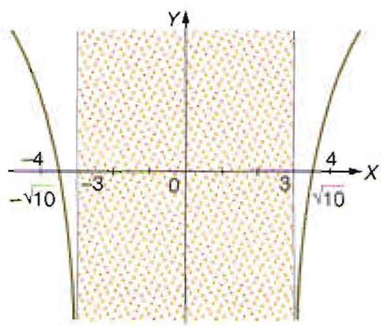
Cortes con asíntotas oblicuas

$$\left.\begin{array}{l} y = f(x) \\ y = mx + b \end{array}\right\}$$

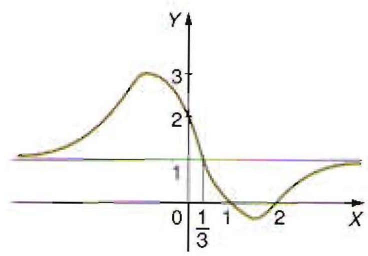
## Asíntotas verticales

La recta $x = x_0$ es una **asíntota vertical de la función $f$** cuando existe al menos uno de los seis siguientes límites:

- $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$




Función $f(x) = ln\,(x^2 - 9)$
Asíntotas verticales: $x = -3$; $x = 3$




Función $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}$

Asíntota horizontal: $y = 1$

## Asíntotas horizontales

La recta $y = y_0$ es una **asíntota horizontal de la función $f$** cuando existe al menos uno de los siguientes límites:

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = y_0$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = y_0$

**Posición de la curva y la asíntota**

La posición de la curva $y = f(x)$ respecto de la asíntota horizontal $y = y_0$ depende del signo de la expresión $f(x) - y_0$ para valores grandes de $x$.

La posición de la curva $y = f(x)$ respecto de la asíntota oblicua $y = mx + b$ depende del signo de la expresión $f(x) - (mx + b)$ para valores grandes de $x$.

## Asíntotas oblicuas

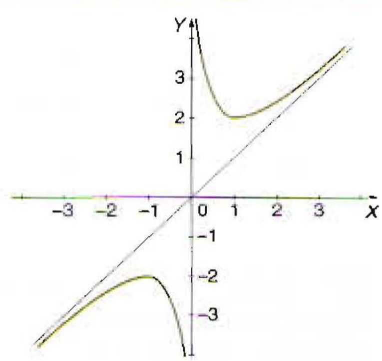
La recta $y = mx + b$ es una **asíntota oblicua de la función $f$** cuando la pendiente $m$ y la ordenada en el origen $b$ pueden obtenerse mediante los siguientes límites:

- $m = \lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$
- $b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx]$

Función $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

Asíntota oblicua: $y = x$

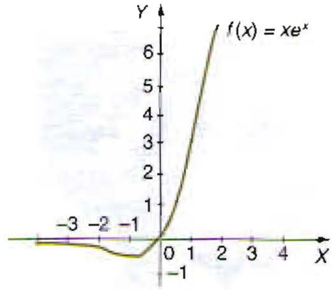
Asíntota vertical: $x = 0$



## Ramas parabólicas

**La función *f*** puede tener una **rama parabólica** cuando existe al menos uno de los siguientes límites y la gráfica no se aproxima a ninguna recta:

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



Rama parabólica cuando $x \to +\infty$

### ACTIVIDAD RESUELTA

**1. Encuentra las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$**

- Asíntotas verticales. Como la función *f* es una función racional, sus asíntotas verticales son los ceros del denominador:

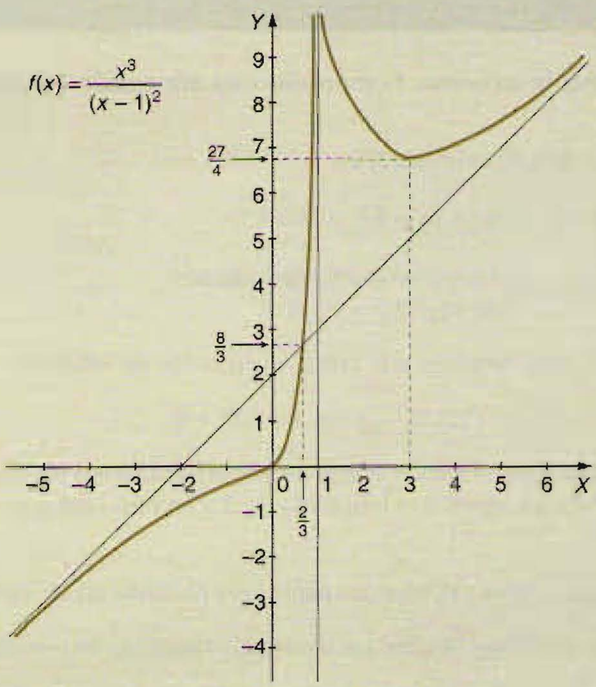
$$(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty\ ;\ \lim_{x \to 1^+} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to 1} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$$

Luego, la asíntota vertical es $x = 1$.

- Asíntotas horizontales. No existen, pues los límites siguientes son infinitos:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = -\infty\ ;\ \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$$




- Asíntotas oblicuas. Calculamos los coeficientes de la asíntota $y = mx + b$:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x(x-1)^2} = 1$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left[ \frac{x^3}{(x-1)^2} - x \right] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} = 2$$

Luego, la asíntota oblicua es $y = x + 2$.

Estudiamos si la gráfica interseca a la asíntota resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{x^3}{(x-1)^2} \\ y &= x + 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = \frac{2}{3};\ y = \frac{8}{3}$$

por tanto, la gráfica de la función y la asíntota oblicua se cortan en el punto $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{8}{3}\right)$.

Sophie Germain (1776-1831), nacida en París, logró sus conocimientos de forma autodidacta en la biblioteca de su padre, ya que no pudo asistir a los centros habituales de formación.

Mantuvo correspondencia con los grandes matemáticos de la época como Gauss y Cauchy.

Sus primeros trabajos y su primera correspondencia las firma bajo el seudónimo de **M. le Blanc**. Años más tarde se descubre su condición femenina.

Sus trabajos en teoría de números y superficies elásticas fueron premiados por la Academia de Ciencias de París.

## 4 Monotonía. Extremos relativos. Concavidad. Puntos de inflexión

■ **Monotonía.** El estudio de la monotonía de una función *f* se hace a través del signo de su derivada primera.

- Si $f'(x_0) > 0 \Rightarrow$ la función *f* es estrictamente creciente en $x_0$.
- Si $f'(x_0) < 0 \Rightarrow$ la función *f* es estrictamente decreciente en $x_0$.

■ **Extremos relativos.** Para el estudio de los extremos relativos de una función *f* utilizamos sus dos primeras derivadas.

- $f'(x_0) = 0 \begin{cases} f''(x_0) < 0 \Rightarrow \text{tiene un máximo relativo en } (x_0, f(x_0)). \\ f''(x_0) > 0 \Rightarrow \text{tiene un mínimo relativo en } (x_0, f(x_0)). \end{cases}$

■ **Concavidad.** El estudio de la concavidad de una función *f* se hace a través del signo de su derivada segunda.

- Si $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ es cóncava hacia las *y* positivas en $x_0$.
- Si $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ es cóncava hacia las *y* negativas en $x_0$.

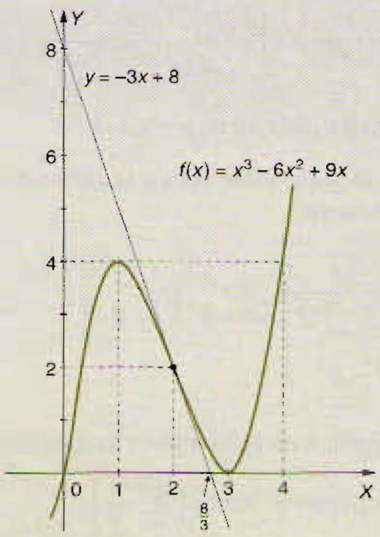
■ **Puntos de inflexión.** El estudio de los puntos de inflexión de una función *f* se hace a través de la derivada segunda y de la derivada tercera.

- $f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow f$ tiene un punto de inflexión en $(x_0, f(x_0))$.

### ACTIVIDAD RESUELTA

**1. En un punto de inflexión, la tangente a la curva la atraviesa. Comprueba esta afirmación para la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.**

Fácilmente determinamos que *f* tiene un punto de inflexión en (2, 2):




$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \quad f''(x) = 6x - 12 \quad f'''(x) = 6$$

$$f''(2) = 0;\ f'''(2) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} f \text{ tiene un punto de inflexión} \\ \text{en } (2, f(2)) = (2, 2) \end{cases}$$

Determinamos la recta tangente a la curva en su punto de inflexión:

$$y - f(2) = f'(2)\,(x - 2) \Rightarrow y = -3x + 8$$

Esta recta corta a la curva. Para ver que la atraviesa estudiamos la concavidad en un entorno lateral a la izquierda de 2 y en otro lateral a la derecha de 2.

- $f''(x) > 0,\ \forall x \in (2, +\infty) \Rightarrow f$ es cóncava hacia las *y* positivas en $(2, +\infty)$.
- $f''(x) < 0,\ \forall x \in (-\infty, 2) \Rightarrow f$ es cóncava hacia las *y* negativas en $(-\infty, 2)$.

Por tanto, la tangente a la curva en su punto de inflexión la atraviesa.

# 5 Intervalos de signo constante. Regiones

En la representación gráfica de funciones resulta muy útil el uso de la siguiente propiedad, la cual nos delimita las regiones del plano en las cuales está la gráfica de la función.

Si una función $f$ es continua en $\mathbb{R}$ o sólo tiene discontinuidades de salto infinito, esta función conserva el signo en los siguientes intervalos:

$$(-\infty, x_1); (x_1, x_2); (x_2, x_3); \dots ; (x_n, +\infty)$$

siendo $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ los ceros y los puntos de discontinuidad de salto infinito de la función $f$, ordenados de forma creciente.

Esta propiedad nos permite dividir el plano en regiones, cada una de las cuales está delimitada por el eje de abscisas y las rectas verticales de ecuaciones $x = x_i$.

Las regiones permitidas vienen determinadas por el signo que tiene la función en cada intervalo $(x_i, x_{i+1})$.

Para calcular el signo de la función $f$ en cada intervalo, se toma cualquier valor del mismo y se sustituye en la función.

**Sofía Sonia Kovalevky (1850-1891)** fue una de las primeras mujeres que tuvieron acceso a estudios universitarios.

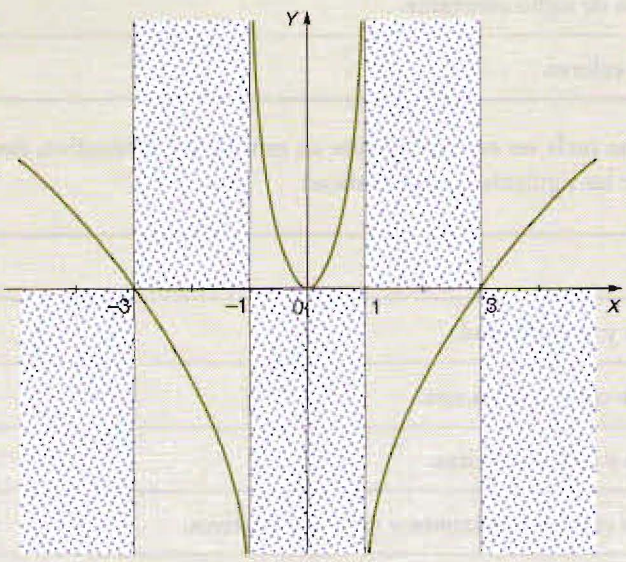
Fue alumna de Karl Weierstrass, bajo cuya dirección se doctoró en la Universidad de Gottingen.

Sus trabajos abarcaron varios aspectos de las Matemáticas y fue profesora en la Universidad de Estocolmo.

## ACTIVIDAD RESUELTA

**1. Estudia las regiones en las cuales está definida la función $f(x) = \dfrac{x^4 - 9x^2}{x^2 - 1}$**

Esta función es continua en todo $\mathbb{R}$ excepto en los puntos de discontinuidad de salto infinito $x = -1$ y $x = 1$, en los cuales existen sendas asíntotas verticales. Por esto, podemos aplicar la propiedad o teorema anterior.




Los ceros de $f$ son $x = -3$, $x = 0$ y $x = 3$. Por tanto, los intervalos donde debemos estudiar el signo de $f$ son:

$$(-\infty, -3); (-3, -1); (-1, 0)$$

$$(0, 1); (1, 3); (3, +\infty)$$

Vemos el signo en cada uno:

- $f(-10) > 0 \Rightarrow$ en $(-\infty, -3)$ $f$ es positiva.
- $f(-2) < 0 \Rightarrow$ en $(-3, -1)$ $f$ es negativa.
- $f(-0,5) > 0 \Rightarrow$ en $(-1, 0)$ $f$ es positiva.
- $f(0,5) > 0 \Rightarrow$ en $(0, 1)$ $f$ es positiva.
- $f(2) < 0 \Rightarrow$ en $(1, 3)$ $f$ es negativa.
- $f(4) > 0 \Rightarrow$ en $(3, +\infty)$ $f$ es positiva.

El signo de la función en cada uno de los intervalos nos permite conocer las regiones en las cuales existe la curva, como podemos ver en la figura.

**Representación gráfica de la cinta de Möbius**

Augustus Ferdinand Möbius (1790-1868), matemático y astrónomo alemán, descubrió una extraña figura que se conoce con el nombre de *cinta de Möbius*.

**Cinta de Möbius**

La propiedad fundamental de la cinta de Möbius es que un insecto puede caminar a lo largo de la tira central de la cinta alcanzando cualquier punto sin atravesar nunca el borde. Esta propiedad inspiró al genial artista holandés Maurits Cornelis Escher (1898-1972) la composición de la siguiente serigrafía.

## 6 Representación gráfica de funciones

Hasta ahora, las funciones que sabemos representar son las funciones elementales. Sus gráficas las obtenemos a partir de sus respectivas propiedades y con ayuda de una tabla de valores.

En general, para representar la gráfica de una función cualquiera, dada en su forma explícita, podemos hacer un estudio consistente en analizar las características que figuran en la siguiente tabla.

Los resultados obtenidos se llevan a un sistema de ejes cartesianos y nos permiten obtener la gráfica de la función.

| |
|---|
| • Dominio. |
| • Recorrido o conjunto imagen. |
| • Simetrías y periodicidad. |
| • Puntos de corte con los ejes. |
| • Asíntotas y ramas infinitas. |
| • Monotonía: crecimiento y decrecimiento. |
| • Extremos relativos: máximos y mínimos relativos. |
| • Tipo de concavidad. |
| • Puntos de inflexión. |
| • Intervalos de signo constante. |
| • Tabla de valores. |

En la práctica no suele ser necesario hacer un estudio tan exhaustivo, siendo suficiente analizar las siguientes características:

| |
|---|
| • Dominio. |
| • Simetrías y periodicidad. |
| • Puntos de corte con los ejes. |
| • Asíntotas y ramas infinitas. |
| • Extremos relativos: máximos y mínimos relativos. |
| • Puntos de inflexión. |
| • Intervalos de signo constante. |

## ACTIVIDADES RESUELTAS

**1. Representa gráficamente la función $f(x) = x^3 - 3x + 2$.**

- *Dominio.* Como es una función polinómica, *Dom* $f = \mathbb{R}$.

- *Simetrías y periodicidad.* No tiene simetrías y no es periódica.

- *Puntos de corte con los ejes.*

  — Cortes con el eje *OX*:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^3 - 3x + 2 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = -2;\ x = 1$$

  Luego, los puntos de corte con el eje *OX* son $(-2, 0)$ y $(1, 0)$.

  — Cortes con el eje *OY*:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^3 - 3x + 2 \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 2$$

  Luego, el punto de corte con el eje *OY* es $(0, 2)$.

- *Asíntotas y ramas infinitas.* No tiene asíntotas, pero tiene dos ramas infinitas parabólicas, pues se verifica:

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 3x + 2) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} (x^3 - 3x + 2) = +\infty$$

- *Extremos relativos: máximos y mínimos relativos.*

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = +1;\ x = -1$$

$$f''(x) = 6x \Rightarrow f''(-1) < 0;\ f''(1) > 0$$

  Luego, la función tiene un máximo relativo en $(-1, f(1)) = (-1, 4)$ y un mínimo relativo en $(1, f(1)) = (1, 0)$.

- *Puntos de inflexión.*

$$f''(x) = 6x \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''(0) \neq 0$$

  Luego, la función tiene un punto de inflexión en el punto $(0, f(0)) = (0, 2)$.

- *Intervalos de signo constante.* Los intervalos a considerar son:

$$(-\infty, -2);\ (-2, 1);\ (1, +\infty)$$

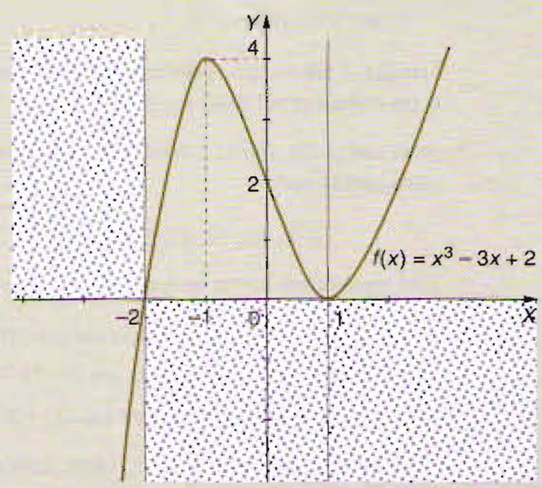
  y el signo que toma $f$ es:

  — $f(-10) < 0 \Rightarrow f$ es negativa en $(-\infty, -2)$.

  — $f(0) > 0 \Rightarrow f$ es positiva en $(-2, 1)$.

  — $f(2) > 0 \Rightarrow f$ es positiva en $(1, +\infty)$.

  Por último, llevamos todos los datos anteriores a un sistema cartesiano y obtenemos la gráfica de la función.



**2. Representa gráficamente la función $f(x) = \dfrac{x^2}{2 - x}$**

- *Dominio.* Como es una función racional, *Dom f* = $\mathbb{R} - \{2\}$.
- *Simetrías y periodicidad.* No tiene simetrías y no es periódica.
- *Puntos de corte con los ejes.*

— Cortes con el eje *OX*:

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{x^2}{2-x} \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{x^2}{2-x} = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

Luego, el punto de corte con el eje *OX* es (0, 0).

— Cortes con el eje *OY*:

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{x^2}{2-x} \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 0$$

Luego, el punto de corte con el eje *OY* es (0, 0).

- *Asíntotas y ramas infinitas.*

— Asíntota vertical. Es la recta $x = 2$, pues se verifica:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2}{2-x} = +\infty \qquad \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2}{2-x} = -\infty$$

— No tiene asíntota horizontal y la oblicua es $y = -x - 2$, pues se verifica:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x(2-x)} = -1 \qquad b = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^2}{2-x} + x\right] = -2$$

- *Extremos relativos.*

$$f'(x) = \frac{4x - x^2}{(2-x)^2};\ f''(x) = \frac{8}{(2-x)^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0;\ x = 4$$

$$f''(0) > 0;\ f''(4) < 0$$

Luego, *f* tiene un máximo relativo en (4, −8) y un mínimo relativo en (0, 0).

- *Intervalos de signo constante.* Los intervalos a considerar son:

$$(-\infty, 0);\ (0, 2);\ (2, +\infty)$$

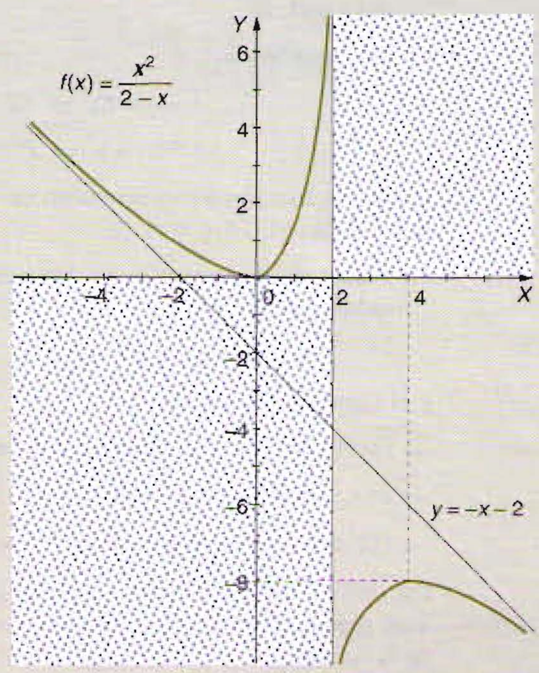
y el signo que toma la función es:

— $f(-2) > 0 \Rightarrow f$ es positiva en $(-\infty, 0)$.

— $f(1) > 0 \Rightarrow f$ es positiva en $(0, 2)$.

— $f(4) < 0 \Rightarrow f$ es negativa en $(2, +\infty)$.

Con todos estos elementos, obtenemos la gráfica de la función.



**3. Representa gráficamente la función $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$.**

- *Dominio.* Como es una función irracional de índice par, se tiene:

$$Dom\ f = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \geq 0\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

- *Simetrías y periodicidad.* No tiene simetrías y no es periódica.

- *Puntos de corte con los ejes.*

— Cortes con el eje $OX$:

$$\left.\begin{array}{l} y = x + \sqrt{x^2 - 1} \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x + \sqrt{x^2 - 1} = 0 \Rightarrow \text{No tiene soluciones en } R$$

Luego, la gráfica no corta al eje $OX$.

— Cortes con el eje $OY$:

Como la función no está definida en $x = 0$, no corta al eje $OY$.

- *Asíntotas y ramas infinitas.*

— Asíntotas verticales no existen.

— Asíntota horizontal. Es la recta $y = 0$, pues se verifica:

$$\lim_{x \to -\infty} [x + \sqrt{x^2 - 1}] = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} [x + \sqrt{x^2 - 1}] = +\infty$$

— Asíntota oblicua. Es la recta de ecuación $y = 2x$, pues se verifica:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x} = 0 \quad m = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x} = 2 \quad b = \lim_{x \to +\infty} [x + \sqrt{x^2 - 1} - 2x] = 0$$

- *Extremos relativos: máximos y mínimos relativos.*

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}; \quad f''(x) = -\frac{x}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}}$$

No se anula la derivada primera; por tanto, la función no tiene extremos relativos.

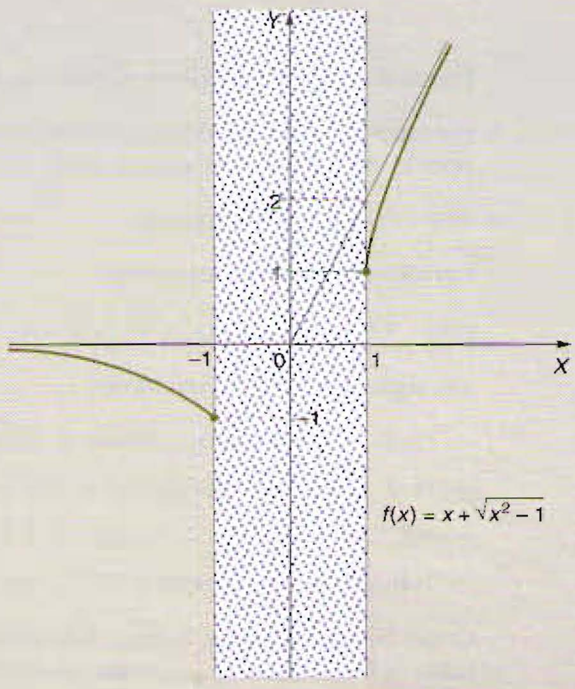
- *Puntos de inflexión.*

No se anula la derivada segunda; por tanto, la función no tiene puntos de inflexión.

Para representar la función resulta útil conocer los valores que toma en $x = -1$ y $x = 1$.

$$f(-1) = -1 + \sqrt{(-1)^2 - 1} = -1$$

$$f(1) = 1 + \sqrt{1^2 - 1} = 1$$



**4. Representa gráficamente la función $f(x) = \ln(x^2 - 4)$.**

- *Dominio.* Como es una función logarítmica, su dominio es:

$$Dom\ f = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4 > 0\} = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

- *Simetrías y periodicidad.* Es una función par o simétrica respecto del eje de ordenadas, pues se verifica $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in Dom\ f$. No es periódica.

- *Puntos de corte con los ejes.*

— Cortes con el eje $OX$:

$$\left.\begin{array}{l} y = \ln(x^2 - 4) \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ln(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$$

Luego, los puntos de corte con el eje $OX$ son: $(-\sqrt{5}, 0)$ y $(\sqrt{5}, 0)$.

— Cortes con el eje $OY$:

Como la función no está definida en $x = 0$, su gráfica no corta al eje $OY$.

- *Asíntotas y ramas infinitas.*

— Asíntotas verticales. Existen dos de ecuaciones $x = -2$ y $x = 2$, pues se verifica:

$$\lim_{x \to -2^-} \ln(x^2 - 4) = -\infty \qquad \lim_{x \to 2^+} \ln(x^2 - 4) = -\infty$$

— No tiene asíntotas horizontales ni oblicuas. Tiene dos ramas infinitas parabólicas, pues se verifica:

$$\lim_{x \to -\infty} \ln(x^2 - 4) = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \ln(x^2 - 4) = +\infty$$

- *Extremos relativos: máximos y mínimos relativos.*

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 4} \qquad f''(x) = \frac{-2x^2 - 8}{(x^2 - 4)^2}$$

Esta función no tiene extremos relativos, pues la derivada primera no se anula en $Dom\ f$.

- *Puntos de inflexión.* No tiene puntos de inflexión, pues la derivada segunda no se anula.

- *Intervalos de signo constante.*

Los intervalos a considerar son:

$(-\infty, -\sqrt{5})$; $(-\sqrt{5}, -2)$; $(2, \sqrt{5})$; $(\sqrt{5}, +\infty)$

y el signo que toma la función es:

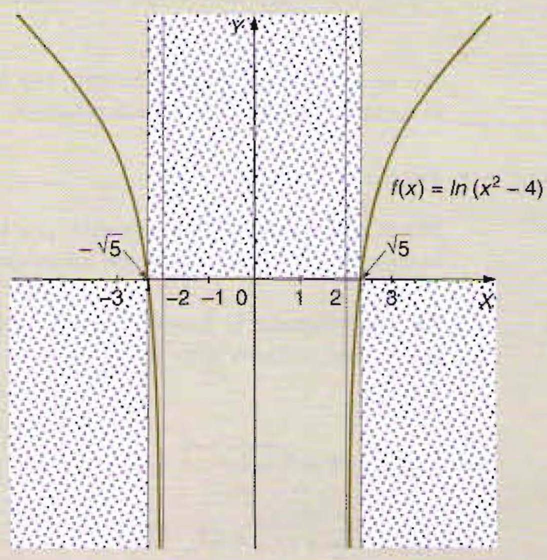
— $f(-4) > 0 \Rightarrow f$ es positiva en $(-\infty, -\sqrt{5})$

— $f(-2,1) < 0 \Rightarrow f$ es negativa en $(-\sqrt{5}, -2)$

— $f(2,1) < 0 \Rightarrow f$ es negativa en $(2, \sqrt{5})$

— $f(4) > 0 \Rightarrow f$ es positiva en $(\sqrt{5}, +\infty)$

Como la función es par, hubiera sido suficiente haber hecho el estudio para las abscisas positivas.



**5. Representa gráficamente la función $f(x) = x \cdot e^{1/x}$.**

- *Dominio.* Su dominio es: $Dom\ f = \mathbb{R} - \{0\}$
- *Simetrías y periodicidad.* No tiene simetrías y no es periódica.
- *Puntos de corte con los ejes.*

— Cortes con el eje $OX$:

$$\left.\begin{array}{l} y = x \cdot e^{1/x} \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x \cdot e^{1/x} = 0 \Rightarrow \text{No tiene soluciones. No hay cortes en } OX.$$

— Cortes con el eje $OY$:

Como la función no está definida en $x = 0$, su gráfica no corta al eje $OY$.

- *Asíntotas y ramas infinitas.*

— Asíntotas verticales. Tiene una asíntota vertical de ecuación $x = 0$, pues se verifica:

$$\lim_{x \to 0^-} [x \cdot e^{1/x}] = 0 \qquad \lim_{x \to 0^+} [x \cdot e^{1/x}] = +\infty$$

— No tiene asíntotas horizontales. Tiene una asíntota oblicua de ecuación $y = x + 1$, pues se verifica:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} e^{1/x} = 1$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to \pm\infty} [x \cdot e^{1/x} - x]\ (\infty - \infty) = \lim_{x \to \pm\infty} x \cdot [e^{1/x} - 1]\ (0 \cdot \infty) =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{\frac{1}{x}}\ \left(\frac{0}{0}\right)\ \boxed{\text{L'Hôpital}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^{1/x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to \pm\infty} e^{1/x} = 1$$

- *Extremos relativos: máximos y mínimos relativos.*

$$f'(x) = \frac{(x-1) \cdot e^{1/x}}{x} \qquad f''(x) = \frac{e^{1/x}}{x^3}$$

$$f'(1) = 0 \text{ y } f''(1) > 0$$

Luego $f$ tiene un mínimo relativo en el punto $(1, f(1)) = (1, e)$.

- *Puntos de inflexión.*

La derivada segunda no se anula; por tanto, la función no tiene puntos de inflexión.

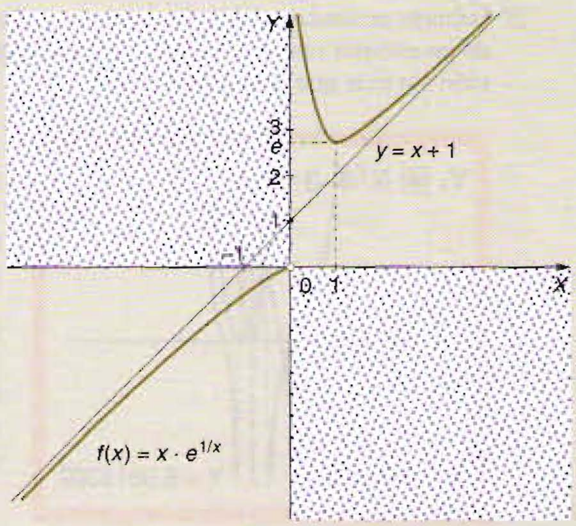
- *Intervalos de signo constante.*

Los intervalos a considerar son:

$$(-\infty, 0);\ (0, +\infty)$$

$f(-1) < 0 \Rightarrow f$ es negativa en $(-\infty, 0)$

$f(1) > 0 \Rightarrow f$ es positiva en $(0, +\infty)$



# CALCULADORA GRÁFICA Y FUNCIONES

Entre las múltiples utilidades de una calculadora gráfica se encuentran la representación gráfica de funciones y los cálculos asociados a las mismas. En estas páginas veremos las posibilidades que ofrece la calculadora gráfica sobre estos aspectos relacionados con funciones.

## Representación gráfica de funciones

Vamos a representar gráficamente las funciones:

$$y_1(x) = x^3 - 3x + 2$$

$$y_2(x) = \frac{x^4 - 9x^2}{x^2 - 1}$$

Los pasos a seguir son:

1º Introducimos ambas funciones en el editor [Y=] para lo cual pulsamos las siguientes secuencias de teclas:

[Y=] [X,T,θ] [^] [3] [−] [3] [×] [X,T,θ] [+] [2] [▼] [(] [X,T,θ] [^] [4]

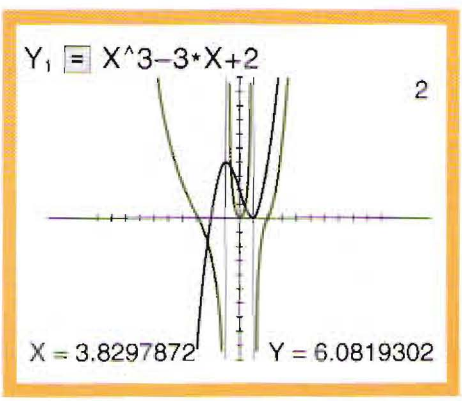
[−] [9] [×] [X,T,θ] [x²] [)] [÷] [(] [X,T,θ] [x²] [−] [1] [)]

Y₁ = X^3−3∗X+2
Y₂ = (X^4−9∗X²)/(X²−1)
Y₃ =
Y₄ =
Y₅ =
Y₆ =
Y₇ =

y obtenemos en la pantalla del editor las funciones tal y como se muestran en la figura adjunta. Podemos observar que los signos igual correspondientes a las funciones $Y_1$ e $Y_2$ aparecen resaltados, lo cual nos indica que ambas funciones están activadas.

Para **activar** o **desactivar** una función colocamos el cursor sobre el signo igual y pulsamos la tecla [ENTER]. Hemos de tener en cuenta que para representar funciones y trabajar con sus respectivas tablas, estas funciones deben estar activadas.

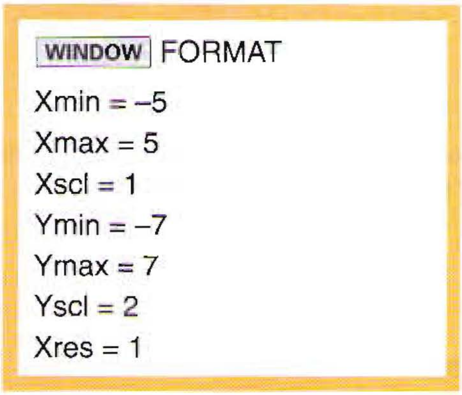
2º Estando activadas ambas funciones y pulsando la tecla [GRAPH], obtenemos la representación gráfica de las mismas como se muestra en la pantalla. Obviamente podemos obtener la gráfica de una sola función sin más que desactivar la otra.

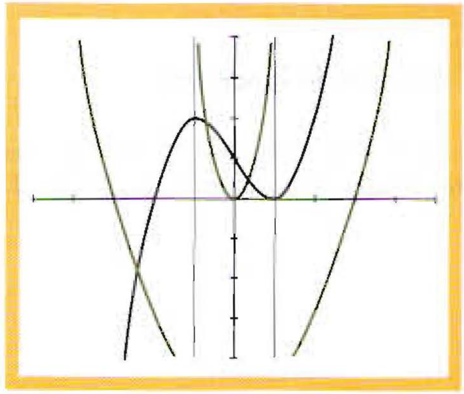



Para rastrear o movernos sobre las gráficas pulsamos la tecla [TRACE] y aparece en el ángulo superior derecho un número que indica la curva sobre la que está situado el cursor. Para cambiar el cursor de una a otra curva utilizamos las teclas [▲] y [▼].

Utilizamos las teclas [◄] y [►] para movernos sobre una curva; y podemos ver un cursor parpadeante sobre ella y en la parte inferior de la pantalla las coordenadas $(x, y)$ correspondientes al punto de la curva sobre el que está el cursor.

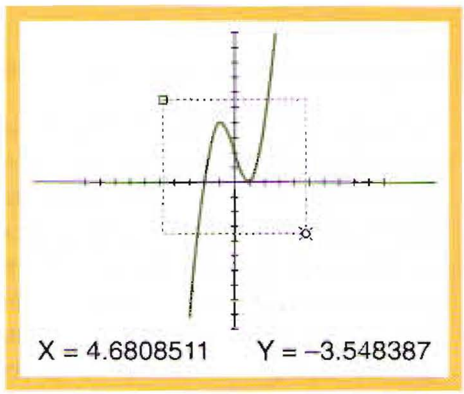
3º Podemos mejorar el aspecto de las gráficas cambiando las escalas de los ejes coordenados. Esto se consigue pulsando la tecla **WINDOW**, con lo que aparece una pantalla como la de la figura, en la cual moviéndonos con las teclas **ENTER**, ▼ y ▲ introducimos el mínimo valor para *x* (*X*min), el máximo valor para *x* (*X*max), la escala en el eje de abscisas (*X*scl) y análogamente para las ordenadas. Con estos valores y pulsando **GRAPH**, obtenemos las gráficas de la figura.



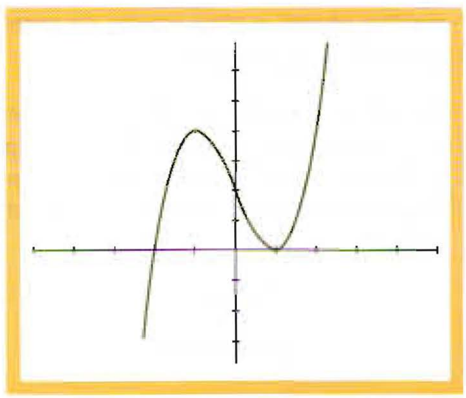



4º Otra tecla que permite modificar el aspecto de la representación gráfica de las funciones es **ZOOM**. Al pulsar esta tecla aparece el menú **ZOOM**:

1: ZBox
2: Zoom In
3: Zoom Out
4: ZDecimal
5: ZSquare
6: ZStandard
7: ZTrig
8: ZInteger
9: ZoomStat
0: ZoomFit




Seleccionamos la opción "6: ZStandard" y, pulsando la tecla **ENTER**, obtenemos la representación gráfica de la función $Y_1$ que hemos seleccionado y que podemos ver en la figura. Vamos a mejorar la representación gráfica de una parte de la función mediante la opción "1: ZBox". Para ello, activamos esta opción con la tecla **ENTER** y aparece en la pantalla la gráfica y un cursor parpadeante que movemos con las teclas ◄, ►, ▼ y ▲, y que podemos llevar, por ejemplo, a la posición (–4,6808511; 5,483871) y, pulsando **ENTER**, fijamos ese punto. Con las mismas teclas de movimiento abrimos una ventana cuyo vértice opuesto es (4,6808511; –3,548387) y, pulsando **ENTER**, obtenemos una ampliación de la parte de la gráfica interior a la ventana.



A continuación describimos las restantes opciones del menú **ZOOM**. Las opciones "2: Zoom In" y "3: Zoom Out" permiten ampliar el gráfico que se encuentra alrededor del cursor. La opción "4: ZDecimal" representa las funciones en unos ejes coordenados cuyas divisiones son números enteros. La opción "5: ZSquare" representa las funciones con la misma escala en ambos ejes coordenados. La opción "8: ZInteger" mantiene la división entera de los ejes y transforma la representación gráfica en otra cuyo centro geométrico de la pantalla es un punto de la gráfica seleccionado. La opción "0: ZoomFit" ajusta YMin e YMax entre XMin y XMax.

## ■ Cálculo de funciones

La calculadora gráfica dispone de un menú que nos permite efectuar cálculos con funciones definidas y representadas con anterioridad. Este menú aparece pulsando las teclas **2nd** **CALC**:

1: value

2: zero

3: minimum

4: maximum

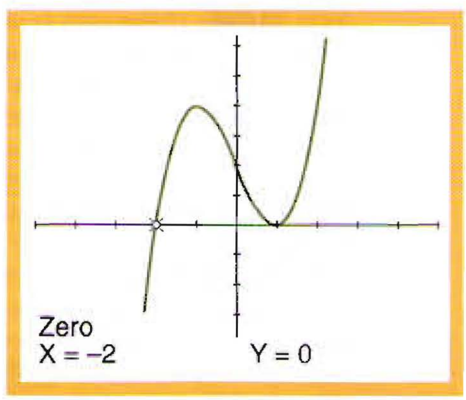
5: intersect

6: dy/dx

7: ∫f(x)dx

La opción "1: value" nos permite determinar la ordenada correspondiente a un valor de $x$ dado.

La opción "2: root" nos permite calcular los puntos de corte de la gráfica con el eje de abscisas. Para ello procedemos de la siguiente manera: nos situamos en la última pantalla correspondiente a la gráfica de la función $y_1(x) = x^3 - 3x + 2$. A continuación pulsamos **2nd** **CALC** y seleccionamos la opción *"2: zero"*. Aparece entonces la pantalla de la gráfica con un cursor parpadeante y la pregunta *"Left Bound?"*. Movemos el cursor con las teclas ◀ ▶ y nos situamos, por ejemplo, en el punto $X = -2{,}191037$, $Y = -1{,}945272$ y pulsamos **ENTER**, apareciendo otra pantalla anterior con la pregunta *"Right Bound?"*. Moviendo el cursor, nos situamos, por ejemplo, en el punto $X = -1{,}792666$, $Y = 1{,}616992$ y pulsamos **ENTER** y en la pantalla aparece la pregunta *"Guess?"* y las coordenadas del punto anterior. Finalmente, pulsando **ENTER**, aparece la pantalla de la figura con el punto de corte (–2, 0). Para encontrar el otro u otros puntos de corte con el eje de abscisas se procede de forma análoga.




Para determinar los puntos en los que la función presenta mínimos y máximos relativos utilizamos las opciones "3: minimum" y "4: maximum" respectivamente, y procedemos de forma análoga a como hemos hecho anteriormente. De esta manera obtenemos:

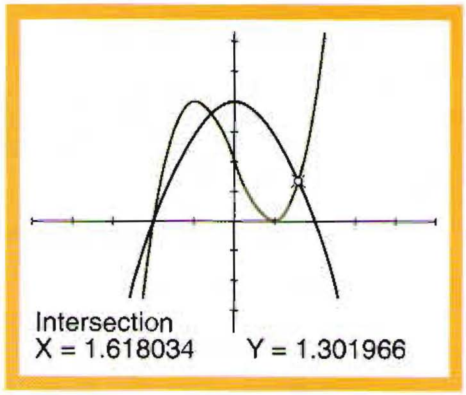
| Minimum | Maximum |
|---|---|
| $X = 1$ $Y = 0$ | $X = -1$ $Y = 4$ |

La opción "5: intersect" nos permite hallar los puntos de intersección de dos funciones. Para ello, introducimos las funciones a intersecar:

$$y_1(x) = x^3 - 3x + 2$$

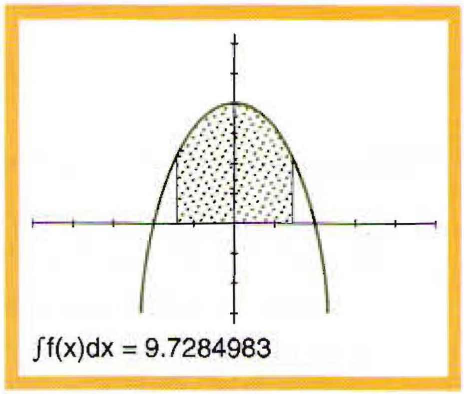
$$y_2(x) = -x^2 + 4$$

Mediante la tecla GRAPH hacemos aparecer en pantalla las gráficas de ambas funciones. A continuación seleccionamos la opción "5: intersect" del menú **CALC**. En pantalla aparece la pregunta *"First curve?"* y con las teclas ◄ ► colocamos el cursor próximo a uno de los puntos de intersección. Después nos pregunta *"Second curve?"* y con las mismas teclas movemos el cursor en la segunda curva a un punto próximo al de intersección y pulsamos ENTER. En pantalla pregunta *"Guess?"* y volviendo a pulsar ENTER aparece el punto de intersección que figura en el dibujo adjunto.




La opción "6: dy/dx" nos permite calcular la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto en el que situemos el cursor.

La opción "7: ∫f(x)dx" permite calcular la integral definida de la función dada o el área del recinto limitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas verticales de ecuaciones $x = a$ (*lower limit*) y $x = b$ (*upper limit*). Teniendo la función $Y_2$ activada y su gráfica en pantalla, pulsamos 2nd CALC y seleccionamos la opción "7: ∫f(x)dx". En pantalla aparece la pregunta *"Lower Limit?"* y movemos el cursor, por ejemplo, al punto $X = -1{,}493889$, $Y = 1{,}7682967$ y pulsamos ENTER. A continuación aparece en pantalla la pregunta *"Upper Limit?"* y movemos el cursor, por ejemplo, al punto $X = 1{,}493889$, $Y = 1{,}7682967$ y pulsamos ENTER y aparece la pantalla que figura en el dibujo, en la cual está sombreado el recinto cuya área vale 9,7284983 unidades cuadradas.




## ■ Uso de funciones en cálculos en la pantalla principal

Vamos a realizar cálculos con las funciones $Y_1$ e $Y_2$ anteriores. Por ejemplo:

$$y_1(3) + 2 \cdot y_2(-2)$$

para hacer este cálculo, desde la pantalla principal, tecleamos:

VARS Y-VARS. 1: Function ENTER 1: $Y_1$ ENTER ( 3 ) + 2 × VARS Y-VARS.

1: Function ENTER ▼ 2: $Y_2$ ENTER ( (–) 2 ) ENTER

y aparece en pantalla el valor buscado, que es 20.

## Actividades resueltas de pruebas de acceso a la universidad

**1. Construye la curva** $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$

- *Dominio.* Como es una función racional, su dominio es $Dom\ f = R - \{-1\}$.
- *Simetrías y periodicidad.* No tiene simetrías y no es periódica.
- *Punto de corte con los ejes.*

— Cortes con el eje $OX$ :

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^3} \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{(x+1)^3} = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Luego, la gráfica de esta función corta al eje $OX$ en el punto $(1, 0)$.

— Cortes con el eje $OY$ : $f(0) = 1$. Por tanto, la gráfica corta al eje $OY$ en el punto $(0, 1)$.

- *Asíntotas y ramas infinitas.*

— Asíntotas verticales. Tiene una asíntota vertical de ecuación $x = -1$, pues se verifica:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -1} f(x) = +\infty$$

— No tiene asíntotas oblicuas. Tiene una asíntota horizontal de ecuación $y = 0$, pues se verifica:

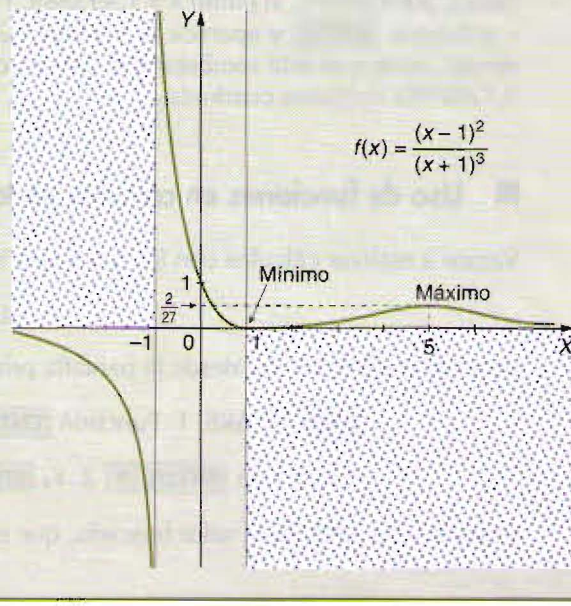
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

- *Extremos relativos: máximos y mínimos relativos.* La derivada primera es $f'(x) = \dfrac{-(x^2-6x+5)}{(x+1)^4}$

Por ser complejo el cálculo de la derivada segunda, hacemos el estudio de los extremos relativos mediante los intervalos de crecimiento y los intervalos de decrecimiento.

— $f$ es estrictamente decreciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (5, +\infty)$.

— $f$ es estrictamente creciente en $(1, 5)$. Por tanto, la función tiene un mínimo relativo en el punto $(1, f(1)) = (1, 0)$, y un máximo relativo en el punto $(5, f(5)) = \left(5, \dfrac{2}{27}\right)$.




- *Puntos de inflexión.* Omitimos este estudio por ser muy laborioso el cálculo de la derivada segunda y el de la derivada tercera.
- *Intervalos de signo constante.*

Los intervalos a considerar son:

$(-\infty, -1)$; $(-1, 1)$; $(1, +\infty)$

— $f(-2) < 0 \Rightarrow f$ es negativa en $(-\infty, -1)$.

— $f(0) > 0 \Rightarrow f$ es positiva en $(-1, 1)$.

— $f(2) > 0 \Rightarrow f$ es positiva en $(1, +\infty)$.

**2. Calcula los cortes con los ejes y las asíntotas de la función $f(x) = ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)$.**

- *Punto de corte con los ejes.*

— Cortes con el eje *OX* :

$$\left.\begin{array}{l} y = ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right) \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right) = 0 \Rightarrow \dfrac{x+1}{x+2} = 1 \Rightarrow \text{No existen soluciones}$$

Luego, la gráfica no corta al eje de abscisas o eje *OX*.

— Cortes con el eje *OY* :

$f(0) = ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -ln\ 2$. Por tanto, la gráfica corta al eje *OY* en el punto $(0, -ln\ 2)$.

- *Asíntotas.*

— Asíntotas verticales. Hay dos asíntotas verticales de ecuaciones $x = -1$ y $x = -2$, pues se verifica:

$$\lim_{x \to -1^+} ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right) = -\infty \qquad \lim_{x \to -2^-} ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right) = +\infty$$

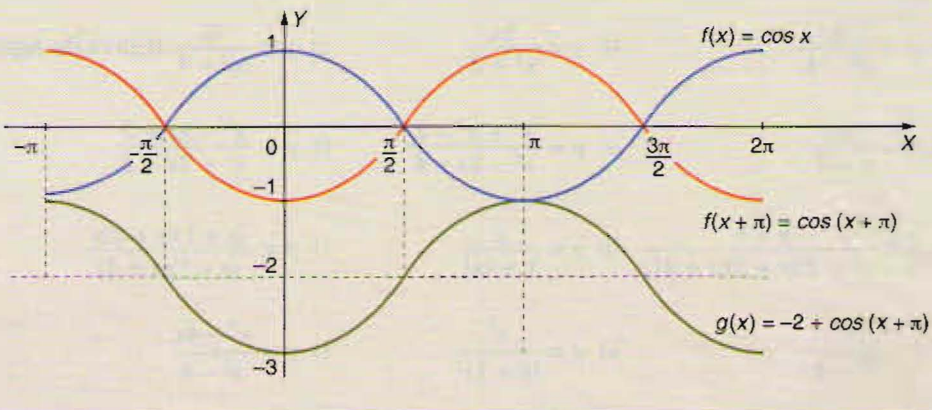
— No tiene asíntotas oblicuas. Tiene una asíntota horizontal de ecuación $y = 0$, pues se verifica:

$$\lim_{x \to -\infty} ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right) = 0$$

**3. Conociendo la gráfica de la función $f(x) = cos\ x$, explica, de una manera razonada, cómo se obtendría la gráfica de la función $g(x) = -2 + f(x + \pi)$. Realiza un dibujo aproximado de las dos gráficas.**

A partir de la gráfica de la función $f(x) = cos\ x$, podemos obtener la gráfica de la función $f(x + \pi) = cos\ (x + \pi)$ sin más que trasladar la gráfica de la función $f(x) = cos\ x$ según el vector libre $\vec{v} = -\pi\vec{i} + 0\vec{j} = -\pi\vec{i}$.

A partir de la gráfica de la función $f(x + \pi) = cos\ (x + \pi)$, podemos obtener la gráfica de la función $g(x) = -2 + f(x + \pi) = -2 + cos\ (x + \pi)$ sin más que trasladar la gráfica de la función $f(x + \pi) = cos\ (x + \pi)$ según el vector libre $\vec{w} = -0\vec{i} - 2\vec{j} = -2\vec{j}$.



## ACTIVIDADES DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

**1** Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = |x + 2| - x$ b) $y = |x^2 - 4x + 3|$ c) $y = x^3 - \frac{4}{3}|x|$

**2** Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = x(x + 2)(x - 2)$ b) $y = x^4 - 2x^2$ c) $y = 2x^3 + 5x^2 - 4x$

d) $y = x(x - 1)(x - 2)$ e) $y = -\frac{x^3}{6} + x$ f) $y = x^4 - 2x^2 - 8$

**3** Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, se pide:

a) Determina los valores numéricos de los coeficientes $a$, $b$, $c$ para los cuales la función tiene un mínimo para $x = 1$ y un punto de inflexión en el origen de coordenadas.

b) Representa gráficamente la función $f(x)$.

**4** Consideramos la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

a) ¿Qué valores debe tomar $a$, $b$, $c$ y $d$ para que en el punto (1, 2) posea un máximo y un mínimo en el punto (–1, –2)?

b) ¿Tiene esta función a un punto de inflexión? Si la respuesta es positiva, determina la tangente a la curva en ese punto.

c) Con los datos anteriores, dibuja una gráfica razonable de la función.

**5** Encuentra una función cuya expresión sea un polinomio del menor grado posible que pase por (0, 0) y tenga un máximo en $x = -1$ y un mínimo en $x = 1$. Realiza su representación gráfica.

**6** Sea $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 7$.

a) Halla $a$ y $b$ de manera que la gráfica de la función $f(x)$ tenga para $x = 1$ una inflexión cuya recta tangente en ese punto forme un ángulo de 45° con el eje $OX$.

b) Representa gráficamente la función.

**7** Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = \frac{4}{x^2 - 4}$ b) $y = \frac{2x}{x^2 + 2}$ c) $y = \frac{8}{x^2 + 4}$ (Curva de Agnesi)

d) $y = \frac{x^2}{x + 2}$ e) $y = \frac{x^3 + x^2 - 2}{x^2 - 3x - 4}$ f) $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$

g) $y = \frac{x + 1}{(x + 2)(x + 3)(x + 4)}$ h) $y = \frac{x}{1 + |x|}$ i) $y = \frac{(x + 1)(x + 2)x}{(x - 1)(x + 3)}$

j) $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ k) $y = \frac{x^3}{(x + 1)^2}$ l) $y = \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 4}$

**8** La recta $y = 2x + 6$ es una asíntota oblicua de la función $f(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x - k}$. Halla el valor de $k$. Realiza la representación gráfica de la función resultante.

**9** Se considera la función definida por $f(x) = ax + b + \dfrac{8}{x}$

a) Calcula $a$ y $b$ para que la gráfica de $f$ pase por el punto $(-2, -6)$ y admita en dicho. Una tangente horizontal.

b) Realiza la representación gráfica de la función resultante.

**10** Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = +\sqrt{x^2 - 1}$ b) $y = [\sqrt[3]{x}]^2$ c) $y = -\sqrt{\dfrac{2 - x}{2 + x}}$

d) $y = \pm x\sqrt{\dfrac{x - 1}{4x - 1}}$ e) $y = \pm\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}}$ f) $y^2 = \dfrac{x}{3 - x}$

**11** Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = ln\,(x - 2)$ b) $y = e^{1/x}$ c) $y = x \cdot e^x$

d) $y = ln\,(x^2 - 5x + 4)$ e) $y = \dfrac{ln\,x}{x}$ f) $y = ln\,|x + 1|$

g) $y = ln\sqrt{x^2 + 4}$ h) $y = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$ i) $y = \dfrac{e^x}{x^2}$

j) $y = x^2\,e^x$ k) $y = x^2\,e^{-x}$ l) $y = \dfrac{x}{ln\,x}$

**12** Calcula las constantes $a$ y $b$ para que las gráficas de las funciones $f(x) = \dfrac{ln\,x}{x}$ y $g(x) = a\,ln\,x + b$ se corten en el punto $\left(e^2, \dfrac{2}{e^2}\right)$ y tengan en él la misma recta tangente. Realiza la representación gráfica de las funciones resultantes.

**13** A partir de las gráficas de las respectivas funciones, demuestra que:

$$ln\,x > \frac{2(x - 1)}{x + 1};\ \forall x > 1$$

**14** A partir de la gráfica de la función $f(x) = ln\,x$, dibuja de forma razonada las gráficas de las funciones:

a) $f(x) = ln\,|x|$ b) $f(x) = |ln\,x|$ c) $f(x) = ln\,(x - 2)$

**15** Representa gráficamente las siguientes funciones:

$$f(x) = \begin{cases} x\left|1 + \dfrac{1}{x}\right| & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 \cdot sen\left[\dfrac{1}{x}\right] & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

**16** a) Esboza la gráfica de una función $f(x)$ que cumpla, a la vez, que:

i) En $x = -3$ tenga una discontinuidad evitable.

ii) En $x = -1$ tenga una discontinuidad de salto finito (admite límites laterales finitos distintos).

iii) En $x = 1$ tenga un asíntota con $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$.

iv) Además, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$.

b) Obtén la expresión analítica de una de tales funciones. Razonar las respuestas.

**17** Representa una función que satisfaga las siguientes propiedades:

a) Dominio $f(x) = \mathbb{R} - \{3\}$  b) $f(0) = 3$  c) $f(4) = 0$

d) Asíntota vertical: $x = 3$  e) Asíntota horizontal: $y = 1$

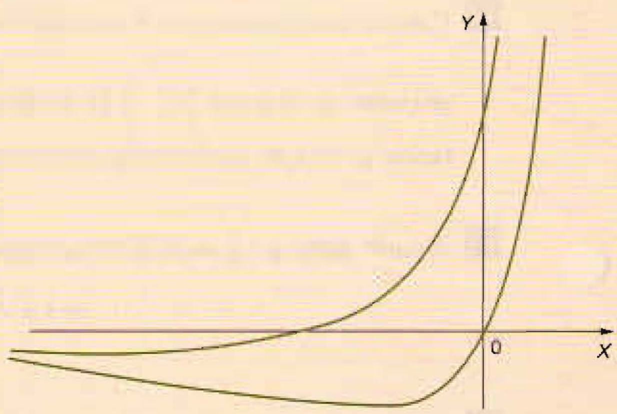
f) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$  g) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$  i) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$  j) $f(7) = 0$

¿Existe sólo una función con estas propiedades?

**18** Se dan las gráficas de dos funciones: la de la función $f(x) = x\,e^x$ y la de su derivada $f'(x)$.

Se pide distinguir una de la otra, justificando razonadamente el porqué y hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad, así como hallar los puntos donde hay máximos, mínimos e inflexiones de $y = f(x)$.




**19** Demuestra que la ecuación $x^4 + 4e^x \cdot (x - 1) = 0$ tiene únicamente dos soluciones. ¿Podrías decir entre qué dos números consecutivos está cada una de las soluciones?

Nota: Utiliza las gráficas de las funciones: $f(x) = e^x$ y $g(x) = \dfrac{-x^4}{4(x-1)}$

## Actividades propuestas en pruebas de acceso a la universidad

**20** La curva $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ corta al eje de abcisas en $x = 3$ y tiene un punto de inflexión en (2/3, 1/9). Halla $a$, $b$ y $c$; y representa gráficamente la función obtenida.

**21** Encuentra una función cuya expresión sea un polinomio del menor grado posible que tiene en (–1, 15) un máximo relativo y en (2, –12) un mínimo relativo. Realiza su representación gráfica.

**22** Consideramos la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$. Se pide:

a) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos.

b) Intervalos de concavidad. Puntos de inflexión.

c) Asíntotas.

**23** Halla el dominio de definición, los límites cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$, los ceros, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{8x^2 + 1}$$

Dibuja luego un esquema sencillo de su gráfica.

**24** Representa gráficamente la función $f(x) = \dfrac{e^x}{1-x}$, calculando, en su caso, el dominio de definición, máximos, mínimos, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento y puntos de corte con los ejes.

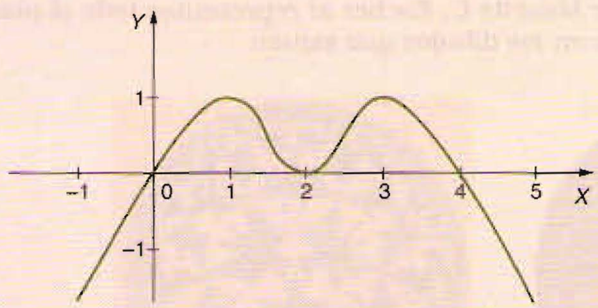
**25** Dibuja la región del plano comprendida entre las curvas:

$$y = \sqrt{16 - x^2} \qquad x^2 = 12(y - 1)$$

**26** Se sabe que la gráfica de la derivada $f'(x)$ de una función en el intervalo abierto (–1, 5) es la que muestra el dibujo.

a) Sabiendo que $f(0) = 0$, dibuja de manera aproximada la gráfica de la función $f(x)$ en el intervalo (–1,5).

b) Indica en esta gráfica los máximos, los mínimos y los puntos de inflexión.

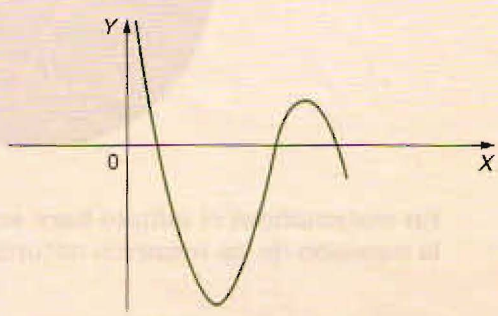



**27** Este es el esquema que representa el gráfico de la función $y = f(x)$:

a) Haz otro esquema que represente el gráfico de la función $y = -f(x)$.

b) Haz otro esquema que represente conjuntamente las gráficas de $y = f(x)$ e $y = 2f(x)$.

Explica el fundamento para la construcción de estos esquemas.



# El infinito. Proceso diagonal de Cantor

Entre los matemáticos fue Galileo el primero en cuestionarse si el conjunto de los números naturales tiene más o igual cantidad de números que el conjunto de los números pares.

Esta cuestión fue resuelta por Georg Cantor estableciendo un emparejamiento o biyección de los números de cada conjunto en la forma que se muestra continuación:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Pares | : | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | ... |
| ⇕ | | ⇕ | ⇕ | ⇕ | ⇕ | ⇕ | ⇕ | |
| $\mathbb{R}$ | : | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ... |

Esta operadora nos da idea de lo que es una biyección.

Cuando un conjunto $A$ se puede hacer corresponder de este modo (a cada elemento de $A$ una etiqueta, número natural, distinta y no sobran etiquetas) se dice que **$A$ es numerable.**

Cantor logró demostrar, de manera análoga, que los conjuntos formados por los números enteros o los números racionales son numerables. También demostró que el conjunto de los números reales no es numerable, como se muestra a continuación.

- **Proceso diagonal de Cantor**

*El conjunto de números decimales comprendidos entre 0 y 1 no es numerable.*

Demostración:

Procedemos por reducción al absurdo, suponiendo que el citado conjunto de números puede etiquetarse con los números naturales. De esta forma pueden colocarse todos ordenadamente. La lista podría ser como sigue:

número 1 ⇔ 0,**9**34826 ...
número 2 ⇔ 0,4**5**7624 ...
número 3 ⇔ 0,02**3**175 ...
número 4 ⇔ 0,372**1**46 ...
número 5 ⇔ 0,8731**6**0 ...
........... ⇔ .................

Veamos que en esta lista no están todos. Para ello y siguiendo a Cantor observamos el número formado por las cifras de la diagonal: **0,95316...**

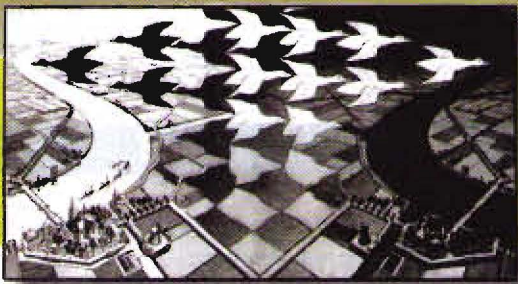
Formamos otro número, a partir de la anterior, de manera que las cifras que ocupan el mismo lugar sean distintas, por ejemplo: 0,13472...

Este último número no está en la lista anterior, ya que el número es distinto del primer número al menos en la primera cifra; el número es distinto del segundo número al menos en la segunda cifra; y así sucesivamente.

Es falso, por tanto, que estén todos en la lista: el conjunto (0,1) no es numerable.

Concluimos con otra cita de Hilbert: «Nadie nos arrojará del paraíso que Cantor ha creado para nosotros».

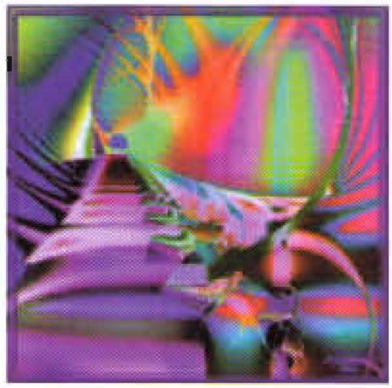
Monumento en honor de Georg Cantor,



# RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

## El infinito

«¡El infinito! Ningún otro problema ha conmovido tan profundamente el espíritu del hombre», decía el gran matemático David Hilbert en los primeros años del siglo XX.



El infinito ha sido pensado, analizado y representado por filósofos, artistas y científicos de todas las épocas.

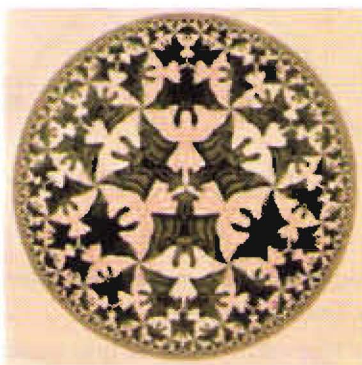
Entre los griegos el concepto de infinito hace su aparición en las célebres paradojas de Zenón que cuestionan la divisibilidad hasta el infinito del espacio y del tiempo.

Las paradojas de Zenón son:

- **Aquiles y la tortuga:** describe la imposibilidad de que Aquiles alcance en su carrera a la tortuga.
- **La dicotomía:** muestra cómo el movimiento no existe.
- **La flecha**: una flecha lanzada por un arquero está siempre inmóvil.
- **El estadio**: cuestiona el movimiento relativo y muestra cómo el tiempo no puede estar constituido por unidades atómicas.

En las paradojas anteriores aparecen conceptos como lo infinitamente pequeño o infinitesimal, lo infinitamente grande y la continuidad. Estos conceptos matemáticos que fueron establecidos con rigor en los siglos XIX y XX por Karl Weierstrass, Richard Dedekind y Georg Cantor.

El concepto de infinito fue dibujado por Maurits C. Escher al representar todo el plano en el interior de un círculo como puede verse en los dibujos que siguen.



En matemáticas el infinito hace su aparición muy pronto, podemos intuirlo en el desarrollo de la sucesión de los números naturales, es decir, en los puntos suspensivos que siguen a la serie:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$$