7. kapitola

Modálna logika - Intuitívny úvod do jednoduchej (K) modálnej logiky

7.1. Úvodné poznámky

Modálna logika [1,6,7,8,10] patrí medzi neklasické logiky, ktoré využívajú modálne spojky pre kvalitatívnu špecifikáciu pravdivosti usudzovania. *Modálna logika* zahrňuje takú modifikáciu výrokovej logiky, ktorá obsahuje dve nové unárne spojky „je nutné, aby...“ a „je možné, aby...“. Iné typy modálnych logík sú temporálna logika (obsahuje modálne spojky časové charakteru ako napr. „budúci“ a „minulý“), deontickú logiku (obsahuje modálne spojky morálneho charakteru ako napr. „je povinné, aby...“, „je povolené, aby...“), epistemickú logiku (obsahuje modálne spojky „viem“, „verím“ a ďalšie spojky) a mnohé ďalšie logiky. Tieto logiky modálneho charakteru majú význam nielen vo filozofii, kde umožňujú analyzovať a precizovať jej argumenty modálneho charakteru, ktoré sú často veľmi neurčité a ťažko „uchopiteľné“, ale aj vo vedách prírodovedných, v informatike a v umelej inteligencii, kde umožňujú rozšírenie spôsobov usudzovania a reprezentácií vedomostí.

Spoločným rysom modálnych logík je, že modálne spojky nevyhovujú princípu funkcionality, ktorý je platný v klasickej výrokovej logike, pravdivosť výroku $\clubsuit\varphi$ s *unárnou modálnu spojkou* $\clubsuit$ nie je plne určená len pravdivostnou hodnotou výroku φ (ako to napr. platí pre spojku negácie, kde pravdivosť $\neg\varphi$ je plne určená pravdivosťou φ). Tento problém spôsoboval veľké problémy pri korektnej formulácii modálnych logík, menovite ich sémantickej interpretácii pomocou pravdivostných hodnôt formúl prostredníctvom pravdivostných hodnôt ich podformúl. Koncom 50. rokov minulého storočia americký filozof a logik Saul Kripke [3,4,5] navrhol novú sémantickú interpretáciu, ktorá využíva aj iné možné svety, ako je len náš svet. Kripke vychádzal zo všeobecných filozofických úvah založených na predstave nemeckého filozofa 17. storočia Leibniza, ktorý sa domnieval, že Boh mohol stvoriť svet nekonečne mnohými spôsobmi. Pojem možného sveta potom o niekoľko storočí neskoršie inšpiroval Kripkeho pri tvorbe sémantiky modálnych výrokov. Problém určenia pravdivostnej hodnoty výroku „φ je *vždy* pravdivé“, spočíva v tom, že pri jeho riešení sa musíme obracať aj na iné možné svety, ***výrok*** φ ***je nutne pravdivý vtedy a len vtedy (vtt), ak*** φ ***je pravdivý vo všetkých možných svetoch***. Podobne, ***výrok*** φ ***je možne pravdivý vtedy a len vtedy (vtt), ak*** φ ***je pravdivý aspoň v jednom možnom svete***. Tento prístup má univerzálny charakter a je pomerne ľahko aplikovateľný aj pre iné typy modálnych logík.

Modálne spojky „nutne“ a „možne“ majú podobnú interpretáciu, akú majú univerzálny resp. existenčný kvantifikátor. Rozdiel je však v tom, že kvantifikátory sú definované nad univerzom vecí alebo indivíduí, zatiaľ čo modálne spojky sa vzťahujú k možným svetom. Aj keď sa jedná o jemné rozlíšenie kvantifikátorov a modálnych spojok, táto analógia môže byť významná napr. pri zavádzaní kvantifikátorov v modálnej logike. Jeden svet môže obsahovať rôzne univerzá vecí a indivíduí, zatiaľ čo nejaké univerzum je vždy určené pre nejaký daný možný svet. Táto skutočnosť podstatne komplikuje tvorbu predikátovej modálnej logiky, jeden z najjednoduchších spôsobov ako preklenúť tieto problémy je postulovať, že v každom svete existujú rovnaké univerzum vecí a indivíduí. Žiaľ toto jednoduché riešenie generuje tautológie, ktorých sémantická interpretácia nie je v súhlase s bežným prirodzeným jazykom.

Predmetom záujmu v modálnych logikách je pochopiť, ktoré modálne výroky implikujú iné modálne výroky, aký je medzi nimi vzájomný vzťah a pod. Modálna logika bola diskutovaná už Aristotelom, ktorý ako prvý poukázal na skutočnosť, že nutnosť implikuje možnosť

ak (*p je nutné*), potom (*p je možné*) (7.1a)

pričom opačná implikácia samozrejme neplatí (ak by platila, potom modality možnosť a nutnosť by boli totožné). Taktiež poukázal na možnosť definovať možnosť pomocou nutnosti a naopak

nie (*p je možné*) *vtedy a len vtedy ak* (*nie p je nutné*) (7.1b)

nie (*p je nutné*) *vtedy a len vtedy ak* (*nie p je možné*) (7.1c)

a taktiež zistil, že nasledujúce dva modálne výroky sú ***platné***

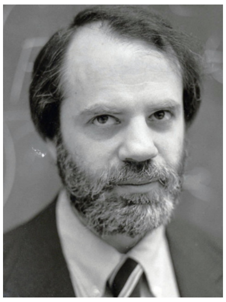
ak ((*ak p*, *potom q*) *je nutný*), *potom* (*ak* (*p je nutný*), potom (*q je nutný*)) (7.2a)

ak ((*ak p*, *potom q*) *je nutný*), *potom* (*ak* (*p je možný*), *potom* (*q je možný*)) (7.2b)

Aristoteles, podobne ako v teórii sylogizmov, pomocou vhodných interpretácií (teraz by sme povedali falzifikácií) ukázal, že nasledujúce dva modálne výroky sú ***neplatné***

ak ((*p je možné*) *a* (*q je možné*)), *potom* ((*p a q*) *je možné*) (7.3a)

ak ((*p alebo q*) je nutné), *potom* ((*p je nutné*) *alebo* (*q je nutné*)) (7.3b)



Obrázok 7.1. Americký filozof a logik Saul Kripke (∗1940), ktorý je tvorcom sémantickej interpretácie modálnej a intuicionistickej logiky pomocou novej idey možných svetov. Použitie tejto sémantickej interpretácie patrí medzi "Kopernikovský obrat" štúdia mnohých neklasických logík modálneho typu v druhej polovici minulého storočia. Prekvapujúcou je aplikácia kripkeovskej teórie možných svetov v literárnej vede [2], kde je použitá k interpretácii diel sci-fi a fantasy. Tento teoretický prístup poskytuje pre literárnych vedcov vhodný jazyk a konceptuálne rámce pre popis a špecifikáciu týchto literárnych diel.

Pri skúmaní pravdivosti modálnych výrokov „*p je nutné*“ a „*p je možné*“ hľadáme odpoveď podľa amerického filozofa a logika Saula Kripkeho [3,4,5] v možných svetoch $W = \{w_1, w_2,.., w_n,...\}$. Ak je nejaká skutočnosť pravdivá v každom možnom svete, potom povieme, že je *nutne pravdivá* aj v našom svete, alebo, ak je pravdivá aspoň v jednom možnom svete, povieme, že je *možne pravdivá* aj v našom svete. Žiaľ, tento jednoduchý postup pre sémantickú interpretáciu modálnych spojok produkuje „kolaps“ formuly ((*p* je nutné) je nutné). Ak použijeme postup naznačený vyššie pre sémantickú interpretáciu, potom (*p* je nutné) platí pre každý svet $w' \in W$, ak na výrok (*p* je nutné) opakovane aplikujeme použitú sémantickú interpretáciu dostaneme, že *p* platí pre každý svet $w'' \in W$. To znamená, že sémantická interpretácia formúl ((*p* je nutné) je nutné) a (*p* je nutné) je rovnaká, čo je vo všeobecnosti kontraintuitívne a môže platiť len v určitých špeciálnych prípadoch. Bolo veľkou zásluhou Saula Kripkeho, že odstránil tento nedostatok jednoduchej sémantickej interpretácie pomocou možných svetov, že každú formulu modálnej logiky zafixoval v určitom svete $w \in W$ a jej význam hľadal len vo svetoch „***dostupných***“ z daného sveta *w*, $w' \in \Gamma(w)$, kde $\Gamma(w) \subseteq W$ je podmnožina možných svetov, ktoré sú dostupné zo sveta *w*.

Použijeme dva jednoduché ilustračný príklad tejto zaujímavej idey:

(1) Študujme výrok „*nutne platí, že vlak do Prahy odchádza o 10.15*“. Ako sa jednoducho vysporiadať s unárnou modálnou spojkou „nutne“? Najjednoduchší prístup k riešeniu tohto problému bude, keď sa obrátime s otázkou „*odchádza vlak do Prahy o 10.15*“ ? na našich susedov v dome kde bývame. Potom $\Gamma(w) = susedia\_v\_dome(w)$, táto množina obsahuje susedov indivídua *w*, ktorý s ním bývajú na jednej chodbe. Ak nám každý takýto sused odpovie „*áno*“, potom môžeme pokladať daný výrok za nutne pravdivý. Ak nám odpovie „*áno*“ len určitá časť susedov (aspoň jeden), potom daný výrok môžeme pokladať za možne pravdivý.

(2) Predstavme si školu[1], v ktorej sa nachádza množstvo tried, pričom v každej triede je tabuľa, na ktorej sú vypísané pravdivé výroky (napr. „Eva miluje Ivana“). Ak chceme poznať v danej triede *w*, v ktorej sa nachádzame, pravdivosť nejakého modálneho výroku „nutne φ“, tak musíme skontrolovať platnosť tohto výroku φ vo všetkých triedach, ktoré sú napr. na rovnakej chodbe ako daná trieda, $w' \in triedy\_v\_škole\_na\_rovnakej\_chodbe(w)$. Ak je v každej triede výrok φ pravdivý, potom φ je „nutne“ pravdivý v danej triede. Podobne, ak chceme poznať pravdivostnú hodnotu „možne φ“ v danej triede, stačí nájsť aspoň jednu triedu na rovnakej chodbe, kde na tabuli je uvedený výrok φ, potom výrok φ je „možne“ pravdivý v danej triede. Výrok „*číslo 3 je prvočíslo*“ je pravdivý za každej situácie v každej triede v celej škole, t. j. je napísaný na tabuli v každej triede, potom je takýto výrok nutne pravdivý. Podobne, ak výrok „*Eva miluje Ivana*“ je pravdivý len v niektorých triedach na rovnakej chodbe, potom tento výrok nie je nutne pravdivý ale len možne pravdivý. Na záver uvažujme výrok „*prvočíslo väčšie ako 2 je deliteľné 2*“, ktorý nie je pravdivý v žiadnej triede, t. j. je nutne nepravdivý.

Zovšeobecníme tieto dva jednoduché ilustračné príklady. Nech výrok „nutne φ“ má tvar □φ, kde symbol □ reprezentuje unárnu modálnu spojku „nutne“. Nech svet v ktorom sa skúma pravdivosť výroku □φ je označený symbolom *w*, množina možných svetov je označená *W*. Ak výrok φ je pravdivý pre každý svet $w' \in \Gamma(w)$, t. j. relácia $w' \vDash \varphi$ ($w' \nvDash \varphi$) je pravdivá (nepravdivá), potom budeme pokladať skúmaný výrok □φ za pravdivý aj pre svet *w* (pozri obr. 7.2)

$$w \vDash \Box\varphi \quad vtt \quad \left(\forall w' \in \Gamma(w)\right)\left(w' \vDash \varphi\right) \tag{7.4a}$$

alebo

$$w \nvDash \Box\varphi \quad vtt \quad \left(\exists w' \in \Gamma(w)\right)\left(w' \nvDash \varphi\right) \tag{7.4b}$$

V prípade, že množina, že množina dostupných svetov $\Gamma(w)$ je prázdna (t. j. svet *w* nemá žiadneho nasledovníka), potom formula $w \vDash \Box\varphi$

Z tohto jednoduchého ilustračného príkladu vyplýva, že pravdivosť výroku □φ je špecifikovaná pre daný objekt $w \in W$. Toto je nová črta, ktorá je neznáma v klasickej výrokovej logike, kde pravdivosť formuly φ je nezávislá na objekte $w \in W$, platí univerzálne.

Podobným spôsobom môžeme diskutovať aj výrok tvaru[2] $\Diamond\varphi$, kde symbol $\Diamond$ reprezentuje modálnu unárnu spojku „možne“. Ak výrok $\Diamond\varphi$ je pravdivý aspoň pre jeden svet $w' \in \Gamma(w)$, t. j. relácia $w' \vDash \varphi$, potom budeme pokladať skúmaný výrok $\Diamond\varphi$ za pravdivý aj pre svet *w*

$$w \vDash \Diamond\varphi \quad vtt \quad \left(\exists w' \in \Gamma(w)\right)\left(w' \vDash \varphi\right) \tag{7.5a}$$

alebo

[1] Tento príklad pochádza od Prokopa Sousedíka [9].
[2] Formulu □ φ čítame „box fí“ a formulu ◊φ čítamé „diamant fí“.

$$w \nvDash \Diamond\varphi \quad vtt \quad \left(\forall\, w' \in \Gamma\left(w\right)\right)\left(\, w' \nvDash \varphi\right) \tag{7.5b}$$

Skutočnosť, že platnosť výrokov $\Box\varphi$ a/alebo $\Diamond\varphi$ je vztiahnutá k nejakému svetu $w \in W$ je nová črta modálnej logiky, ktorá je neznáma v klasickej výrokovej logike, kde pravdivosť formuly φ je nezávislá na svete $w \in W$, platí univerzálne. Modálne spojky sú navzájom spriahnuté vzťahmi

$$\neg\Box\varphi \equiv \Diamond\neg\varphi \tag{7.6a}$$

$$\neg\Diamond\varphi \equiv \Box\neg\varphi \tag{7.6b}$$

ktoré už boli formulované Aristotelom (pozri (2.1b-c)).

Jazyk (syntax) modálnej logiky bude definovať spôsobom, ktorý je jednoduchým rozšírením výrokovej logiky pomocou zavedenia dvoch unárnych modálnych spojok a ich sémantickou interpretáciou.

V prvok kroku budeme špecifikovať tvorbu formúl jazyka L modálnej logiky[3]. Nech $P = \left\{p, q, ..., p', q', ..., p_1, q_1, ..., \mathbf{0}, \mathbf{1}\right\}$ je konečná množina atomických výrokov (výrokových premenných) rozšírená o dve pravdivostné konštanty $\mathbf{0}$ a $\mathbf{1}$, z ktorých pomocou unárnych a binárnych logických spojok (včítane modálnych $\Box$ a $\Diamond$) vytvárame formuly modálnej logiky, kde L je minimálna množina špecifikovaná týmto rekurentným spôsobom:

(1) $L := P$,
(2) Ak $\varphi, \psi \in L$, potom $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \Rightarrow \psi), (\varphi \equiv \psi), (\neg\varphi), (\Box\varphi), (\Diamond\varphi) \in L$

Použijeme metódu Kripkeho možných svetov [3,4,5] k špecifikácii pravdivostných hodnôt formúl obsahujúcich unárne operátory $\Box$ a $\Diamond$ modálnej logiky. ***Kripkeho model*** M je definovaný ako usporiadaná trojica

$$M = \left(W, R, val\right) \tag{7.7a}$$

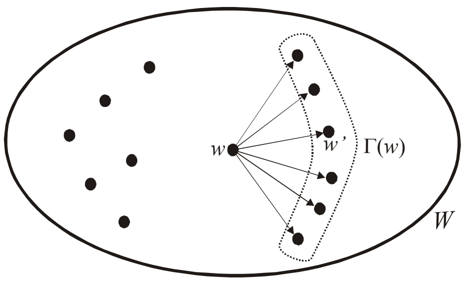
kde množina $W = \left\{w_1, w_2, ..., w_n\right\}$ obsahuje možné svety, $R \subseteq W \times W$ je binárna relácia definovaná nad množinou svetov a *val* je zobrazenie

$$val : P \times W \to \left\{0,1\right\} \tag{7.7b}$$

ktoré ohodnocuje atomické premenné $\left\{p, q, ..., p', q', ..., p_1, q_1, ...\right\}$ v každom svete $w \in W$ pravdivostnou ohodnotí $val\left(p, w\right) \in \left\{0,1\right\}$ s interpretáciou (pozri obr. 7.2)

$$\left(val\left(p, w\right) = 1\right) \equiv \left(p \text{ je pravdivé vo svete } w\right) \equiv \left(w \vDash p\right) \tag{7.7c}$$

$$\left(val\left(p, w\right) = 0\right) \equiv \left(p \text{ je nepravdivé vo svete } w\right) \equiv \left(w \nvDash p\right) \tag{7.7d}$$

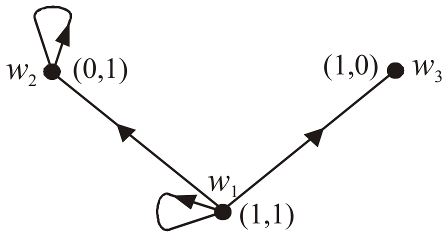


Obrázok 7.2. Znázornenie podmnožiny $\Gamma(w) \subseteq W$, ktorá obsahuje svety, ktoré sú dostupné (susedné) vzhľadom k svetu *w*.

[3] Porovnaním s definíciou 1.2 zistíme, že jazyk L modálnej logiky je jednoduchým rozšírením jazyka výrokovej logiky o dne unárne spojky $\Box$ a $\Diamond$. To znamená, že každá formula výrokovej logiky je aj formulou modálnej logiky (ale nie naopak).

Pomocou relácia *R* môžeme definovať pre každý svet $w \in W$ množiny dostupných (susedných) svetov $\Gamma(w) \subseteq W$ zo sveta *w*, pozri obr. 7.2 a 7.3.

$$\Gamma(w) = \{w' ; (w, w') \in R\} \tag{7.7e}$$



Obrázok 7.3. Znázornenie binárnej relácie $R \subseteq W \times W$ pomocou orientovaného grafu, pričom množina svetov *W* obsahuje tri svety, $W = \{w_1, w_2, w_3\}$. Množina *P* obsahuje dve výrokové premenné, $P = \{p, q\}$. Každý vrchol grafu je ohodnotený binárnou dvojicou (α, β), kde α (β) špecifikuje pravdivostnú hodnotu premennej *p* (*q*). Tak napríklad dvojica (0,1) pri vrchole w_2 špecifikuje pravdivostnú hodnotu *p* (*q*) ako 0 (1), alebo $w_2 \nvDash p$ resp. $w_2 \vDash q$. Množiny Γ sú určené takto: $\Gamma(w_1) = \{w_1, w_2, w_3\}$, $\Gamma(w_2) = \{w_2\}, \Gamma(w_3) = \emptyset$. Zobrazenie (7.7b) je určené takto: $v(p, w_1) = 1$, $v(p, w_2) = 0$, $v(p, w_3) = 1$, $v(q, w_1) = 1$, $v(q, w_2) = 1$, $v(q, w_3) = 0$.

Použitím podmnožín Γ modálne unárne operátory (spojky) sú definované takto [6]

$$(w \vDash \Box\varphi) =_{def} \begin{cases} \bigwedge\limits_{w' \in \Gamma(w)} (w' \vDash \varphi) & (pre\, \Gamma(w) \neq \emptyset) \\ 1 & (pre\, \Gamma(w) = \emptyset) \end{cases} \tag{7.8a}$$

$$(w \vDash \Diamond\varphi) =_{def} \begin{cases} \bigvee\limits_{w' \in \Gamma(w)} (w' \vDash \varphi) & (pre\, \Gamma(w) \neq \emptyset) \\ 0 & (pre\, \Gamma(w) = \emptyset) \end{cases} \tag{7.8b}$$

Sémantická interpretácia formuly □φ je vždy vykonaná relatívne k nejakému svetu *w*∈*W*. Hovoríme, že formula □φ (čítaná ako „***nutne*** φ“) je pravdivá vo svete *w* vtedy a len vtedy, ak výrok φ je pravdivý pre každý svet *w*´ z podmnožiny dostupných svetov Γ(*w*)“. Podobným spôsobom je interpretovaná aj formula ◇φ (čítaná ako „***možno*** φ“) je pravdivá vo svete *w* vtedy a len vtedy, ak výrok φ je pravdivý aspoň v jednom dostupnom svete *w*´ z podmnožiny susedných svetov Γ(*w*). Tieto dva vzťahy obsahujú zovšeobecnenie aj pre prípad prázdnej množiny susedných svetov, $\Gamma(w) = \emptyset$, potom

$$(w \vDash \Box\varphi) = 1 \tag{7.8a´}$$

$$(w \vDash \Diamond\varphi) = 0 \tag{7.8b´}$$

pre ľubovoľnú formulu φ.

Pravdivostné hodnoty formúl modálnej logiky sú určené podobnou procedúrou ako vo výrokovej logike (pozri tab. 1.1). Nech atomické výroky sú pravdivostne ohodnotené zobrazením (7.7), t. j. výrazy $w \vDash p$ a $w \nvDash p$ špecifikujú, či výrok *p* je pravdivý resp. nepravdivý vo svete *w*. Uvažujme zložené formuly $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \Rightarrow \psi$, $\Box\varphi$ a $\Diamond\varphi$, ich pravdivostné hodnoty vo svete *w* sú určené pomocou tab. 7.1.

Tabuľka 7.1. Sémantická interpretácia formúl modálnej logiky

(1)	$w \vDash \neg\varphi$ vtt $w \nvDash \varphi$
(2)	$w \vDash (\varphi \wedge \psi)$ vtt $w \vDash \varphi$ a $w \vDash \psi$
(2′)	$w \nvDash (\varphi \wedge \psi)$ vtt $w \nvDash \varphi$ alebo $w \nvDash \psi$
(3)	$w \vDash (\varphi \vee \psi)$ vtt $w \vDash \varphi$ alebo $w \vDash \psi$
(3′)	$w \nvDash (\varphi \vee \psi)$ vtt $w \nvDash \varphi$ a $w \nvDash \psi$
(4)	$w \vDash (\varphi \Rightarrow \psi)$ vtt $w \nvDash \varphi$ alebo $w \vDash \psi$
(4′)	$w \nvDash (\varphi \Rightarrow \psi)$ vtt $w \vDash \varphi$ a $w \nvDash \psi$
(5)	$w \vDash \Box\varphi$ vtt pre každé $w' \in \Gamma(w)$ platí $w' \vDash \varphi$
(5′)	$w \nvDash \Box\varphi$ vtt existuje také $w' \in \Gamma(w)$, že platí $w' \nvDash \varphi$
(6)	$w \vDash \Diamond\varphi$ vtt existuje také $w' \in \Gamma(w)$, že platí $w' \vDash \varphi$
(6′)	$w \nvDash \Diamond\varphi$ vtt pre každé $w' \in \Gamma(w)$ platí $w \nvDash \varphi$

V tab. 7.2 sú uvedené pravdivostné hodnoty jednoduchých formúl modálnej logiky pre Kripkeho model M s reláciou R znázornenou na obr. 7.3. V prvých dvoch riadkoch tabuľky sú uvedené pravdivostné hodnoty atomických premenných p a q, ktoré sú určené zobrazením v z legendy k obr. 7.3. Piaty a šiesty riadok tabuľky obsahuje modálne formuly $\Box p$ a $\Box q$, ktorých pravdivostná hodnota je určená pomocou (7.4a).

Tabuľka 7.2. Pravdivosť niektorých formúl pre Kripkeho model s reláciou R znázornenou na obr. 8.3.

formula	w_1	w_2	w_3
p	1	0	1
q	1	1	0
$p \wedge q$	1	0	0
$p \vee q$	1	1	1
$\Box p$	0	0	1
$\Box q$	0	1	1
$\Diamond p$	1	0	0
$\Diamond q$	1	1	0
$\Box p \wedge \Box q$	0	0	1
$\Box p \vee \Box q$	0	1	1
$\Diamond p \wedge \Diamond q$	1	0	0
$\Diamond p \vee \Diamond q$	1	1	0
$\Box (p \wedge q)$	0	0	1
$\Box (p \vee q)$	1	1	1
$\Diamond (p \wedge q)$	1	0	0
$\Diamond (p \vee q)$	1	1	0

V modálnej logike sa pojem *tautológie* (reprezentovaný symbolom $\vDash$) formuly φ zavádza trochu komplikovanejšie ako vo výrokovej logike.

Definícia 7.1. Nech formula $\varphi \in L$, potom výrok ´formula φ je ***pravdivá pre model*** $M = (W, R, val)$ zapisujeme pomocou symbolu – relácie ⊨ takto

$$M \models \varphi \tag{7.9}$$

Negácia tohto výroku má tvar

$$M \not\models \varphi \tag{7.9a}$$

Ktorú čítame ´formula φ je nepravdivá pre model *M*.

Hovoríme, že formula $\varphi \in L$ je ***tautológia*** práve vtedy, ak je pravdivá pre každý model *M*

$$\models \varphi =_{def} (\forall M)(M \models \varphi) \tag{7.10}$$

Pre modálne spojky □ a ◇ platia vybrané tautológie z tab. 8.3, o ktorých platnosti sa môžeme presvedčiť pomocou sémantických tabiel.

Tabuľka 7.3. Vybrané tautológie jednoduchej modálnej logiky

(1)	$\models (\Diamond p \equiv \neg\Box(\neg p))$
(2)	$\models (\Box p \Rightarrow \Diamond p)$
(3)	$\models ((\Box(p \wedge q)) \equiv ((\Box p) \wedge (\Box q)))$
(4)	$\models (\Diamond(p \vee q) \equiv (\Diamond p) \vee (\Diamond q))$
(5)	$\models ((\Box p) \vee (\Box q) \Rightarrow \Box(p \vee q))$
(6)	$\models (\Diamond(p \wedge q) \Rightarrow (\Diamond p) \wedge (\Diamond q))$
(7)	$\models (\Box(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Box p \Rightarrow \Box q))$
(8)	$\models (\Box(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Diamond p \Rightarrow \Diamond q))$
(9)	$\models (\Diamond p \Rightarrow \Diamond q) \Rightarrow (\Diamond(p \Rightarrow q))$

Zrekapitulujme základné črty nášho postupu pri konštrukcii jednoduchej modálnej logiky, ktorú nazývame taktiež K (na počesť Saula Kripkeho) modálna logika. V prvom kroku sme špecifikovali dve modálne spojky „nutne“ a „možne“, reprezentované symbolmi □ resp. ◊. Sémantický význam týchto dvoch unárnych spojok bol špecifikovaný pomocou prístupu možných svetov navrhnutého Saulom Kripkom. Formuly modálnej logiky (t. j. syntax tejto logiky) boli jednoducho formulované pomocou mierne modifikovaného rekurentného postupu známeho z výrokovej logiky, v rámci ktorého formuly výrokovej logiky tvoria významnú podmnožinu korektných formúl modálnej logiky (ak formula neobsahuje modálnu spojku, potom je aj formulou výrokovej logiky). Sémantická interpretácia spojok sa odlišuje od klasického prístupu len v prípade modálnych unárnych spojok, ktoré sú interpretované v rámci modelu $M = (W, R, val)$, pričom relácia *R* z tohto modelu pre jednoduchosť nie je špecifikovaná, čo vlastne tvorí formálny základ jednoduchej K modálnej logiky.

7.2 Vzťah medzi modálnou logikou a predikátovou logikou

V tejto kapitole budeme diskutovať úzky vzťah medzi modálnou logikou a predikátovou logikou [1,2]. Pretože predikátová logika je historicky staršia približne o polstoročie od modálnej logiky, môžeme povedať, že modálna logika je špeciálny prípad predikátovej logiky. Niektorí autori využívajú túto skutočnosť k definícii modálnych operátorov □ a ◇ ako analogických štruktúr kvantifikátorov ∀ resp. ∃. Potom, v rámci tohto prístupu, napr. na základne platnosti predikátovej formuly $(\forall x)\big(p(x)\Rightarrow q(x)\big)\Rightarrow\big((\forall x)\,p(x)\Rightarrow(\forall x)q(x)\big)$ môžeme očakávať aj platnosť formuly $\Box\big(p(x)\Rightarrow q(x)\big)\Rightarrow\big(\Box p(x)\Rightarrow\Box q(x)\big)$, ktorá patrí medzi kľúčové formuly modálnej logiky. Musíme však poznamenať, že tento vzťah medzi modálnou a predikátovou logikou bol umožnený až vznikom Kripkeho sémantiky možných svetov, bez jej existencie by nikoho nenapadlo hľadať analógie medzi predikátovou a modálnou logikou.

Nech $U=\{a,b,...,x,y,...\}$ je univerzum objektov (indivíduí), vzhľadom ku ktorému bude definovať pravdivosť výroku (unárneho predikátu) p, $x\vDash p$, ktorý čítame „p je pravdivé pre objekt x“; jeho negácia $\neg(x\vDash p)=_{def}(x\nvDash p)$, ktorý sa číta „$x$ nie je pravdivé pre objekt p“. Definujme unárny operátor (univerzálny kvantifikátor) ∀ analogickým spôsobom, ako bol definovaný modálny operátor □ (pozri (7.8a))

$$\forall p=_{def}\bigwedge_{x\in U}(x\vDash p)\tag{7.11a}$$

Podobným spôsobom môže byť definovaný aj unárny operátor (existenčný kvantifikátor) ∃ ako analógia k modálnemu operátoru ◊ (pozri (7.8b))

$$\exists p=_{def}\bigvee_{x\in U}(x\vDash p)\tag{7.11a}$$

Z týchto dvoch definícií vyplýva (použitím de Morganových zákonov pre konjunkciu resp. disjunkciu) priamo vzťah medzi kvantifikátormi

$$\neg\forall p\equiv\exists\neg p\tag{7.12}$$

Na základe tejto analógie medzi kvantifikátormi a modálnymi operátormi môžeme prirodzene očakávať, že väčšina formúl predikátovej logiky má svoj „duálny“ tvar v modálnej logike (alebo naopak).

Na záver tejto sekcie o vzťahu medzi predikátovou a modálnou logikou uvedieme možné rozšírenie predikátovej logiky pre rôzne univerzá objektov, definujme si reťazec množín – univerzií objektov

$$U_1\subset U_2\subset...\subset U_n=U\tag{7.13}$$

Vzhľadom k týmto množinám môžeme definovať univerzálne a existenčné kvantifikátory

$$(\forall_i x)\,p(x)=_{def}\bigwedge_{x\in U_i}p(x)\tag{7.14a}$$

$$(\exists_i x)\,p(x)=_{def}\bigvee_{x\in U_i}p(x)\tag{7.14b}$$

kde i = 1, 2, ..., n. Univerzálny a existenčný kvantifikátor pre dané $1\le i\le n$ vyhovujú podmienke (7.12)

$$\neg(\forall_i x)\,p(x)\equiv(\exists_i x)\neg p(x)\tag{7.15}$$

Priamo z definície vyplývajú tieto formuly

$$(\forall_n x)\,p(x)\Rightarrow...\Rightarrow(\forall_2 x)\,p(x)\Rightarrow(\forall_1 x)\,p(x)\tag{7.16a}$$

$$(\exists_1 x)\,p(x)\Rightarrow(\exists_2 x)\,p(x)\Rightarrow...\Rightarrow(\exists_n x)\,p(x)\tag{7.16b}$$

$$(\forall_i x)\,p(x)\Rightarrow(\exists_i x)\,p(x)\quad(\text{pre } i=1,2,...,n)\tag{7.16c}$$

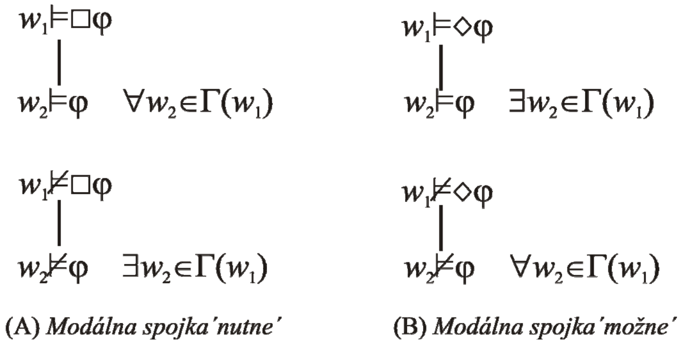
$$(\forall_{i+1}x)\,p(x)\equiv(\forall_i x)\,p(x)\wedge\left(\bigwedge_{x\in(U_{i+1}-U_i)}p(x)\right)\tag{7.16d}$$

$$\left(\exists_{i+1}x\right)p\left(x\right)\equiv\left(\exists_{i}x\right)p\left(x\right)\vee\left(\bigvee_{x\in\left(U_{i+1}-U_{i}\right)}p\left(x\right)\right) \tag{7.16e}$$

Môžeme teda konštatovať, že v rámci štúdia vzťahu medzi modálnou a predikátovou logikou navrhli sme zovšeobecnenú predikátovú logiku s rôznymi univerzálnymi a existenčnými kvantifikátormi $\forall_i$ a $\exists_j$, ktoré sú navzájom prepojené vzťahmi (7.15-16). Môžeme viesť zdĺhavé diskusie o významnosti tohto „zovšeobecnenia“ predikátovej logiky, v každom prípade bez znalosti Kripkeho sémantickej interpretácie modálnej logiky by existovala len veľmi malá pravdepodobnosť tohto zovšeobecnenia štandardnej predikátovej logiky.

7.3 Sémantické tablá v modálnej logike

Metóda sémantických tabiel [6,7] pre modálnu logiku je jednoduchým rozšírením tohto prístupu platného pre výrokovú logiku (pozri kapitolu 3.2) tak, že zavedieme nové rozšírenia sémantického tabla pre modálne spojky □ a ◇, pozri obr. 7.4.



Obrázok 7.4. Rozšírenie metódy sémantických tabiel pre predikátový počet (prvý riadok) a modálnu logiku (druhý riadok). V dolnej časti diagramu vpravo sú uvedené objekty z množiny W (možné svety), pre ktoré formula platí.

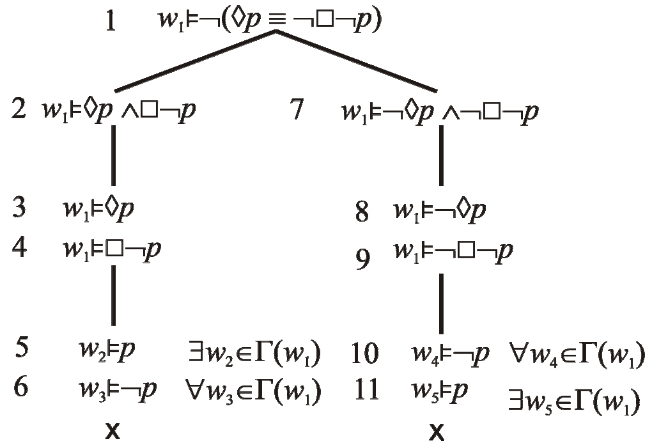
Príklad 7.1. Metódou sémantického tabla ukáže, že formula $\varphi=\left(\Diamond p\equiv\neg\Box\left(\neg p\right)\right)$ je tautológia. Vzniknuté sémantické tablo je znázornené na obr. 7.5, kde pre jednoduchosť sú jednotlivé uzly tabla sú označená číslami 1,…,6 s nasledujúcim komentárom:

1. Koreň tabla obsahuje negovanú formulu $\neg\varphi$, ktorá je ekvivalentnými manipuláciami prepísaná do konjunkcie $\neg\left(\Diamond p\Rightarrow\neg\Box\left(\neg p\right)\right)\wedge\left(\neg\Box\left(\neg p\right)\Rightarrow\Diamond p\right)$, pričom predpokladáme, že ekvivalentný prepis formuly $\neg\varphi=\left(\Diamond p\wedge\Box\neg p\right)\vee\left(\neg\Diamond p\wedge\neg\Box\neg p\right)$ je uvažovaný vo svete $w_1\in W$.
2. Tento uzol sémantického tabla obsahuje podformulu $\Diamond p\wedge\Box\neg p$ vo svete w_1, ktorá pochádza z pôvodnej formuly $\neg\varphi=\left(\Diamond p\wedge\Box\neg p\right)\vee\left(\neg\Diamond p\wedge\neg\Box\neg p\right)$.

3.-4. Tieto dva uzly sú priradené podformulám $\Diamond p$ a $\Box\neg p$, obe uvažované vo svete svete $w_1\in W$, ktoré vznikli z predchádzajúceho uzla 2 jeho rozkladom podľa konjunkcie.

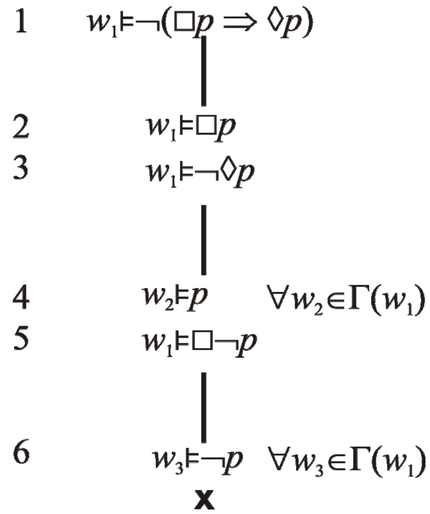
5. Uzol vznikol z uzla 3 odstránením modálneho operátora $\Diamond$, vzniknutá podformula p je uvažovaná vo svete $\exists w_2\in\Gamma\left(w_1\right)$.
6. Uzol vznikol z uzla 4 odstránením modeláneho operátora □, vzniknutá podformula $\neg p$ je uvažovaná vo svete $\forall w_3\in\Gamma\left(w_1\right)$. Táto vetva sémantického tabla je ***uzavretá***,

pretože dvojica komplementárnych literálov p a $\neg p$ môže existovať v rovnakom svete $w_2 = w_3$. Podobným spôsobom môže byť komentovaná aj druhá vetva sémantického table obsahujúca uzly 7.-11., ktorá je taktiež uzavretá. Týmto sme dokázali, že formula φ je **tautológia**, jej pravdivostná hodnota nezávisí na zobrazení v, ktoré špecifikuje pravdivostnú hodnotu atomických premenných v jednotlivých svetoch z W a taktiež nie je závislá od tvaru podmnožín $\Gamma(w)$ (pozri definíciu 7.1).



Obrázok 7.5. Sémantické tablo formuly $\varphi = (\Diamond p \equiv \neg\Box(\neg p))$

Príklad 7.2. Metódou sémantického tabla dokážte, že formula $\varphi = (\Box p \Rightarrow \Diamond p)$ je tautológia, riešenie je uvedené na obr. 7.5.

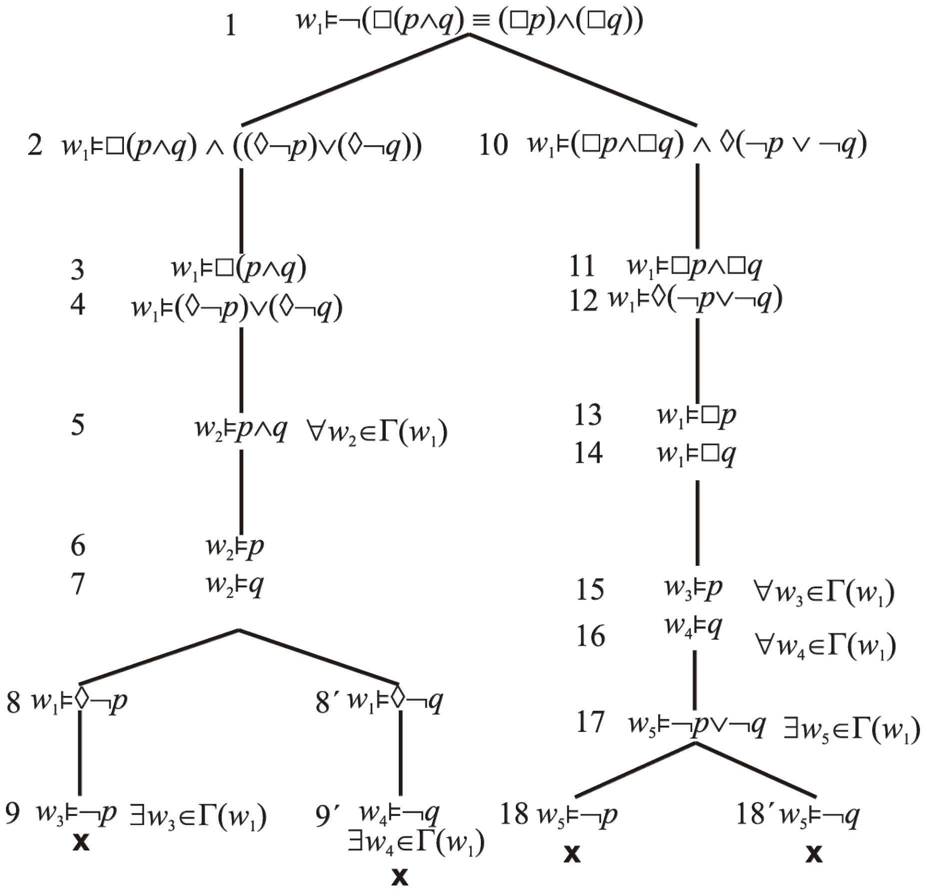


Obrázok 7.6. Sémantické tablo formuly $\varphi = (\Box p \Rightarrow \Diamond p)$.

Popis jednotlivých uzlov sémantického tabla z obr. 7.6:

1. Uzol sémantického tabla je inicializovaný formulou $\neg\varphi = \neg(\Box p \Rightarrow \Diamond p)$, ktorá je uvedená aj v upravenom ekvivalentnom tvare $\neg\varphi = \Box p \wedge \neg\Diamond p$, pričom formula $\neg\varphi$ je uvažovaná vo svete $w_1 \in W$.
2. Uzol obsahuje podformulu $\Box p$ vo svete $w_1 \in W$.

3. Uzol obsahuje podformulu $\neg\Diamond p \equiv \Box\neg p$ vo svete $w_1 \in W$.
4. Uzol obsahuje literál p, ktorý vznikol z uzlu 2 odstránením spojky $\Box$, podformula je uvažovaná vo svete $\forall w_2 \in \Gamma(w_1)$.
5. Uzol vznikol z uzly 3 jeho prepisom pomocou formuly $\neg\Diamond p \equiv \Box\neg p$, pričom podformulu $\Box\neg p$ je uvažovaná vo svete $w_1 \in W$.
6. Uzol znikol z 5 odstránením modálnej spojky $\Box$, podformula $\neg p$ je uvažovaná vo svete $\forall w_3 \in \Gamma(w_1)$, komplementárne literály z uzla 4 a 6 môžu existovať v rovnakom svete $w_2 = w_3$, t. j. vetva je uzavretá. a formula φ je tautológia.



Obrázok 7.7. Sémantické tablo formuly $\varphi = \left(\left(\Box\left(p \wedge q\right)\right) \equiv \left(\left(\Box p\right) \wedge \left(\Box q\right)\right)\right)$

Príklad 8.3. Metódou sémantického tabla zistíme, že formula $\varphi = \left(\left(\Box\left(p \wedge q\right)\right) \equiv \left(\left(\Box p\right) \wedge \left(\Box q\right)\right)\right)$ je tautológia, riešenie je uvedené na obr. 7.7. Nebudeme už popisovať každý uzol sémantického tabla, ktoré má 4 uzavreté vetve, ktoré idúc zľava doprava sú tieto:

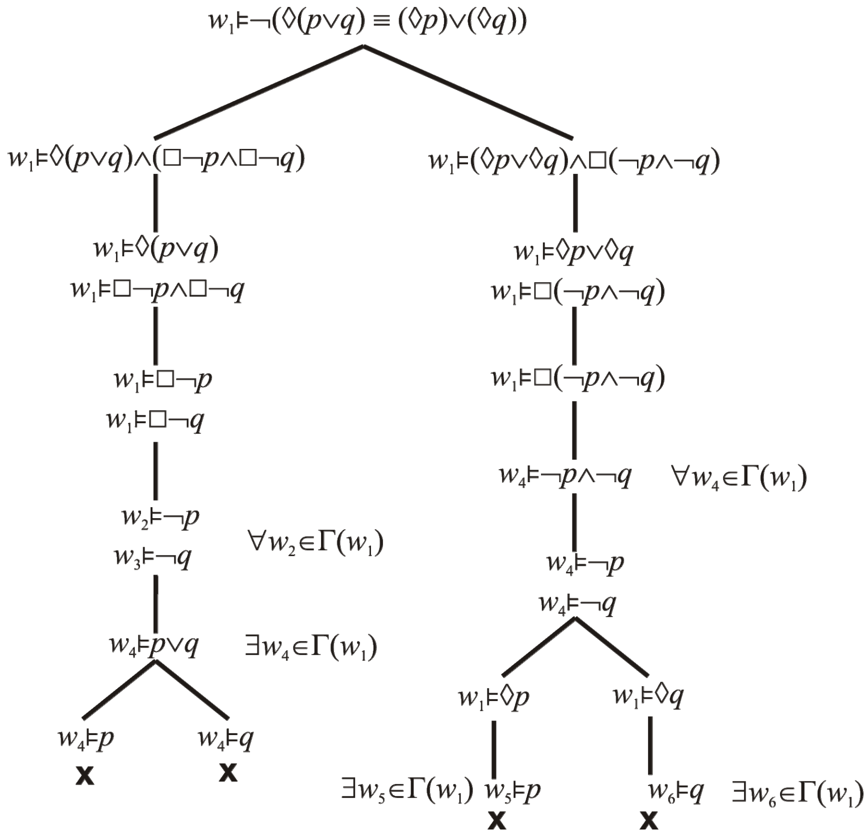
1. vetva, obsahuje uzly 1-9, dvojica komplemetárnych literálov je p (vo svete $\forall w_2 \in \Gamma(w_1)$) a $\neg p$ (vo svete $\exists w_3 \in \Gamma(w_1)$), potom pre $a = w_3 = w_2$ táto komplementárna dvojica súčasne existuje vo svete $a \in \Gamma(w_1)$.
2. vetva, obsahuje uzly 1-8, 10, dvojica komplemtárnych literálov pre túto vetvu obsahuje q (vo svete $\forall w_2 \in \Gamma(w_1)$) a $\neg q$ (vo svete $\exists w_4 \in \Gamma(w_1)$), potom pre

$a = w_4 = w_2$ daná komplementárna dvojica súčasne existuje v rovnakom svete $a \in \Gamma(w_1)$.

3. vetva. , obsahuje uzly 1, 11-19, dvojica komplementárnych literálov je p (vo svete $\forall w_3 \in \Gamma(w_1)$) a $\neg p$ (vo svete $\forall w_4 \in \Gamma(w_1)$), potom pre svet $a = w_3 = w_4 \in \Gamma(w_1)$ daná komplemtárna dvojica súčasne existuje v rovnakom svete $a \in \Gamma(w_1)$.
4. vetva. , obsahuje uzly 1-17, 20-21, dvojica komplementárnych literálov je q (vo svete $\exists w_5 \in \Gamma(w_1)$) a $\neg q$ (vo svete $\forall w_4 \in \Gamma(w_1)$), potom pre svet $a = w_4 = w_5 \in \Gamma(w_1)$ dana komplemtárna dvojica súčasne existuje v rovnakom svete $a \in \Gamma(w_1)$.

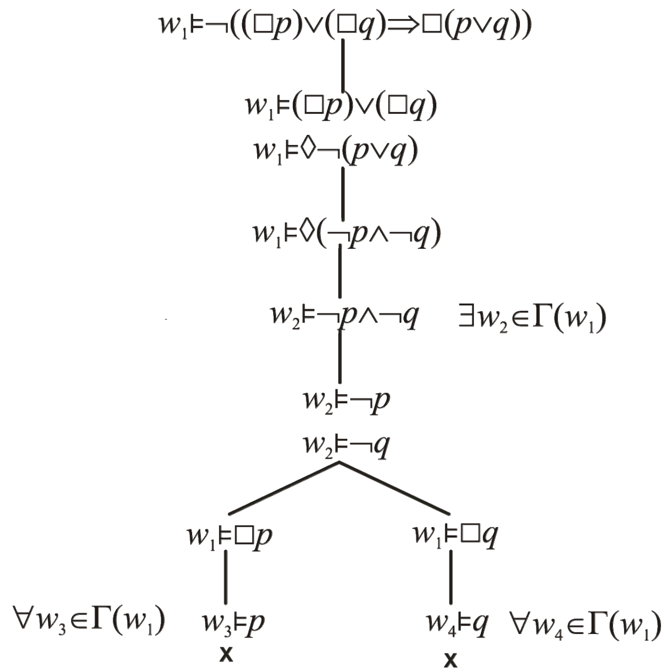
Týmto sme ukázali, že všetky vetve sú uzavreté, t. j. formula $\varphi = \big((\Box\,(p \wedge q)) \equiv ((\Box p) \wedge (\Box q))\big)$ je tautológia.

Príklad 7.4. Dôkaz tautologičnosti formuly $\varphi = \big(\Diamond(p \vee q) \equiv (\Diamond p) \vee (\Diamond q)\big)$ pomocou sémantického tabla je znázornený na obr. 7.8. Nebudeme špecifikovať jednotlivé elementárne kroky konštrukcie sémantického tabla, zdôrazníme len, že všetky vetvy tabla sú uzavreté, t. j. formula φ je tautológia (ktorá je pravdivá pre každé zobrazenie *v* a v každom svete *w*).



Obrázok 7.8. Sémantické tablo formuly $\varphi = \big(\Diamond(p \vee q) \equiv (\Diamond p) \vee (\Diamond q)\big)$

Príklad 7.5. Dôkaz tautologičnosti formuly $\varphi = (\Box p) \vee (\Box q) \Rightarrow \Box(p \vee q)$ pomocou sémantického tabla je znázornený na obr. 7.9, ktorý obsahuje dve uzavreté vetvy, t. j. formula je tautológia.



Obrázok 7.9. Sémantické tablo formuly $\varphi = (\Box p) \vee (\Box q) \Rightarrow \Box(p \vee q)$

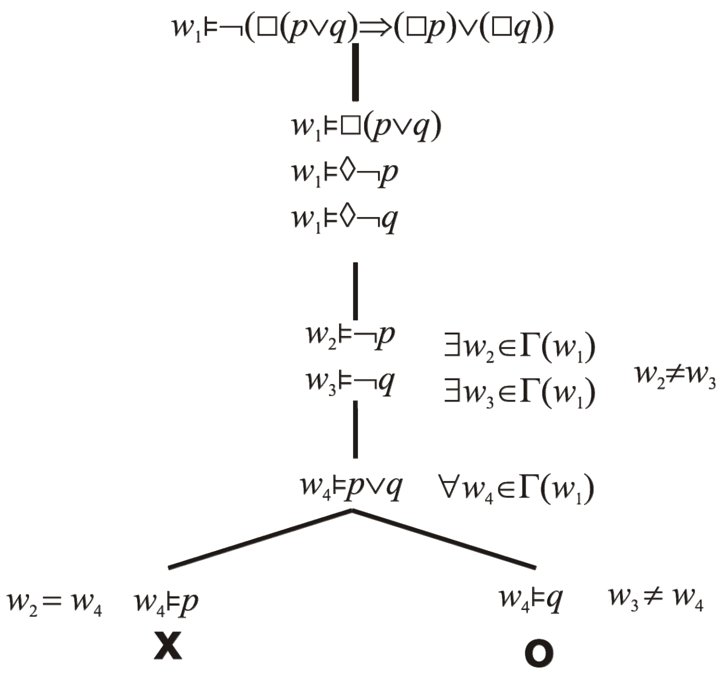
Príklad 7.6. Falzifikácia tautologičnosti formuly $\varphi = \Box(p \vee q) \Rightarrow (\Box p) \vee (\Box q)$ pomocou sémantického tabla je znázornená na obr. 7.10. Tablo obsahuje dve vetvy, jedna vetva (ľavá) je uzavretá, zatiaľ čo práva vetva je otvorená, pretože svety $\exists w_2 \in W$ a $\forall w_4 \in W$ nie je možné nastaviť tak, aby platilo $w_2 = w_4$, pretože z ľavej vetvy deklarovanej ako uzavretá, už platí restrikčná podmienka $w_1 = w_4$, čiže vo všeobecnosti platí $w_2 \neq w_4$. Tabuľka 7.4 obsahuje druhý alternatívny dôkaz, že formula $\Box(p \vee q) \Rightarrow (\Box p) \vee (\Box q)$ nie je tautológia (alebo presnejšie, falzifikáciu predpokladu tautologičnosti formuly). Pomocou sémantického tabla z obr. 7.9 sme si zvolili pravdivostné hodnoty premenných *p* a *q*, potom postupne zostrojujeme podformuly danej formuly, až na záver dostaneme, že pre dané pravdivostné hodnoty premenných *p* a *q* v rôznych svetoch z množiny $W = \{w_1, w_2, w_3\}$, kde podmnožiny dosažiteľných svetov sú špecifikované takto: $\Gamma(w_1) = \{w_1, w_2, w_3\}$, $\Gamma(w_2) = \{w_2\}$, $\Gamma(w_3) = \{w_3\}$, dostaneme, že formula je vždy nepravdivá vo svete w_1, čiže bola falzifikovaná jej tautologičnosť. Tabuľka 7.4 obsahuje alternatívny dôkaz, že formula $\Box(p \vee q) \Rightarrow (\Box p) \vee (\Box q)$ nie je tautológia. Pomocou sémantického tabla z obr. 7.6 sme si zvolili pravdivostné hodnoty premenných *p* a *q*, potom postupne zostrojujeme podformuly danej formuly, až na záver dostaneme, že pre dané pravdivostné hodnoty premenných *p* a *q* v rôznych svetoch z množiny $W = \{w', w_1, w_2\}$ dostaneme, že formula je vždy nepravdivá, čiže bola falzifikovaná jej tautologičnosť.

Falzifikácia tautologičnosti formuly $\varphi = \Box(p \vee q) \Rightarrow (\Box p) \vee (\Box q)$ pomocou sémantického tabla je znázornená na obr. 7.10. Tablo obsahuje dve vetvy, jedna vetva (ľavá) je uzavretá, zatiaľ čo pravá vetva je otvorená, pretože svet w_4 je fixovaný už z ľavej vetvy. Tabuľka 11 obsahuje druhý alternatívny dôkaz, že formula $\Box(p \vee q) \Rightarrow (\Box p) \vee (\Box q)$ nie je tautológia (alebo presnejšie, falzifikáciu predpokladu tautologičnosti formuly). Pomocou sémantického tabla z obr. 7.10 sme si zvolili pravdivostné hodnoty premenných *p* a *q*, potom postupne zostrojujeme podformuly danej formuly, až na záver dostaneme, že pre dané pravdivostné hodnoty premenných *p* a *q* v rôznych svetoch z množiny $W = \{w_1, w_2, w_3\}$, kde podmnožiny dosiahnuteľných svetov sú špecifikované takto:

$\Gamma(w_1)=\{w_1,w_2,w_3\}$, $\Gamma(w_2)=\{w_2\}$, $\Gamma(w_3)=\{w_3\}$, je formula vždy nepravdivá vo svete w_1, čiže bola falzifikovaná jej tautologičnosť.

Tabuľka 7.4. Sémantická interpretácia podformúl formuly $\Box(p \vee q) \Rightarrow (\Box p) \vee (\Box q)$

Formula	w_1	w_2	w_3
p	1	0	1
q	1	1	0
$\Box p$	0	0	1
$\Box q$	0	1	0
$\Box p \vee \Box q$	0	1	1
$p \vee q$	1	1	1
$\Box(p \vee q)$	1	1	1
$\Box(p \vee q) \Rightarrow (\Box p \vee \Box q)$	0	1	1



Obrázok 7.10. Sémantické tablo pre falzifikáciu tautologičnosti formuly $\varphi = \Box(p \vee q) \Rightarrow (\Box p) \vee (\Box q)$.

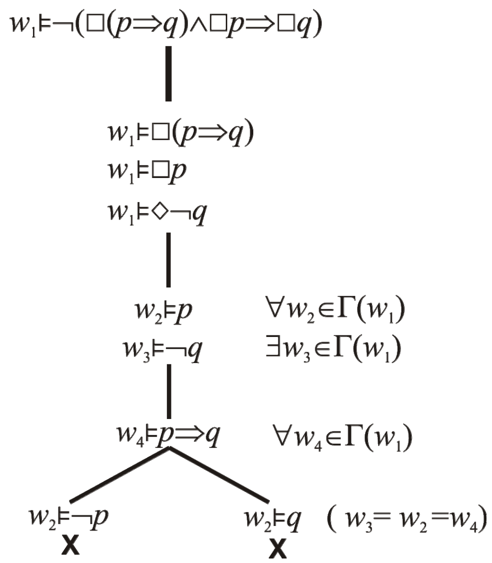
Tabuľka 7.5. Sémantická interpretácia podformúl formuly $\Box(p \vee q) \Rightarrow (\Box p) \vee (\Box q)$

Formula	w_1	w_2	w_3
p	1	0	1
q	1	1	0
$\Box p$	0	0	1
$\Box q$	0	1	0
$\Box p \vee \Box q$	0	1	1
$P \vee q$	1	1	1
$\Box(p \vee q)$	1	1	1
$\Box(p \vee q) \Rightarrow (\Box p \vee \Box q)$	0	1	1

Príklad 7.7. Pravidlo modus tollens v modálnej logike má tento alternatívny tvar

$$\begin{array}{|l} \Box(p \Rightarrow q) \\ \Box p \\ \hline \Box q \end{array}$$

Pomocou sémantického tabla dokážeme, že formula $\Box(p \Rightarrow q) \wedge \Box p \Rightarrow \Box q$ je tautológia, pozri obr. 7.11.



Obrázok 7.11. Sémantické tablo pre dokaz, že formula $\Box(p \Rightarrow q) \wedge \Box p \Rightarrow \Diamond q$.

7.4 Prirodzená dedukcia jednoduchej *K* modálnej logiky

Axiomatický systém K-logiky môžweme jednoducho zostrojiť rozšírením štandardného Hilbertovho systému pre výrokovú logiku o *K*-formulu $\Box(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Box\psi)$ a pravidlo nutnosti (necesitácie) $\varphi/\Box\varphi$. Pre operatívnosť nášho prístupe k tejto najjednoduchšej modálnej *K*-logiky, rozšírime prístup prirodzenej dedukcie z kapitoly 4 (pozri tab 4.1) o ďalšie dve pravidlá:

Tabuľka 7.6. Diagramatická interpretácia eliminačných a introdukčných pravidiel (aj s ich označením) pre *K* modálnu logiku.

Spojka	eliminácia	introdukcia
$\wedge$	$\varphi\wedge\psi \to \varphi, \psi$	$\varphi, \psi \to \varphi\wedge\psi$
$\vee$	$\varphi\vee\psi, \neg\varphi \to \psi$	$\varphi, \psi \to \varphi\vee\psi$

$\Rightarrow$	$\begin{array}{c}\varphi\Rightarrow\psi \qquad \varphi\\ \downarrow\\ \psi\end{array}$	$\begin{array}{c}\psi \qquad \varphi\\ \downarrow\\ \psi\Rightarrow\varphi\end{array}$
$\neg$	$\begin{array}{c}\neg\neg\varphi\\ \downarrow\\ \varphi\end{array}$	$\begin{array}{c}\varphi\Rightarrow\psi \quad \varphi\Rightarrow\neg\psi\\ \downarrow\\ \neg\varphi\end{array}$ $\begin{array}{c}\varphi\Rightarrow\psi \quad \neg\psi\\ \downarrow\\ \neg\varphi\end{array}$
Pravidlá K-formuly	$\begin{array}{c}\Box\varphi \qquad \Box(\varphi\Rightarrow\psi)\\ \downarrow\\ \Box\psi\end{array}$ $\begin{array}{c}\Box\neg\psi \qquad \Box(\varphi\Rightarrow\psi)\\ \downarrow\\ \Box\neg\varphi\end{array}$ $\begin{array}{c}\Diamond\varphi \qquad \Box(\varphi\Rightarrow\psi)\\ \downarrow\\ \Diamond\psi\end{array}$ $\begin{array}{c}\Diamond\neg\psi \qquad \Box(\varphi\Rightarrow\psi)\\ \downarrow\\ \Diamond\neg\varphi\end{array}$	
Pravidlo nutnosti	$\begin{array}{c}\varphi\\ \downarrow\\ \Box\varphi\end{array}$	

1. *Pravidlo K-formuly*

$$\begin{array}{|l}\Box\varphi\\ \Box(\varphi\Rightarrow\psi)\\ \hline \Box\psi\end{array} \tag{7.17}$$

Ak sme schopní odvodiť formuly $\Box\varphi$ a $\Box(\varphi\Rightarrow\psi)$, potom je odvoditeľná aj formula $\Box\psi$. Poznamenajme, že toto pravidlo nie je nič iné, ako ekvivalentný prepis *K*-formuly $\Box(\varphi\Rightarrow\psi)\Rightarrow(\Box\varphi\Rightarrow\Box\psi)$ (pozri príklad).

2. *Pravidlo nutnosti,* ak platí φ, potom platí aj formula $\Box\varphi$

$$\begin{array}{|l}\varphi\\ \hline \Box\varphi\end{array} \tag{7.18}$$

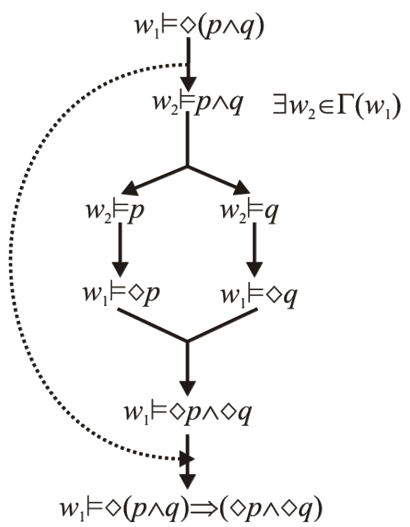
Diagramatická interpretácia týchto pravidiel a pôvodných pravidiel prirodzenej dedukcie je uvedená v tab. 7.6.

Pomocou prirodzenej dedukciu môžeme dokázať každú tautológiu *K* modálnej logiky

Príklad 7.8. Pomocou prirodzenej dedukcie dokážte tautologickosť formuly $\Diamond(p\wedge q)\Rightarrow(\Diamond p\wedge\Diamond q)$.

1.	$w_1 \vDash \Diamond(p \wedge q)$	*aktivcia pomocného predpokladu*
2.	$w_2 \vDash p \wedge q$	$E\Diamond, \exists w_2 \in \Gamma(w_1)$
3.	$w_2 \vDash p$	$E \wedge$
4.	$w_2 \vDash q$	$E \wedge$
5.	$w_1 \vDash \Diamond p$	$I\Diamond$
6.	$w_1 \vDash \Diamond q$	$I\Diamond$
7.	$w_1 \vDash \Diamond p \wedge \Diamond q$	$I \wedge$
8.	$w_1 \vDash \Diamond(p \wedge q) \Rightarrow w_1 \vDash \Diamond p \wedge \Diamond q$	*deaktivácia pomocného predpokladu*

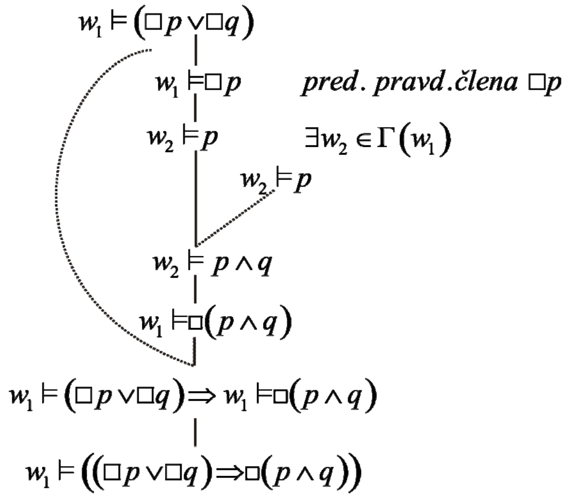
Diagramatická verzia tohto dôkazu prirodzenou dedukciou je znázornená na obr. 7.12.



Obrázok 7.12. Diagram prirodzenej dedukcie dôkazu formuly $\Diamond(p \wedge q) \Rightarrow (\Diamond p \wedge \Diamond q)$. Prerušovaná čiara znázorňuje deaktiváciu pomocného predpokladu na záver dôkazu.

Príklad 7.9. Dokážte tautologičnosť formuly $\varphi = (\Box p \vee \Box q) \Rightarrow \Box(p \vee q)$ pomocou prirodzenej dedukcie.

1.	$w_1 \vDash (\Box p \vee \Box q)$	*aktivácia pomocného predpokladu*
2.	$w_1 \vDash \Box p$	E$\vee$ (prvý alebo druhý člen musí byť pravdivý)
3.	$w_2 \vDash p$	$\exists w_2 \in \Gamma(w_1)$, E$\Box$
4.	$w_2 \vDash p \vee q$	I$\vee$
5.	$w_1 \vDash \Box(p \vee q)$	I$\Box$
6.	$w_1 \vDash (\Box p \vee \Box q) \Rightarrow w_1 \vDash \Box(p \vee q)$	
7.	$w_1 \vDash (\Box p \vee \Box q) \Rightarrow \Box(p \vee q)$	



Obrázok 7.13. Diagramatické znázornenie prirodzenej dedukcie z príkladu 7.9.

Cvičenia

Cvičenie 7.1. Pomocou definičných vzťahov (7.8a-b) dokážte tautologičnosť ekvivalencií (7.6a-b).

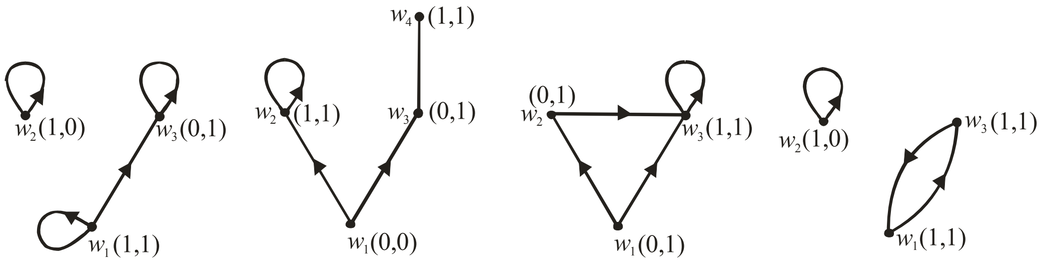
Cvičenie 7.2. Ukážte, že pre model *M* (8.7), kde pre každé $w \in W$, množiny dostupných svetov sú prázdne, $\Gamma(w) = \emptyset$, každá formula φ je nutná a nie je možná, t. j. pre ľubovoľnú formulu φ platí $\Box\varphi \equiv 1$ a $\Diamond\varphi \equiv 0$.

Návod: Modálne operátory nech sú definované pomocou relácií (7.6), pričom symboly konjunkcie a disjunkcie sú pre *n* komponent zovšeobecnené takto

$$\bigwedge_{i=1}^{n} p_i \equiv 1 \wedge p_1 \wedge \ldots \wedge p_n \equiv \begin{cases} p_1 \wedge \ldots \wedge p_n & (pre\ n \geq 1) \\ 1 & (pre\ n = 0) \end{cases}$$

$$\bigvee_{i=1}^{n} p_i \equiv 0 \vee p_1 \vee \ldots \vee p_n \equiv \begin{cases} p_1 \vee \ldots \vee p_n & (pre\ n \geq 1) \\ 0 & (pre\ n = 0) \end{cases}$$

Cvičenie 7.3. Pre rôzne relácie špecifikované orientovaným grafom zostrojte pravdivostné hodnoty formúl: $\Box p$, $\Box q$, $\Diamond p$, $\Diamond q$, $\Box(p \wedge q)$,$\Box(p \vee q)$,$\Box(p \Rightarrow q)$, $\Diamond(p \wedge q)$,$\Diamond(p \vee q)$,$\Diamond(p \Rightarrow q)$.



(a) (b) (c) (d)

Cvičenie 7.4. Pomocou sémantického tabla falzifikujte tautologičnosť formúl, pomocou otvorených ciest navrhnite takú pravdivostnú interpretáciu premenných p a q, aby výsledná pravdivostná hodnota vo svete w_1 bola nepravda.

(a) $w \nvDash (\Diamond p \wedge \Diamond q) \Rightarrow \Diamond (p \wedge q)$,

(b) $w \nvDash \Diamond p \Rightarrow \Box \Diamond q$,

(c) $w \nvDash (\Diamond \Box p \wedge \Diamond \Box q) \Rightarrow \Diamond \Box (p \wedge q)$.

Cvičenie 7.5. Pomocou všeobecnej diskusie dokážte, že formula je tautológia (t. j. je pravdivá v každom svete, $(\forall w \in W)(w \vDash \varphi)$).

(a) $\varphi = (\Box (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Box p \Rightarrow \Box q))$

(b) $\varphi = (\Box (p \wedge q) \Rightarrow (\Box p \wedge \Box q))$

(c) $\varphi = (\Diamond (p \vee q) \Rightarrow (\Diamond p \vee \Diamond q))$

Návod: Nech formula $\varphi = (\Box (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Box p \Rightarrow \Box q))$je pravdivá v aktuálnom svete $w \in W$, potom (1) podformula $\varphi_1 = \Box (p \Rightarrow q)$ je nepravdivá alebo (2) podformula $\varphi_2 = \Box p \Rightarrow \Box q$ je pravdivá. Uvažujme možnosť (1), to potom znamená, že v dostupnom okolí $\Gamma(w)$ aktuálneho sveta w existuje aspoň jeden dostupný svet w' v ktorom je podformula $\varphi_{11} = p \Rightarrow q$ nepravdivá, čiže v tomto dostupnom svete platí, že premenná p je pravdivá a premenná q je nepravdivá. V možnosti (2) je podformula $\varphi_2 = \Box p \Rightarrow \Box q$ je pravdivá v aktuálnom svete w, potom v tom istom svete podformula $\varphi_{21} = \Box p$ je nepravdivá alebo podformula $\varphi_{22} = \Box q$ je pravdivá. Potom v okolí $\Gamma(w)$ existuje aspoň jeden svet w'' v ktorom je premenná p nepravdivá a v každom svete w''' z tohto okolia je premenná q je pravdivá (pozri tabuľku, kde druhý a tretí riadok špecifikujú výsledky diskusie o pravdivostných hodnotách premenných).

	w	w'	w''	w'''
p	#	1	0	#
q	#	0	#	1
$P \Rightarrow q$	#	0	1	1
$\Box(p \Rightarrow q)$	0	#	#	#
$\Box p$	0	#	#	#
$\Box q$	0	#	#	#
$\Box p \Rightarrow \Box q$	1	#	#	#
φ	1	#	#	#

Znak # reprezentuje ľubovoľnú pravdivostnú hodnotu. Týmto sme dokázali, že v ľubovoľnom svete w je formula $\varphi = (\Box (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Box p \Rightarrow \Box q))$ pravdivá, čiže je tautológia.

Cvičenie 7.6. Dokážte pomocou sémantických tabiel, že formuly sú tautológie

(a) $(\Box p \wedge \Box q) \equiv \Box(p \wedge q)$,

(b) $\Box p \vee \Box q \Rightarrow \Box(p \vee q)$,

(c) $\Diamond p \equiv \neg\Box\neg p$,

(d) $\Diamond(p \wedge q) \Rightarrow \Diamond p \wedge \Diamond q$,

(e) $\Diamond(p \vee q) \equiv (\Diamond p \vee \Diamond q)$,

(f) $\Box(p \wedge q) \Rightarrow \Diamond p \wedge \Diamond q$,

(g) $\Box p \wedge \Diamond q \Rightarrow \Diamond(p \wedge q)$,

(h) $\Box p \Rightarrow \Box(\neg p \Rightarrow q)$,

(i) $\Box p \Rightarrow \Box(q \Rightarrow p)$,

(j) $\neg\Diamond q \Rightarrow \Box(q \Rightarrow p)$.

Cvičenie 7.7. Dokážte pomocou sémantických tabiel, že formuly nie sú tautológie, pomocou otvorenej vetvy tabla zostrojte protipríklad, ktorý falzifikuje tautologickosť formuly.

(a) $\Box(p \vee q) \Rightarrow \Box p \vee \Box q$,

(b) $(\Box p \wedge \Box\neg q) \Rightarrow \Box(p \Rightarrow q)$,

(c) $(\Diamond p \wedge \Diamond q) \Rightarrow \Diamond(p \wedge q)$,

(d) $\Box p \Rightarrow p$,

(e) $\Box p \Rightarrow \Diamond p$,

(f) $p \Rightarrow \Box p$.

Cvičenie 7.8. Pomocou prirodzenej dedukcie dokážte formuly

(a) $(\Box p \wedge \Box q) \equiv \Box(p \wedge q)$

(b) $\Diamond(p \vee q) \equiv (\Diamond p \vee \Diamond q)$

(c) $\Box p \wedge \Diamond q \Rightarrow \Diamond(p \wedge q)$

Literatúra

[1] Blackburn, P., van Benthem, J., Wolter, F. (eds.): *Handbook of Modal Logic*. Elsevier, Amsterdam, 2007.

[2] Doležel, L.:. *Heterocosmica: Fiction and Possible Worlds*. Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1998 (existuje český preklad: Doležel, L.: *Heterocosmica. Fikce a možné světy*. Karolinum, Praha, 2003).

[3] Kripke, S.:. Semantical Analysis of Modal Logic, abstract. *Journal of Symbolic Logic*, **24** (1959), 323-324..

[4] Kripke, S.: The Undecidability of Monadic Modal Quantification Theory, *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik* 8 (1962), 113–116

[5] Kripke, S.: Semantical Considerations on Modal Logic", *Acta Philosophica Fennica* 16 (1963), 83–94

[6] Kvasnička, V., Pospíchal, J.: *Matematická logika*. Vydavateľstvo STU, Bratislava 2006.

[7] Peregrin, J.: *Logika a logiky*. Academia, Praha, 2004.

[8] Priest, G.: *An Introduction to Non-Classical Logic*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2004.

[9] Sousedík, P.: *Logika pro studenty humanitních oborů*, Vyšehrad, Praha, 2001

[10] Zouhar, M.: *Základy logiky pre spoločenskovedné a humanitné odbory*. Veda, Bratislava, 2008.