Análisis de Señales – Curso 2011

Teorema del muestreo

Conversión A/D

Muestreo

Vivimos en un mundo de tiempo continuo: la mayoría de las señales que nos encontramos son señales de tiempo continuo; por ejemplo, $x(t)$. ¿Cómo las convertimos en señales de tiempo discreto $x[n]$?

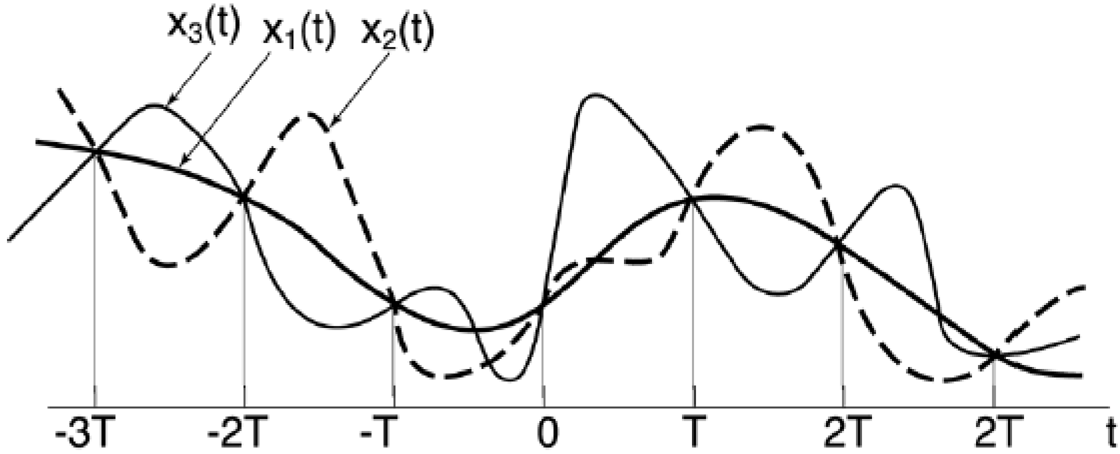
— Muestreo, tomando instantáneas de $x(t)$ cada T segundos.

T – periodo de muestreo

$x[n] \equiv x(nT)$, $n = \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots$ — muestras espaciadas a intervalos regulares

¿Por qué, o cuándo, se considera adecuado un conjunto de muestras?

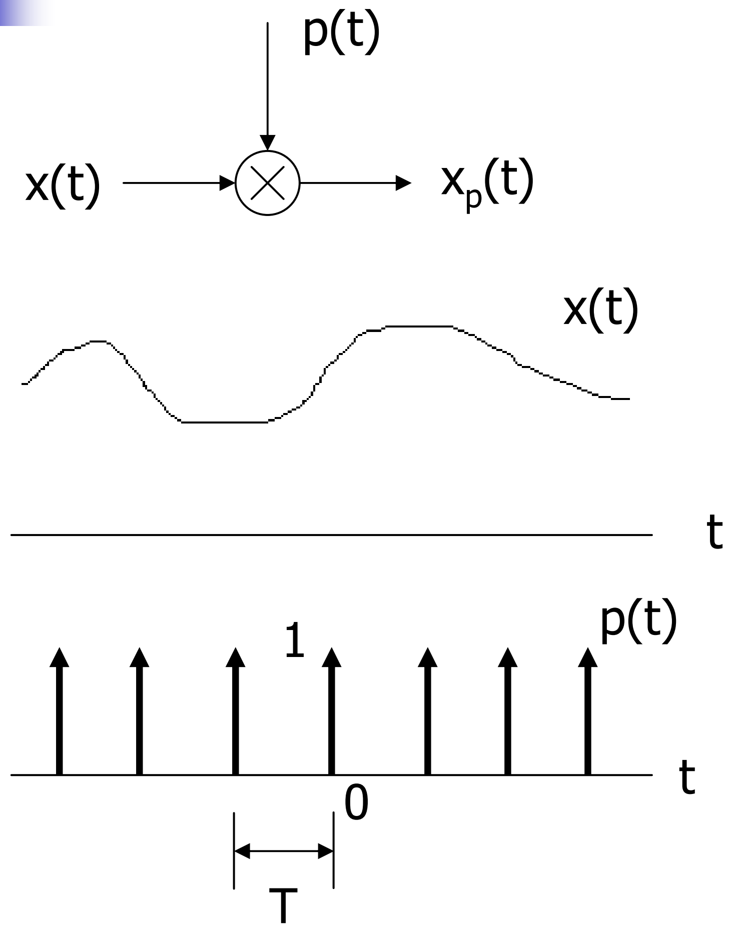
- Observación: *Muchas* señales tienen las mismas muestras

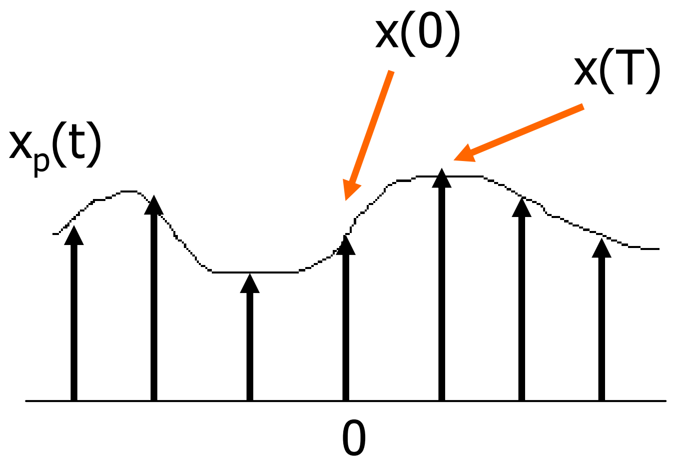


- Las técnicas de muestreo dejan de lado mucha información
  – se pierden todos los valores de $x(t)$ entre los puntos de muestreo.

- **Cuestiones clave para el muestreo**:
  ¿Bajo qué condiciones podemos reconstruir la señal original $x(t)$ en tiempo continuo a partir de sus muestras?

Muestreo con tren de impulsos





$$x_p(t) = x(t)\,p(t)$$

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

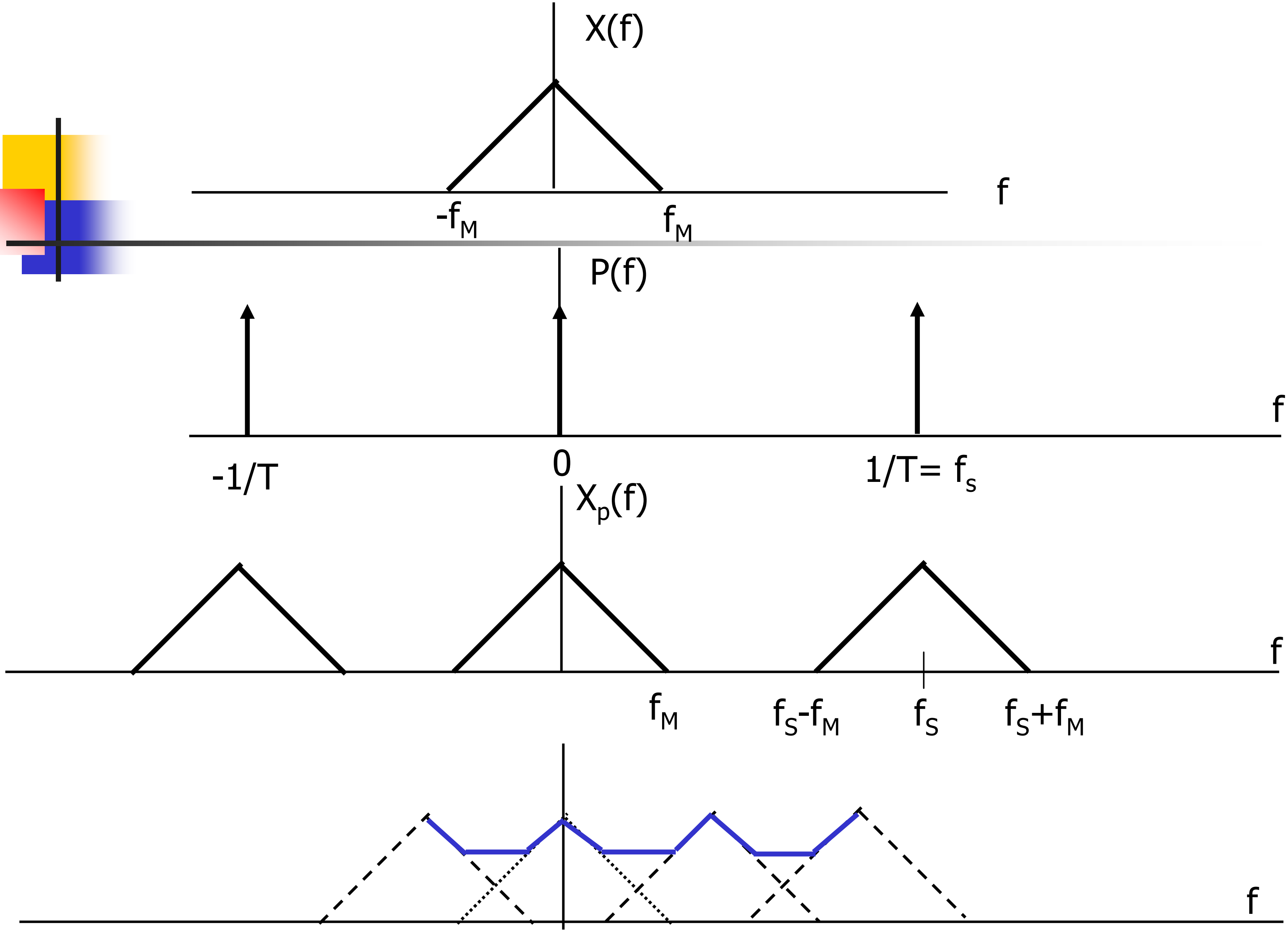
$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\,\delta(t - nT)$$

$$X_p(f) = [X(f) * P(f)]$$

$$P(f)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(w-k\,f_s)$$

$$X_p(f)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(w-k\,f_s)$$

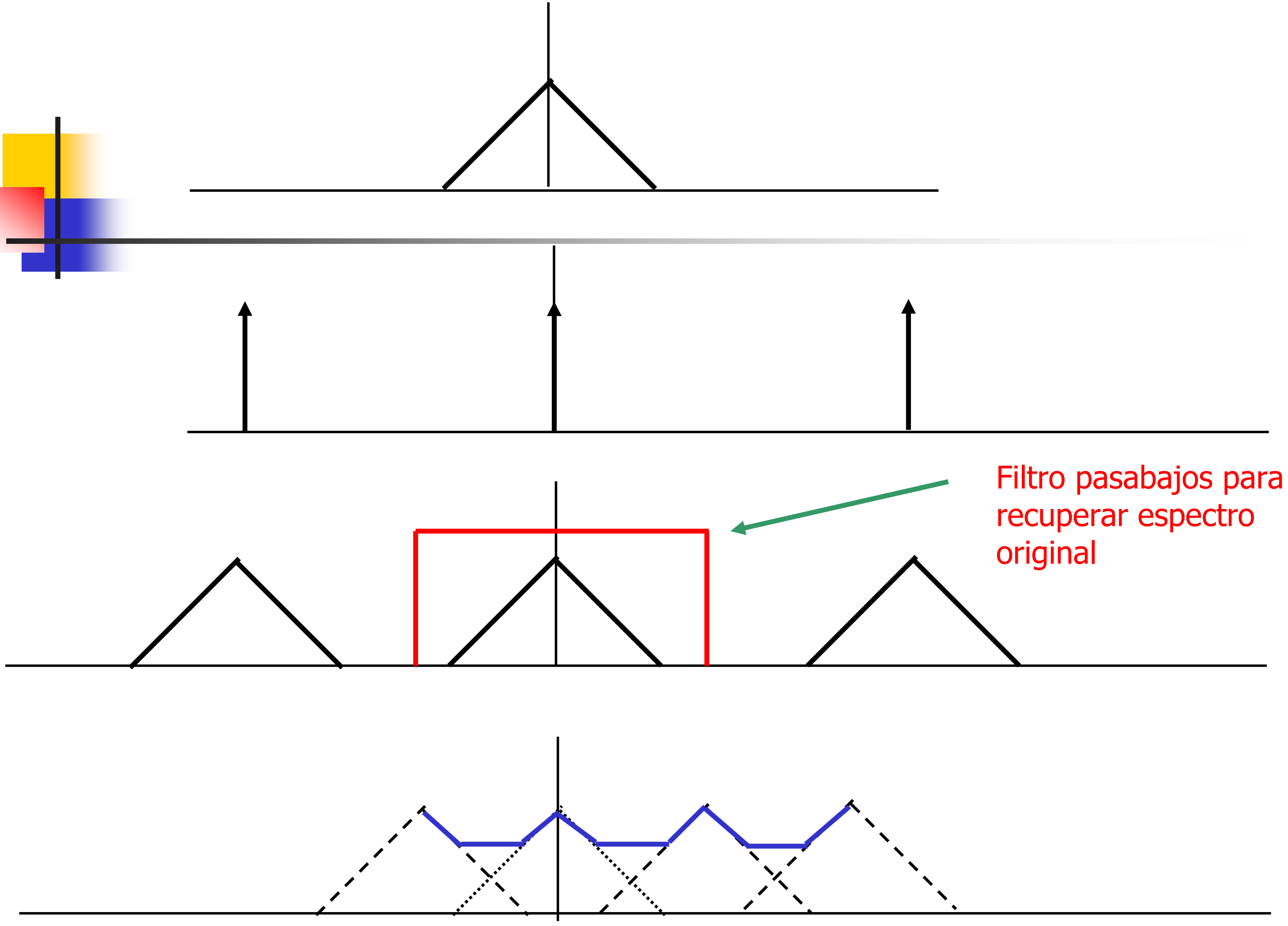
El espectro en f de la señal muestreada $x_p(t)$, es el espectro de la señal original X(w) desplazado en múltiplos de la f de muestreo $w_s=1/T$


X(f)
f
-f_M
f_M
P(f)
f
-1/T
0
1/T= f_s
$X_p(f)$
f
f_M
f_S-f_M
f_S
f_S+f_M
f

Vemos que el efecto del muestreo ideal sobre el espectro en f original, es repetirlo alrededor de la frecuencia de muestreo f_{S}.

Si disminuimos el valor de f_S los espectros se empiezan a acercar y no hay problema hasta $f_S - f_M = f_M$

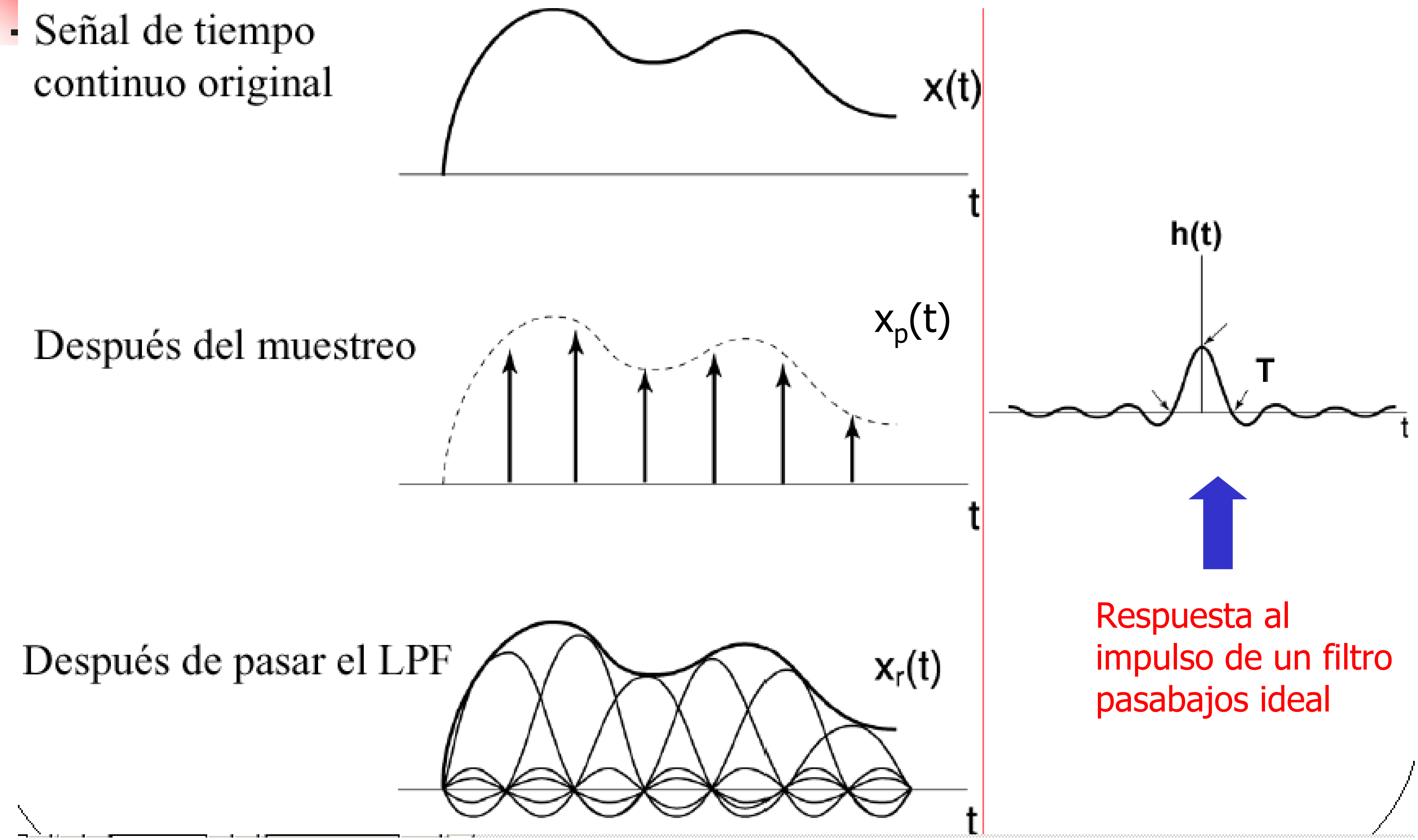
Como vemos en el espectro $X_p(f)$ de la figura anterior, podremos recuperar X(f) original siempre y cuando $f_S - f_M > f_M$ y los espectros repetidos no se solapen. En efecto si disminuimos f_S hasta llegar a un punto en que se mezclen, espectro en azul, no será posible recuperar el espectro original.


Filtro pasabajos para
recuperar espectro
original

Teorema del muestreo

- Si $x(t)$ es de banda limitada con $X(f)=0$ para $|f|>f_M$ entonces $x(t)$ está unívocamente determinada por sus muestras $x(nT)$, $n=0,\pm1,\pm2.....$ Si $f_s>2f_{M.}$
- Para recuperar la señal original, se procesan las muestras con un filtro pasabajos ideal, con f de corte $>f_M$ y menor que $f_s-f_{M.}$
- f_s se la conoce como la frecuencia de Nyquist.

Ilustración gráfica de la interpointerpolación en el dominio del tiempo



Respuesta al impulso de un filtro pasabajos ideal

Interpolación

- Vimos de la diapositiva anterior que la función de interpolación es sent/t, para el caso del filtro pasabajos ideal, sumando precursores y postcursores. Este filtro es no-causal.
- En un filtro real la transferencia en f no será rectangular (rojo), pues su respuesta al impulso será 0 para t<0.

Muestreo práctico

- La onda muestreada está formada por pulsos que tienen amplitud y duración finitas.
- Los mensajes están limitados en tiempo y por ello no pueden ser de banda limitada (aliasing).
- Los filtros de reconstrucción no son ideales.

Señal de muestreo no impulsiva

Forma del pulso de muestreo

$$x_p(t) = \sum_k x(kT)\, p(t-kT) = [q(t)] * [\sum_k x(kT)\,\delta(t-kT)]$$

entonces

$$X_p(f) = Q(f)[\sum_n X(f-k\,f_s) = Q(f)\,X_\delta(f)$$

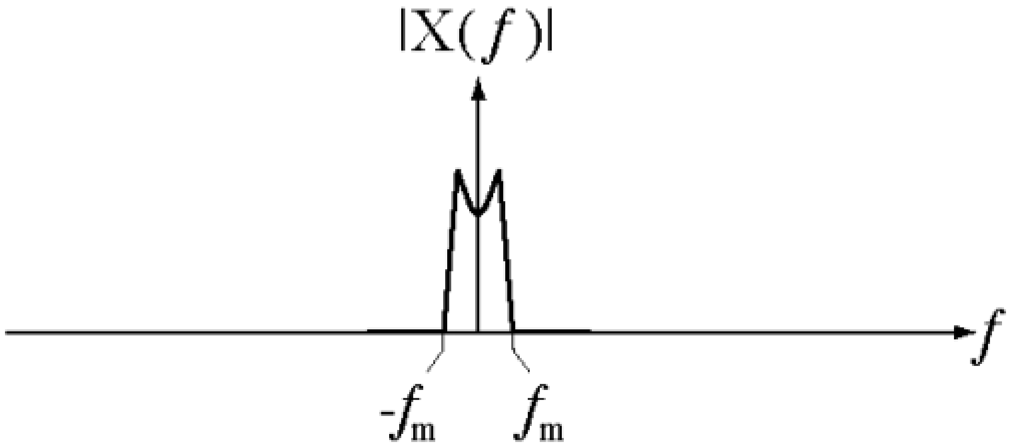
Efecto sobre el espectro por muestrear con una señal no impulsiva

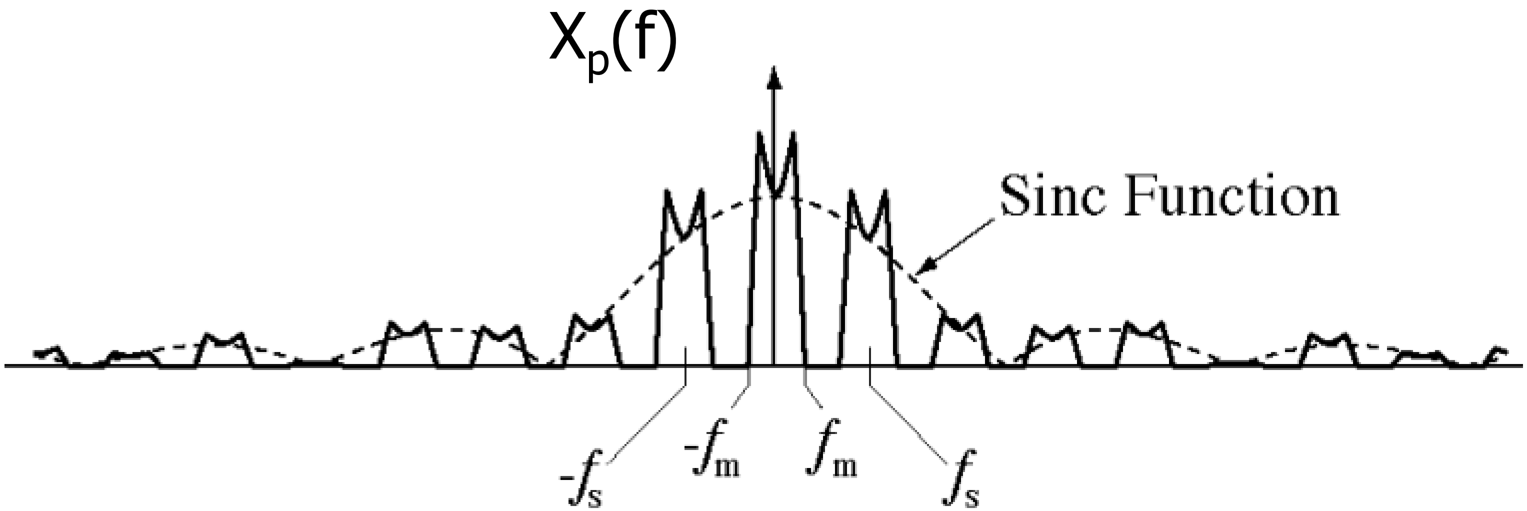
Espectro con muestreo ideal

Señal de muestreo no impulsiva

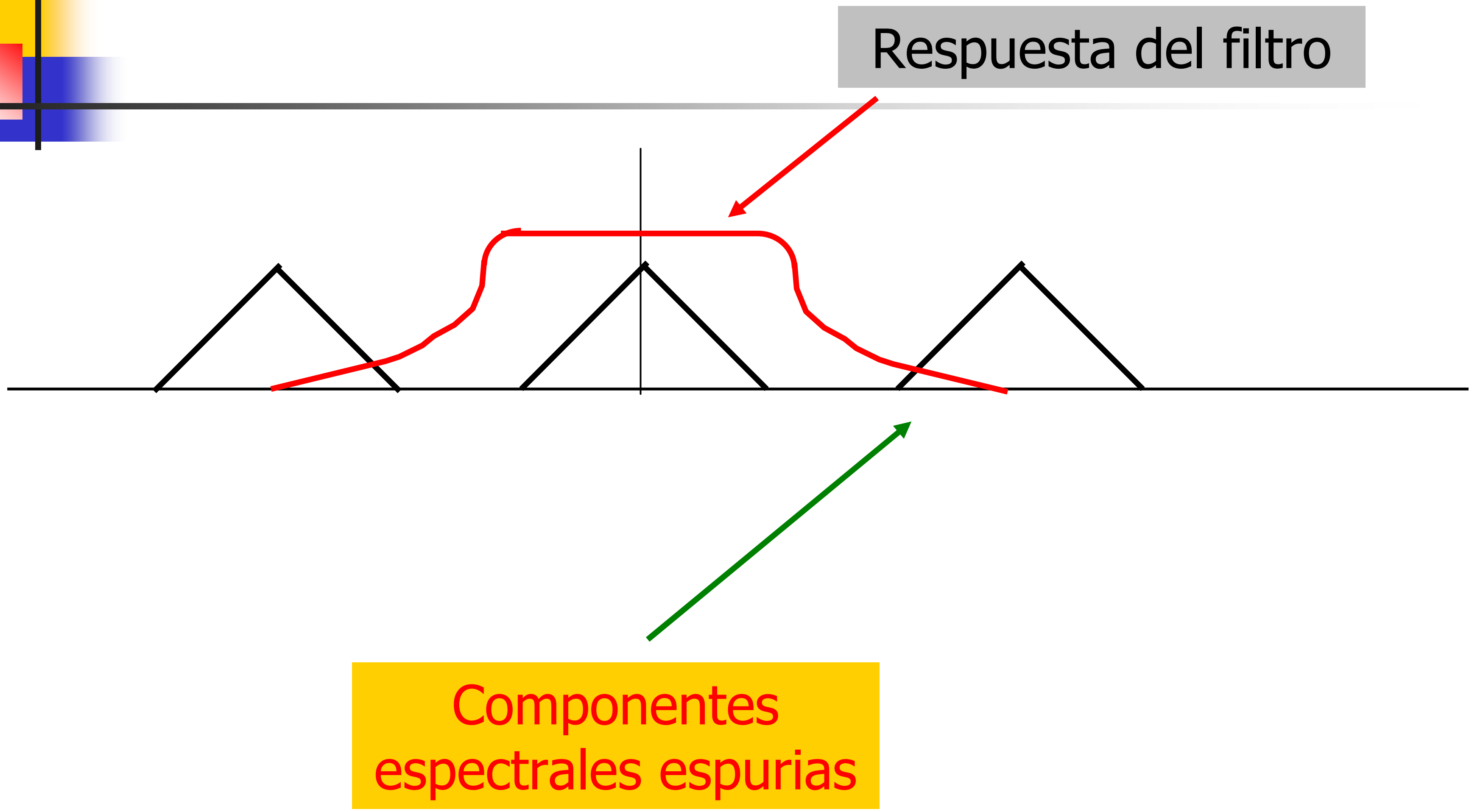
Se puede interpretar la expresión anterior como que Q(f) es un filtro operando sobre el espectro del muestreo ideal $X_\delta(f)$ y atenuando a componentes de f. Por lo general la señal reconstruída estará distorsionada.

A esta pérdida de componentes de alta f, se la denomina a veces como efecto de apertura (duración del pulso)


|X(f)|
f
-fm
fm


Xp(f)
Sinc Function
-fs
-fm
fm
fs

Filtros de reconstrucción no ideales



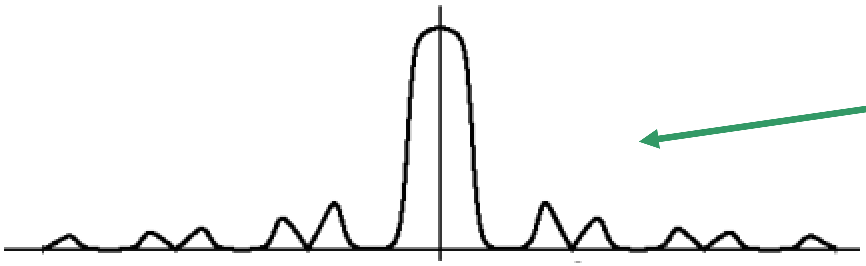
Filtros de reconstrucción no ideales

El problema se puede tratar en el dominio de la frecuencia. Vemos que las componentes no deseadas están muy atenuadas.

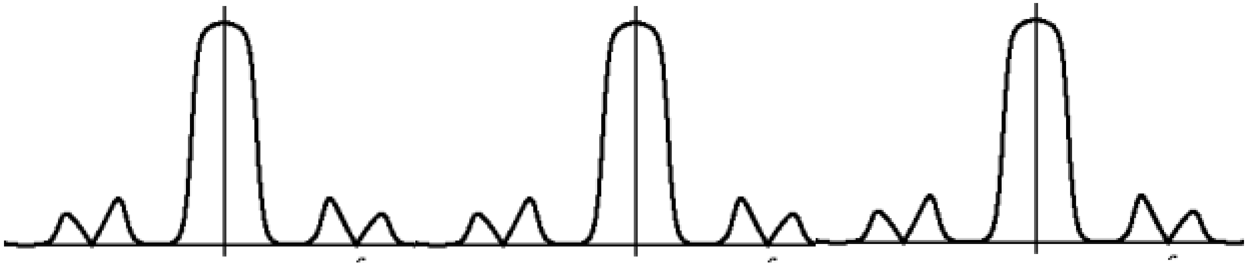
El mejor procedimiento es un cuidadoso diseño del filtro.

Para una forma de respuesta de filtro dada, se puede mejorar esta interferencia aumentando la f de muestreo.

Señales de banda limitada- Interferencia de colas espectrales (aliasing)



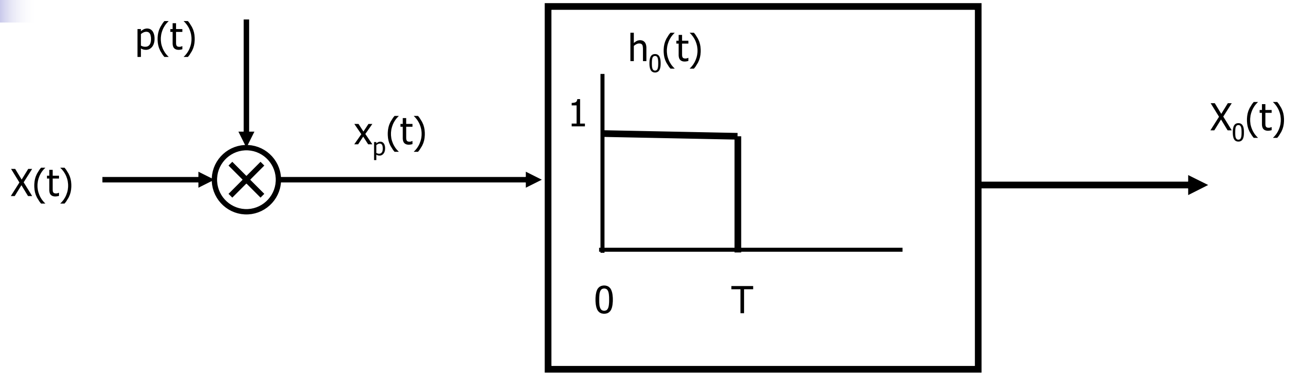
Espectro de la señal original

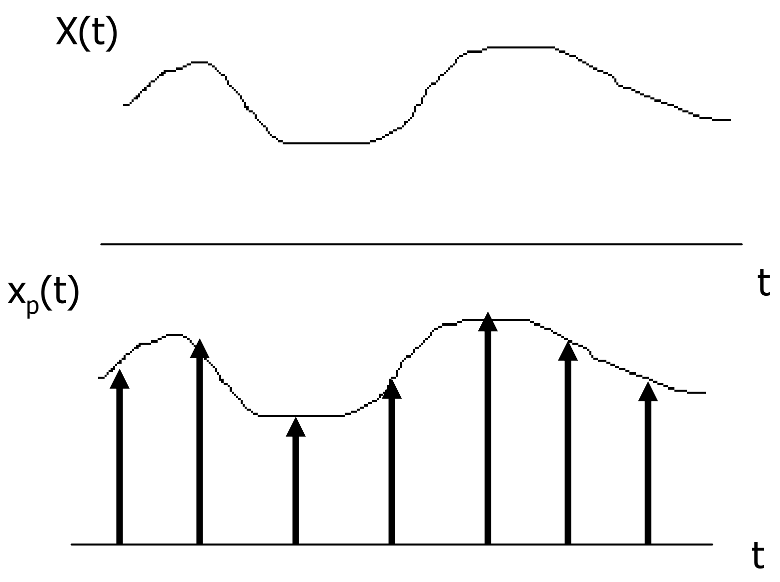


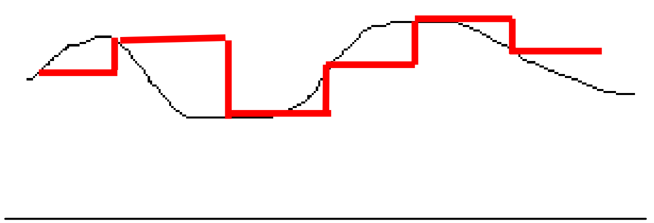
Espectro de mensaje muestreado con interferencia

Hay que filtrar la señal antes de muestrear

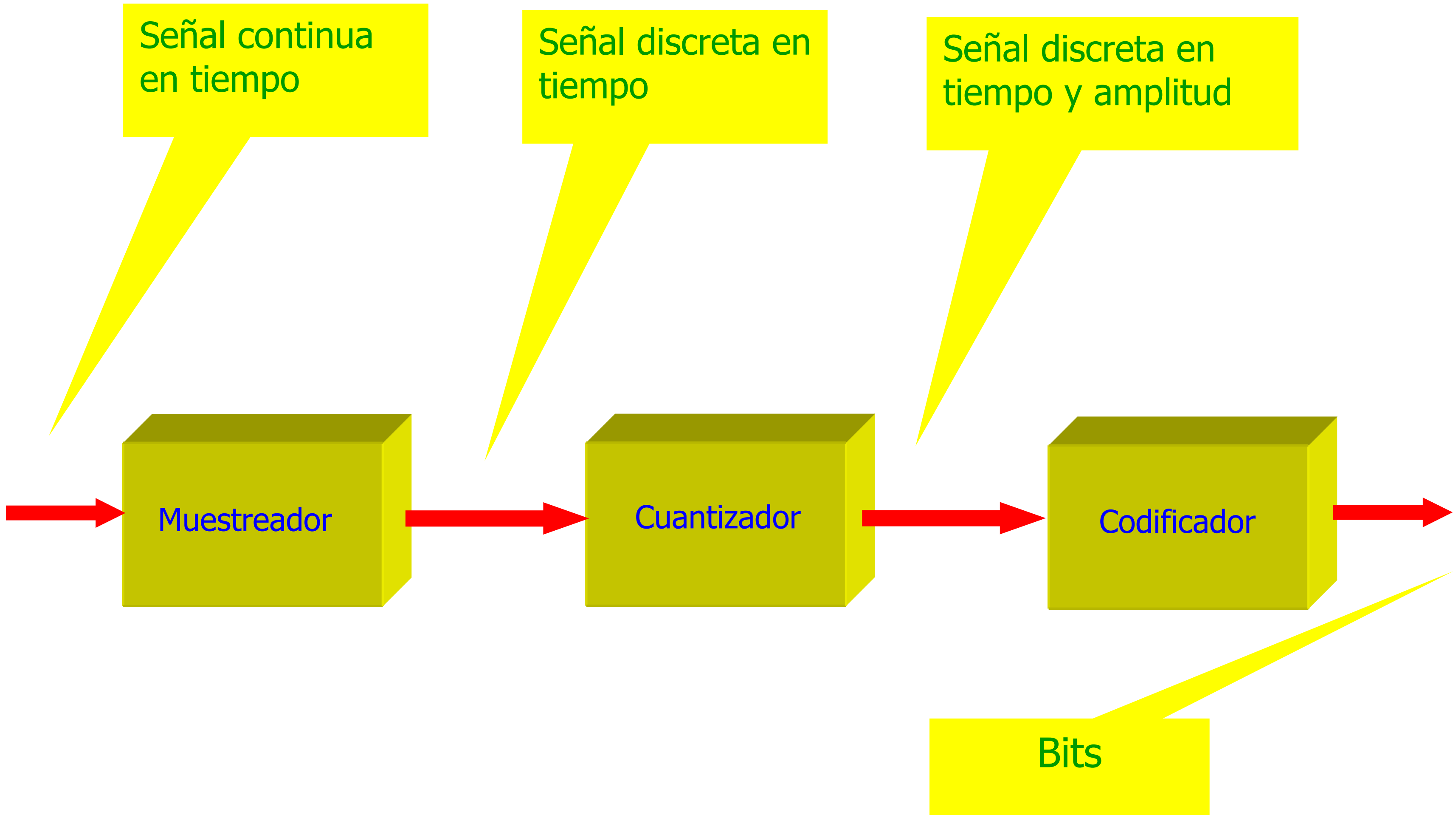
Muestreo con un Retenedor de Orden Cero







Conversión A/D - Digitalización



CAD : cuatro procesos

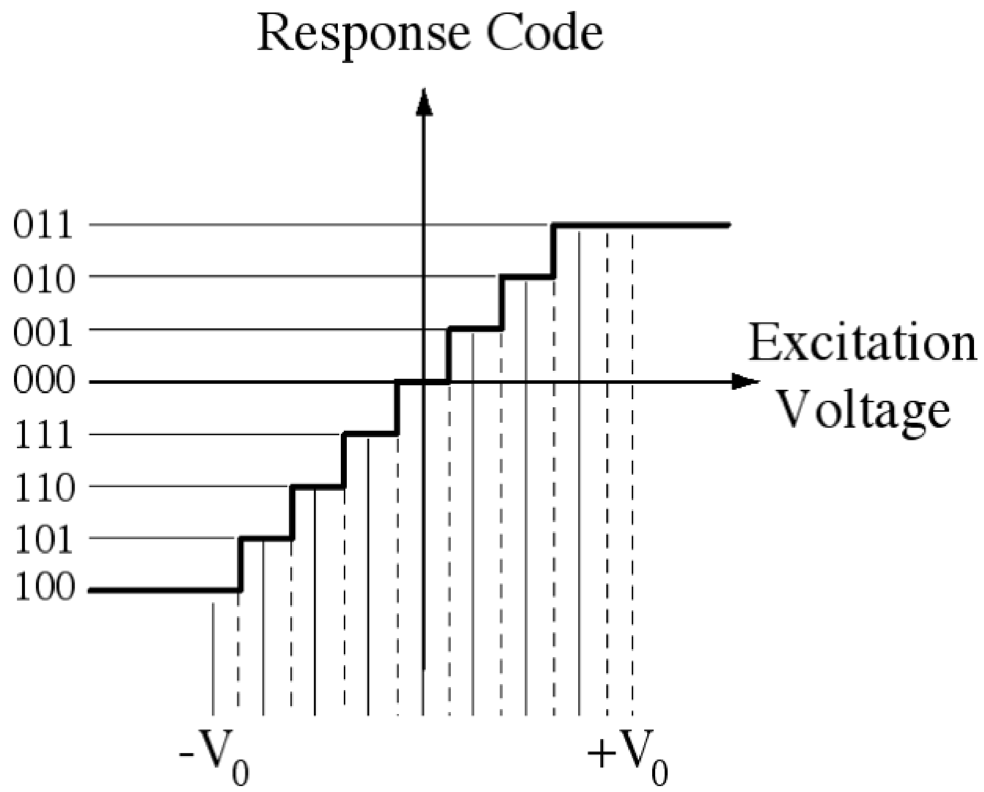
- *Muestreo (sampling)*: tomar muestras periódicas de la amplitud de la onda.
- *Retención (hold)*: las muestras son retenidas hasta “evaluarlas”.
- *Cuantificación*: la amplitud de la señal muestreada toma valores discretos.
- *Codificación*: se traducen los valores obtenidos a N bits, asigna un valor entre 2^N posibles.

Hasta aquí CAD

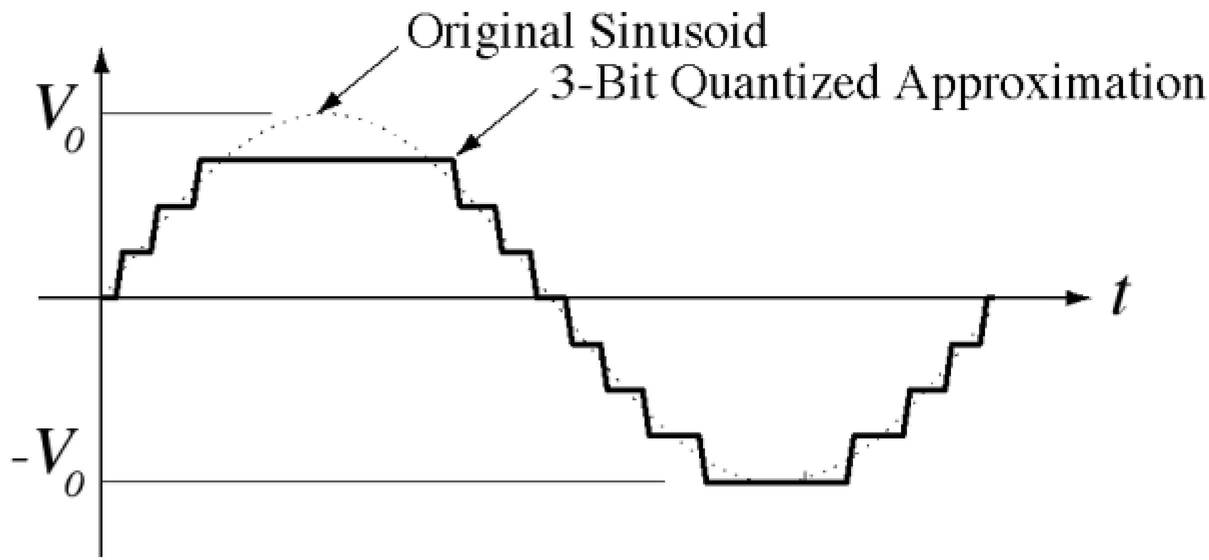
- Luego se podría *comprimir* la información, en bits, para tener en cuenta la capacidad de almacenamiento, tasa de datos, etc. que el sistema de cómputo puede manejar.

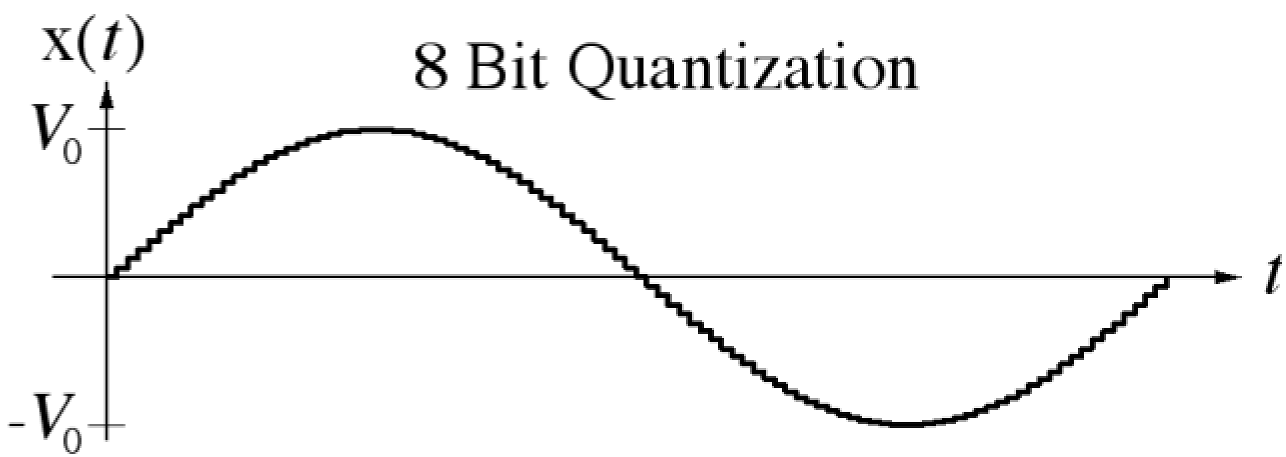
Relación entrada/salida para un ADC

Código digital de salida

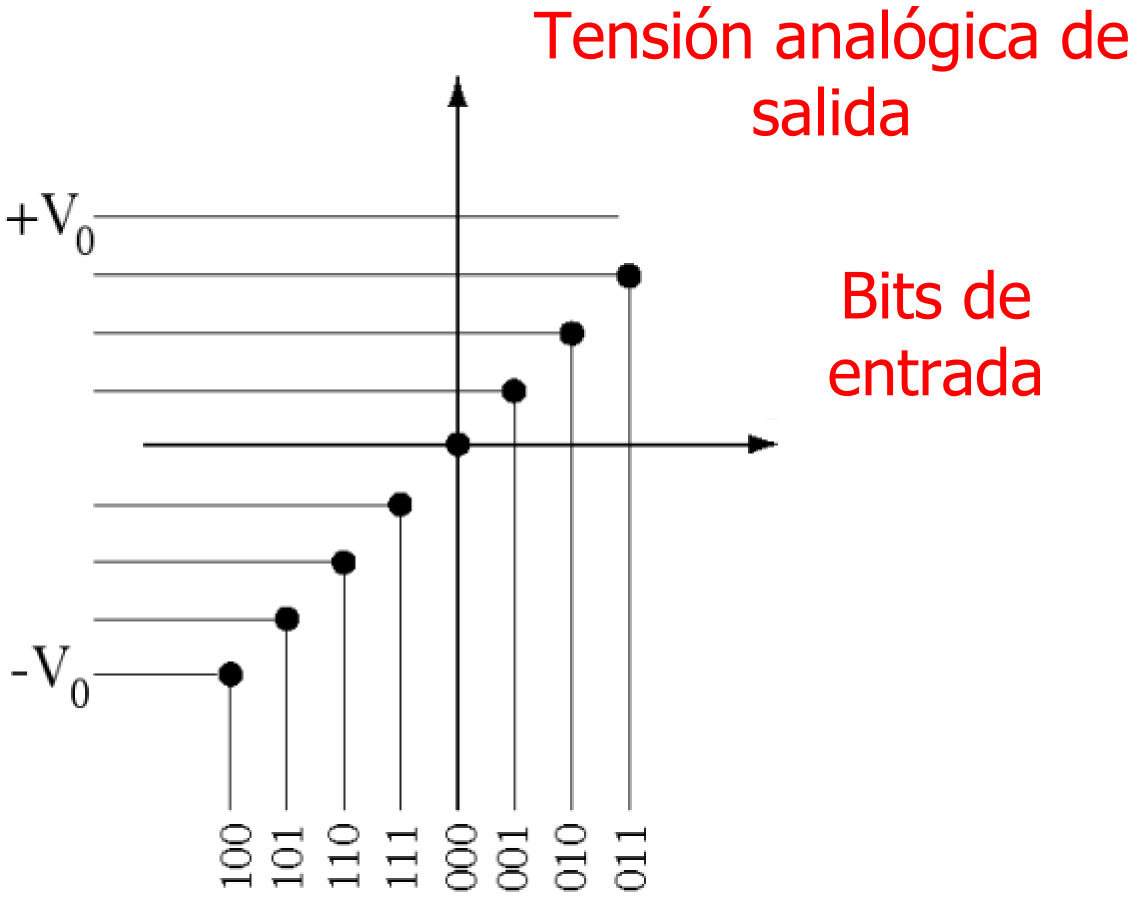


Señal analógica de entrada

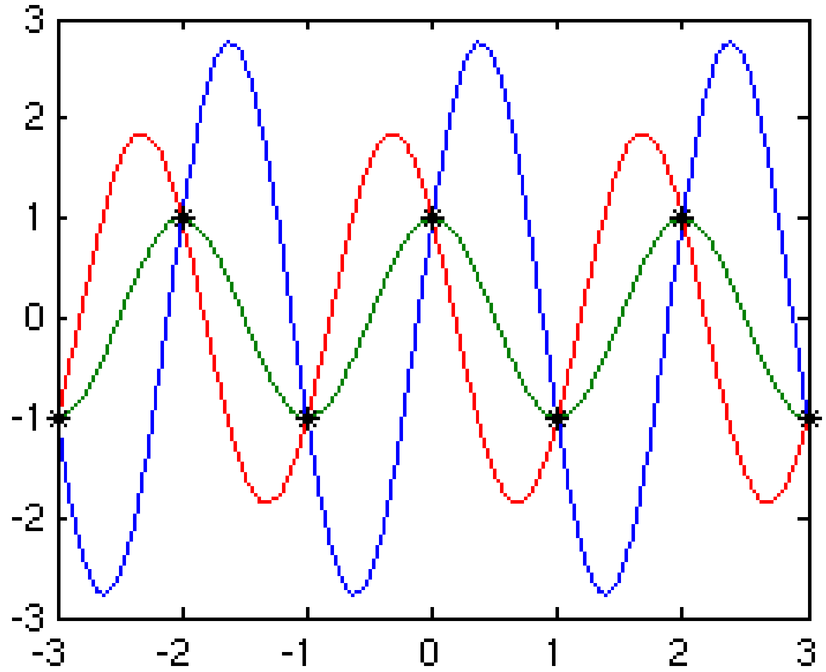

Original Sinusoid
3-Bit Quantized Approximation
V_0
$-V_0$
t


$x(t)$
8 Bit Quantization
V_0
$-V_0$
t

Relación entrada salida DAC



Muestreo de un sen con f = frecuencia límite de Nyquist



La señal a muestrear no debe tener componentes en el límite establecido por Nyquist