Clase 13: Movimiento relativo y dinámica en sistemas no inerciales

4 de mayo de 2020

En esta clase y en la próxima describimos cómo relacionar (traducir, transformar) la cinemática y la dinámica que ven observadores fijos a distintos sistemas de referencia, en movimiento relativo entre sí.

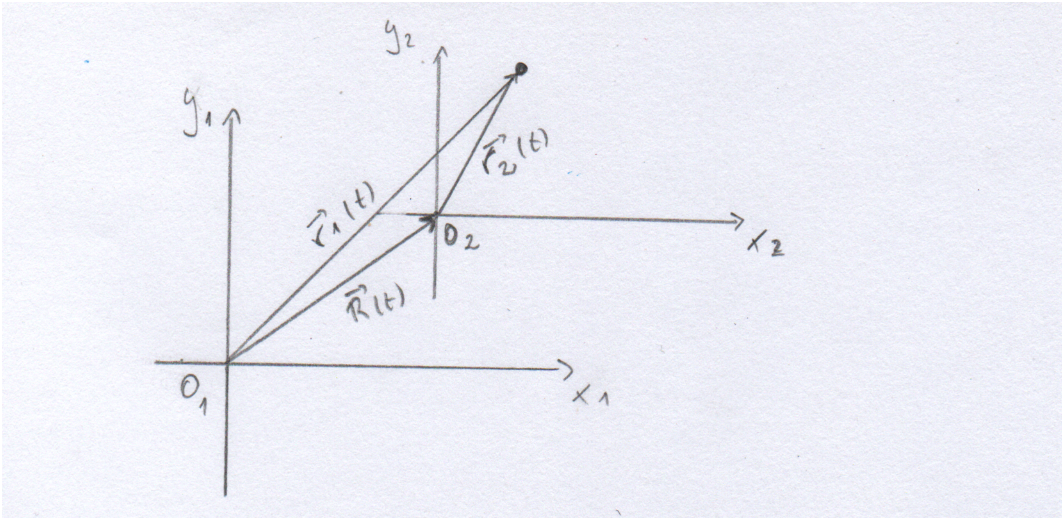
En particular, comparamos las observaciones hechas por un observador fijo en un sistema de referencia inercial, donde se aplican las Leyes de Newton, con las observaciones hechas en un sistema no inercial, donde no se aplican directamente las Leyes de Newton. El eje de la comparación es aprovechar lo que ve un observador inercial, y las relaciones que sí puede plantear, para generar una *dinámica modificada* que pueda usar un observador fijo en cualquier otro sistema.

1. Transformación de observaciones entre sistemas de referencia en movimiento relativo, manteniendo sus ejes cartesianos paralelos

Empecemos repasando conceptos básicos, tales como qué objetos se pueden considerar quietos o en movimiento, y respecto de qué referencia tienen sentido esas consideraciones. Después de plantear y resolver varios problemas ya estarán convencidos de que cualquier descripción del movimiento es necesariamente relativa al observador que hace la descripción. Lo que llamamos vector posición de un objeto puntual no es más que el vector desplazamiento del objeto respecto del punto que el observador defina como origen de su sistema de coordenadas.

Cada observador se considera a sí mismo quieto respecto de alguna referencia física (el suelo, una plataforma en movimiento, un ascensor, un vagón de tren, la Luna, etc.); a esa referencia física la llamamos *sistema de referencia*. Sobre ese sistema de referencia el observador elige el punto que llamará origen, y a partir de ese origen elige las direcciones que llamará ejes cartesianos.

Consideremos ahora dos observadores O_1 y O_2, cada uno quieto en su propio sistema de referencia, en el caso en que los sistemas de referencia se mueven uno respecto del otro. Es decir, el observador O_1 ve al origen del sistema cartesiano de O_2 en movimiento con un vector posición $\vec{R}(t)$ que depende del tiempo. O bien, el observador O_2 ve al origen del sistema cartesiano de O_1 en movimiento con un vector posición $-\vec{R}(t)$, ya que $\overrightarrow{O_2O_1} = -\overrightarrow{O_1O_2}$. Además, supongamos que los dos observadores eligen sus ejes cartesianos en las mismas direcciones y sentidos, y que estos ejes no rotan (su dirección no cambia con el tiempo). Asumimos además que ambos observadores pueden leer el tiempo en un único cronómetro.



Vamos a escribir la relación entre la descripción del movimiento de una cierta partícula, según la ve cada uno de los observadores. Siguiendo el dibujo, podemos escribir la relación entre la posición de una partícula $\vec{r}_1(t)$ medida por O_1 y la posición $\vec{r}_2(t)$ de la misma partícula medida por O_2 como una suma de desplazamientos:

$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(t) + \vec{R}(t)$$

Usando versores cartesianos (que son los mismos para ambos observadores y no cambian con el tiempo) y componentes, podemos escribir

$$x_1(t)\check{\imath} + y_1(t)\check{\jmath} + z_1(t)\check{k} = x_2(t)\check{\imath} + y_2(t)\check{\jmath} + z_2(t)\check{k} + R_x(t)\check{\imath} + R_y(t)\check{\jmath} + R_z(t)\check{k}$$

Con las funciones posición de cada observador podemos calcular velocidades, tomando la derivada respecto del tiempo. Dado que los versores no cambian con el tiempo, salen fuera de las derivadas:

$$x_1'(t)\check{\imath} + y_1'(t)\check{\jmath} + z_1'(t)\check{k} = x_2'(t)\check{\imath} + y_2'(t)\check{\jmath} + z_2'(t)\check{k} + R_x'(t)\check{\imath} + R_y'(t)\check{\jmath} + R_z'(t)\check{k}$$

Del lado izquierdo tenemos la velocidad $\vec{v}_1(t) = x_1'(t)\check{\imath} + y_1'(t)\check{\jmath} + z_1'(t)\check{k}$ de la partícula tal como la calcula el observador O_1. Del lado derecho tenemos la velocidad $\vec{v}_2(t) = x_2'(t)\check{\imath}+y_2'(t)\check{\jmath}+z_2'(t)\check{k}$ de la partícula tal como la calcula el observador O_2, más la velocidad relativa $\vec{V}_R(t) = R_x'(t)\check{\imath} + R_y'(t)\check{\jmath}+R_z'(t)\check{k}$ del sistema O_2 respecto del sistema O_1. En forma compacta, tenemos la fórmula de *adición de velocidades*

$$\vec{v}_1(t) = \vec{v}_2(t) + \vec{V}_R(t)$$

Vale resaltar que esta relación sencilla es válida mientras los versores de ambos sistemas no cambien con el tiempo. Es decir, mientras los ejes no roten con el tiempo.

Derivando nuevamente podemos relacionar aceleraciones:

$$x_1''(t)\check{\imath} + y_1''(t)\check{\jmath} + z_1''(t)\check{k} = x_2''(t)\check{\imath} + y_2''(t)\check{\jmath} + z_2''(t)\check{k} + R_x''(t)\check{\imath} + R_y''(t)\check{\jmath} + R_z''(t)\check{k}$$

donde encontramos del lado izquierdo la aceleración $\vec{a}_1(t) = x_1''(t)\check{\imath} + y_1''(t)\check{\jmath} + z_1''(t)\check{k}$ de la partícula tal como la calcula el observador O_1. Del lado derecho tenemos la aceleración $\vec{a}_2(t) = x_2''(t)\check{\imath} + y_2''(t)\check{\jmath} + z_2''(t)\check{k}$ de la partícula tal como la calcula el observador O_2, más la aceleración relativa $\vec{A}_R = R_x''(t)\check{\imath} + R_y''(t)\check{\jmath} + R_z''(t)\check{k}$ del sistema O_2 respecto del sistema O_1. En forma compacta,

$$\vec{a}_1(t) = \vec{a}_2(t) + \vec{A}_R(t)$$

Transformación de observaciones entre sistemas de referencia en movimiento relativo con velocidad constante, manteniendo sus ejes cartesianos paralelos

En el caso particular en que los sistemas de referencia se muevan con velocidad constante uno respecto del otro, manteniendo sus ejes cartesianos paralelos entre sí, las expresiones anteriores son más sencillas porque $\vec{V}_R(t) = \vec{V}_R$ es constante y luego $\vec{A}_R(t) = \vec{0}$. Si el origen de O_2 tiene una posición $\vec{R}_0$ respecto de O_1 cuando el cronómetro indica $t = t_0$, podemos escribir $\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \vec{V}_R\,(t - t_0)$ para obtener:

$$\begin{cases} \vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(t) + \left[\vec{R}_0 + \vec{V}_R\,(t - t_0)\right] \\ \vec{v}_1(t) = \vec{v}_2(t) + \vec{V}_R \\ \vec{a}_1(t) = \vec{a}_2(t) \end{cases}$$

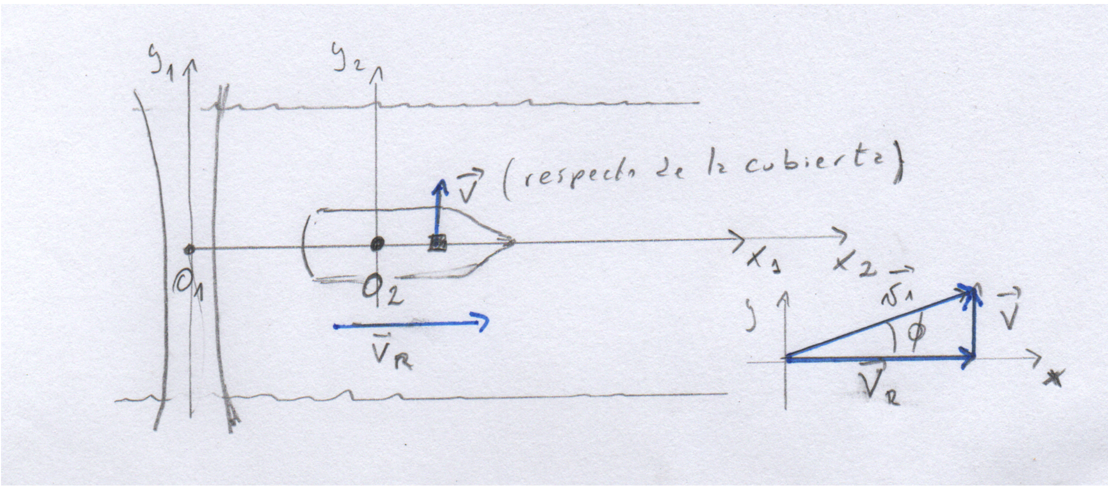
Es interesante notar que en este caso, aunque los observadores midan distintas posiciones y distintas velocidades del objeto observado, ambos miden la misma aceleración.

Ejemplo

Un barco se deja arrastrar por el agua de un río (en un tramo recto) con velocidad constante $\vec{V}_R$ respecto de tierra, en la dirección y sentido de la corriente. Un observador O_1 está quieto en un puente y otro observador O_2 está quieto en la cubierta del barco. Ambos utilizan cronómetros sincronizados que arrancan cuando el observador O_2 pasa debajo del puente.

Un marinero arrastra una caja con velocidad constante $\vec{V}$ respecto de la cubierta, en dirección perpendicular al eje longitudinal del barco.

Preguntas: ¿Qué velocidad asigna O_2 a la caja? ¿Qué velocidad asigna O_1 a la caja?



Utilicemos ejes x e y como en la figura. El observador O_2 registra que la velocidad de la caja es:

$$\vec{v}_2 = \vec{V} = V\,\check{\jmath}$$

El observador O_1 registra que la velocidad de la misma caja es:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{V}_R = V_R \breve{\imath} + V\, \breve{\jmath}$$

que es un vector de módulo $v_1 = \sqrt{V_R^2 + V^2}$ formando un ángulo ϕ con la dirección del río, con $\tan(\phi) = V/V_R$.

Además ambos observadores registran que la velocidad de la caja es constante, por lo cual ambos coinciden en que la caja no está acelerada:

$$\vec{a}_1(t) = \vec{a}_2(t) = 0$$

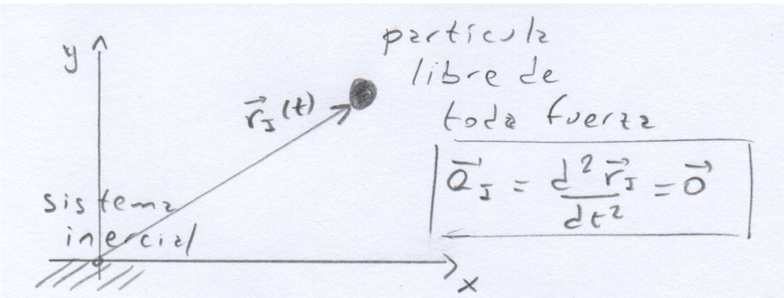
2. Sistemas inerciales, revisados

Antes de discutir sistemas de referencia acelerados, dediquemos una sección a revisar qué hemos entendido por sistema de referencia inercial. Ya mencionamos que es necesario pararse en un sistema inercial para que sea válida la Segunda Ley de Newton; además habrán reconocido que todos los problemas de dinámica que propusimos se reducen a aplicar correctamente esta Segunda Ley (lo cual involucra reconocer correctamente las fuerzas que actúan sobre el objeto que se estudia, y reconocer correctamente la aceleración de ese objeto).

Los sistemas inerciales quedan caracterizados por la Primera Ley de Newton. Podemos reescribirla eligiendo esta forma:

Si un observador está fijo en un sistema inercial, y observa el movimiento de una partícula libre de cualquier fuerza, debería constatar que esa partícula no tiene aceleración: o bien se mantiene en reposo o bien se mueve en una trayectoria rectilínea con velocidad constante.

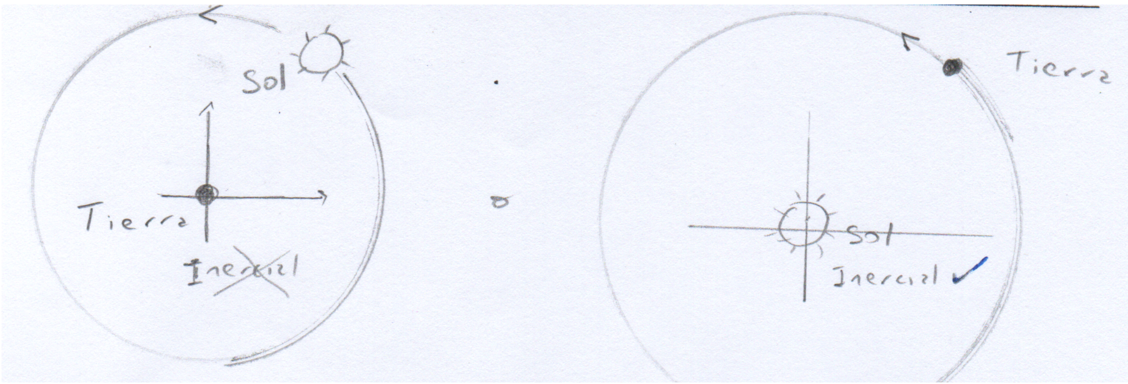
Así enunciada, la Primera Ley nos da un test para detectar si el sistema de referencia en que estamos parados es inercial o no. Con la experiencia adquirida resolviendo problemas, y confiando en que la experiencia educa la intuición, vamos a intentar una discusión de la noción de sistema de referencia inercial.



Por ejemplo, en la práctica hemos resuelto problemas asumiendo que un sistema de referencia fijo en Tierra cumple con ser un sistema inercial. Y en la teoría intenté contarles que, con ciertas limitaciones, eso es una buena aproximación. ¿Están satisfechos con esa aproximación? ¿Pueden justificarla? Si es una aproximación, ¿pueden evaluar de alguna manera cuánta diferencia hay entre este sistema fijo en Tierra y un sistema inercial perfecto? Si la revisamos, aquella explicación fue realmente poco satisfactoria; me disculpo, pero era necesaria para empezar a trabajar los problemas y ganar experiencia.

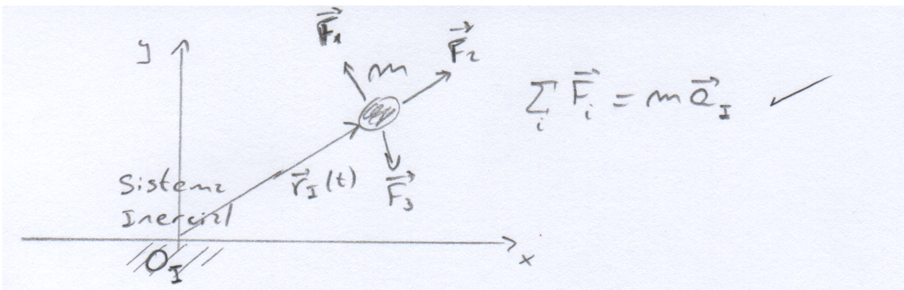
Veamos otra pregunta. Creo que todos estamos convencidos de que la Tierra gira alrededor del Sol. ¿Por qué estamos tan convencidos? ¿Quizás solamente porque lo aprendimos de chicos?

¿Y por qué tantas culturas estuvieron convencidas de que el Sol gira alrededor de la Tierra? Seguramente las personas instruidas aprendían desde chicas esa verdad aceptada. Y esas culturas tenían muy buenas observaciones astronómicas, y podían interpretar las observaciones en un marco teórico que les resultaba satisfactorio, podían predecir eclipses solares, etc.



Volviendo al punto anterior, si confiamos en que un sistema de referencia fijo en Tierra es un buen sistema para hacer Física, deberíamos aceptar que el Sol gira alrededor nuestro, ¿cierto? Bueno, ¡no lo vamos a hacer! Lo que les propongo es que revisemos los fundamentos que favorecen la noción de que el Sol está quieto y los planetas giran a su alrededor.

Debemos tener el claro que cualquier descripción del movimiento de un cuerpo siempre es relativa al sistema del referencia en que el observador se considere quieto. Y que no existe un sistema de referencia absoluto que merezca llamarse quieto[1], no más quieto que los demás cuerpos del Universo. Lo que hace fundamental al trabajo de Newton, y seguramente lo que hizo que sea aceptado por la comunidad científica, es *un marco teórico unificado en el cual las observaciones del movimiento de todos los cuerpos*[2] *son consistentes con un número reducido de leyes*: las tres leyes de Newton y las que describen las fuerzas fundamentales, en particular la Ley de Gravitación Universal. Ese marco teórico les da un estatus privilegiado a un conjunto de sistemas de referencia: esencialmente, aquéllos donde el movimiento de cualquier cuerpo observado obedece a la Segunda Ley. Necesitamos reconocerlos para darle consistencia a las leyes de la dinámica.

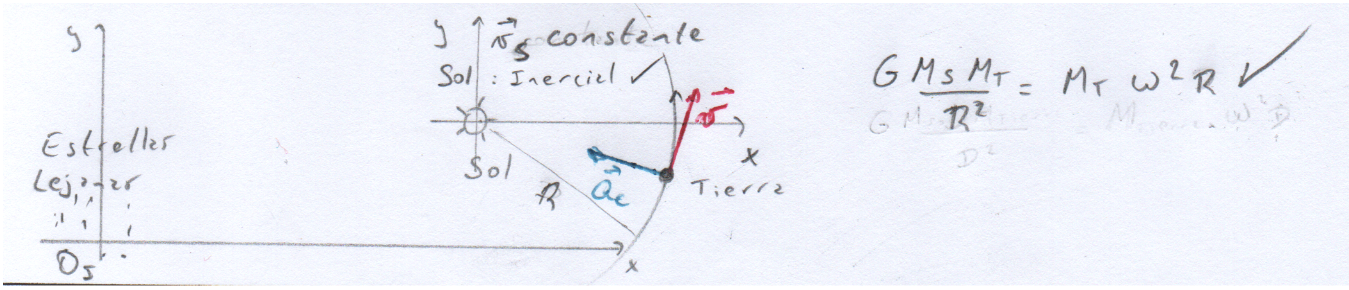


Intentemos seguir un razonamiento ordenado. Si aceptamos que existe al menos un sistema inercial, que Newton proponía como "fijo a las estrellas lejanas", un cuerpo libre de toda fuerza externa no tendría aceleración respecto de ese sistema (Primera Ley). En consecuencia, un

[1]En el siglo XIX se generalizó la idea de que sí existe ese sistema, algo así como una sustancia inmaterial que llena el espacio y está en reposo absoluto. Se la llamó *éter*, es interesante buscar información al respecto. Es uno de los mitos que derribó Einstein con su teoría de la Relatividad.

[2]Excepto que, respecto del observador, tengan velocidades cercanas a la velocidad de la luz.

sistema de referencia fijo a ese cuerpo también sería inercial (por la fórmula de adición de velocidades, lo contamos de nuevo en la sección 4 de esa clase). Como cuerpo libre de toda fuerza externa podríamos considerar a un cuerpo muy alejado de los demás; aceptemos que el Sol está tan alejado de las demás estrellas que prácticamente no siente fuerzas externas, y que los planetas del Sistema Solar tienen tan poca masa (comparada con la de Sol) que prácticamente no son capaces de acelerarlo. Entonces podríamos considerar que un sistema fijo al Sol es un buen sistema inercial. Para visualizar esta situación con el mismo estilo que usamos en la práctica, conviene imaginar que miramos el Sistema Solar desde afuera[3].



Todavía tendríamos que elegir ejes cartesianos, y cuidar que no estén rotando. ¿Rotando respecto de qué? Si los ejes están bien elegidos, tendríamos que ver que los planetas cumplen la Ley de Gravitación Universal, y la Segunda Ley: las direcciones fijas serían aquellas respecto de las cuales veríamos girar los planetas con un radio R y una velocidad angular ω tal que la fuerza de atracción del Sol fuera igual al producto de su masa m multiplicada por la aceleración centrípeta $\omega^2 R$. Y efectivamente se pueden orientar los ejes de un sistema cartesiano fijo al Sol de tal manera que todos los planetas observados cumplan con esa relación (más precisamente, que cumplan las relaciones apropiadas para órbitas elípticas y las correcciones debidas a la interacción con otros planetas).

Como ven, el problema es delicado y los detalles se pueden mejorar. Por ejemplo, un sistema de referencia fijo al centro de la Vía Láctea, con los ejes elegidos de tal manera que se observe a todas las estrellas orbitan siguiendo las Leyes de Newton, podría ser una mejor elección de sistema inercial. Sin embargo, el modelo de Newton tiene sus limitaciones: a escalas cosmológicas se observaría que el espacio no es euclídeo (tiene curvatura) y ya no podremos usar ejes cartesianos.

Sistemas de referencia aproximadamente inerciales

Si pudimos encontrar un sistema inercial O_I, sabemos que otro sistema que se mueva respecto de él con velocidad constante (y sin movimiento de rotación) también será inercial. Una medida posible para decir cuán *aproximadamente inercial* es un sistema es determinar cuán *aproximadamente rectilíneo y uniforme* es su movimiento respecto de O_I.

Por ejemplo, un sistema de referencia fijo al centro de la Tierra, con sus ejes paralelos a un sistema inercial fijo al Sol, se mueve en una órbita circular con un período de 365 días. Si estudiamos un problema que transcurre en unas horas, la Tierra gira en su movimiento de traslación apenas una fracción de grado sexagesimal. El arco de circunferencia descripto por el centro de la Tierra es prácticamente un segmento de recta, prácticamente no es apreciable su cambio de dirección. En esa escala, dado que el movimiento del centro de la Tierra es muy

[3]Una situación similar encontró Galileo Galilei cuando descubrió con un telescopio las lunas de Júpiter. Mirando desde la Tierra, pudo apreciar cómo las lunas giran alrededor del planeta.

aproximadamente rectilíneo y uniforme, el sistema de referencia fijo al centro de la Tierra es muy aproximadamente inercial. Si queremos estudiar un movimiento que dura días, o meses, el mismo sistema no podría considerarse inercial.

Por otro lado, si fijamos un sistema de referencia a la superficie de la Tierra, al cabo de unas horas habrá girado un ángulo importante por el movimiento de rotación terrestre y habrá descripto, respecto del Sol, un movimiento bien distinto del rectilíneo con velocidad constante. En cambio, si analizamos un problema que dura unos pocos segundos, la trayectoria de este sistema de referencia vista desde el Sol sí se parece a un tramo de movimiento rectilíneo uniforme. Dentro de esa escala, el sistema fijo en el suelo puede considerarse aproximadamente inercial. Esta característica es la que usamos en los problemas de la práctica 4.

Creo que esta discusión ahora sí es adecuada a lo que podemos hacer en esta materia, dentro de los límites de la teoría de Newton y sin necesitar la teoría de la Relatividad. Espero que permita interpretar el concepto de sistema de referencia inercial y su importancia, y nos dé criterios para distinguir los sistemas inerciales de otros sistemas que no lo son.

Efectos no inerciales

Cuando estudiemos un movimiento desde un sistema de referencia fijo a la superficie de la Tierra, durante un tiempo tiempo más extenso que el que justifica el comportamiento inercial, apreciaremos *efectos no inerciales*. Con esta frase queremos decir que *el movimiento observado no coincide con lo que calculamos usando las Leyes de Newton*. Debe estar claro a esta altura que no estarán fallando las Leyes de Newton, simplemente habremos hecho los cálculos de la Segunda Ley en un sistema de referencia que no cumple con la Primera Ley.

Veremos a continuación cómo adaptar las leyes de la Dinámica a las observaciones hechas desde sistemas no inerciales.

3. Leyes del movimiento en sistemas no inerciales

Si decidimos estudiar el movimiento de un cuerpo con datos medidos desde un sistema no inercial O_{NI}, hay una manera sencilla de hacerlo: necesitamos relacionar *nuestras medidas* del cuerpo estudiado con *las medidas que haría un observador inercial O_I*. Es decir, necesitamos:

- ubicar un buen sistema inercial O_I
- conocer cómo nuestro sistema de referencia O_{NI} se mueve respecto del sistema inercial
- traducir (matemáticamente: transformar) las medidas hechas en un sistema al otro.

Con esta estructura, sabemos que las medidas de O_I se rigen por las Leyes de Newton. Luego:

- Al nivel de resultados, los cálculos hechos en el sistema O_I, y luego traducidos al sistema O_{NI}, nos darán los resultados medidos en el sistema no inercial.
- Más interesante aún, la transformación de las Leyes válidas en O_I al sistema no inercial O_{NI} nos dará las recetas para calcular en el sistema no inercial.

Trabajando en el sistema no inercial O_{NI}, como mencionamos en el último punto, preferimos hablar de "recetas" y no de leyes, ya que no tienen validez general. Según cómo se mueva el sistema no inercial que usemos, respecto de un buen sistema inercial, las recetas serán distintas.

Veremos en detalle dos casos: un sistema no inercial con aceleración respecto de un sistema inercial O_I, manteniendo los ejes cartesianos paralelos (en esta clase) y un sistema no inercial con su origen fijo en un sistema inercial O_I pero con sus ejes cartesianos rotando con velocidad angular constante respecto del sistema inercial (en la próxima clase).

4. Dinámica en un sistema de referencia acelerado respecto de otro sistema inercial, manteniendo sus ejes cartesianos paralelos

Retomemos los cálculos de la sección 1 eligiendo O_1 como un sistema inercial (lo llamaremos O_I) y O_2 con su origen ubicado en una posición $\vec{R}(t)$ respecto del primero, manteniendo sus ejes cartesianos paralelos. La transformación entre las observaciones del movimiento de una partícula, desde ambos sistemas, se escribe

$$\begin{cases} \vec{r}_I(t) = \vec{r}_2(t) + \vec{R}(t) \\ \vec{v}_I(t) = \vec{v}_2(t) + \vec{V}_R(t) \\ \vec{a}_I(t) = \vec{a}_2(t) + \vec{A}_R(t) \end{cases}$$

Como ya comentamos, **si $\vec{V}_R(t)$ es constant**e tendremos que $\vec{A}_R(t) = \vec{0}$ y ambos observadores registran la misma aceleración. La consecuencia inmediata es que O_2 es un sistema inercial: como O_I es inercial, para cualquier partícula se cumple la Segunda Ley,

$$\sum_n \vec{F}_n = m\,\vec{a}_I(t)$$

Luego encontramos que

$$\sum_n \vec{F}_n = m\,\vec{a}_2(t)$$

Es decir, en el sistema de referencia O_2 se cumplen correctamente las leyes de Newton. Por eso O_2 también es un sistema inercial.

Veamos qué sucede **cuando el sistema O_2 está acelerado** respecto del sistema inercial. Reemplazando la aceleración en el sistema inercial por $\vec{a}_I(t) = \vec{a}_2(t) + \vec{A}_R(t)$ en la Segunda Ley,

$$\sum_n \vec{F}_n = m\left(\vec{a}_2(t) + \vec{A}_R(t)\right)$$

La aceleración en el sistema O_2 se relaciona con las fuerzas reales $\vec{F}_n$ mediante

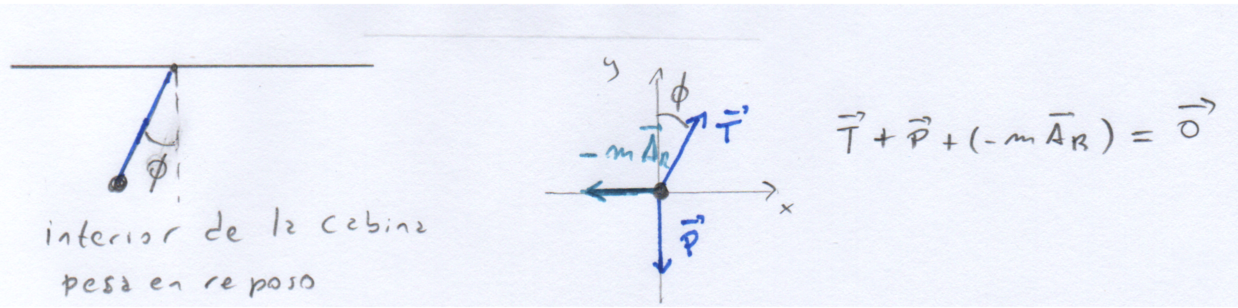
$$\boxed{\sum_n \vec{F}_n + \left(-m\,\vec{A}_R(t)\right) = m\,\vec{a}_2(t)}$$

donde el término $-m\,\vec{A}_R(t)$ se ha escrito junto con las fuerzas; se lo suele describir como una *fuerza ficticia* de origen no inercial. Es importante reconocer que las fuerzas reales corresponden a la interacción con otros cuerpos reales, mientras que el término $-m\,\vec{A}_R(t)$ no se debe a interacciones; es un efecto asociado al uso de un sistema acelerado.

Ejemplo: dirección de aparente de la vertical en un sistema con aceleración constante

Consideremos una escala de trabajo tal que un sistema de coordenadas fijo en la superficie de la Tierra es suficientemente inercial. Y consideremos una cabina en un vehículo con aceleración constante $\vec{A}_R$ en dirección horizontal (podría ser un auto, un tren o un avión, en el intervalo de tiempo en que aceleran para llegar a su velocidad crucero). Una persona quieta en la cabina intenta marcar la dirección vertical; para eso cuelga una plomada del techo y maniobra hasta lograr que la pesa quede quieta. ¿Qué ángulo forma la dirección de la plomada con la verdadera vertical (definida como la dirección de la gravedad)?

Podemos resolver este problema midiendo el movimiento de la plomada desde un sistema no inercial fijo a la cabina. Las fuerzas reales actuando sobre la pesa son su peso $\vec{P} = m\vec{g}$ apuntando hacia abajo (verdadera dirección de la gravedad, hacia el centro de la Tierra) y la tensión del $\vec{T}$ del hilo de la plomada. Además, el observador no inercial debe agregar la fuerza ficticia $-m\,\vec{A}_R$; si la aceleración de la cabina apunta hacia la derecha, $-m\,\vec{A}_R$ apunta hacia la izquierda:



La suma de estos tres vectores debe ser nula, porque el observador no inercial ve a la plomada en reposo (luego $\vec{a} = \vec{0}$). Separando componentes en los ejes cartesianos de la figura,

$$\begin{cases} \text{en } x: & T\,\sin(\phi) - m\,A_R = 0 \\ \text{en } y: & T\,\cos(\phi) - m\,g = 0 \end{cases}$$

Podemos despejar

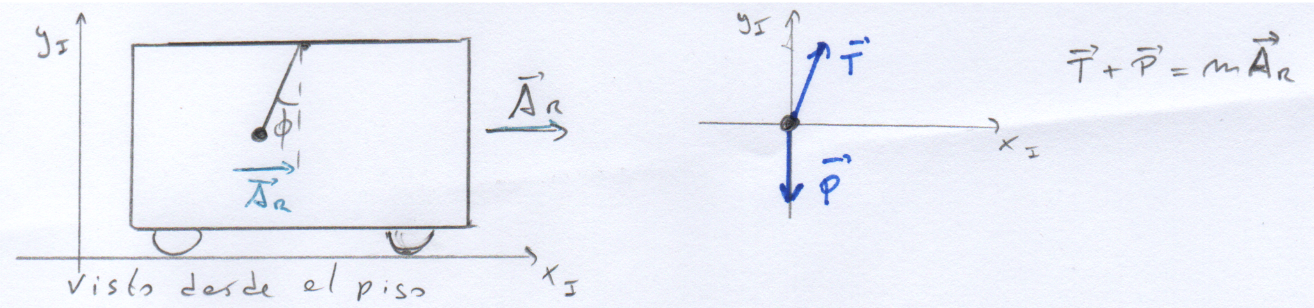
$$\tan(\phi) = \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} = \frac{m\,A_R/T}{m\,g/T} = \frac{A_R}{g}$$

Es decir, la vertical aparente (definida por la dirección de la plomada) forma un ángulo con la vertical verdadera (definida por la dirección de la gravedad) $\phi = \arctan(A_R/g)$. Por ejemplo, si $A_R = g$, el ángulo sería de 45º.

También podemos resolver el problema según se lo observa desde un sistema de referencia inercial, fijo en Tierra. Ya que la pesa de la plomada está en reposo respecto de la cabina, su aceleración$\vec{a}_I$ respecto de Tierra es $\vec{A}_R$, igual que la cabina. Podemos probarlo usando la relación entre aceleraciones, y el dato $\vec{a} = \vec{0}$,

$$\vec{a}_I = \vec{a} + \vec{A}_R = \vec{A}_R$$

El observador inercial debe plantear que las fuerzas verdadera, peso y tensión, suman $\vec{T} + \vec{P} = m\vec{a}_I$.



En componentes (usando ejes paralelos a los que usaba el observador no inercial),

$$\begin{cases} \text{en } x: & T\,\sin(\phi) = m\,A_R \\ \text{en } y: & T\,\cos(\phi) - m\,g = 0 \end{cases}$$

Estas ecuaciones son algebraicamente equivalentes a las que plantea el observador no inercial, y llevan al mismo resultado: la vertical aparente está inclinada un ángulo $\phi = \arctan(A_R/g)$ respecto de la vertical verdadera.