

# Clase 19 - Interferencia y Difracción

Prof. Juan Mauricio Matera

14 de junio de 2019

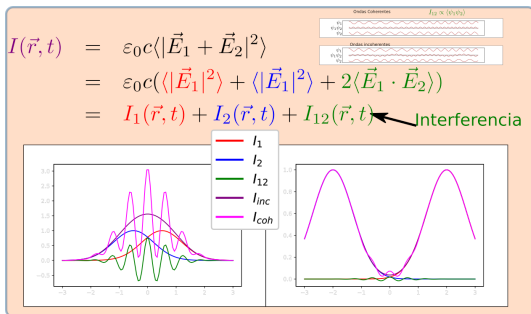
## Luz coherente vs luz incoherente

# Intensidad de la superposición de ondas electromagnéticas

- ▶ La intensidad de una onda plana no depende de su fase:

$$I = \langle \vec{S} \rangle = \varepsilon_0 c \langle |\vec{E}|^2 \rangle = \frac{\varepsilon_0 c}{2} |\vec{E}^0|^2$$

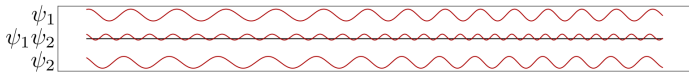
- ▶ Los efectos de coherencia sólo serán visibles si se cuenta con dos fuentes.



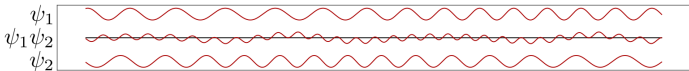
- ▶ Decimos que dos fuentes son **coherentes** si la **diferencia de fase** entre ambas está definida y se mantiene constante **espacial y temporalmente**

Ondas Coherentes

$$I_{12} \propto \langle \psi_1 \psi_2 \rangle$$



Ondas incoherentes



- ▶ Podemos estimar

$$I_{12} \approx 2\varepsilon_0 c \langle (\vec{E}_1^{(0)} \cdot \vec{E}_2^{(0)}) \rangle \langle \cos(\delta) \rangle$$

con

- ▶  $\delta$  la **diferencia de fase** entre las ondas.
- ▶  $\langle (\vec{E}_1^{(0)} \cdot \vec{E}_2^{(0)}) \rangle$  el promedio de las amplitudes de ambas ondas.
- ▶  $I_{12}$  se anula si
  - ▶ ambas ondas tienen polarizaciones complementarias y/o
  - ▶ los haces no se superponen, y/o
  - ▶ el desfase entre las ondas es  $\pi/2$ , o
  - ▶ el desfase varía en el tiempo (ondas incoherentes).

Por lo tanto, para observar el **fenómeno de interferencia**, se necesita que

- ▶ O bien dos fuentes **aproximadamente monocromáticas** y con polarizaciones no ortogonales,
- ▶ O bien dos fuentes **correlacionadas**

## Fuentes monocromáticas

- ▶ Decimos que una fuente de **radiación electromagnética** es **monocromática** y **polarizada** si, a distancias grandes de esta, la radiación que produce puede modelarse según una onda plana con longitud de onda definida

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\vec{x} - \omega t)$$

- ▶ En la práctica, no existen fuentes monocromáticas: Si  $|\omega - \omega_0| < \Delta\omega$ , y  $|\vec{k} - \vec{k}_0| < \Delta k$  para un cierto  $\omega_0 \gg \Delta\omega$  y un  $\vec{k}_0/|\vec{k}_0| \gg \Delta k$ , podemos describir la radiación como

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r}, t) \cos(\vec{k}_0\vec{x} - \omega_0 t + \phi(x, t))$$

donde  $\vec{E}_0(\vec{r}, t)$  y  $\phi(x, t)$  varían **muy lentamente** frente a  $\vec{k}_0 \cdot \vec{x} - \omega_0 t$ .

- ▶ En tal caso, decimos que la fuente es **aproximadamente monocromática**, con un **tiempo de coherencia**

$$\tau_C = \frac{2\pi}{\delta\omega}$$

- ▶ Para la luz del sol,  $\tau_C \approx 4 \times 10^{-15} \text{s} = 4 \text{fs}$
- ▶ Para una fuente LED,  $\tau_C \approx 50 \text{fs}$
- ▶ Para la luz laser,  $\tau_C \approx 100 \mu\text{s}$
- ▶ El tiempo de respuesta del ojo humano es  $\approx 17 \text{ms}$ .



- ▶ Para la luz del sol,  $\tau_C \approx 4 \times 10^{-15} \text{s} = 4 \text{fs}$
- ▶ Para una fuente LED,  $\tau_C \approx 50 \text{fs}$
- ▶ Para la luz laser,  $\tau_C \approx 100 \mu\text{s}$
- ▶ El tiempo de respuesta del ojo humano es  $\approx 17 \text{ms}$ .

Por este motivo, en la práctica no es posible ver a simple vista fenómenos de interferencia a partir de fuentes independientes.

## Longitud de coherencia

- ▶ Se define **Longitud de coherencia** como la distancia máxima entre dos puntos de un haz de luz tal que su relación de fase es constante.
- ▶ En un medio no dispersivo, se puede estimar por
$$l_c = c \times \tau_c = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$
- ▶ Dos puntos sobre un frente de onda, separados por una distancia  $< l_c$  pueden pensarse como dos fuentes coherentes.
- ▶ Para una fuente con  $t_c \approx 4\text{fs}$ ,  $l_c \approx 1.2\mu\text{m}$ .
- ▶ Para una fuente laser,  $t_c \approx 100\mu\text{s}$  y  $l_c \approx 30\text{km}$

## Fuentes correlacionadas

- ▶ Dos fuentes están correlacionadas si sus **relaciones de fase** se mantienen **constantes** en el tiempo, aunque no sean necesariamente coherentes por separado.
- ▶ Un ejemplo de esto lo da la luz proveniente de

## El experimento de dos rendijas

- ▶ Para producir una fuente coherente, en 1801, Tomas Young usó una única fuente de luz, a la que hizo incidir sobre una pantalla con dos pequeñas aberturas.
- ▶ La fuente produce **luz térmica** (no monocromática, y no polarizada), con distribución espectral centrada en  $\lambda_0$ .
- ▶ La fuente se encuentra lo suficientemente lejos de la pantalla para asumir que se trata de un **frente de onda plano**.
- ▶ El ancho de las rendijas es grande frente a la  $\lambda_0$
- ▶ La separación entre las rendijas es del orden de  $\lambda_0$ .
- ▶ La luz a la salida interfiere sobre una pantalla ubicada también a una



Thomas Young  
1773 - 1829



# Interferencia

# Principio de Huygens-Fresnel

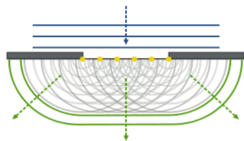
Cada punto sin obstrucción de un frente de onda, en un instante de tiempo determinado, sirve como fuente de trenes de onda secundarios esféricos (de la misma frecuencia que la onda primaria). La amplitud del campo óptico en cualquier punto más allá es la superposición de todos estos frentes de onda (considerando sus amplitudes y fases relativas).



Christian Huygens  
1629 - 1675



Agustin Fresnel  
1788 - 1827



Para entender el patrón de interferencia, consideremos primero el caso de una fuente monocromática, incoherente, polarizada en una cierta dirección.

- ▶ Asumimos que el frente de onda, al alcanzar las rendijas, tiene la forma

$$\vec{E}_0 \cos(\vec{k}_0 \cdot \vec{x} - \omega_0 t + \phi(t)),$$

con  $\vec{k}_0$  normal a la pantalla.

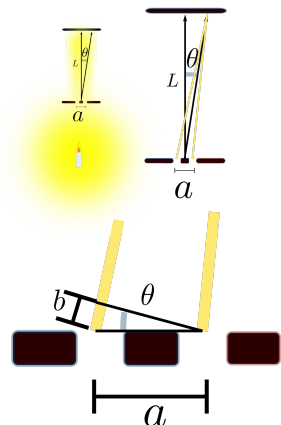
- ▶ Sobre la pantalla,

$$\begin{aligned} I &\approx I_0 (1 + 2 \cos(\sin(k_0 x a / L))) \\ &= 2 I_0 \cos^2(\sin(k_0 x a / L) / 2) \end{aligned}$$

con  $I_0$  la intensidad en ausencia de coherencia.

- ▶ Los máximos de interferencia se encuentran para

$$x = 2n\pi L / (\lambda k_0) = n \frac{\lambda L}{\lambda}$$



$$\begin{aligned} \theta &= \arctan(x/L) \approx x/L \\ b &= a \sin(\theta) \quad \delta = k a \sin(\theta) \end{aligned}$$

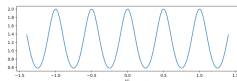
- ▶ Notemos que como para la luz del sol, (o de una vela)  $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx 1/6$ , los primeros máximos y mínimos están localizados en posiciones parecidas para las diferentes longitudes de onda.
- ▶ El experimento demostró el carácter ondulatorio de la luz.



Figura 1. Patrón de interferencia, obtenido con el dispositivo de Young.



Patrón de interferencia obtenido con una fuente laser

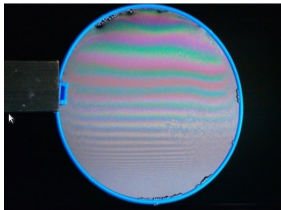




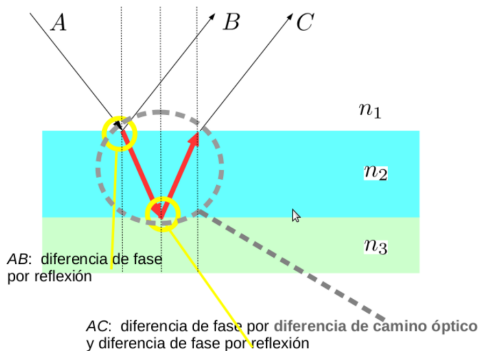
## Interferencia por división de amplitudes

- ▶ Cuando la luz incide sobre una película delgada de un material transparente, esta se divide en haces reflejados y transmitidos en cada interface.
- ▶ Si el material no presenta defectos, los haces transmitidos y reflejados resultan coherentes entre sí.
- ▶ En este caso, es posible ver suficientes órdenes de interferencia como para que los máximos de intensidad para diferentes longitudes de onda se vuelvan visibles.

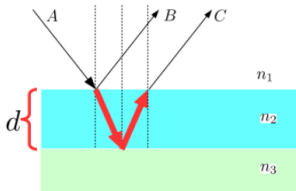
# Ejemplo: Interferencia por películas delgadas



- Esquema de interferencia por películas delgadas:



• Interferencia por **reflexión**:



Término de interferencia:  $\sim \cos(\delta)$

Calculemos la DIFERENCIA DE FASE

$$\delta_{BC} = \delta_{AB} - \delta_{AC}$$

$$\delta_{BC} = k \cdot LCO + \text{diferencias de fase por reflexión}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

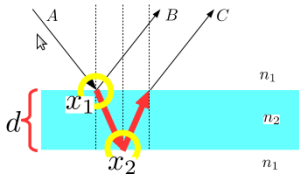
Vector de onda

LCO (Longitud de Camino Óptico): para ángulos pequeños (e índices de refracción constantes), podemos tomarla como  $LCO \approx n_2 2d$

$$\pm\pi \text{ ó } 0$$

Dependiendo de la relación entre índices de refracción

- Interferencia por **reflexión**.



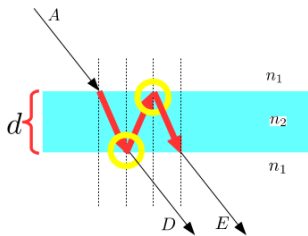
EJEMPLO 1: tomamos una película delgada de índice  $n_2$  sumergida en un medio de índice  $n_1$

Si  $n_1 > n_2$  (por ejemplo, una película de jabón en aire), por reflexión en el punto  $x_1$  hay un desfase por reflexión de  $\pi$  radianes , y por la reflexión en  $x_2$  no se produce ningún cambio de fase

Si  $n_1 < n_2$  (por ejemplo, una película de aire entre dos vidrios), por reflexión en el punto  $x_2$  hay un desfase por reflexión de  $\pi$  radianes , y por la reflexión en  $x_1$  no se produce ningún cambio de fase

Entonces, **en ambos casos**, la diferencia de fase resulta:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} n_2 2d + \pi$$



EJEMPLO: tomamos una película delgada de índice  $n_2$  sumergida en un medio de índice  $n_1$

Debemos analizar las reflexiones internas. Observemos que son dos reflexiones del mismo tipo. Entonces, si  $n_1 < n_2$ , la diferencia de fase total por reflexiones es  $2\pi$  radianes, y si  $n_2 < n_1$ , no hay diferencia de fase por reflexión. Por lo tanto siempre:

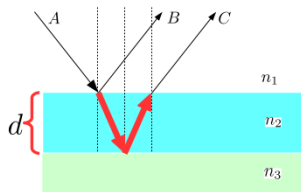
$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} n_2 2d$$

# Aplicaciones

Las **películas antirreflectantes** son materiales dieléctricos delgados que se colocan entre dos medios para **minimizar la reflexión** de la luz entre las superficies.

Este tipo de películas se utiliza hoy en día en muchísimos elementos ópticos, como anteojos, cámaras, etc. ("coating")

Para ilustrar su funcionamiento, volvemos al caso de **tres capas**, donde habíamos obtenido previamente la diferencia de fase de haces reflejados para  $n_1 < n_2 < n_3$

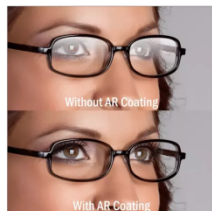


$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} n_2 2d$$

Recordemos que no hay diferencia de  $\pi$  radianes porque la reflexión interna es de un medio menos denso a uno más denso

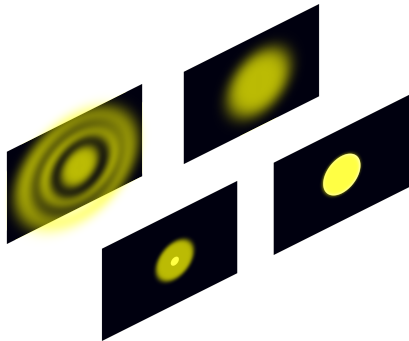
Buscando el primer mínimo, encontramos el **espesor mínimo** para tener **interferencia destructiva** para una dada longitud de onda así tenemos menor intensidad

$$d = \frac{\lambda}{4n_2}$$



# Difracción

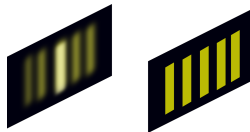
- ▶ La difracción es un fenómeno característico de las ondas producido cuando estas encuentran un obstáculo.
- ▶ Consiste en la aparición de oscilaciones de intensidad características, en torno al borde del obstáculo.
- ▶ El efecto se vuelve visible cuando el obstáculo tiene dimensiones conmensuradas con la longitud de onda.





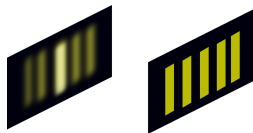
## Interferencia por múltiples rendijas

- ▶ Podemos calcular el caso de la interferencia de muchas rendijas equiespaciadas, asumiendo que los corrimientos de fase



## Interferencia por múltiples rendijas

- Podemos calcular el caso de la interferencia de muchas rendijas equiespaciadas, asumiendo que los corrimientos de fase



$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 \left[ \cos(\vec{k}_0 \vec{x} - \omega_0 t) \sum_{m=0}^{N-1} \cos(m\delta) - \sin(\vec{k}_0 \vec{x} - \omega_0 t) \sum_{m=0}^{N-1} \sin(m\delta) \right]$$

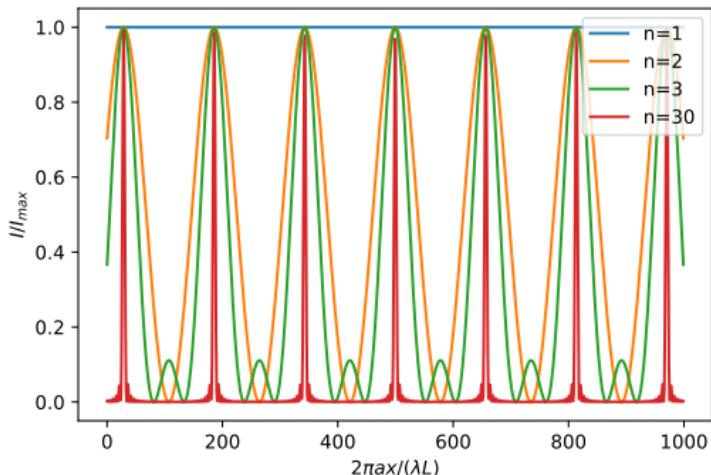
donde

$$\frac{\sum_{m=0}^{N-1} \cos(m\delta)}{\cos((N-1)\delta/2)} = \frac{\sum_{m=0}^{N-1} \sin(m\delta)}{\sin((N-1)\delta/2)} = \frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)} \text{ de manera que}$$

$$I = \varepsilon_0 c \langle |\vec{E}|^2 \rangle = I_0 \frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)}$$

Luego, el patrón de interferencia para  $N$  rendijas separadas por una distancia  $a$  tendrá la forma

$$I = I_0 \frac{\sin^2(N\pi ax/(\lambda L))}{\sin^2(\pi ax/(\lambda L))}$$



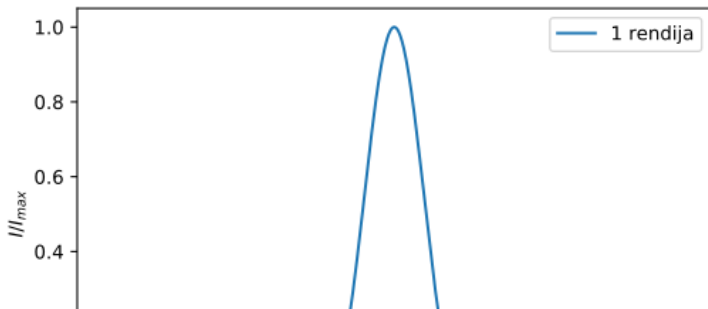
## Difracción de Fraunhofer

Por el principio de Huygens, una abertura rectangular de ancho  $w$  puede pensarse como el límite

$$N \rightarrow \infty, \quad a = w/N$$

con lo que se obtiene

$$I(x) = I_0 N^2 \frac{\sin^2(w\pi x/(\lambda L))}{\sin^2(w/N\pi x/(\lambda L))} = I_0(\lambda L) \frac{\sin^2(w\pi x/(\lambda L))}{w^2 \pi^2 x^2}$$

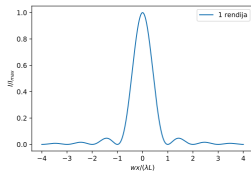


- ▶ Los mínimos de difracción se encuentran en

$$x_m = m \frac{L\lambda}{W} \quad m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$$

- ▶ Los máximos se encuentran entre pares de mínimos consecutivos, y son de la forma

$$X_m = \frac{\lambda L \beta_m}{\pi W} \quad \beta_m = \tan(\beta_m)$$



## Difracción por un agujero circular

- ▶ Volviendo a la difracción por una única abertura, un caso muy importante es el de la abertura circular.
- ▶ La intensidad para el patrón proyectado se distribuye en forma circular, y para un agujero de radio  $R$  tiene la forma

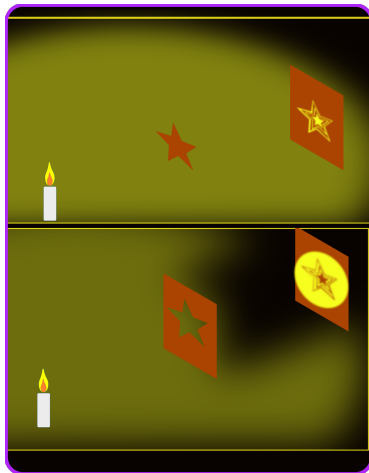
$$I(r) = I_0 \left( \frac{J_1(kRr/L)}{2kRr/L} \right)^2$$

donde  $J_1$  es la **función de Bessel** de orden 1.

- ▶ El primer mínimo de intensidad se localiza en  $r_1 = 1.22 \frac{\lambda}{2R}$

## Principio de Babinet

- ▶ El principio de Babinet establece que el patrón de difracción de un obstáculo es complementario al que se obtiene por una pantalla con el obstáculo recortado.
- ▶ Es una consecuencia del principio de superposición lineal de la Ecuación de ondas.



# Límite de difracción

- ▶ La difracción limita la resolución de objetos vistos a través de un sistema óptico.
- ▶ Para obtener mayores resoluciones se requieren
  - ▶ mayores diámetros en las lentes y espejos.
  - ▶ menores longitudes de onda.
- ▶ Debido al principio de Babinet, lo mismo aplica al intentar distinguir dos objetos separados por distancias menores a la longitud de onda de la luz usada para iluminarlos.



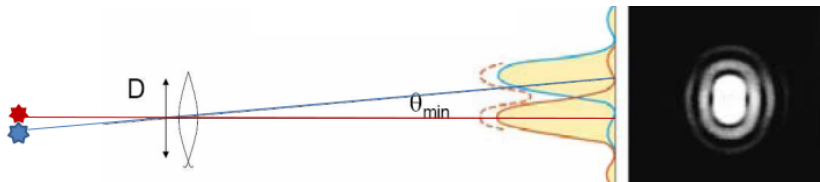
## Criterio de Rayleigh

- ▶ La difracción por aberturas circulares es de gran importancia porque el ojo y muchos instrumentos ópticos tienen este tipo de aberturas.
- ▶ La limitación en la resolución de las imágenes se cuantifica en términos del criterio de Rayleigh con el que la resolución límite de un sistema puede ser calculado:
- ▶ Para resolver dos objetos por una lente circular de diámetro  $D$ , la distancia mínima entre estos es aquella en la que el máximo de intensidad de la imagen de uno de ellos se localiza en la posición del primer mínimo de intensidad de la imagen del otro.

## Criterio de Rayleigh

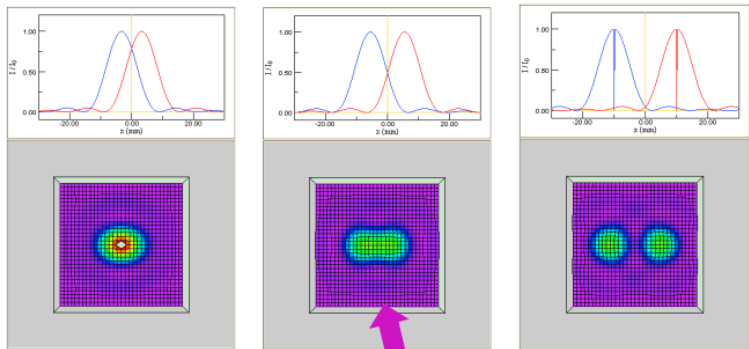
- ▶ La difracción por aberturas circulares es de gran importancia porque el ojo y muchos instrumentos ópticos tienen este tipo de aberturas.
- ▶ La limitación en la resolución de las imágenes se cuantifica en términos del criterio de Rayleigh con el que la resolución límite de un sistema puede ser calculado:
- ▶ Para resolver dos objetos por una lente circular de diámetro  $D$ , la distancia mínima entre estos es aquella en la que el máximo de intensidad de la imagen de uno de ellos se localiza en la posición del primer mínimo de intensidad de la imagen del otro.

$$\theta_R = 1,22 \frac{\lambda}{D}$$



# Poder resolvente

El hecho de que la imagen formada por una lente es un patrón de difracción es importante cuando se trata de resolver objetos distantes



Cuando la separación angular entre dos objetos es tal que el máximo central del patrón de difracción de uno de los objetos coincide con el primer mínimo del otro tenemos una condición para la *resolubilidad*

$$\theta_R = \text{sen}^{-1} \left( 1,22 \frac{\lambda}{D} \right) \approx 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

## El ojo humano y los telescopios

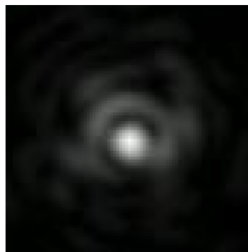
- ▶ Suponiendo  $\lambda = 500\text{nm}$ , y un diámetro de pupila de  $D = 3\text{mm}$ , entonces

$$\begin{aligned}\theta_R &= 1,22 \times \frac{5 \times 10^{-6}}{3 \times 10^{-3}} \text{rad} \quad (3) \\ &= 0,2\text{mrad} \approx 40'' \text{ de arco} \quad (4)\end{aligned}$$

- ▶ Idealmente, dos puntos separados por un milímetro, pueden resolverse hasta a 5 metros de distancia.
- ▶ Los defectos visuales acortan esta distancia.
- ▶ El espejo del telescopio espacial Hubble tiene un diámetro de 2,4m. Luego, su poder de resolución es en el visible de

$$\theta_R = 0,25\mu\text{rad} \approx 0,043'' \text{ de arco}$$

- ▶ Debido a la turbulencia atmosférica, un



## Cómo fotografiar un agujero negro

- ▶ Un agujero negro es un objeto astronómico tan masivo que la luz no puede escapar de su propia gravedad.
- ▶ Fue predicho por la teoría de la relatividad general de A. Einstein.
- ▶ El objeto tiene relevancia en astrofísica.
- ▶ Tiene un tamaño aparente de  $15'' \times 10^{-6} \approx 72\text{prad}$  de arco.
- ▶ Para obtener una fotografía con resolución fotográfica, se requiere resolver a la milésima de ese arco:  
 $\theta_R = 72\text{frad}$ .
- ▶  $D > 500\text{nm}/(72\text{frad}) \approx 7000\text{km}$  (El radio de la tierra es 6300km).



## Redes de difracción

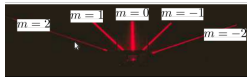
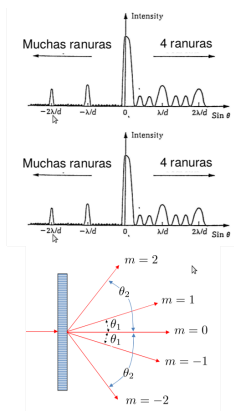
Consideremos ahora un arreglo periódico de perforaciones, o puntos reflectantes sobre una superficie.

- ▶ Si las perforaciones son de ancho  $w$ , la separación entre puntos sucesivos es  $a - w$  y la red es de tamaño  $W \gg a$ , los máximos secundarios de interferencia desaparecen y por lo tanto, la intensidad se proyecta en las direcciones principales:

$$a \sin(\theta) = m\lambda$$

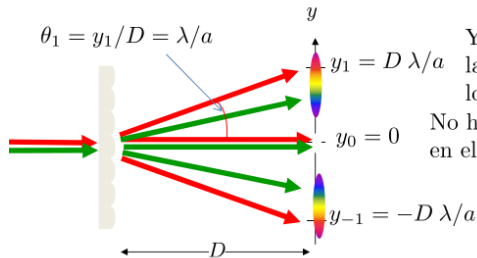
- ▶ como  $|\sin(\theta)| \leq 1$ ,  $|m| \leq \frac{a}{\lambda}$
- ▶ En esas direcciones, la intensidad queda modulada por el factor de difracción

$$I_m = \frac{\sin(mw\pi/a)^2}{(w\pi m/a)^2}$$



## Difracción de luz policromática

Dado que la posición angular de los órdenes de difracción depende de la longitud de onda  $\lambda$ , no coinciden sobre la pantalla los mismos órdenes distintos de cero para las diferentes longitudes de onda.



Ya que  $y_1$  depende de  $\lambda$ , se separan las diferentes longitudes de onda en los órdenes  $m = \pm 1$ .

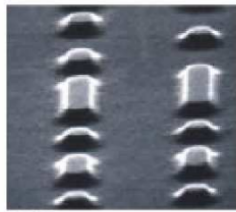
No hay dependencia de  $\lambda$  en el orden  $m = 0$ .

Cuanto mayor es la longitud de onda, mayor es la separación de las distintas longitudes de onda (colores) en los órdenes no nulos.

Las redes de difracción difractan diferentes longitudes de onda en diferentes direcciones, lo que permite medir los *espectros*.



## Un DVD como red de difracción



$10^{-6}$  m

Los puntos en un CD actúan como una red de difracción  
La cantidad de información que puede ser almacenada  
esta limitada por el diámetro del spot de difracción

- CD : 625 líneas/mm.
- 3,95GB DVD-R: 1250 líneas/mm.
- 4,7GB DVD-R 1351 líneas/mm.

