

TEMA 2

REPRESENTACIÓN Y RESPUESTA DE CIRCUITOS DE TIEMPO CONTINUO LINEALES E INVARIABLES EN EL TIEMPO

A partir de este tema y durante la primera parte de la asignatura nos concentraremos en circuitos LTI de tiempo continuo, es decir, "circuitos constituidos por la interconexión de fuentes independientes y elementos lineales invariantes en el tiempo". Debe destacarse el papel diferenciado jugado por las fuentes independientes: en sí se trata de elementos no-lineales y/o variables en el tiempo, y sus tensiones y/o intensidades juegan el papel de excitaciones de entrada al circuito.

Consideraremos, sin pérdida de generalidad el caso de una única excitación y una única respuesta, circuitos de una entrada y una salida (por el principio de superposición cualquier otro se puede reducir a éste).

2.1 Representación entrada-salida de sistemas LTI

La pregunta básica que surge es ¿cómo se relacionan entrada y salida en este tipo de circuitos?

Los componentes últimos de estos circuitos pueden modelarse mediante interconexiones de elementos de circuito (resistencias, condensadores, opamps, etc.). A este nivel la representación de la operación se realiza usando las leyes de Kirchoff y las relaciones constitutivas impuestas por los elementos. Sin embargo, en ocasiones será conveniente representar a un nivel de abstracción más alto, identificando un conjunto de bloques según la función que realicen y usando técnicas de grafos de flujo de señal, donde están implicados distintos operadores analógicos (integración, escalado, diferenciación, etc.) cuyas entradas y salidas están ligadas de forma algebraica, en función de la topología del circuito..

Como además, estamos considerando exclusivamente circuitos de parámetros concentrados (cuyas dimensiones son despreciables en comparación con las longitudes de onda

de las señales electromagnéticas que procesan), los circuitos LT.I. de tiempo continuo, tanto si se describen al nivel de las leyes de Kirchoff como mediante interconexión de bloques, quedan representados mediante ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes constantes (recordar que estamos considerando el caso de una única entrada y una única salida):

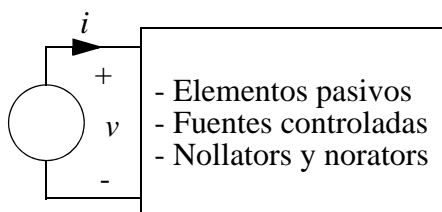
$$\sum_{i=0}^N \frac{dy^i}{dt^i} b_i = \sum_{j=0}^M \frac{dx^j}{dt^j} a_j \tag{2.1}$$

Dado un circuito y especificadas una entrada y una salida podemos llegar a una ecuación tal como la anterior aplicando algún método de análisis. La solución dependerá tanto de la entrada como de las condiciones iniciales en los elementos reactivos, lo que dará lugar a la descomposición de la respuesta en respuesta a entrada cero y respuesta a estado cero.

(hacer problema 1)

Dependiendo de la naturaleza física de la entrada y la salida podemos considerar hasta 6 situaciones distintas en el agrupamiento entrada-salida, que se ilustran en la Fig. 2.1.

Relaciones o características de punto



Admitancia

$$x(t)=v(t)$$

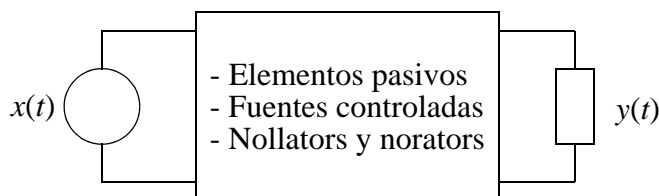
$$y(t)=i(t)$$

Impedancia

$$x(t)=i(t)$$

$$y(t)=v(t)$$

Relaciones o características de transferencia



Cortocircuito

$$x(t)=v(t)$$

- Transadmitancia

$$x(t)=i(t)$$

- Transferencia de corriente

Circuito abierto

$$x(t)=i(t)$$

- Transimpedancia

$$x(t)=v(t)$$

- Transferencia de tensiones

Figura 2.1: Tipos de relaciones entrada-salida.

2.2 Respuesta a entrada cero y estado cero

2.2.1 Respuesta a entrada cero en el dominio del tiempo

Se debe exclusivamente a las condiciones iniciales almacenadas en los elementos reactivos. El cálculo corresponde a la solución de la siguiente ecuación homogénea:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = 0 \quad (2.2)$$

La solución de (2.2) pasa por resolver la ecuación característica:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (2.3)$$

Las raíces de esta ecuación $\{s_1, s_2, s_3, \dots, s_n\}$ se denominan frecuencias naturales. Suponiendo que todas las frecuencias naturales son distintas la solución de (2.2) es:

$$y(t) = \sum_{j=1}^n k_j e^{s_j t} \quad (2.4)$$

donde es inmediato comprobar que la ecuación se satisface para cualquier conjunto de valores de k_j . Estos coeficientes se obtienen de las condiciones iniciales en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_1^{n-1} & s_2^{n-1} & s_3^{n-1} & \dots & s_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \dots \\ k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(0) \\ y^{(1)}(0) \\ \dots \\ y^{(n-1)}(0) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

donde

$$y^{(k)}(0) = \left. \frac{d^k y}{dt^k} \right|_{t=0} \quad (2.6)$$

Por ejemplo, para un caso de orden 1 se obtiene:

$$k_1 = y(0) \quad (2.7)$$

o para un caso de orden 2:

$$k_1 = \frac{1}{s_1 - s_2} (y'(0) - s_2 y(0))$$

$$k_2 = \frac{1}{s_2 - s_1} (y'(0) - s_1 y(0)) \quad (2.8)$$

En el caso de raíces múltiples de la ecuación característica debe cambiarse la solución general de la ecuación homogénea. Para una frecuencia s_0 de multiplicidad p se tendrá:

$$(k_1 + k_2 t + k_3 t^2 + \dots + k_p t^{p-1}) e^{s_0 t} \quad (2.9)$$

(hacer problema 2)

2.2.2 Respuesta a estado cero en el dominio del tiempo

Supongamos un circuito genérico lineal invariable en el tiempo con una única entrada y una salida, descrito como ya sabemos por:

$$\sum_{i=0}^N \frac{d^i y}{dt^i} b_i = \sum_{j=0}^M \frac{d^j x}{dt^j} a_j \quad (2.10)$$

La respuesta a estado cero da cuenta de la influencia de la entrada. Se calcula por tanto imponiendo:

$$y(0) = \frac{dy}{dt}(0) = \frac{d^2 y}{dt^2}(0) = \dots = \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}(0) = 0 \quad (2.11)$$

La forma general de la solución es:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = \sum_{i=1}^n k_i e^{s_i t} + y_p(t) \quad (2.12)$$

donde $y_h(t)$ es la solución general de la homogénea e $y_p(t)$ es una solución particular de la inhomogénea.

Para resolver se sigue el siguiente método: (a) proponer tentativamente una solución de la inhomogénea y (b) ajustar coeficientes.

(hacer problema 3)

2.2.2.1 Integral de convolución

La segunda cuestión básica a responder es: ¿puede expresarse la respuesta a estado cero para una excitación arbitraria a partir de la respuesta a una excitación simple? De donde se obtienen dos cuestiones derivadas: (1) ¿puede expresarse una excitación arbitraria como suma de excitaciones simples? y si es así, (2) ¿puede expresarse la respuesta del circuito como suma de las respuestas de las componentes de la excitación?

La respuesta a la segunda pregunta es claramente que sí pues si tenemos en cuenta que trabajamos con circuitos lineales podemos aplicar el principio de superposición. La primera se

puede responder también afirmativamente recurriendo al concepto de impulso y respuesta al impulso.

Consideremos un pulso de anchura Δ y altura $1/\Delta$ tal como se muestra en la Fig. 2.2 y descrito por la siguiente ecuación:

$$p_{\Delta}(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{1}{\Delta} & 0 < t < \Delta \\ 0 & t \geq \Delta \end{cases} \quad (2.13)$$

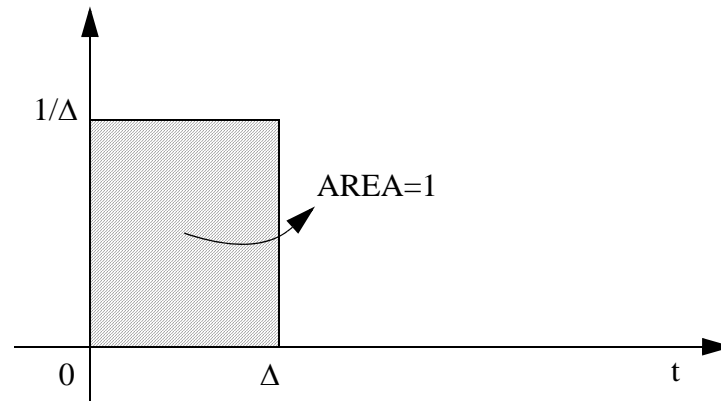


Figura 2.2: Pulso unitario.

Si imaginamos un proceso de ir disminuyendo Δ en el límite cuando $\Delta \rightarrow 0$ obtenemos el impulso: $p_{\Delta}(t) \rightarrow \delta(t)$. Así $\delta(t)$ se puede definir como:

$$\begin{aligned} \text{area} &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1 \\ \delta(t) &= 0 \quad t \neq 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Por la propiedad de muestreo podemos expresar una entrada arbitraria en función de impulsos:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad (2.15)$$

Por linealidad del sistema la salida queda expresada mediante una operación denominada convolución entre la entrada y la respuesta al impulso:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (2.16)$$

constituyendo lo que se denomina integral de convolución.

2.2.3 Respuesta a estado cero en el dominio de la frecuencia

A partir de la ecuación diferencial que describe todo sistema LTI hemos utilizado la solución en el dominio temporal para proporcionar la respuesta $y(t)$ para un $x(t)$ dado. Un método alternativo consiste en aplicar transformadas de Laplace a la ecuación diferencial para transformarla en una ecuación algebraica, solucionar el problema en el dominio frecuencial, es decir, obtener $Y(s)$ para un $X(s)$ dado y finalmente, aplicar la transformada inversa para obtener $y(t)$ para un $x(t)$ dado. Esta idea se muestra gráficamente en la Fig. 2.3.

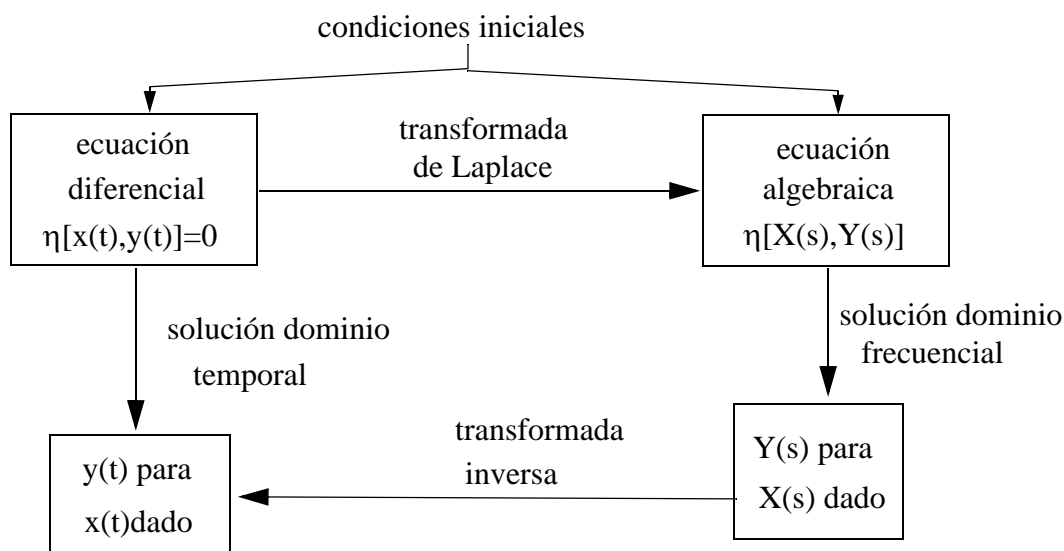
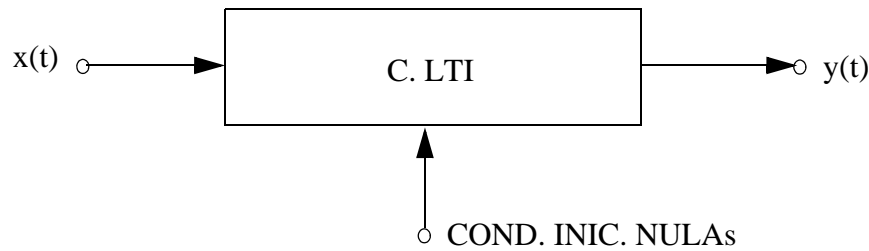


Figura 2.3:

Para calcular la respuesta a estado cero en el dominio de la frecuencia consideraremos, sin pérdida de generalidad, un circuito LTI con una entrada y una salida como se indica en la Fig. 2.4, que como sabemos aparece descrito por la ecuación:

$$\sum_{i=0}^N \frac{dy^i}{dt^i} b_i = \sum_{j=0}^M \frac{dx^j}{dt^j} a_j \quad (2.17)$$

**Figura 2.4:**

Tomando transformadas y como:

$$\begin{aligned} y(0^-) = y^{(1)}(0^-) = \dots = y^{(n-1)}(0^-) = 0 \\ x(0^-) = x^{(1)}(0^-) = \dots = x^{(n-1)}(0^-) = 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

se obtiene:

$$Y(s) = \frac{\sum_{j=0}^M a_j s^j}{\sum_{i=0}^N b_i s^i} X(s) = H(s)X(s) \quad (2.19)$$

En el dominio de la frecuencia la salida a estado cero se obtiene multiplicando a la entrada por la función de red correspondiente.

Hay que hacer notar que la función de red depende de la entrada y la salida consideradas. Un mismo circuito exhibirá distintas funciones de sistema.

Recordando de la sección anterior la expresión de la respuesta a estado cero en términos de la respuesta impulsiva:

$$y(t) = \int_{0^-}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (2.20)$$

Tomando transformadas de Laplace:

$$Y(s) = H(s)X(s) \quad (2.21)$$

por lo que la función de sistema correspondiente a una entrada y una salida dadas es la transformada de Laplace de la señal obtenida a la salida cuando se excita por la entrada con un impulso:

$$H(s) = L[h(t)] \quad (2.22)$$

2.2.4 Respuesta a entrada cero en el dominio de la frecuencia

Para calcular la respuesta completa habrá que calcular también la respuesta a entrada cero. Suponiendo frecuencias naturales distintas la respuesta completa será:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n k_i e^{s_i t} + L^{-1}[H(s)X(s)] \quad (2.23)$$

entrada cero estado cero

En el dominio de la frecuencia hay dos vías para calcular la respuesta a entrada cero:

1) Introduciendo las condiciones iniciales en la transformada de la derivada:

$$\frac{d^n}{dt^n} x(t) \leftrightarrow s^n X(s) - s^{n-1} x(0^-) - \dots - x^{(n-1)}(0^-) \quad (2.24)$$

y se obtendrá:

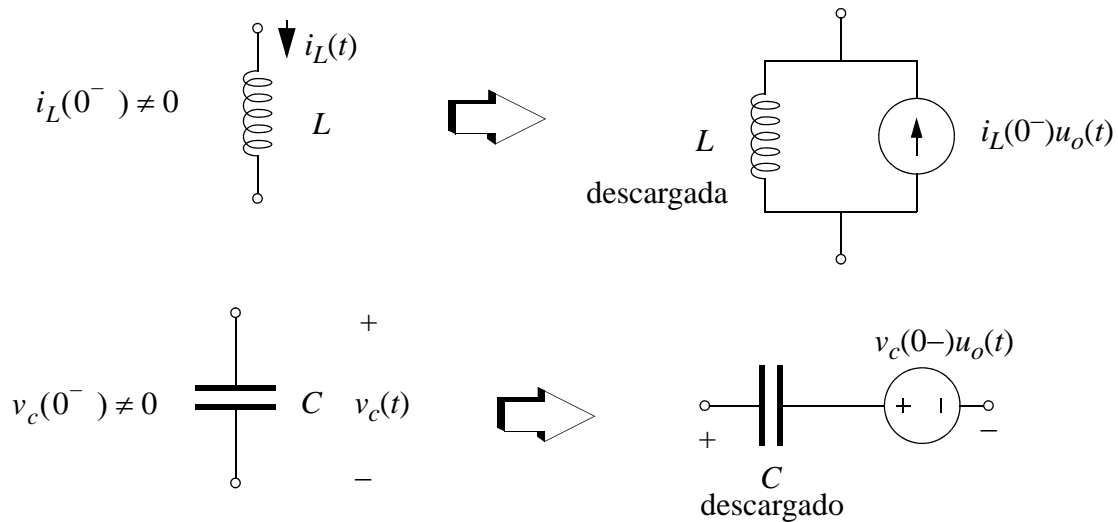
$$Y(s) = \frac{\sum_{j=0}^{i-1} a_j s^j}{N} X(s) + \frac{IC_y(s)}{N} \quad (2.25)$$

respuesta a la entrada respuesta al estado

2) Considerando las condiciones iniciales en los elementos reactivos como fuentes equivalentes y aplicando el principio de superposición, tal como se ilustra en la Fig. 2.5.

2.3 Componentes natural y forzada de la respuesta de sistemas

Aunque la respuesta de un sistema es una forma de onda única su estudio es más conveniente mediante su descomposición en dos partes. Las características de una parte son directamente atribuibles a los polos del sistema (generan un conjunto de formas de onda que dependen de la naturaleza intrínseca del circuito) mientras que las de la otra parte están directamente relacionadas con la excitación (alteran los parámetros de las ondas de la

**Figura 2.5:**

excitación). Aunque ambas partes no son independientes entre sí es posible ejercer un control sobre ellas mediante una selección adecuada de excitaciones y sistemas. Cualquiera de las partes o ambas pueden hacerse cero a voluntad. Por otra parte, la forma de onda de una de las partes puede aproximarse a la de la otra y exhibir resonancia. Veremos también que en la mayoría de las aplicaciones la parte proveniente de los polos del sistema se anula con el tiempo. Por tanto, si la entrada es una sinusoidal la salida en estado estacionario es también una sinusoidal. Las dos ondas sinusoidales tienen la misma frecuencia pero difieren en amplitud y fase.

La función de sistema $H(s)$ relaciona la excitación $X(s)$ con la respuesta $Y(s)$ mediante

$$Y(s) = H(s)X(s) \quad (2.26)$$

Si el circuito es lineal, de parámetros concentrados, invariante en el tiempo, $H(s)$ es una función racional real. En gran parte de las situaciones $X(s)$ es también una función racional.

Si $H(s)$ y $X(s)$ son funciones racionales entonces la respuesta $Y(s)$ es también una función racional:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} \quad (2.27)$$

donde p_1, p_2, \dots, p_n representan los polos finitos de la respuesta. Supongamos que $N(s)$ es de menor orden que $D(s)$. Si suponemos que todos los polos son simples, la expansión de $Y(s)$ en fracciones es,

$$Y(s) = \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2}{s-p_2} + \dots + \frac{K_n}{s-p_n} = \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s-p_i} \quad (2.28)$$

donde

$$K_i = Y(s)(s-p_i) \Big|_{s=p_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.29)$$

y K_i se denomina el residuo del polo p_i . Ya que $Y(s)$ es una función racional con coeficientes reales, p_i y K_i si son complejos, son complejos conjugados.

La naturaleza de la respuesta puede estudiarse tomando la transformada inversa de (2.28),

$$y(t) = K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + \dots + K_n e^{p_n t} = \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t} \quad (t > 0) \quad (2.30)$$

Si para K_i complejo se expresa como $|K_i|e^{j\theta_i}$, considerando k polos complejos y $(n-k)$ polos reales, (2.30) puede escribirse,

$$y(t) = \sum_{i=1}^k |K_i| e^{\alpha_i t} e^{j(\beta_i t + \theta_i)} + \sum_{i=k+1}^n K_i e^{\alpha_i t} = \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} 2|K_i| e^{\alpha_i t} \cos(\beta_i t + \theta_i) + \sum_{i=k+1}^n K_i e^{\alpha_i t} \quad (2.31)$$

Esta ecuación muestra que si se excita un sistema con una fuente variable en el tiempo cuya transformada es una función racional y los polos de la respuesta son simples, entonces la respuesta en el dominio del tiempo es la suma de dos clases de formas de onda: sinusoides con amplitud modulada de forma exponencial y exponenciales. Las sinusoides pueden crecer en amplitud con el tiempo, decrecer o permanecer constante, al igual que las exponenciales. Puede observarse que existe una relación directa entre la localización de los polos en el plano s y la evolución temporal de las formas de onda. Nótese la naturaleza cualitativa distinta de las distintas componentes de la respuesta y su relación con la posición de los polos en el plano s . Para polos en el semiplano de la izquierda la correspondiente componente tiende a 0 para $t \rightarrow \infty$. Para polos en el semiplano de la derecha la correspondiente componente tiende a ∞ para $t \rightarrow \infty$. Así, un polo en el semiplano de la izquierda no influye en el régimen estacionario mientras que uno en el semiplano de la derecha determina prácticamente dicho régimen estacionario. Respecto a la influencia de los ceros, éstos afectan a k_i y $k_i e^{j\theta_i}$ controlando así la amplitud y el valor inicial de las distintas componentes de la respuesta. Aunque es sencillo evaluar la respuesta debida a términos individuales la visualización de la respuesta completa puede ser difícil si se compone de muchos términos con diferentes amplitudes, frecuencias y constantes de tiempo.

Los polos de la respuesta $Y(s)$ se dividen en polos de la función de sistema y polos de la excitación. Puede expresarse explícitamente:

$$Y(s) = X(s)H(s) = \frac{N(s)}{D_n(s)D_f(s)} = \frac{N(s)}{(s-p_{n1})(s-p_{n2})\dots(s-p_{f1})(s-p_{f2})\dots} \quad (2.32)$$

donde se usa el subíndice n para los polos de la función de sistema (polos naturales) y f para los polos de la excitación (polos forzados). Si suponemos que todos los polos son simples y que $N(s)$ es de menor orden que $D(s)$ expandiendo parcialmente en fracciones:

$$Y(s) = \left(\frac{K_{n1}}{s-p_{n1}} + \frac{K_{n2}}{s-p_{n2}} + \dots \right) + \left(\frac{K_{f1}}{s-p_{f1}} + \frac{K_{f2}}{s-p_{f2}} + \dots \right) = Y_n(s) + Y_f(s) \quad (2.33)$$

$Y_n(s)$ se denomina la parte natural de la respuesta dado que los polos asociados con $Y_n(s)$ nacen del propio sistema y sus valores no tienen nada que ver con la excitación; son naturales o característicos del circuito. $Y_f(s)$ es la parte forzada de la respuesta, dado que sus polos dependen de los polos de la excitación y no tienen nada que ver con el circuito; los polos de la excitación fuerzan al sistema a producir la respuesta. En el dominio del tiempo (2.33) corresponde a,

$$y(t) = (K_{n1}e^{p_{n1}t} + K_{n2}e^{p_{n2}t} + \dots) + (K_{f1}e^{p_{f1}t} + K_{f2}e^{p_{f2}t} + \dots) = y_n(t) + y_f(t) \quad (2.34)$$

Las formas de onda de los términos individuales de la componente natural $y_n(t)$ están únicamente determinadas por el propio sistema mientras que los términos individuales de $y_f(t)$ tienen formas de onda del mismo aspecto de las que componen la excitación. Para tener alguna respuesta el sistema debe ser excitado. Una vez forzado el sistema responde de dos maneras: revela su propio comportamiento característico en la forma de la respuesta natural y exhibe las características de la excitación en la forma de la respuesta forzada.

Un error común consiste en pensar que un sistema lineal con una excitación sinusoidal siempre produce una respuesta sinusoidal. La respuesta es sinusoidal sólo cuando los términos correspondientes a los polos del sistema (parte natural de la respuesta) son cero. Esto puede que no ocurra nunca o puede que ocurra después de un cierto tiempo. Por ejemplo, cuando los polos del sistema están en el semiplano izquierdo del plano s la parte natural se desvanece y sólo entonces la respuesta es realmente sinusoidal.

2.4 Polos y ceros de la función de red

Las funciones de red son funciones racionales en la frecuencia compleja s . Esto es una propiedad general para circuitos lineales, de parámetros concentrados invariables en el tiempo, en los cuales se obtienen siempre funciones de sistema que son cocientes de dos polinomios en s con coeficientes reales

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0} \quad (2.35)$$

Las propiedades de estas funciones de sistema racionales resulta de interés referirlas a las raíces de los polinomios del numerador y del denominador. El conjunto de tales raíces se denominan *frecuencias críticas del circuito*, mientras que es usual referirse a los polos con el término *frecuencias naturales del circuito*. Conocidos el conjunto de frecuencias críticas del circuito para una entrada y una salida dada la correspondiente función de sistema puede expresarse en forma factorizada como sigue:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = K \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \quad (2.36)$$

Aparte de las frecuencias críticas, en el caso de que $n \neq m$ es usual decir también que la función de sistema presenta polos o ceros en el infinito,

$$H(s)|_{s \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{a_m}{b_n} s^{m-n} \quad (2.37)$$

de manera que si $m > n$ $H(s) \rightarrow \infty$ y se dice que la función de sistema presenta $m-n$ polos en el ∞ , y si $m < n$ $H(s) \rightarrow 0$ y se dice que la función de sistema presenta $n-m$ ceros en el infinito.

Para un circuito activo las frecuencias críticas pueden estar en cualquier posición en el plano complejo y pueden producirse con cualquier multiplicidad. La única *restricción* es que las *frecuencias críticas complejas deben aparecer por pares complejos conjugados*, lo que es una consecuencia del hecho de que los coeficientes tanto del polinomio del numerador como del denominador son reales. Para demostrarlo consideremos una raíz compleja $s = -a - jb$ que corresponde al factor $(s + a + jb)$ en la función de sistema. El término jb haría aparecer coeficientes complejos en el polinomio si no existiera una raíz compleja $s = -a + jb$. El producto de ambas:

$$(s + a + jb)(s + a - jb) = s^2 + 2as + a^2 + b^2 \quad (2.38)$$

que tiene sólo coeficientes reales.

2.4.1 Estabilidad

Las posiciones de las frecuencias críticas determinan los comportamientos cuantitativos y cualitativos de los circuitos. En particular, por lo que se refiere a propiedades cualitativas, una de gran importancia es la *estabilidad*. Esta propiedad se refiere a que la respuesta del circuito

permanezca acotada bajo la hipótesis de que la excitación permanezca también acotada. Una condición necesaria para estabilidad es que la respuesta impulsiva del circuito permanezca acotada, lo cual se puede traducir en las siguientes condiciones sobre las localizaciones de las frecuencias naturales:

- a) No pueden existir frecuencias naturales en el semiplano de la derecha del plano s .
- b) No pueden existir polos múltiples sobre el eje imaginario.

Veamos que ambas situaciones producen componentes de la respuesta impulsiva que no permanecen acotadas.

Frecuencias naturales en el semiplano derecho del plano s

Consideremos un polo real. La función de transferencia se puede expresar como:

$$H(s) = \frac{k}{s-p} + \frac{N'(s)}{D'(s)} \quad (2.39)$$

antitransformando al dominio del tiempo:

$$h(t) = ke^{pt} + h'(t) \quad (2.40)$$

El primer término no permanece acotado en el caso que $p > 0$.

Consideremos ahora un par de polos complejos conjugados. La función de transferencia:

$$H(s) = \frac{ke^{j\theta}}{s-\alpha+j\beta} + \frac{ke^{-j\theta}}{s-\alpha-j\beta} + \frac{N'(s)}{D'(s)} \quad (2.41)$$

y antitransformando al dominio del tiempo:

$$h(t) = 2ke^{\alpha t} \cos(\beta t + \theta) + h'(t) \quad (2.42)$$

donde el primer término no permanece acotado si $\alpha > 0$.

Polos múltiples sobre el eje imaginario

Consideremos primero el caso en que se encuentran los polos múltiples en $s=0$. La función de transferencia se puede escribir:

$$H(s) = \frac{k}{s^q} + H'(s) \quad (2.43)$$

y antitransformando al dominio del tiempo:

$$h(t) = \frac{k}{(q-1)!} t^{q-1} + h'(t) \quad (2.44)$$

que no se mantiene acotado. Si consideramos ahora polos imaginarios la función de transferencia se puede escribir:

$$H(s) = \frac{ke^{j\theta}}{(s+j\omega)^q} + \frac{ke^{-j\theta}}{(s-j\omega)^q} + H'(s) \quad (2.45)$$

y antitransformando:

$$h(t) = \frac{2k}{(q-1)!} t^{q-1} \cos(\omega t + \theta) + h'(t) \quad (2.46)$$

La evaluación numérica de las posiciones de las raíces para determinar si un sistema es estable o no requiere un ordenador cuando el grado del polinomio es grande.

2.4.2 Criterio de Routh-Hurwitz

El criterio de Routh proporciona condiciones necesarias (todos los coeficientes no nulos y del mismo signo) y suficientes (que no haya cambios de signo en la primera columna de la tabla que se forma como consecuencia de aplicar el criterio) para estabilidad. El número de cambios de signo en la primera columna de la tabla indica el número de raíces del polinomio característico que están situados en el semiplano derecho. La construcción de la tabla para la ecuación resultante de igualar a cero el denominador de la función de sistema:

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad (2.47)$$

(notar que hemos renombrado los coeficientes)

se realiza de la siguiente forma:

s^n	a_0	a_2	a_4	a_6	\dots	
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	\dots	
s^{n-2}	B_1	B_3	B_5	\dots		(2.48)
s^{n-3}	C_1	C_3	C_5	\dots		
\dots			\dots			

donde:

$$\begin{aligned}
B_1 &= \frac{1}{a_1}(a_1a_2 - a_0a_3) \\
B_3 &= \frac{1}{a_1}(a_1a_4 - a_0a_5) \\
B_5 &= \frac{1}{a_1}(a_1a_6 - a_0a_7) \\
&\dots \\
C_1 &= \frac{1}{B_1}(B_1a_3 - a_1B_3) \\
&\dots
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Si se obtiene un cero en la primera columna se puede invertir el orden de los coeficientes del polinomio (2.47).

Surge un caso especial cuando aparece una fila que solamente contiene ceros. Esto significa que la ecuación característica tiene al menos un par de raíces de igual magnitud y signo opuesto. Se puede continuar el proceso utilizando un polinomio auxiliar formado por los elementos de la última fila no cero de la tabla y colocando en lugar de la fila de ceros las derivadas de este polinomio. El polinomio auxiliar es un polinomio par. La ecuación obtenida igualando a cero el polinomio auxiliar proporciona las raíces de la ecuación característica de igual magnitud y signo opuesto. Con la tabla así construída el número de cambios de signo en la primera columna corresponde con el número de raíces en el semiplano derecho.

2.4.3 Funciones de fase mínima y no mínima

Hemos dicho que las funciones de red de sistemas estables no tienen polos en el semiplano derecho del plano s y los polos en el eje $j\omega$ deben ser simples. Sin embargo, no hemos impuesto ningún tipo de restricciones sobre los ceros. Según la posición donde se encuentren da lugar a una clasificación de funciones que tendrá gran importancia en el diseño de filtros.

Cuando la función de red $H(s)$ tiene todos los ceros en el semiplano izquierdo o el eje $j\omega$ del plano s se dice que es de *fase mínima*. Si no sucede así se dice que la función es de fase no mínima. Para mostrar que la función de fase mínima tiene la mínima fase posible para una característica de magnitud dada consideremos, por ejemplo, un cero real en el semiplano izquierdo y su imagen especular en el semiplano derecho. Las dos funciones de sistema correspondientes son:

$$H_1(s) = \frac{s + \sigma}{s + p} \quad H_2(s) = \frac{s - \sigma}{s + p} \quad (2.50)$$

donde σ y p son mayores que 0.

Tienen la misma magnitud:

$$|H_1(j\omega)| = |H_2(j\omega)| = \frac{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}}{\sqrt{p^2 + \omega^2}} \quad (2.51)$$

pero sus fases son diferentes:

$$\phi_1 = \text{atan} \frac{\omega}{\sigma} - \text{atan} \frac{\omega}{p} \quad \phi_2 = \pi - \text{atan} \frac{\omega}{\sigma} - \text{atan} \frac{\omega}{p} \quad (2.52)$$

y su diferencia:

$$\phi_2 - \phi_1 = \pi - 2 \text{atan} \frac{\omega}{\sigma} \geq 0 \quad (2.53)$$

ya que $\text{atan}(\omega/\sigma) \leq \pi/2$.

En general, cualquier función de fase no mínima con ceros en el semiplano derecho puede expresarse como el producto de una función pasa todo que tiene dichos ceros y una función de fase mínima que no los tiene. Esto queda ilustrado gráficamente en los diagramas de la Fig. 2.6.

Una función pasa todo es un tipo especial de función de fase no mínima en la que los polos y ceros se encuentran en posiciones especulares respecto al eje $j\omega$. Claramente a lo largo del eje imaginario una función pasa todo tiene magnitud unidad para cualquier valor de ω pero la fase depende de la frecuencia. Por tanto, puede decirse, de acuerdo con la Fig. 2.6, que una función de fase no mínima y la de fase mínima correspondiente tienen la misma magnitud y difieren en fase precisamente en la fase de la función pasa todo.

2.5 Respuesta forzada en régimen sinusoidal estacionario

Un gran número de circuitos son diseñados con polos en el semiplano izquierdo del plano s y excitados con una señal sinusoidal como se muestra en la Fig. 2.7. En este caso, la respuesta natural se desvanece y permanece la respuesta forzada. La atención entonces se centra en estudiar cómo el circuito procesa la señal de entrada para proporcionar la respuesta forzada sinusoidal deseada, que es la respuesta que permanece en estado estacionario.

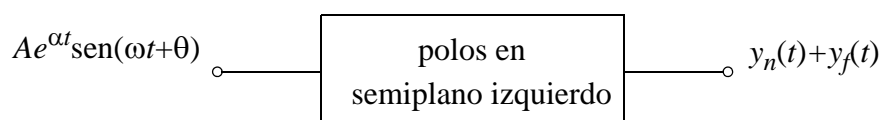


Figura 2.7: Circuito genérico excitado por una señal sinusoidal.

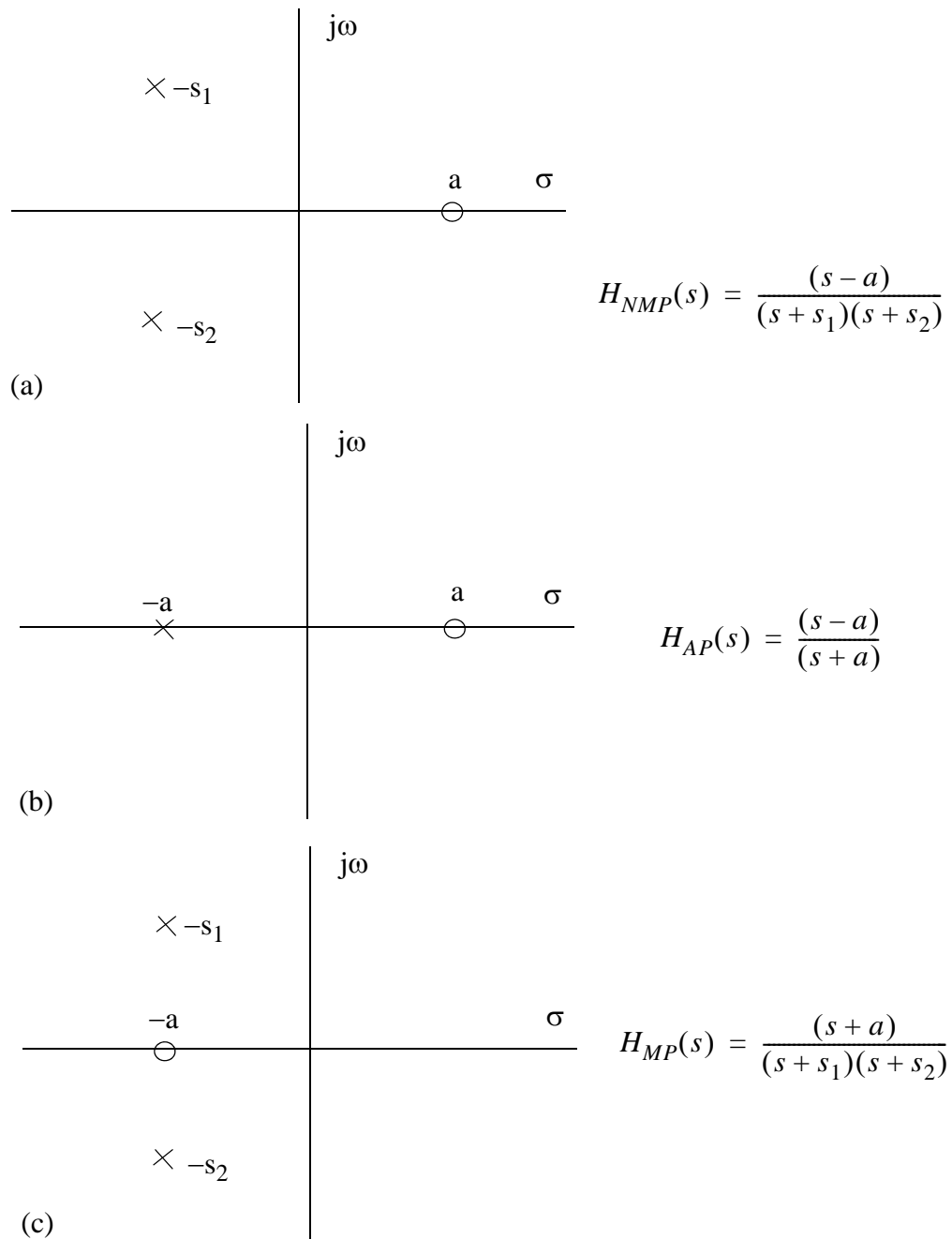


Figura 2.6: Diagramas polo-cero para (a) función de fase no mínima, (b) función pasa todo y (c) función de fase mínima.

La transformada de la excitación es:

$$X(s) = \frac{A\omega \cos \theta}{(s - \alpha)^2 + \omega^2} + \frac{A(s - \alpha) \sin \theta}{(s - \alpha)^2 + \omega^2} \quad (2.54)$$

La respuesta viene dada por:

$$Y(s) = H(s)X(s) = H(s) \frac{A(s - \alpha) \sin \theta + A \omega \cos \theta}{(s - \alpha)^2 + \omega^2} \quad (2.55)$$

Dado que sólo nos interesa la respuesta forzada sólo hay que considerar los términos debidos a los polos en $\alpha \pm j\omega$:

$$Y_f(s) = \frac{kA}{s - \alpha - j\omega} + \frac{\bar{k}A}{s - \alpha + j\omega} \quad (2.56)$$

donde

$$k = H(\alpha + j\omega) \frac{\omega \cos \theta + j\omega \sin \theta}{2j\omega} = \frac{|H(\alpha + j\omega)| e^{j(\theta + \theta_H)}}{2j} \quad (2.57)$$

De este modo:

$$Y_f(s) = \frac{|H(\alpha + j\omega)|}{2} A \left[\frac{e^{j(\theta + \theta_H - \frac{\pi}{2})}}{s - \alpha - j\omega} + \frac{e^{-j(\theta + \theta_H - \frac{\pi}{2})}}{s - \alpha + j\omega} \right] \quad (2.58)$$

y la respuesta forzada en el dominio del tiempo es:

$$y_f(t) = A |H(\alpha + j\omega)| e^{\alpha t} \sin(\omega t + \theta + \theta_H) \quad (2.59)$$

El sistema procesa la excitación sinusoidal haciendo dos cosas:

- Modifica la amplitud de la señal de entrada en un factor $|H(\alpha + j\omega)|$
- Modifica la fase en un factor $\theta_H = \arg[H(\alpha + j\omega)]$

En particular, los resultados anteriores son aplicables a una señal puramente sinusoidal:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \theta) \quad (2.60)$$

2.5.1 Interpretación geométrica

Es interesante expresar los cambios que se producen en la señal de excitación a partir de los polos y los ceros de la función de sistema. Supongamos un circuito lineal invariable con el tiempo excitado por una señal sinusoidal, como la mostrada en (2.60) donde ω es variable. Si la función de sistema es $H(s)$ la respuesta forzada es:

$$y(t) = A |H(j\omega)| \sin(\omega t + \theta + \theta_H) \quad (2.61)$$

Podemos obtener una interpretación geométrica de la contribución de cada polo y cada cero de $H(s)$ a la respuesta frecuencial (para $s=j\omega$):

$$H(j\omega) = K \frac{\prod_{i=1}^n (j\omega - z_i)}{\prod_{j=1}^m (j\omega - p_j)} \quad (2.62)$$

Consideremos el factor $(j\omega - s_i)$ donde s_i puede ser un cero, $s=z_i$, o un polo, $s=p_i$. Dado que s_i es en general complejo puede expresarse en función de su parte real e imaginaria:

$$s_i = \alpha_i + j\beta_i \quad (2.63)$$

El factor $(j\omega - s_i)$ es entonces

$$-\alpha_i + j(\omega - \beta_i) = M_i e^{j\theta_i} \quad (2.64)$$

donde,

$$M_i = \sqrt{\alpha_i^2 + (\omega - \beta_i)^2} \quad \theta_i = \text{atan} \frac{\omega - \beta_i}{-\alpha_i} \quad (2.65)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= K \frac{M_{z1} e^{j\theta_{z1}} M_{z2} e^{j\theta_{z2}} \dots M_{zm} e^{j\theta_{zm}}}{M_{p1} e^{j\theta_{p1}} M_{p2} e^{j\theta_{p2}} \dots M_{pn} e^{j\theta_{pn}}} = \\ &= K \frac{M_{z1} M_{z2} \dots M_{zm}}{M_{p1} M_{p2} \dots M_{pn}} e^{j(\theta_{z1} + \theta_{z2} + \dots + \theta_{zm} - \theta_{p1} - \theta_{p2} - \dots - \theta_{pn})} = M(\omega) e^{j\theta(\omega)} \end{aligned} \quad (2.66)$$

donde $M(\omega)$ es la magnitud de $H(j\omega)$ y $\theta(\omega)$ es la fase.

En el plano s el factor $(j\omega - z_1)$ representa el vector de z_1 a $j\omega$, $(j\omega - p_1)$ el vector de p_1 a $j\omega$, etc. Estos vectores se muestran en la Fig. 2.8.

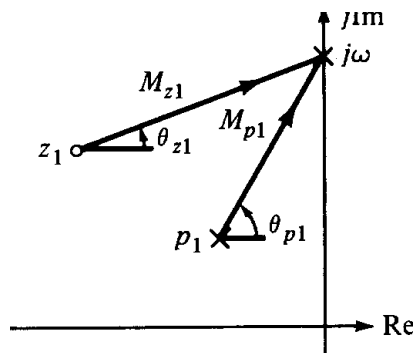


Figura 2.8: Interpretación geométrica

La función magnitud $M(\omega)$ es K veces el producto de las distancias de los ceros a $j\omega$ dividido por el producto de las distancias de los polos a $j\omega$. La función fase $\theta(\omega)$ es la suma de los ángulos de los ceros a $j\omega$ menos la suma de los ángulos de los polos a $j\omega$. Dado que los cambios de magnitud y ángulo debido a los componentes individuales puede observarse mediante el diagrama de polos y ceros se puede dibujar por inspección las curvas de magnitud y fase en función de la frecuencia.

2.5.2 Diagramas de Bode

Una herramienta gráfica más poderosa que la representación polar es usar diagramas de Bode. La idea es expresar la contribución total de las frecuencias críticas como una suma de contribuciones. A este respecto, y dado que la fase ya está dada por definición como suma de contribuciones usaremos una representación logarítmica para la magnitud. De manera que nos queda:

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20\log K + \sum_{i=1}^M 20\log M_{z_i} - \sum_{i=1}^N 20\log M_{p_i} \quad (2.67)$$

$$\theta_H = \sum_{i=1}^M \theta_{z_i} - \sum_{i=1}^N \theta_{p_i}$$

El cálculo exacto de los diagramas de magnitud y fase, o diagramas de Bode, es un proceso tedioso. Sin embargo, puede obtenerse una representación aproximada con relativa facilidad. En forma factorizada, $N(s)$ y $D(s)$ se componen de los siguientes 4 tipos de términos:

- Un término constante K .
- El factor s , que representa una raíz en el origen.
- El factor $1+s/\omega_o$, que representa una raíz real.
- El factor s^2+as+b , que representa raíces complejas conjugadas.

Dado que la magnitud en dB de un producto de términos es igual a la suma de las magnitudes de los factores, el problema de representación de la magnitud $H(j\omega)$ se reduce a la representación de los cuatro términos básicos. La cuestión ahora es familiarizarse con el tipo de representaciones que se obtienen para cada frecuencia crítica.

a) El término constante K

La magnitud $20\log|K|$ es positiva para $|K|>1$ y negativa para $|K|<1$. La función fase es 0° para $K>0$ y 180° para $K<0$. Ambas se muestran en la Fig. 2.9.

b) Polo o cero en el origen

Consideremos el caso de un polo:

$$H(s) = \frac{1}{s}H'(s) \quad (2.68)$$

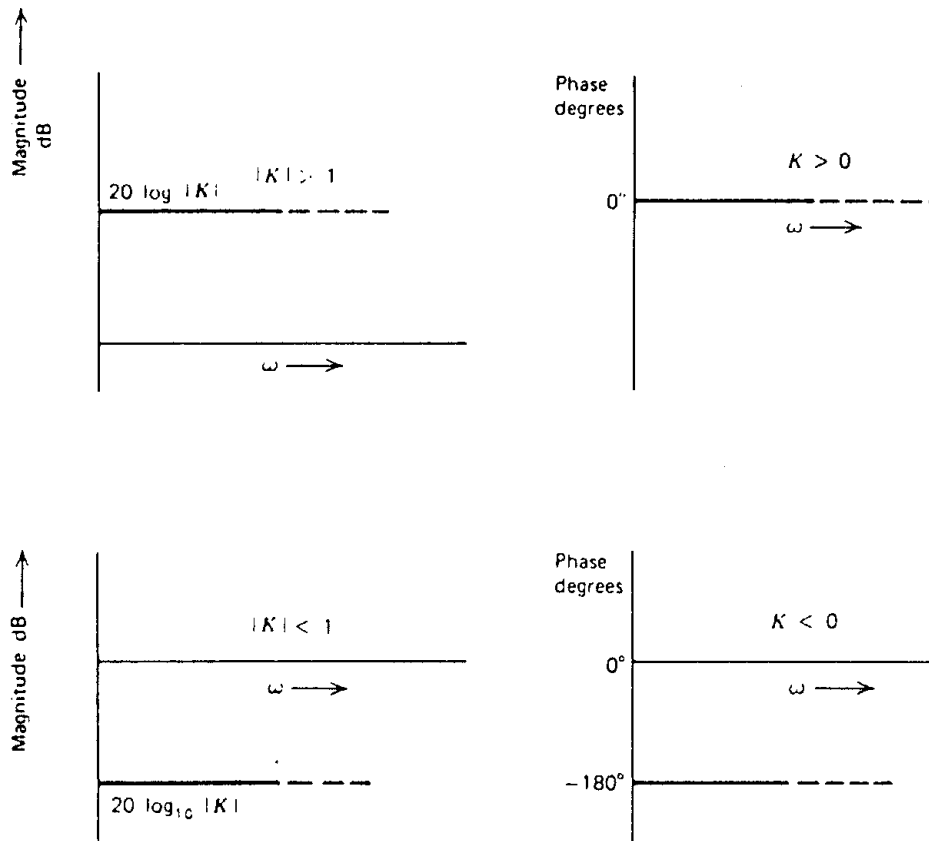


Figura 2.9: Diagrama de magnitud y fase para un término constante K .

La magnitud y fase debidas a un polo en el origen son:

$$20\log|H(j\omega)| = 20\log\left|\frac{1}{j\omega}\right| + \text{resto} = -20\log\omega + \text{resto} \quad (2.69)$$

$$\theta_H(\omega) = \text{atan}(0) - \text{atan}\left(\frac{\omega}{0}\right) + \text{resto} = -\frac{\pi}{2} + \text{resto}$$

Su representación se muestra en la Fig. 2.10(a). Puede observarse que la magnitud disminuye 20 dB cuando se multiplica la frecuencia por 10, o bien 6dB cuando se multiplica por 2. Luego la pendiente es -20dB/decada o -6dB/octava . La Fig. 2.10(b) muestra las mismas representaciones para el caso de un cero en el origen.

c) Polo o cero real

Consideremos el caso de un polo real:

$$H(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_o}} H'(s) \quad (2.70)$$

La magnitud y fase para un polo simple son

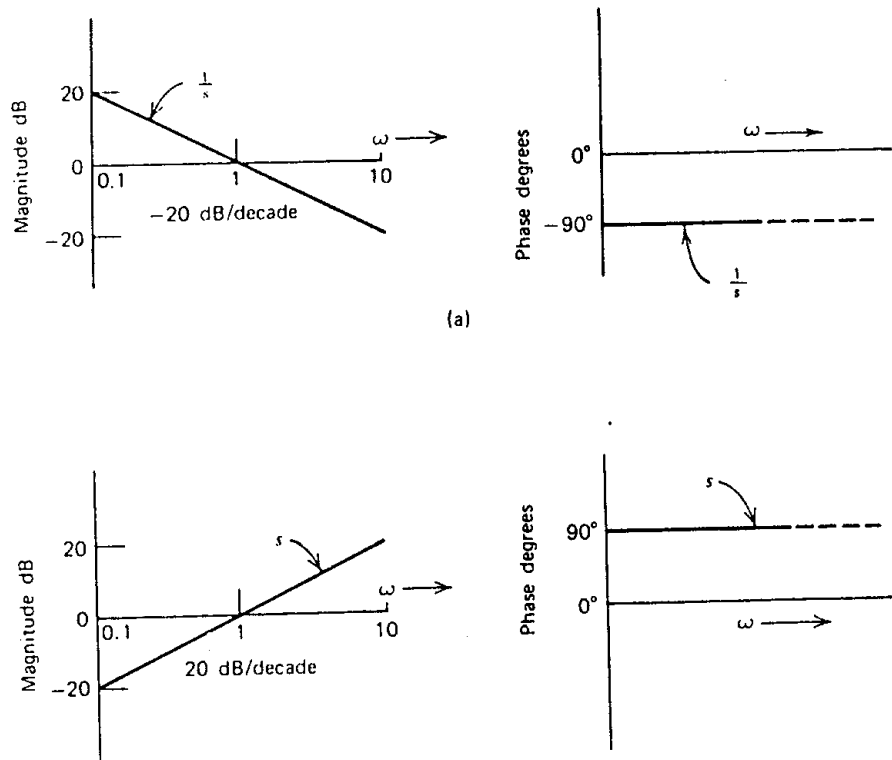


Figura 2.10: Polo o cero en el origen.

$$M_{dB} = -20 \log \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_o} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.71)$$

$$\theta = -\text{atan} \left(\frac{\omega}{\omega_o} \right)$$

La representación de estas funciones se muestra en la Fig. 2.11(b). A bajas frecuencias $\omega \ll \omega_o$, y a altas $\omega \gg \omega_o$ la función $H(s)$ puede aproximarse mediante las siguientes asíntotas:

$$M_{dB} = \begin{cases} 0 & \omega \ll \omega_o \\ -20 \log \omega + 20 \log \omega_o & \omega \gg \omega_o \end{cases} \quad (2.72)$$

$$\theta = \begin{cases} 0 & \omega \ll \omega_o \\ -\pi/2 & \omega \gg \omega_o \end{cases}$$

Para frecuencias suficientemente superiores a la frecuencia crítica ω_o la magnitud decae 20 dB/década. Junto a estas asíntotas interesa tener asimismo el valor de la magnitud y la fase en la frecuencia crítica ω_o :

$$M_{dB}(\omega_o) = -3dB \quad (2.73)$$

$$\theta(\omega_o) = -\pi/4$$

Otros puntos críticos son:

$$\omega = \omega_o/10 \quad \begin{cases} M_{dB} = -0,043dB \\ \theta = -5,7^\circ \end{cases} \quad (2.74)$$

$$\omega = 10\omega_o \quad \begin{cases} M_{dB} = -20,043dB \\ \theta = -84.2^\circ \end{cases}$$

Puede observarse como el error de fase es más importante que el de magnitud.

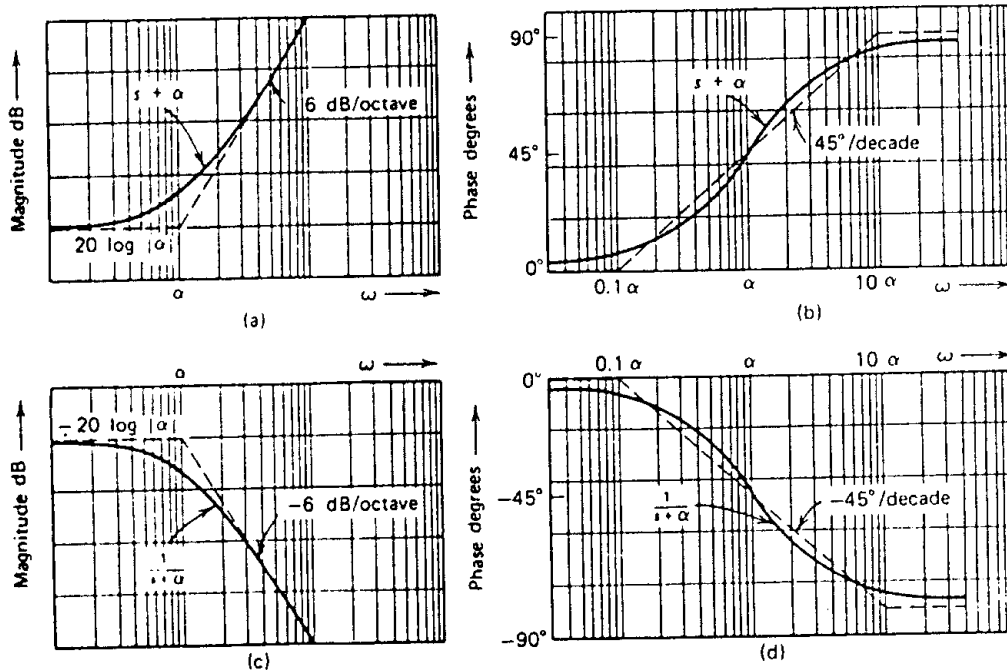


Figura 2.11: Diagramas de (a) magnitud y (b) fase para $s+\alpha$. Diagramas de (c) magnitud y (d) fase para $1/(s+\alpha)$.

La contribución de ceros en el semiplano de la izquierda es la complementaria de la de los polos. La magnitud aumenta 20dB/década y la fase aumenta asimismo. Si el cero está en el semiplano de la derecha la fase es la misma que para un polo mientras que la magnitud sigue la misma evolución que la de un cero en el semiplano de la izquierda.

d) Polos complejos conjugados

Consideremos un par de polos complejos,

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + s\frac{\omega_o}{Q} + \omega_o^2} \quad (2.75)$$

cuyo significado de parámetros se ilustra en la Fig. 2.12.

Nos vamos a referir a la representación que utiliza el factor de calidad y normalizamos respecto a la frecuencia de resonancia:

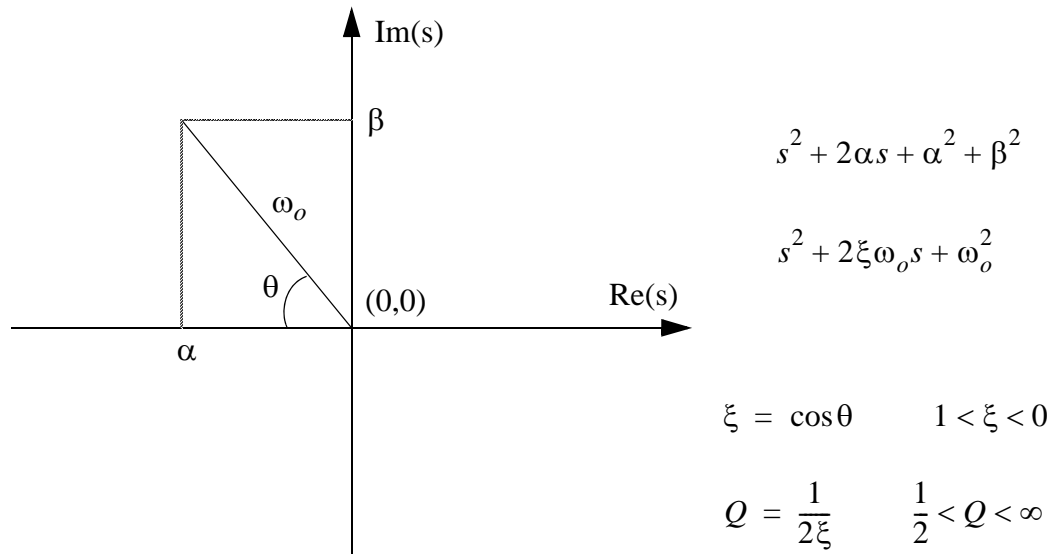


Figura 2.12: Parámetros de localización de un par de raíces complejo conjugadas.

$$1 + s \frac{1}{\omega_o Q} + \left(\frac{s}{\omega_o}\right)^2 \quad (2.76)$$

La contribución a la magnitud es:

$$M_{dB} = -20 \log \left[\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o} \right)^2 \right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_o Q} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.77)$$

Las asíntotas para frecuencias pequeñas y grandes son:

$$\begin{aligned} M_{dB} &\cong -40 \log \omega + 40 \log \omega_o & \omega \gg \omega_o \\ M_{dB} &\cong 0 & \omega \ll \omega_o \end{aligned} \quad (2.78)$$

A altas frecuencias la función se aproxima a $1/s^2$ por lo que la magnitud disminuye a $-40\text{dB}/\text{década}$.

La contribución a la fase es:

$$\theta = -\text{atan} \frac{\omega / \omega_o Q}{1 - (\omega / \omega_o)^2} \quad (2.79)$$

y las asíntotas de baja y alta frecuencia son:

$$\begin{aligned} \theta &= -\pi & \omega \gg \omega_o \\ \theta &= 0 & \omega \ll \omega_o \end{aligned} \quad (2.80)$$

El máximo de la magnitud se obtiene igualando la derivada de $|H(j\omega)|$ a 0:

$$\frac{d}{d\omega} \left| \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_o Q} - \frac{\omega^2}{\omega_o^2}} \right| = 0 \quad (2.81)$$

Resolviendo esta ecuación se obtiene,

$$\omega_{max} = \omega_o \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad Q > \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2.82)$$

$$\omega_{max} = 0 \quad \text{en otro caso}$$

Si $\frac{1}{2Q^2} \ll 1$ entonces

$$\omega_{max} \cong \omega_o \quad (2.83)$$

A ω_o se le denomina frecuencia de polo. A esta frecuencia la magnitud en dB viene dada por

$$20 \log(Q) \quad (2.84)$$

y la fase es

$$-\text{atan}\left(\frac{Q}{0}\right) = -90^\circ \quad (2.85)$$

Con las asíntotas de baja y alta frecuencia y el valor en ω_o se puede hacer una representación aproximada de la magnitud, tal como se muestra en la Fig. 2.13. El factor de calidad del polo Q determina la altura del pico a la frecuencia de polo ω_o .

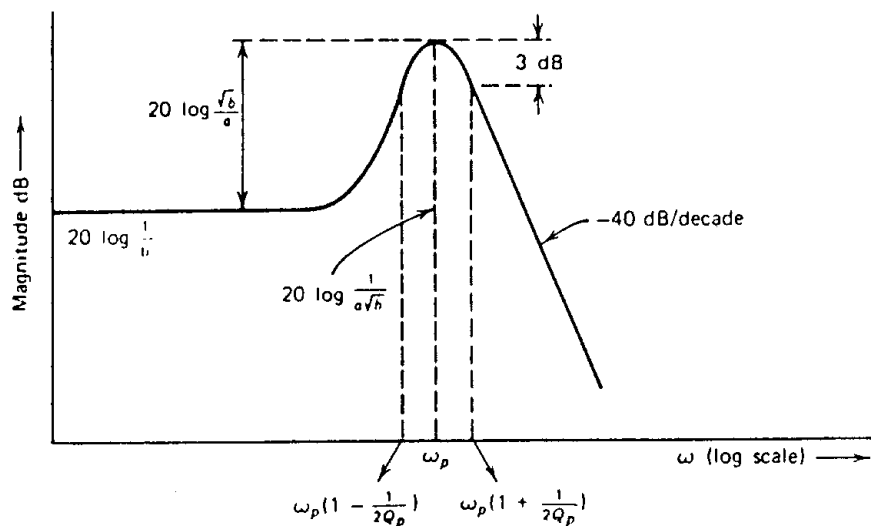


Figura 2.13: Diagrama de magnitud aproximado para $\frac{1}{s^2 + as + b}$ para $Q_p = \frac{\sqrt{b}}{a} \gg 1$.

La Fig. 2.14 muestra distintas representaciones de magnitud y fase para distintos valores de Q . Puede observarse que lo empinado de las curvas de magnitud y fase cerca de la frecuencia de polo aumenta con Q . Para $Q > 5$ la magnitud máxima ocurre esencialmente a la frecuencia de polo. Para $Q < 0.707$, la función no exhibe ningún pico y el máximo viene dado por el valor de DC.

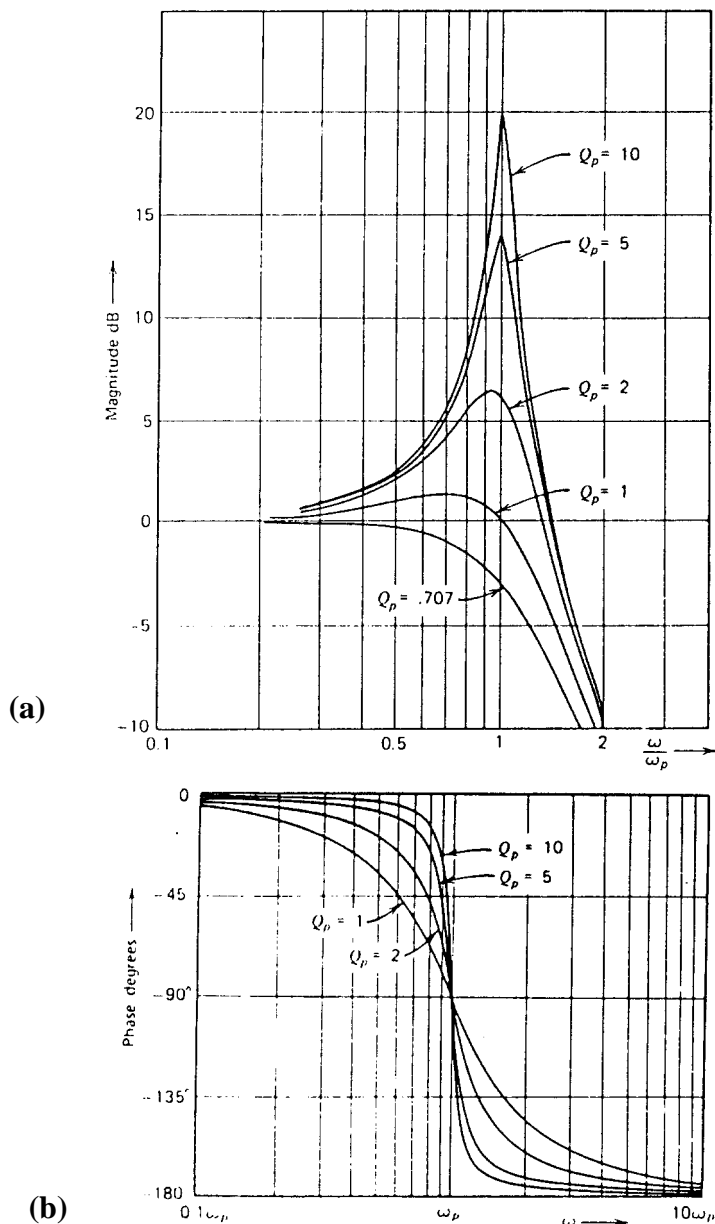


Figura 2.14: (a) Diagramas de magnitud de $\frac{1}{s^2 + (\omega_p/Q_p)s + \omega_p^2}$ para distintos valores de Q_p ; (b) diagramas de fase de $\frac{1}{s^2 + (\omega_p/Q_p)s + \omega_p^2}$ para diferentes Q_p .

Consideremos ahora la magnitud de la función en:

$$s = j\omega_1 = j\left(\omega_o \pm \frac{\omega_o}{2Q}\right) \quad (2.86)$$

Sustituyendo en (2.75) se tiene:

$$H(j\omega_1) = \frac{1}{1 - \left(1 \pm \frac{1}{Q} + \frac{1}{4Q^2}\right) + j\frac{1}{Q}\left(1 \pm \frac{1}{2Q}\right)} \quad (2.87)$$

Si $Q \gg 1$, $1/Q^2$ puede despreciarse respecto a $1/Q$. La magnitud es entonces,

$$20\log|H(j\omega_1)| \cong 20\log \frac{1}{\left|\pm \frac{1}{Q} + j\frac{1}{Q}\right|} = 20\log\left(\frac{Q}{\sqrt{2}}\right) \quad (2.88)$$

Comparando esta ecuación con (2.84) puede observarse que la magnitud en (2.86) es 3dB por debajo del valor máximo a la frecuencia de polo $s=j\omega_p$. Luego el coeficiente de s en (2.75) puede identificarse como el ancho de banda de 3dB:

$$\text{ancho de banda} = (bw)_p = \frac{\omega_o}{Q} \quad (2.89)$$

De forma análoga la Fig. 2.15 muestra representaciones aproximadas de magnitud y fase para un par de ceros complejos conjugados.

2.6 Técnica de Elmore para el estudio de la respuesta al escalón

2.6.1 Respuesta al escalón. Tiempo de subida y retraso. Sobredisparo.

Para introducir algunos conceptos útiles en el dominio temporal consideremos el siguiente ejemplo simple. Consideremos un amplificador que tiene el modelo de la Fig. 2.16.

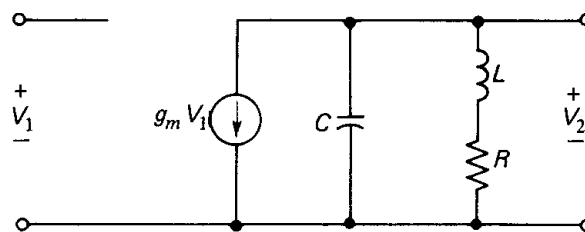


Figura 2.16: Circuito inter-etapa con compensación paralela.

La ganancia en tensión del amplificador a frecuencia cero es $-g_m R$. Normalizando la función de transferencia V_2/V_1 del amplificador respecto a $-g_m R$ se obtiene,

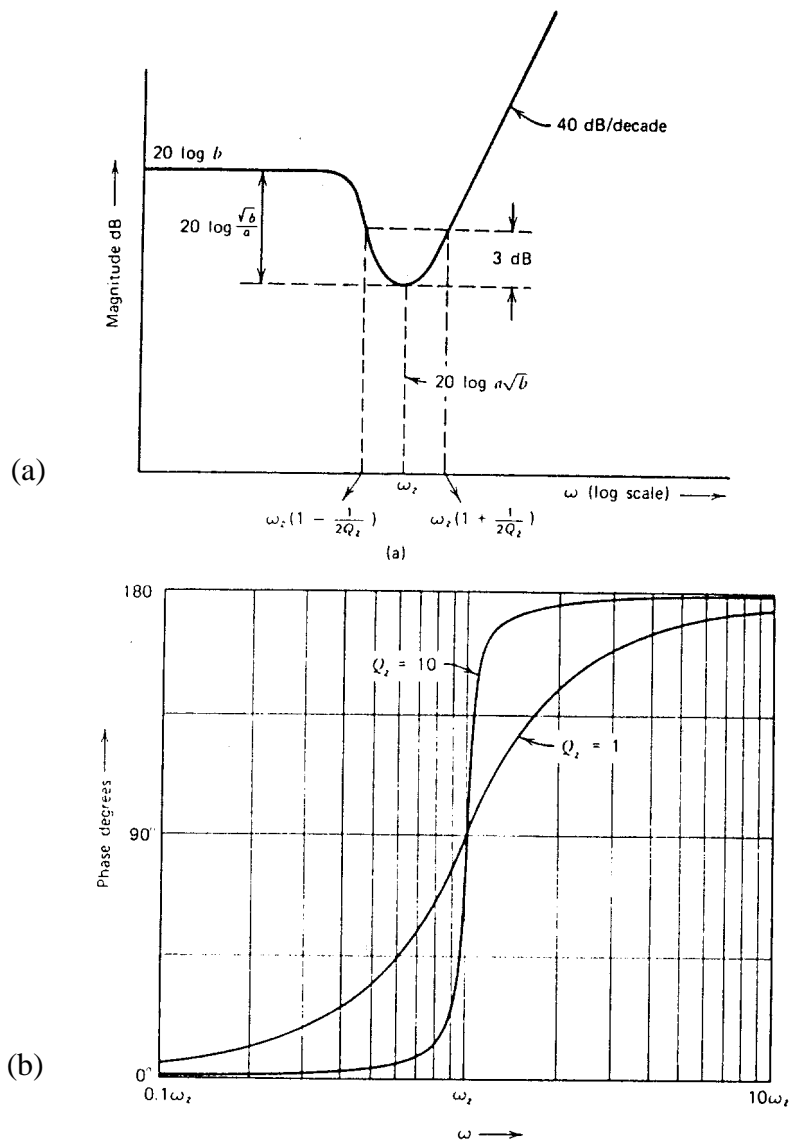


Figura 2.15: (a) Diagrama de magnitud aproximado de $s^2 + as + b$ para $Q_z = \frac{\sqrt{b}}{a} \gg 1$;

(b) diagramas de fase de $s^2 + (\omega_z/Q_z)s + \omega_z^2$ para diferentes Q_z .

$$H_n(s) = \frac{1 + m\tau_o s}{1 + \tau_o s + m\tau_o^2 s^2} \quad (2.90)$$

donde

$$\tau_o = RC \quad m = \frac{L}{CR^2} \quad (2.91)$$

Por tanto, $H_n(s)$ tiene un cero en $-1/m\tau_o$ y dos polos en

$$s_1, s_2 = \frac{1}{2m\tau_o} [-1 \pm \sqrt{1 - 4m}] \quad (2.92)$$

Podemos distinguir tres casos posibles dependiendo del valor del parámetro m :

- 1) Si $m < 1/4$, los polos de $H_n(s)$ son reales y distintos, y la respuesta al escalón está sobreamortiguada.
- 2) Si $m = 1/4$ hay un polo de segundo orden en $s = -2/\tau_o$ y la respuesta al escalón está críticamente amortiguada.
- 3) Si $m > 1/4$, los dos polos son complejos conjugados y la respuesta al escalón es subamortiguada u oscilatoria.

Los diagramas de polos y ceros y la correspondiente respuesta al escalón se muestran en la Fig. 2.17.

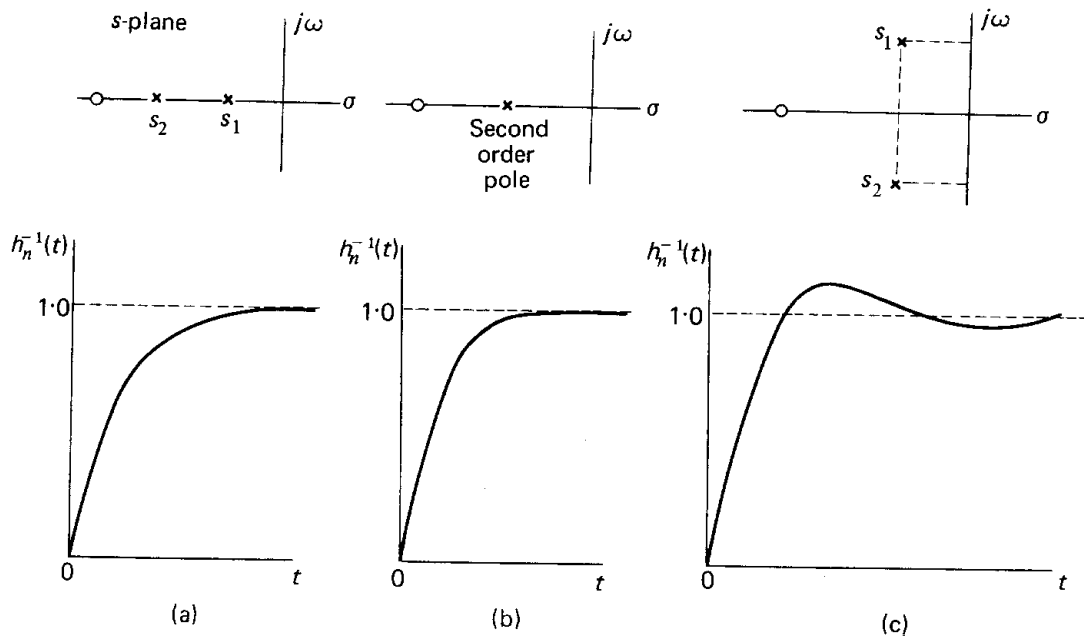


Figura 2.17: Diagramas polo/cero y respuesta al escalón del circuito de la Fig. 2.16.

2.6.2 Técnica de Elmore

Es evidente que los tres tipos de respuesta al escalón tienen dos características comunes: un retraso en la aparición de la respuesta y un tiempo de subida finito. En muchos contextos la respuesta al escalón de un amplificador paso de baja queda suficientemente bien definida en términos de su retraso y su tiempo de subida. En el laboratorio se suele definir el retraso τ_d como

el tiempo requerido por la respuesta para alcanzar el 50% de su valor final, medido a partir de la aplicación del escalón de entrada. El tiempo de subida, τ_r , se define como el tiempo requerido por la respuesta para cambiar entre el 10% y el 90% de su valor final. En el caso de respuesta subamortiguada se denomina sobredisparo a la diferencia entre el valor del pico y el valor final, medido porcentualmente. Estos conceptos se ilustran en la Fig. 2.18.

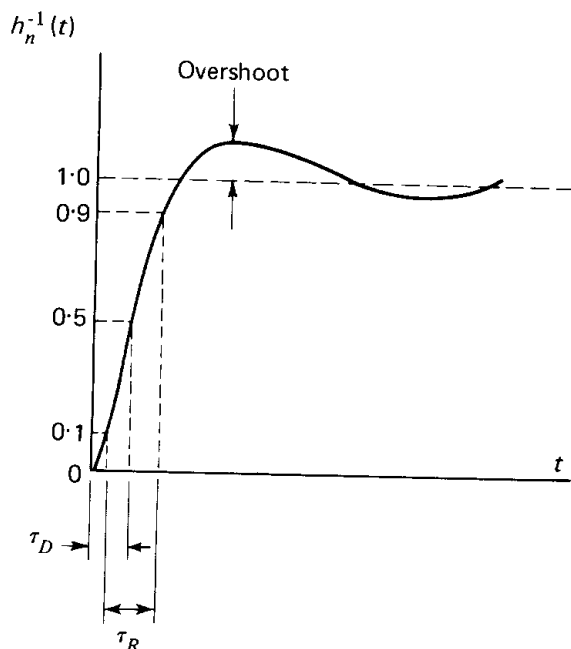


Figura 2.18: Ilustrando los conceptos de tiempo de subida, retraso y sobredisparo.

Hemos visto que el comportamiento transitorio de cualquier circuito lineal está contenido implícitamente en la función de sistema en el sentido de que si la función de transferencia es conocida la respuesta del sistema a una excitación especificada puede obtenerse computando la transformada inversa de Laplace del producto de la transformada de la función de sistema y la excitación.

En el estudio de la respuesta temporal de amplificadores resulta sumamente interesante el estudio de la respuesta al escalón. Si el amplificador está inicialmente en reposo (sin condiciones iniciales) y se le aplica un escalón a la entrada, la respuesta viene dada por la transformada inversa de Laplace,

$$h_n^{-1}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{1}{s} H_n(s) e^{st} ds \quad (2.93)$$

donde c es una constante mayor que σ_a , la abcisa de convergencia absoluta de $H_n(s)$.

Ya sabemos que la evaluación de esta integral requiere el uso del cálculo de residuos. Un método más simple de obtener la respuesta es expresar la transformada de la respuesta como

una expansión parcial en fracciones e identificar cada término con una función del tiempo con ayuda de una tabla de pares de transformadas.

Las definiciones de tiempo de subida, retraso, etc, del capítulo 2 se prestan muy bien a medidas en el laboratorio pero son muy difíciles de calcular o para comparar por ejemplo distintos métodos de compensación para mejorar el tiempo de subida. La dificultad radica en la necesidad de computar la respuesta al escalón para cada caso en consideración. Esto puede ser terriblemente complicado si no se dispone de un ordenador.

Sin embargo, en la clase de amplificadores paso de baja en que la respuesta al escalón es una función monótonica del tiempo (p.e. no decreciente) se puede solucionar aplicando la técnica de Elmore, que proporciona esencialmente los mismos resultados que aplicando las definiciones previas. Dado que la derivada respecto al tiempo de la respuesta de un amplificador paso de baja a un escalón unitario es igual a la respuesta $h_n(t)$ de una función impulso unitario, la respuesta al escalón $h_n^{-1}(t)$ será monótonica sobre el rango de t entre 0 y ∞ , si $h_n(t)$ es no negativa en este rango. Dicho de otra forma, la respuesta al escalón es monótonica si no tiene ningún sobredisparo.

Elmore observó que la respuesta al escalón $h_n^{-1}(t)$ podía considerarse como una función de distribución de probabilidad en el tiempo t . Por tanto, $h_n(t)$ podía considerarse su función densidad de probabilidad asociada. Dos parámetros estadísticos usuales para describir $h_n(t)$ son la media y la varianza, definidas como:

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} th_n(t)dt \quad var(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [t - E(t)]^2 h_n(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 h_n(t)dt - E^2(t) \quad (2.94)$$

Otro parámetro estadístico es la mediana de $h_n(t)$ que es igual al valor de t cuando $h_n^{-1}(t)=0.5$. Por tanto, la mediana de $h_n(t)$ es igual al tiempo de retraso de $h_n^{-1}(t)$. Cuando $h_n(t)$ es simétrica su media y su mediana son iguales por lo que

$$\tau_D = E(t) \quad (2.95)$$

El tiempo de subida τ_r de $h_n^{-1}(t)$ es igual a la diferencia $(t_2 - t_1)$ tal que $h_n^{-1}(t_2)=0.9$ y $h_n^{-1}(t_1)=0.1$. Cuando $h_n(t)$ es un pulso de Gauss, el tiempo de subida es

$$\tau_R = \sqrt{2\pi var(t)} \quad (2.96)$$

Aunque sólo la respuesta al impulso de un filtro gaussiano es gaussiana la respuesta de muchos filtros tiende a ser gaussiana por lo que constituye una aproximación muy útil y práctica.

En algunos libros se define el retraso τ_D como el centro de gravedad del área limitada por la respuesta al impulso del amplificador,

$$\tau_D = \frac{\int_0^{\infty} t h_n(t) dt}{\int_0^{\infty} h_n(t) dt} \quad (2.97)$$

Dado que para la respuesta al escalón normalizada, que tiene un valor final de la unidad como se muestra en la Fig. 2.19,

$$\int_0^{\infty} h_n(t) dt = 1 \quad (2.98)$$

la fórmula para el retraso se reduce a:

$$\tau_D = \int_0^{\infty} t h_n(t) dt \quad (2.99)$$

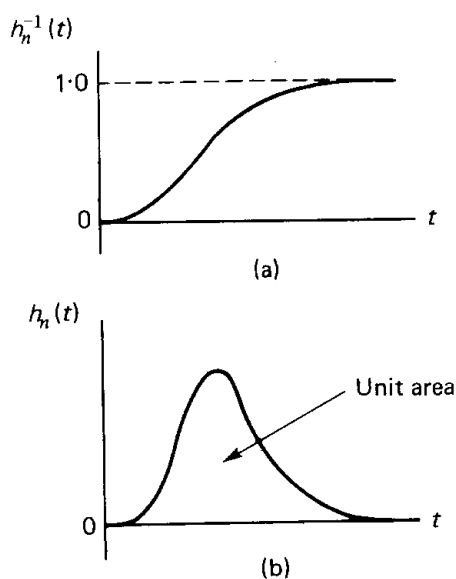


Figura 2.19: Ilustrando la respuesta transitoria monótona: (a) respuesta al escalón; (b) respuesta al impulso.

Excepto para curvas de respuesta muy asimétricas, el resultado difiere muy poco del obtenido con la definición de tiempo de retraso.

Podemos observar que cuanto más corto es el tiempo de subida, la respuesta al impulso es más estrecha y más alta. Es por tanto razonable definir τ_R proporcional al radio de giro del área limitada por $h_n(t)$:

$$\tau_R^2 = \frac{cte \int_0^{\infty} (t - \tau_D)^2 h_n(t) dt}{\int_0^{\infty} h_n(t) dt} \quad (2.100)$$

que por la misma razón anterior queda reducida a,

$$\tau_R^2 = cte \int_0^{\infty} (t - \tau_D)^2 h_n(t) dt \quad (2.101)$$

En otras palabras, el tiempo de subida es proporcional a la desviación estándar de la respuesta al impulso. Elmore elige la constante de proporcionalidad como 2π por la siguiente razón: la respuesta al impulso de un número infinito de etapas amplificadoras resistencia-capacidad acopladas aproxima la función de error de Gauss, de forma que para hacer coincidir el resultado de aplicar la nueva definición de tiempo de subida con la obtenida basada en la máxima pendiente de la curva de respuesta al escalón.

Podemos expresar entonces el tiempo de subida como

$$\tau_R^2 = 2\pi \left[\int_0^{\infty} t^2 h_n(t) dt - \tau_D^2 \right] \quad (2.102)$$

En esta ecuación se ha supuesto que $h_n(t)$ es no negativa, careciendo de sentido en otro caso.

La utilidad de las definiciones de Elmore de retraso y tiempo de subida descansa en el hecho de que es directa su evaluación a partir de la función de transferencia $H_n(s)$. Para demostrarlo, sabemos que $H_n(s)$ se relaciona con la respuesta al impulso mediante la transformada directa de Laplace:

$$H_n(s) = \int_0^{\infty} h_n(t) e^{-st} dt \quad (2.103)$$

Expandiendo e^{-st} en series de potencias de st e integrando término a término se obtiene

$$\begin{aligned}
 H_n(s) &= \int_0^{\infty} h_n(t) \left[1 - st + \frac{(st)^2}{2!} - \dots \right] dt = \\
 &= 1 - s \int_0^{\infty} t h_n(t) dt + \frac{s^2}{2!} \int_0^{\infty} t^2 h_n(t) dt - \dots
 \end{aligned} \tag{2.104}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores para τ_R y τ_D se obtiene,

$$H_n(s) = 1 - s\tau_D + \frac{s^2}{2!} \left(\frac{\tau_R^2}{2\pi} + \tau_D^2 \right) - \dots \tag{2.105}$$

Si la función de transferencia normalizada $H_n(s)$,

$$H_n(s) = \frac{H(s)}{K_o} = \frac{1 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ns^n}{1 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ms^m} \tag{2.106}$$

se expande en potencias ascendentes de s mediante división simple:

$$H_n(s) = 1 - (b_1 - a_1)s + (b_1^2 - a_1b_1 + a_2 - b_2)s^2 - \dots \tag{2.107}$$

Comparando e igualando los coeficientes se obtiene

$$\begin{aligned}
 \tau_D &= b_1 - a_1 \\
 \tau_R &= \sqrt{2\pi[b_1^2 - a_1^2 + 2(a_2 - b_2)]}
 \end{aligned} \tag{2.108}$$

Aunque la aplicabilidad de estas dos fórmulas se limita a circuitos lineales invariantes en el tiempo con respuesta al escalón monótonica, hay muchas aplicaciones en que este tipo de respuesta es un objetivo de diseño.

Ejemplo

Volviendo al ejemplo anterior la respuesta es monótonica si no esta subamortiguada, es decir $m < 1/4$. De la función de transferencia del amplificador se obtiene

$$\begin{aligned}
 a_1 &= m\tau_o \\
 b_1 &= \tau_o \\
 b_2 &= m\tau_o^2
 \end{aligned} \tag{2.109}$$

Sustituyendo se obtiene para los tiempos de subida y retraso:

$$\begin{aligned}\tau_D &= \tau_o(1 - m) \\ \tau_R &= \tau_o\sqrt{2\pi(1 - 2m - m^2)}\end{aligned}\quad (2.110)$$

Cuando $m=0$, correspondiente a una etapa amplificadora sin compensación, $\tau_D=\tau_o$ y $\tau_R=2.51\tau_o$. Cuando $m=1/4$, correspondiente a amortiguamiento crítico, $\tau_D=3\tau_o/4$ y $\tau_R=1/66\tau_o$. Se puede definir una figura de mérito del tiempo de subida como el cociente del tiempo de subida del amplificador sin compensación y el del amplificador compensado. $\eta=2.51/1.66=1.51$ para un amplificador ajustado para amortiguamiento crítico.

2.7 Técnicas nodales de análisis para circuitos activos

En un número importante de circuitos sólo se requieren VCVS y fuentes independientes de tensión. Además las salidas son en tensión.

Supongamos que un terminal de cada VCVS y cada fuente independiente está conectado al nudo de referencia. Entonces:

- a) La tensión en el otro terminal es conocida.
- b) La intensidad puede tomar cualquier valor.

La metodología de análisis es la siguiente:

- 1) Señalar las tensiones conocidas en el diagrama del circuito.
- 2) Escribir las ecuaciones KCL para los nudos que no correspondan a tensiones conocidas, es decir, para nudos no conectados a fuentes de tensión controladas o independientes.
- 3) Si hay A.O. y funcionan linealmente escribir tensiones iguales para los dos terminales de entrada. No escribir KCL para el nudo de salida del A.O. (tener en cuenta que se puede modelar mediante una VCVS por lo que el paso 2) impone esta restricción.

(hacer problema 31)

2.8 Técnicas de análisis de circuitos mediante grafos de flujo de señal

Los métodos algebraicos de resolución son claramente superiores para el análisis numérico de circuitos, es decir, para el análisis de circuitos en los que las transmitancias (impedancias o admitancias) de todos los elementos tienen asignado un valor numérico (real o complejo), especialmente si el análisis se realiza mediante ordenador. Por métodos topológicos de análisis entendemos aquellas técnicas que proporcionan la función de red a partir de la estructura de un grafo relacionado de alguna forma con el circuito problema. Los métodos topológicos de análisis (análisis mediante grafos de flujo de señal es el más conocido) son interesantes por dos razones:

- (a) La técnica de grafos de flujo de señal permite realizar razonamientos cualitativos

cuando se realiza análisis a mano, por ejemplo visualizar realimentaciones, etc.

- (b) Estas técnicas son competitivas frente al cálculo de determinantes cuando se trata de análisis simbólico, es decir, cuando todos o alguno de los parámetros del circuito permanece como parámetro simbólico.

2.8.1 Grafos de flujo de señal y la regla de Mason

Un grafo de flujo de señal es un grafo dirigido con peso que representa un sistema de ecuaciones lineales siguiendo las siguientes reglas:

- 1) Los nodos del grafo representan variables (dependientes o independientes).
- 2) Los pesos de las ramas representan coeficientes de las relaciones entre variables.
- 3) A cada nudo al que llegue alguna rama le corresponde la ecuación:

$$\text{variable del nudo} = \sum (\text{peso de la rama que llega a variable desde donde llega la rama})$$

donde el sumatorio se extiende a todas las ramas que llegan.

Es interesante pues ver ahora cómo obtener el conjunto de ecuaciones que representa un grafo de flujo de señal dado y cómo se puede construir un grafo de flujo de señal a partir de un cierto sistema de ecuaciones. Consideremos por ejemplo el grafo de flujo de señal de la Fig. 2.20.

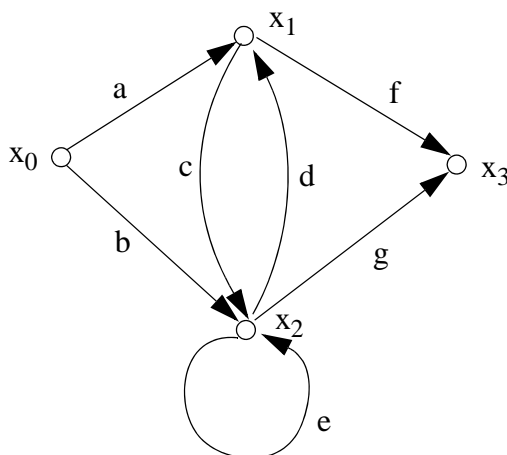


Figura 2.20: Grafo de flujo de señal.

De acuerdo con la regla (3) el grafo de flujo de señal representa el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 &= ax_0 + dx_2 \\ x_2 &= bx_0 + cx_1 + ex_2 \\ x_3 &= fx_1 + gx_2 \end{aligned} \tag{2.111}$$

Un nodo de un grafo de flujo de señal que tiene únicamente ramas que salen de él se denomina nudo fuente. Un nudo con algunas ramas que entran en él se denomina nudo dependiente. Si un nudo dependiente tiene únicamente ramas que entran se denomina nudo

sumidero. Por ejemplo, en el grafo de la Fig. 2.20, x_0 es un nodo fuente, x_1, x_2 , y x_3 son nodos dependientes y x_3 es un nodo sumidero.

Veamos ahora el problema de construir un grafo de flujo de señal a partir de un sistema de ecuaciones. Supongamos que las ecuaciones están expresadas de la forma:

$$\mathbf{X} = \mathbf{CX} + \mathbf{DX}_s \quad (2.112)$$

Entonces la manera de construir el grafo de flujo de señal es obvia. Las variables en \mathbf{X} son nodos dependientes, las variables en \mathbf{X}_s son nodos fuente y los elementos de \mathbf{C} y \mathbf{D} son transmitancias de rama: C_{ij} es la transmitancia de la rama que va del nodo X_j al nodo X_i y D_{ij} es la transmitancia de la rama que va del nodo X_{sj} al nodo X_i .

Sin embargo, es frecuente que el sistema de ecuaciones lineales aparezca en la forma:

$$\mathbf{FX} = \mathbf{K} \quad (2.113)$$

Existen distintos métodos para transformar un sistema de ecuaciones de la forma en (2.113) a la forma (2.112). Dependiendo del método usado el grafo de flujo de señal será distinto. Veremos que para circuitos lineales activos es posible formular las ecuaciones directamente en la forma (2.112).

Veamos en primer lugar cómo se puede resolver un sistema de ecuaciones topológicamente a través del grafo de flujo de señal asociado. Para ello, es necesario introducir algunas definiciones previas:

Definiciones

Camino: consideremos que las ramas del grafo dirigido sólo se pueden recorrer en la dirección que marca la flecha. Un camino del nodo X_i al nodo X_j es cualquier ruta que salga del nodo X_i y llegue al nodo X_j , sin atravesar ningún nodo más de una vez.

Bucle: es un camino con igual nodo inicial y final.

Bucle de orden n : es un conjunto de n bucles sin nodos ni ramas en común.

Peso del camino: es el producto de todas las transmitancias de las ramas del camino.

Peso del bucle: es el producto de todas las transmitancias de las ramas del bucle.

Por ejemplo, en el grafo de flujo de señal de la Fig. 2.21 existen dos caminos de X_1 a X_4 cuyos pesos son:

$$P_1 = ab \quad P_2 = cdfb \quad (2.114)$$

y tres bucles cuyos pesos son:

$$L_1 = h \quad L_2 = de \quad L_3 = fbg \quad (2.115)$$

Hay un bucle de segundo orden cuyo peso es $L_1L_2 = hde$. L_1L_3 y L_2L_3 no forman bucle de segundo orden porque se tocan entre sí.

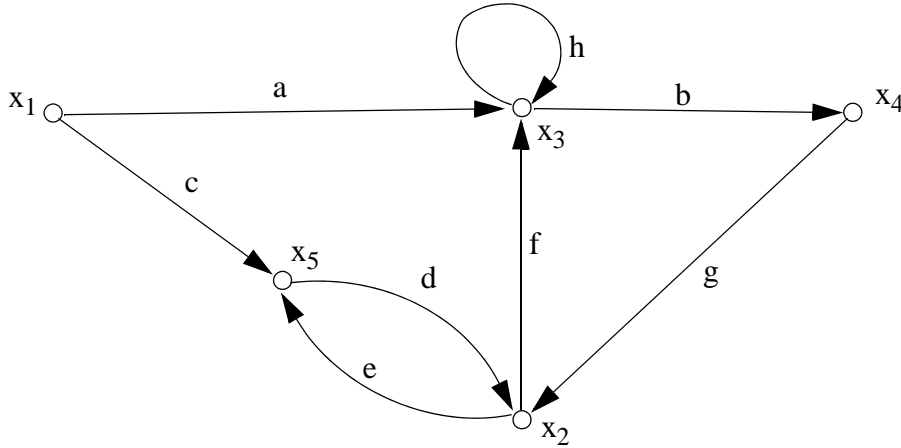


Figura 2.21: Ilustrando los caminos y bucles de un grafo de flujo de señal.

Si en la ecuación (2.112) despejamos X en función de X_s obtenemos:

$$X = [1 - C]^{-1}DX_s \quad (2.116)$$

donde asumimos que la inversa de $[1 - C]$ existe. Por tanto, cualquier variable correspondiente a un nodo dependiente puede expresarse en función de las variables de los nodos fuente como:

$$X_j = T_{j1}X_{s1} + T_{j2}X_{s2} + \dots + T_{jm}X_{sm} \quad (2.117)$$

Cada T_{ji} se denomina la transmisión del nodo fuente X_{si} al nodo dependiente X_j . La llamada regla de Mason proporciona un mecanismo topológico para evaluar T_{ji} . De acuerdo con ella:

$$T_{ji} = \left(\frac{X_j}{X_{si}} \right) \Bigg|_{X_{s1} \neq 0; X_{s1} = 0, X_{s2} = 0, \dots, X_{sm} = 0} = \frac{1}{\Delta} \sum_k P_k \Delta_k \quad (2.118)$$

donde $\Delta = 1 - (\text{suma de los pesos de bucle}) + (\text{suma de los pesos de bucle de segundo orden}) - (\text{suma de los pesos de bucles de tercer orden}) + \dots$

$P_k =$ peso del camino k -ésimo del nodo fuente X_{si} al nodo dependiente X_j .

$\Delta_k =$ suma de los términos de Δ en los que ninguno de los bucles constituyentes tocan al camino k -ésimo.

Se puede demostrar que Δ es igual a $|1 - C|$ por lo que a Δ se le suele denominar determinante del grafo.

(hacer problema 32)

(hacer problema 33)

(hacer problema 34)

2.8.2 Formulación del grafo de flujo de señal

En esta Sección describiremos cómo formular sistemáticamente un grafo de flujo de señal (SFG) para cualquier circuito lineal consistente de elementos pasivos RLC y fuentes, tanto independientes como controladas.

Consideremos primero el caso en que el circuito contiene únicamente inmitancias y fuentes independientes. Si consideramos que no existen bucles de fuentes de tensión ni cortes de fuentes de intensidad, entonces es posible encontrar un árbol T tal que todas las fuentes de tensión V_E son ramas del árbol y todas las fuentes de intensidad I_J son ramas del coárbol. Consideraremos caracterizadas las ramas pasivas del árbol por la matriz de impedancia Z_T y las ramas del coárbol por la matriz de admitancia Y_L . El SFG se construye siguiendo los siguientes pasos que se muestran esquemáticamente en la Fig. 2.22:

- 1) Expresar cada elemento de v_L en función de v_E y v_T utilizando KVL.
- 2) Expresar cada elemento de I_T en función de I_L y I_J utilizando KCL.
- 3) Expresar la tensión de cada rama pasiva del árbol en función de la intensidad de la rama: $V_T = Z_T I_T$.
- 4) Expresar la intensidad de cada rama pasiva del coárbol en función de la tensión de la rama: $I_L = Y_L V_L$.

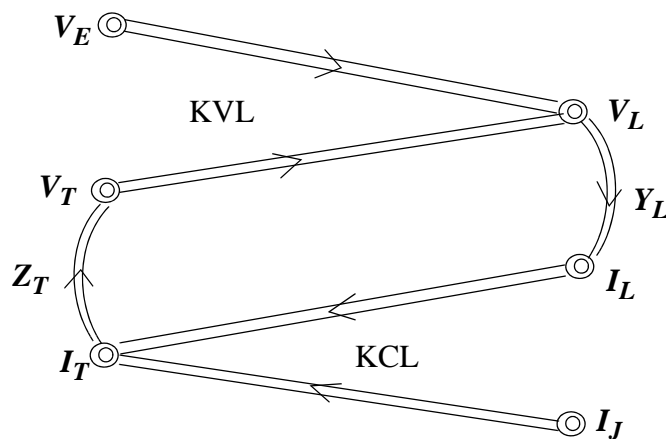


Figura 2.22: Grafo de flujo de señal primitivo.

El grafo de flujo de señal resultante se denomina grafo de flujo de señal primitivo. Se puede reducir el número de nudos de este grafo eliminando las variables I_T y V_L , obteniéndose el denominado grafo de flujo de señal compacto. Para formular directamente este grafo se han de seguir las siguientes reglas:

- 1) Para cada rama pasiva del coárbol Y_k , expresar su intensidad en función de tensiones de las ramas del árbol utilizando $I_k = Y_k V_k$ y la ecuación KVL.

- 2) Para cada rama pasiva del árbol Z_j , expresar su tensión en función de intensidades de las ramas del coárbol utilizando $V_j=Z_j I_j$ y la ecuación KCL.

Este grafo de flujo de señal compacto se muestra esquemáticamente en la Fig. 2.22.

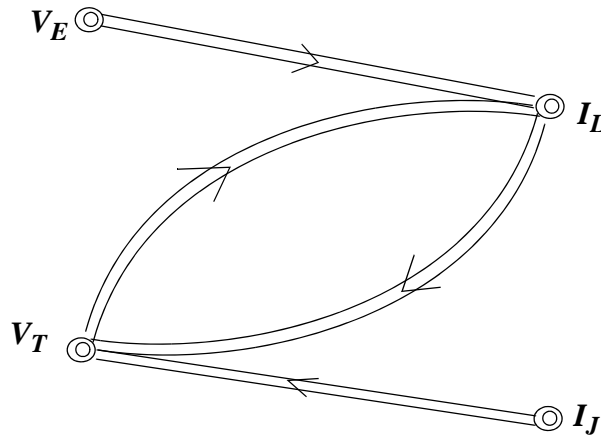


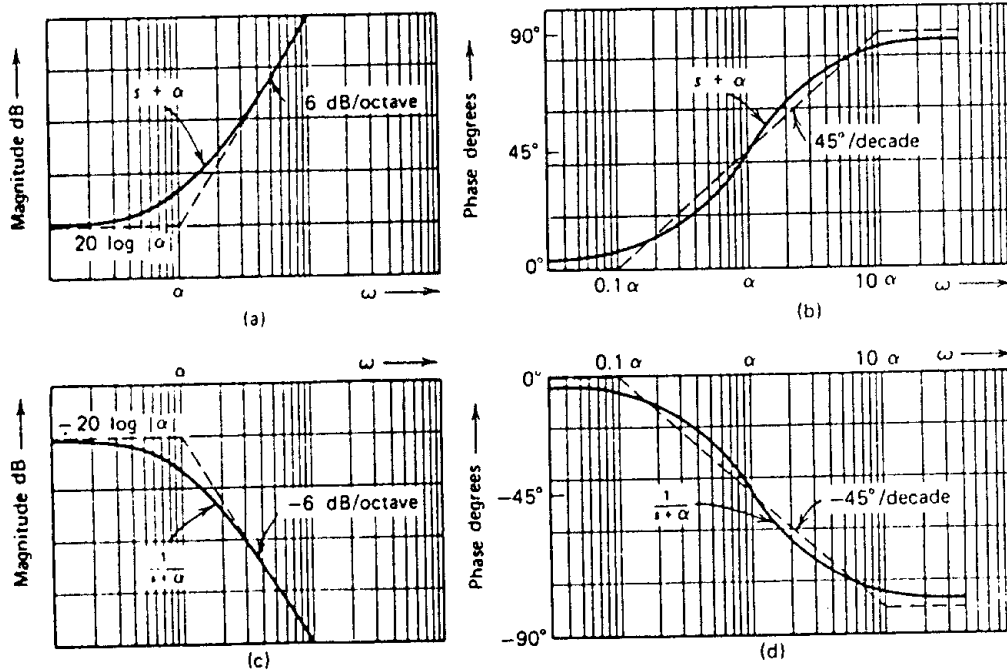
Figura 2.23: Grafo de flujo de señal compacto.

Si el circuito contiene además fuentes controladas se sigue el siguiente procedimiento para formular el grafo de flujo de señal compacto:

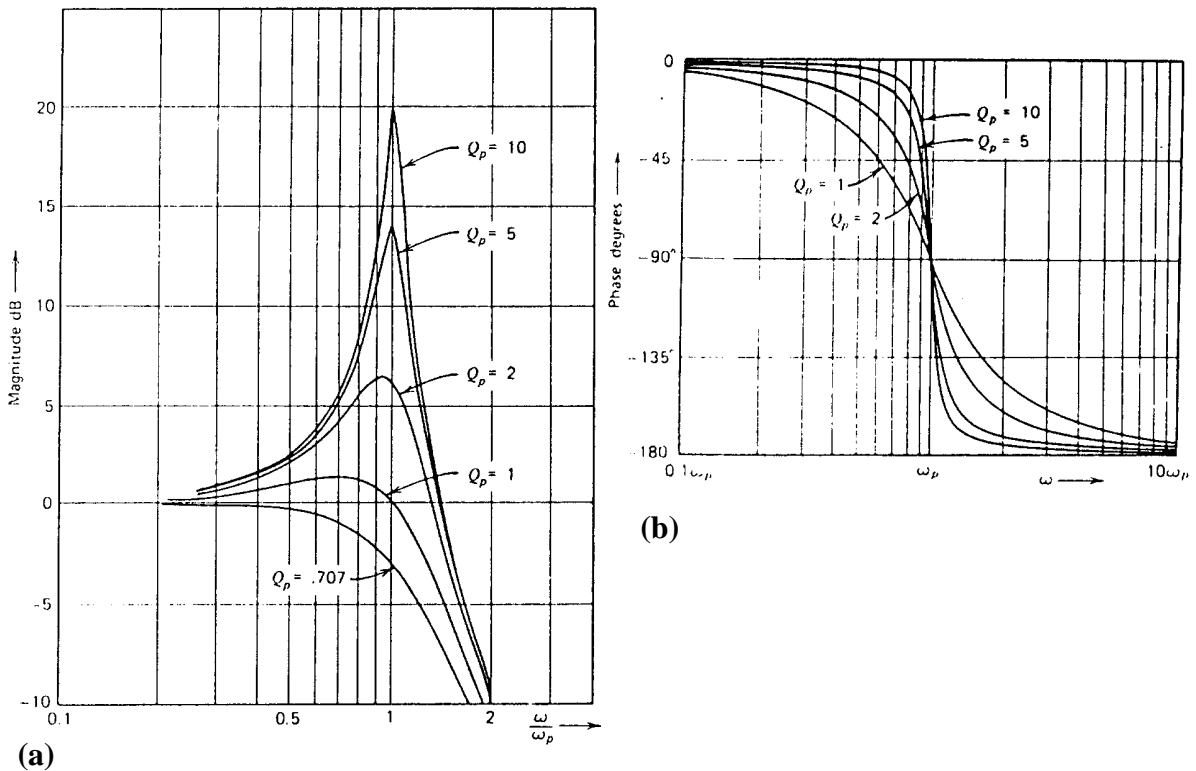
- 1) Reemplazar todas las fuentes controladas por fuentes independientes del mismo tipo. El circuito resultante no tiene fuentes controladas.
- 2) Formular el SFG compacto para el circuito resultante.
- 3) Expresar (y representar en el SFG) las salidas deseadas y las variables de control en función de tensiones de las ramas del árbol e intensidades de las ramas del coárbol, si ya no lo eran.
- 4) Imponer las restricciones de las ramas de las fuentes controladas.

(hacer problema 35)

CONTRIBUCIONES DE RAÍCES REALES Y COMPLEJAS A DIAGRAMAS DE BODE



Diagramas de (a) magnitud y (b) fase para $s + \alpha$. Diagramas de (c) magnitud y (d) fase para $1/(s + \alpha)$.



Diagramas de magnitud y fase de $\frac{1}{s^2 + (\omega_p/Q_p)s + \omega_p^2}$ para distintos valores de Q_{pp} .

