Zur Konstruktion von Maßwerken

Schriftliche Hausarbeit im Rahmen der Ersten Staatsprüfung für das
Lehramt an Grund-, Haupt- und Realschulen
mit dem Schwerpunkt Grundschule

dem Landesprüfungsamt für Erste Staatsprüfungen an Schulen
– Geschäftsstelle Köln – vorgelegt von

Gabriele Kottmann (Kapitel 1 – 8.11)
Sabrina Leenders (Kapitel 8.12 – 11)

Köln, den 3. Juni 2008

Prof. Dr. Volkert
Seminar für Mathematik und ihre Didaktik

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

> „Ich bin … zu der Überzeugung gekommen, daß die Geometrie … für die Bildung künstlerischer Formen nicht nur von großem Nutzen, sondern sogar von absoluter Notwendigkeit ist.“ (Berlage in: Hecht 1979, S. 10)

Dieses Zitat von H. P. Berlage trifft auf viele alltägliche Bereiche zu und gilt auch für die Architektur. Viele Studien belegen, dass gerade die Geometrie den Baumeistern in verschiedenen Zeitepochen dazu verholfen hat, bestimmte Verhältnisse zu bestimmen. Die Geometrie bildet oftmals eine Grundlage für die Konstruktion sowohl ganzer Bauten als auch einzelner Bauelemente.

In der Gotik stellt die Geometrie im Zusammenspiel mit dem Licht eine zentrale Komponente dar. Vieles stützt sich auf sie und wirkt somit sehr ästhetisch.

Besonders das Maßwerk sticht hier heraus, das ohne die Geometrie gar nicht auskäme. Aber was bezeichnet man überhaupt als Maßwerk? Welche Rolle spielt die Gotik in diesem Zusammenhang und wie viel Geometrie verbirgt sich tatsächlich in den einzelnen Maßwerkkonstruktionen? Alle diese Fragen bilden die Grundlage der vorliegenden Examensarbeit.
Auf Grund der hervorragenden Fenster des Kölner Doms und der Nähe zur Universität zu Köln werden diese Fragen anhand der Konstruktion dieser Kirchenfenster exemplarisch beantwortet.

Zuletzt wird eine Unterrichtsreihe zu diesem Thema vorgestellt, da die Mathematik und insbesondere die Geometrie eine komplizierte Materie darstellt und ein Realitätsbezug oftmals fehlt. Außerdem haben vor allem angehende Lehrer ein besonderes Interesse an der spannenden Umsetzung der alltäglichen Geometrie im Unterricht, aus diesem Grund behandelt die Unterrichtsreihe dieses Thema umfassend, motivierend und realitätsnah.

2 Geschichte der Gotik

Die Gotik bezeichnet einen europäischen Kunststil, der sich etwa beginnend mit dem 12. Jahrhundert bis zum Ende des 15. Jahrhunderts vollzieht. Als Initialbau der Gotik wird der Chorneubau[1] der Klosterkirche von Saint-Denis unter der Leitung von Abt Suger gesehen. Im Mittelalter streckt sich dieser Stil über ganz Europa aus. Die Gotik lässt sich in meist drei Phasen untergliedern, die in den einzelnen europäischen Ländern jedoch etwas zeitversetzt und teilweise mit regionalen Eigenheiten auftreten können. Am deutlichsten zeigt sich dieser gotische Stil, der sich aus verschiedenen Stilrichtungen zusammensetzt, in den Kathedralen Frankreichs (vgl. Falken-Lexikon 1993, S. 325).

Je nach Form und Stil lassen sich die gotischen Bauten unterschiedlichen Entwicklungsphasen zuordnen. „Bereits im 11. Jh. sind in der normann. Architektur die Vorstufen der G. erkennbar.“(Falken-Lexikon 1993, S. 325) Diese Phase, die die französische Frühgotik darstellt, lässt sich in die Zeit von 1135 bis 1190 bzw. 1200 einordnen und kann mit dem Schlagwort „vereinzelte Form“ (Binding 2000, S. 6) charakterisiert werden. Im Anschluss daran und bis circa 1260 ist in Frankreich die Hochgotik vorzufinden. In dieser gotischen Phase werden „verbundene Form[en]“ (Binding 2000, S. 6) sehr geschätzt. In Deutschland findet sie von 1235 bis 1250 statt. Hier wird sie mit dem Begriff „Frühgotik“ (Binding 2000, S. 6) bezeichnet. Darauf folgt die Konstruktion linearer Formen, die in Deutschland (1250 – 1350) der Hochgotik und in Frankreich (1260 – 1380) der reifen Gotik zugeordnet wird. Die letzte Entwicklungsstufe der Gotik wird Spätgotik genannt. In Frankreich findet sie zwischen 1360 bzw. 1380 und 1550 statt und wird mit dem Begriff „Flamboyant“ ergänzend beschrieben. Charakteristisch für diese Phase, die in Deutschland um 1350 begann

[1] „**Chor**, der für den Chorgesang und das Gebet der Geistlichen bestimmte Raumteil der Kirche, meist im Osten gelegen.” (Binding 2000, S.296)

und bis 1520 verlief, sind die häufig auftretenden verschliffenen Formen (vgl. ebd., S. 6).

Für die äußere Erscheinung gotischer Kathedralen sind einige Formen wie die Spitzbögen, das Rippengewölbe[2] und das Strebewerk[3], Wimperg[4] und Fiale[5] sowie das Maßwerk, die gegliederten Pfeiler und die Wandgliederung bezeichnend. Abgesehen vom Maßwerk, was seinen tatsächlichen Ursprung in der Gotik findet, sind die weiteren formalen Kennzeichen abgewandelt bereits in der Romanik vorhanden. Der westliche Außenbau gotischer Kathedralen ist durch mächtige Türme und eine starke Gliederung der Fassaden direkt erkennbar. Der Innenraum ist sehr weiträumig und zeichnet sich durch eine bis dahin unbekannte hohe Decke aus. Langhaus[6], Querhaus[7] bzw. Vierung[8] und Chor gehen ineinander über und bilden somit einen einheitlichen, weitläufigen Innenraum. Dieser wird von Arkaden[9] in ein Mittelschiff[10]

---

[2] „**Rippe**, unter die gemauerte Schale eines Gewölbes gespannter Bogenschenkel" (Binding 2000, S.298)

[3] „**Strebewerk**, aus Strebepfeiler und Strebebogen gebildete Konstruktion zur Ableitung der Druck- und Schubkräfte eines Kreuzrippengewölbes und des Winddrucks auf die Obergadenmauer" (Binding 2000, S.299)

[4] „**Wimperg**, giebelförmige Bekrönung gotischer Portale und Fenster, die oft Maßwerkschmuck zeigt", (Binding 2000, S.299)

[5] „**Fiale**, schlankes, spitz auslaufendes Türmchen auf Strebepfeilern und Wimpergen oder an Portalen und Galerien" (Binding 2000, S.297)

[6] „**Langhaus**, der ein- oder mehrschiffige Hauptraum der Kirche zwischen Westbau und Vierung oder Chor." (Binding 2000, S.297)

[7] „**Querhaus**, quer zum Langhaus ausgerichteter Bauteil, der aus unterschiedlich hohen Einzelräumen zusammengesetzt sein kann." (Binding 2000, S.298)

[8] „**Vierung**, Raumteil, der aus der Durchdringung von Langhaus und Querhaus entsteht." (Binding 2000, S.299)

[9] „**Arkade, Arkatur**, auf Pfeilen oder Säulen ruhender Bogen bzw. Folge solcher Bogenstellungen." (Binding 2000, S.296)

[10] „**Mittelschiff**, mittlere von Arkarden seitlich begrenzte Raumeinheit einer mehrschiffigen Anlage." (Binding 2000, S.298)

und seine Seitenschiffe[11] unterteilt und von hohen Wänden mit farbigen Fenstern im Obergaden[12] begrenzt (vgl. ebd., S. 292). In der Gotik wird alles auf der Grundlage eines geometrischen Ordnungssystems konstruiert.

Weiterhin wurde mit Beginn der Gotik verstärkt das Licht und das Verhältnis der tektonischen Struktur beachtet. Somit wurden auch die Fenster zu wichtigen, mitgestaltenden Elementen des Raumes. „Geometrie und Farblicht geben einen Hinweis auf die vollkommene göttliche Ordnung des Kosmos." (ebd., S. 293). Eine zusätzliche Auflockerung des Außenbaus erfahren gotische Kathedralen durch die Konstruktion von Wimpergen und Fialen. Durch die Aufteilung der Fassaden in mehrere Schichten, so dass höhere Teile hinter niedrigeren konstruiert sind, entsteht ein Eindruck des Aufwärtsstrebens.

Folglich sind gotische Kathedralen als „Ergebnis einer neuen Geistigkeit und Vorstellungswelt" (ebd., S. 293) zu sehen. Das Zusammenspiel von Gleichgewicht, harmonischen Proportionen, Farblicht und einer Schwerelosigkeit, die durch die Weite entsteht, stellt laut Binding ein „Abbild der göttlichen Wahrheit" (ebd., S. 294) dar.

3 Maßwerk – ein Gestaltungselement der Gotik

Maß- und Stabwerk bezeichnen die Skelettierung von Wänden gotischer Kathedralen. Im Gegensatz zur Romanik wird hier zu Gunsten größerer Wandöffnungen auf großflächige Durchbrüche verzichtet,

---

[11] „**Seitenschiff**, seitlich, zumeist beidseits eines Mittelschiffs gelegene Raumeinheit einer mehrschiffigen Anlage" (Binding 2000, S.298)

[12] „**Obergaden**, der über die Seitenschiffe erhöhte in einer Basilika durchfensterte Teil der Mittelschiffwand." (Binding, Was ist Gotik?, S.298)

indem Steinmetze geometrische Figuren als Steinprofil einmeißelten, so dass nur noch filigrane Steinverzierungen übrig blieben. In den Wandöffnungen, die sich zu Beginn der Gotik aus einem rechteckigen Anteil und einem aufgesetzten Spitzbogen zusammensetzen, bezeichnet man die Steinmetzarbeiten im rechteckigen Teil als Stabwerk und im zuletzt genannten Teil als Maßwerk.

Das Maßwerk, das sich von dem Ausdruck „gemessenes Werk" ableitet, beschreibt zunächst ein „geometrisch konstruiertes Element zur Unterteilung des über der Kämpferlinie[13] gelegenen Bogenfeldes[14] (Couronnement) von gotischen Fenstern" (Binding 1989, S. 22). Später wurden nicht nur die gestaltenden Elemente im Bogenfeld gotischer Fenster, sondern auch diejenigen in Gemäuern, Wimpergen, usw. Maßwerk genannt. Es besteht ausnahmslos aus Kreisen bzw. Kreisbögen, „deren Zirkeleinstiche sich aus den geometrischen Schnittpunkten von geraden Verbindungen und Kreislinien ergeben" (Binding 2000, S. 198). Zahlreiche Maßwerkkonstruktionen entstehen aus der Kombination verschiedener Einzelformen, die sich mit Zirkel und Richtscheit konstruieren lassen. Zu diesen Einzelformen zählen u. a. Kreise, Vielpass, Vielblatt, Kreisbogendrei- und -vierecke, Fischblasen bzw. Schneuße, Kleeblattbogen und komplexere Rosetten. Diese Einzelformen, die nur eine kleine Auswahl darstellen, lassen sich alle nach den Regeln der Geometrie konstruieren. Dies lässt bereits erahnen, dass die Geometrie im gotischen Kirchenbau unerlässlich ist.

[13] Die Kämpferlinie ist eine imaginäre Linie, die sich im Ansatz der Krümmung eines (Spitz-)Bogens befindet und das Maßwerk vom Stabwerk trennt. (Genaueres siehe S.12)

[14] Das Bogenfeld bezeichnet die Fläche, die von dem Spitzbogen begrenzt wird (Genaueres siehe S.12)

4 Geschichte des Kölner Doms

Der Kölner Dom ist eine römisch-katholische Kirche, die zum Erzbistum Köln gehört und den offiziellen Namen „Hohe Domkirche St. Peter und Maria“ trägt. Er ist das Wahrzeichen Kölns und hat 1998 sein 750 Jahre altes Bestehen gefeiert. Die Wichtigkeit des Doms wird auch dadurch deutlich, dass er die drittgrößte gotische Kirche der Welt ist und 1996 in die Liste des Weltkulturerbes aufgenommen wurde.

An der Stelle des heutigen Doms wurde schon im 4. Jahrhundert der erste Kirchenbau vollzogen, der 870 zu dem karolingischen Dom vollendet und drei Jahre später geweiht wurde. Er bestand aus einem Langhaus, das an beiden Enden je ein Querhaus und einen Chor hatte, so dass zwei Altäre ihren Platz fanden. Der östlich gelegene Altar war Maria und der westliche Altar dem heiligen Petrus geweiht. Später wurde am Langhaus im Norden und im Süden jeweils ein Seitenschiff angebaut, und der Bau blieb in dieser Ausführung bis ins 13. Jahrhundert bestehen.

Als 1164 Erzbischof Rainald von Dassel die Reliquien der Heiligen Drei Könige nach Köln gebracht hat, stieg das Ansehen des Doms zu einer der bedeutendsten Wallfahrtskirchen Europas, so dass die Größe des alten Doms für den erwartenden Pilgeransturm zu klein war. Um möglichst groß zu bauen, wurde eine andere architektonische Form benötigt, so dass beschlossen wurde, den neuen Dom im Stil der französischen Gotik zu bauen. 1248 musste zunächst der alte Dom abgerissen werden. Bei dem Versuch den Ostchor durch Brandabriss zu beseitigen, brannte jedoch der ganze Dom ab, dessen Westteile provisorisch wieder aufgebaut wurden, um Messen zu feiern.

Noch im selben Jahr wurde der Grundstein des neuen gotischen Doms gelegt. In starker Anlehnung an die Kathedralen von Amiens, Paris und Straßburg plante Dombaumeister Gerhard von Rile diesen Bau.

1322 wurde der Chor eingeweiht, der Dank seines gotischen Baustils über hohe Gewölbe verfügte und mit vielen filigranen Strebepfeilern und Strebebögen ausgestattet war, welche die hohe, großzügige Bauweise ermöglichten. Zu dieser Zeit wurde auch nach Westen provisorisch eine Mauer hochgezogen, um im Chor Messen zu feiern. Während des Weiterbaus wurde der Ostchor wertvoll ausgestattet und wichtige Kunstwerke, wie das Gero-Kreuz und der Schrein der Heiligen Drei Könige, aufbewahrt.

Nachdem der gotische Chor fertig gestellt worden war, begann man mit dem Bau der Seitenschiffe des Langhauses und des Südturmes, der 1410 das zweite Geschoss erreichte.

Wegen Geldmangel und Desinteresse ließ die Bauintensität immer mehr nach bis das Domkapitel 1560 die Zahlungen und dadurch auch den Weiterbau einstellte. Mit einem Notdach wurde das Mittelschiff des Langhauses geschlossen, jedoch wurde das Innere auch in den folgenden Jahrhunderten reich ausgestattet.

1794 wurde der Dom durch die Revolutionstruppen, die in Köln einzogen, durch Zweckentfremdung, wie z. B. eine Lagerhalle, entweiht und erst 1801 wieder zum Gotteshaus geweiht. In der Zeit der Entweihung gruppierten sich viele Helfer und gründeten einen Zentral-Dombau-Verein, um mit vereinten Kräften Geld zu sammeln, damit der Bau des Doms wieder aufgenommen werden konnte. 1842 wurde dieses Projekt gestartet, wobei die Hälfte des Geldes aus der preußischen Staatskasse stammte und die andere Hälfte dieser Verein aufbrachte. Der mittelalterliche Bauplan wurde durch modernste Bautechnik umgesetzt, so dass ein zügiger Baufortschritt erreicht wurde.

1864 wurden die beiden Querhausfassaden und die Obergardenzone von Langhaus und Querschiff vollendet. Eine eiserne Konstruktion im Dach wurde über den gesamten Bau eingesetzt und ersetzte somit den hölzernen Dachstuhl des mittelalterlichen Chors. 1880 war der Bau der beiden Türme beendet.

Im zweiten Weltkrieg wurde neben vielen anderen Gebäuden auch der Kölner Dom stark beschädigt. Diese Schäden wurden in den nachfolgenden Jahren behoben. Dabei wurden vor allem im Nordquerhaus modernere Bauformen verwendet. Auch heute werden sowohl Schäden des Krieges als auch Witterungsschäden behoben.

5 Konstruktionsungenauigkeiten

Günther Binding beschreibt in seinem Buch „Masswerk“, dass die Maßwerke der Fenster in den Kirchen im 19. Jh. sehr oft erneuert wurden. Diese wurden jedoch teilweise nicht in den ursprünglichen Zustand gebracht, sondern es wurden „reine, freie Rekonstruktionen“ (Binding 1989, S. 31) vorgenommen. „Die Originalität der Maßwerkformen ist deshalb nicht immer eindeutig überliefert“ (ebd., S. 31). Zusätzlich weisen die Maßwerkkonstruktionen des 19. Jh. Ungenauigkeiten und Fehler auf, die in der Literatur immer wieder aufgegriffen wurden.

Weiterhin ist aufzuzeigen, dass es von einer gotischen Grundkonstruktion zahlreiche Varianten gibt, z. B. hat der Kleeblattbogen nach Binding sechs weitere Formen (vgl. ebd., S. 19). Auf Grund dieser Vielfalt an Varianten und der oben erwähnten fehlerhaften bzw. ungenauen Pläne kann man bei Rekonstruktionsversuchen oft nur erahnen, um welche Einzelkonstruktion es sich handelt. Bei komplexeren Fenstern ist das Zusammenspiel der Einzelkonstruktionen sehr wichtig, so dass bei falschen Zusammensetzungen weitere Ungenauigkeiten auftreten können.

Ein anderes Problem stellt die Geometrie bzw. die Proportionsgeometrie dar. In den mit Zirkel und Lineal entstandenen Konstruktionen kann man auf arithmetischem Wege überprüfen, ob die Verhältnisse bzw. die Proportionen zueinander stimmen. Laut Konrad Hecht waren die gotischen Architekten aber nur „Meister der Geometrie“ (Hecht 1979, S. 285) und nicht der Proportionsgeometrie. Als Grundmaß nahmen sie beispielsweise die Schuhlänge oder Elle, was bereits zu Ungenauigkeiten führte, und weiterhin sei der gotische Architekt „in den Grundrechnungsarten wenig bewandert gewesen“ (ebd., S. 285). Durch die Anwendung dieser ungenauen Grundmaße entstehen bei dem Vergleich von Längen oft weitere ungerade Zahlen. Dies brachte den Zeichnern zusätzliche Schwierigkeiten ein. (vgl. ebd., S. 95ff und S. 273ff). Auf Grund dieser Ungenauigkeiten wurden oftmals Kreise in die Lücken zwischen Spitzbögen eingesetzt, um diese zu füllen. Solche Kreise wurden allerdings nur ästhetisch eingepasst, wobei die grundlegenden Kreispunkte nicht begründet konstruiert wurden (laut Personal Dombauhütte). Außerdem wurden Konstruktionsungenauigkeiten durch Aufdickung bzw. Verschmälerung des steinernen Maßwerks kaschiert.

Als Fazit wird an dieser Stelle folgendes Zitat wiedergegeben, welches die zusätzlichen Konstruktionsungenauigkeiten im Maßwerk beleuchtet. „Die zulässige Fehlergrenze wird man indessen nicht zu eng ziehen dürfen, da ... für die damaligen Hilfsmittel viel mehr Schwierigkeiten vorhanden waren, die Sache ins Große zu übertragen als heute. Ungenauigkeiten konnten kaum vermieden werden“ (Alhard von Drach 1897 in: ebd., S. 90).

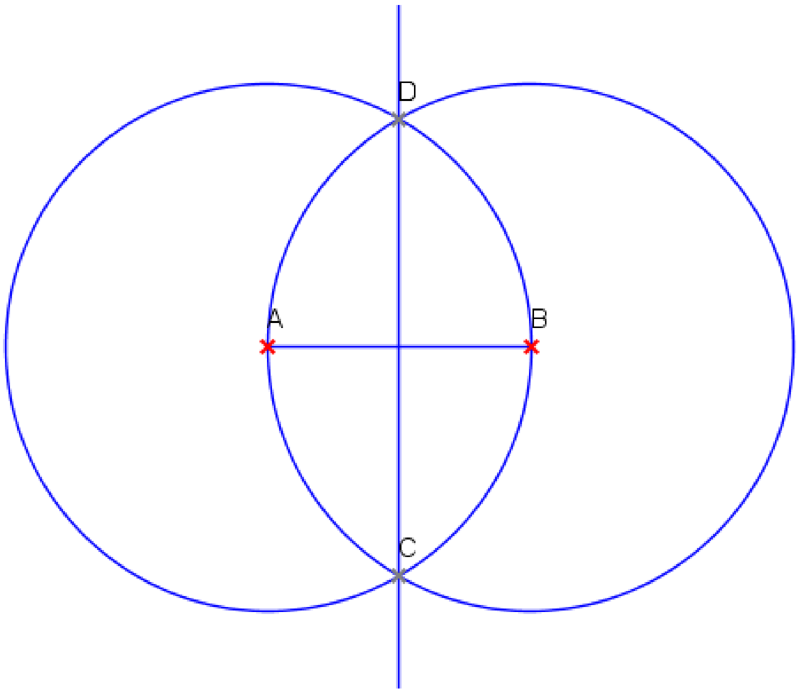
6 Kreise und Bögen

Euklid definiert den Kreis folgendermaßen: „Ein **Kreis** ist eine ebene, von einer einzigen Linie [...] umfaßte Figur mit der Eigenschaft, daß alle von einem innerhalb der Figur gelegenen Punkte bis zu der Linie [zum

Umfang des Kreises] laufenden Strecken einander gleich sind“ (Euclides 1933, S. 1). Der Punkt, der nach Euklids Definition innerhalb der Figur gelegen ist, wird als Mittelpunkt des Kreises bezeichnet. Jede Strecke, die durch diesen Punkt verläuft und durch den Kreis begrenzt wird, heißt Durchmesser. Dieser halbiert den Kreis in zwei Halbkreise. Dadurch entstehen zwei gleiche Kreissegmente, die durch die zwei gleichen Kreisbögen und den Durchmesser begrenzt werden. Der Kreisbogen ist ein Teil des zugehörigen Kreises und weist daher die gleiche stetige Krümmung und denselben Mittelpunkt auf. Der Kreisbogen kann über eine beliebige Bogenlänge (kleiner Kreisumfang) verfügen.

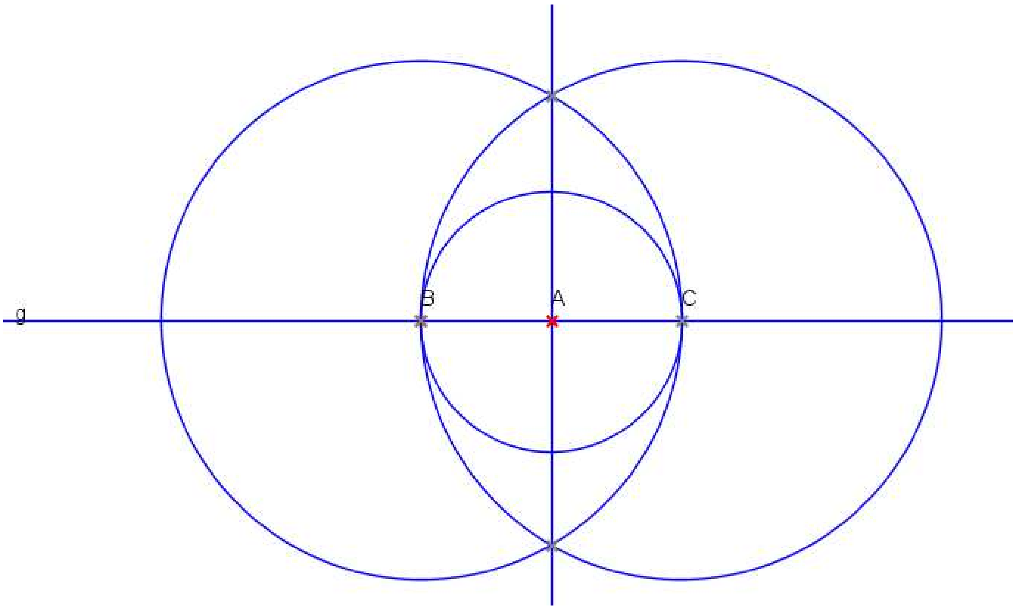
7 Geometrische Grundkonstruktionen

7.1 Mittelsenkrechte



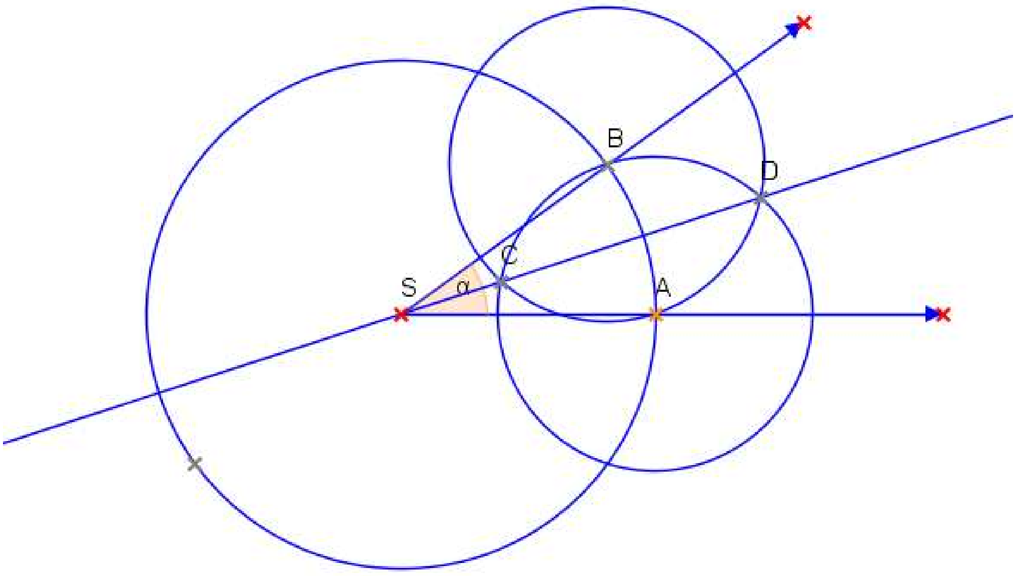
Gegeben sei die Stecke $\overline{AB}$. Um nun die Mittelsenkrechte auf dieser Strecke zu konstruieren, zieht man zunächst den Kreis um A durch B und den Kreis um B durch den Punkt A. Die resultierenden Schnittpunkte der beiden Kreise nennt man C und D. Verbindet man anschließend diese beiden Punkte, so erhält man die gesuchte Mittelsenkrechte.

7.2 Senkrechte



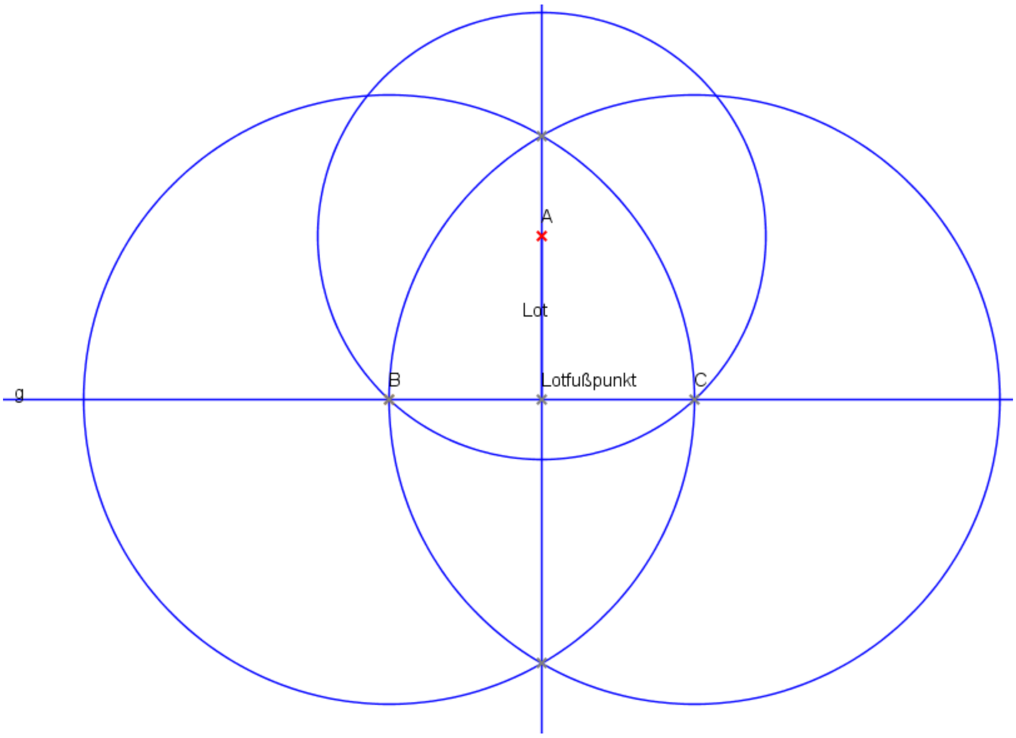
Gegeben sei die Gerade g und ein Punkt A auf dieser Geraden. Man erhält die Senkrechte im Punkt A, indem man zunächst einen Kreis um A zeichnet, wobei dessen Radius beliebig jedoch größer Null gewählt werden kann. Dieser Kreis schneidet die Gerade g in den Punkten B und C. Nun verfährt man wie bei der Konstruktion der Mittelsenkrechten, errichtet diese auf der Strecke $\overline{BC}$ und erhält schließlich die Senkrechte in A.

7.3 Winkelhalbierende



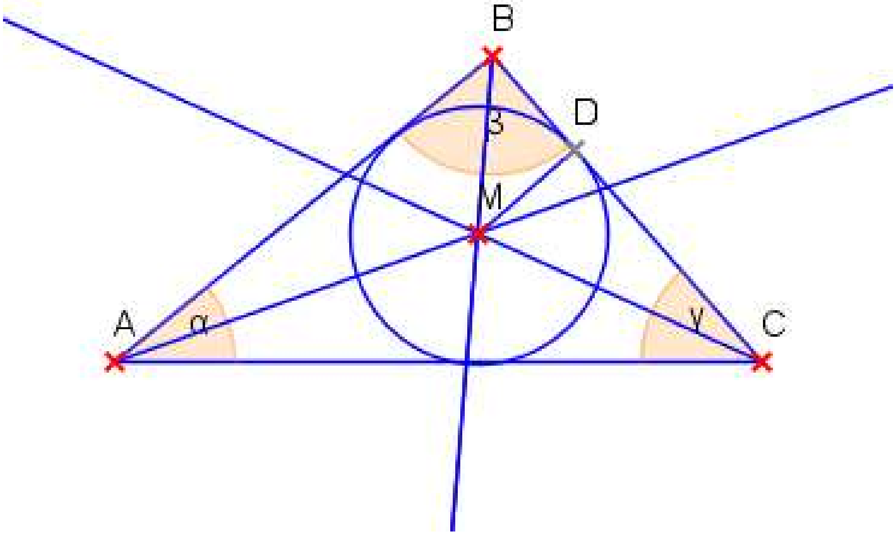
Gegeben sei ein beliebiger Winkel α mit dem Scheitelpunkt S. Um nun die entsprechende Winkelhalbierende des Winkels α zu konstruieren, zieht man zunächst einen Kreis um S mit beliebigem Radius > 0. Nun ergeben sich die Schnittpunkte A und B des Kreises mit den Schenkeln des Winkels α. Um A und B zeichne man jeweils einen Kreis mit dem Radius $\overline{AB}$. Die beiden daraus resultierenden Schnittpunkte seien C und D. Verbindet man diese beiden Punkte und verlängert die Strecke bis zum Scheitel S, so erhält man die gesuchte Winkelhalbierende des Winkels α.

7.4 Lot fällen



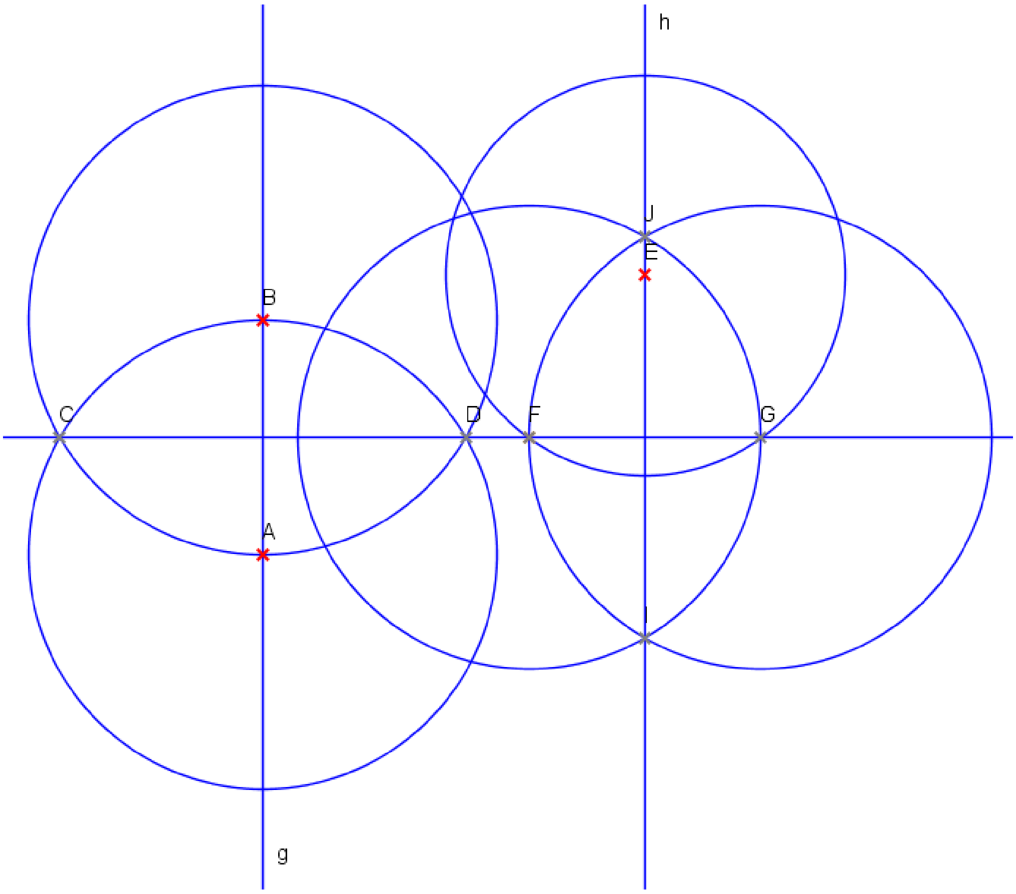
Eine Gerade g und ein Punkt A, der nicht auf g liegt, seien zunächst gegeben. Ziehe einen Kreis um A, der die Gerade g in zwei verschiedenen Punkten B und C schneidet (der Radius sollte so gewählt sein, dass die Gerade in zwei Punkten geschnitten wird). Anschließend errichtet man die Mittelsenkrechte auf der Strecke $\overline{BC}$. Diese verläuft durch A, da nach Konstruktion des Kreises um A die Punkte B und C gleich weit von A entfernt liegen und nach Definition der Mittelsenkrechten sich A auf dieser befindet. Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten mit der Geraden g wird Lotfußpunkt genannt, und das Lot ist die Strecke zwischen diesem und A.

7.5 Inkreis eines Dreiecks



Gegeben sei das Dreieck ABC. Den Mittelpunkt M des Inkreises des Dreiecks erhält man, indem die Winkelhalbierenden der drei Innenwinkel konstruiert werden. Der Schnittpunkt dieser Winkelhalbierenden liefert den Mittelpunkt des Inkreises. Ausgehend von diesem Mittelpunkt fällt man nun das Lot auf eine der Dreiecksseiten und erhält den Lotfußpunkt D. Der Abstand $\overline{MD}$ gibt den gesuchten Radius des Inkreises an, der schließlich in das Dreieck eingezeichnet werden kann.

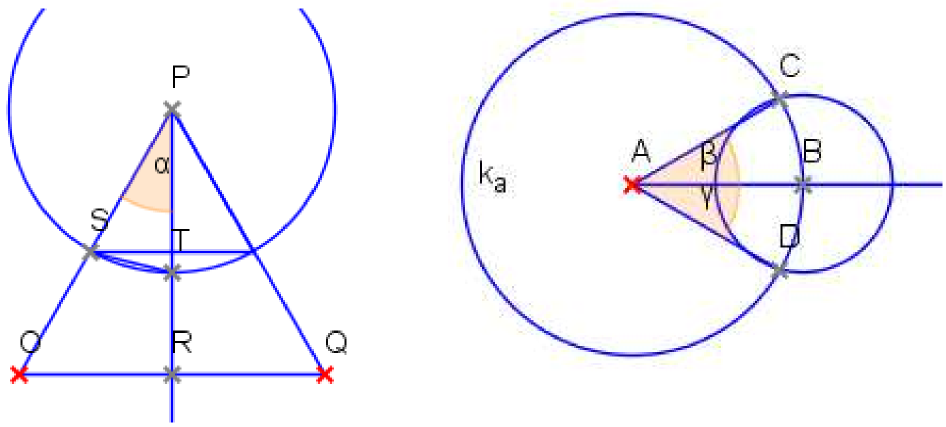
7.6 **Parallelen errichten**



Gegeben sei die Gerade g, auf der sich die Punkte A und B befinden, sowie der Punkt E, durch den die zu g parallele Gerade h konstruiert werden soll. Um diese Parallele zu erhalten, errichtet man zunächst die Mittelsenkrechte auf der Strecke $\overline{AB}$. Nun ziehe man einen Kreis um den Punkt E, der die zuvor erhaltene Mittelsenkrechte in zwei Punkten F und G schneidet (der Radius sollte so gewählt sein, dass die Mittelsenkrechte in zwei Punkten geschnitten wird). Auf dieser Strecke $\overline{FG}$ errichte man eine weitere Mittelsenkrechten. Diese verläuft auch durch E und ist die gesuchte Parallele h zu g.

7.7 Abtragen eines 30°-Winkels

Es seien ein Strahl mit dem Anfangspunkt A und ein gleichseitiges Dreieck OPQ gegeben, welches bekanntlich drei 60°-Winkel besitzt. Folgende Konstruktion zeigt, wie der 30°-Winkel ∠OPR auf den gegebenen Strahl abgebildet wird.



Ziehe einen beliebigen Kreis um P, jedoch muss der Radius so gewählt sein, dass der Kreis den Schenkel $\overline{PO}$ und die Winkelhalbierende $\overline{PR}$ schneidet. Man nenne diese Schnittpunkte S und T. Mit demselben Radius ziehe man einen Kreis k_A um A, der den Strahl im Punkt B schneidet. Anschließend ziehe man um B den Kreis k_B mit dem Radius, der dem Abstand der Punkte S und T entspricht. Die Kreise k_A und k_B schneiden sich in den Punkten C und D. Verbindet man C und A als auch A und D zu einer Strecke, so sind die daraus entstandenen Winkel ∠ BAC und ∠ BAD dem Winkel ∠ OPR kongruent.

8 Grundkonstruktionen der Gotik

In diesem Kapitel werden die Einzelkonstruktionen komplexerer gotischer Maßwerkfenster erläutert, konstruiert und ihre Proportionen zueinander errechnet. Auf Grund der Vielzahl dieser Einzelkonstruktionen und da es von diesen vielen Einzelkonstruktionen nochmals zahlreiche Varianten gibt, konzentriert sich diese Arbeit auf diejenigen, die mehrfach am Kölner Dom anzutreffen sind. Ausnahme bilden die Schneuße, die dort nicht vorzufinden sind. Sie werden jedoch beschrieben, da sie auch ein wichtiger Bestandteil der Spätgotik sind. Einige gotische Grundkonstruktionen benötigen die oben beschriebenen geometrischen Grundkonstruktionen, auf die bei den einzelnen Figurgestaltungen in diesem Kapitel nicht explizit verwiesen wird.

8.1 Spitzbogen

Eine der grundlegendsten Konstruktionen der Gotik ist die des Spitzbogens, da zumeist alle anderen Grundkonstruktionen in diesen Bogen konstruiert werden. Die Fensteröffnungen im Gemäuer gotischer Gebäude sind überwiegend in Form eines Spitzbogens ausgeführt, der sich nach unten hin rechteckig fortsetzen. Erst am Ende dieser historischen Phase in der Baukunst der Gotik gewinnen auch andere Bögen an Bedeutung.

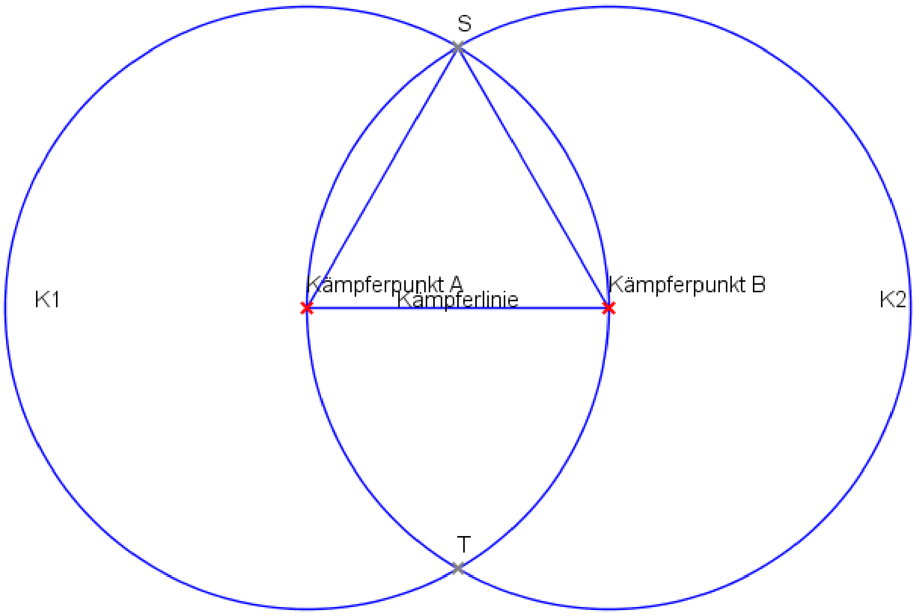
Die Spitzbögen können in ihrer Größe variieren. Alle weisen sowohl einige wichtige Punkte als auch Linien auf. Den oberen Teil des gotischen Fensters, der in Form des Spitzbogens durch zwei Kreisbögen begrenzt ist, nennt man Bogenfeld. Unterhalb des Bogenfeldes befindet sich der rechteckige Anteil des Fensters, der Kämpferansatz. Dieser wird durch eine imaginäre Linie, der Kämpferlinie, vom Bogenfeld separiert und befindet sich somit am Ansatz der Krümmung des Bogens. Als Kämpfer bezeichnet man die Basis des Bogens, die die Druckkräfte an die Umgebung überträgt.

Die Länge der Kämpferlinie, an deren Enden die Kämpferpunkte liegen, entspricht der Breite des Fensters. Die Mittelpunkte der Kreisbögen, die den Spitzbogen bilden, befinden sich bei dem einfachen Spitzbogen in den Enden der Kämpferlinie und entsprechen somit in diesem Fall den Kämpferpunkten. Gelegentlich muss man die Kämpferlinie zu einer imaginären Geraden verlängern, da die Mittelpunkte der Kreisbögen bei verschiedenen Spitzbogenvarianten auch außerhalb des Fensters liegen können. Liegen diese Mittelpunkte auf der Kämpfergeraden innerhalb der Fensteröffnung, so erhält man einen gedrückten Spitzbogen. Liegen sie außerhalb, so findet man einen überhöhten Spitzbogen (Lanzettbogen) vor. Diese Varianten wurden im späteren Verlauf der Gotik von Architekten aus ästhetischen und statischen Gründen in die Gebäude eingeplant. Die im Folgenden konstruierten Spitzbögen sind für jedes Fenster im Kölner Dom und für einige Grundkonstruktionen grundlegend, weshalb auf einen speziellen Verweis bei diesen Konstruktionen verzichtet wird.

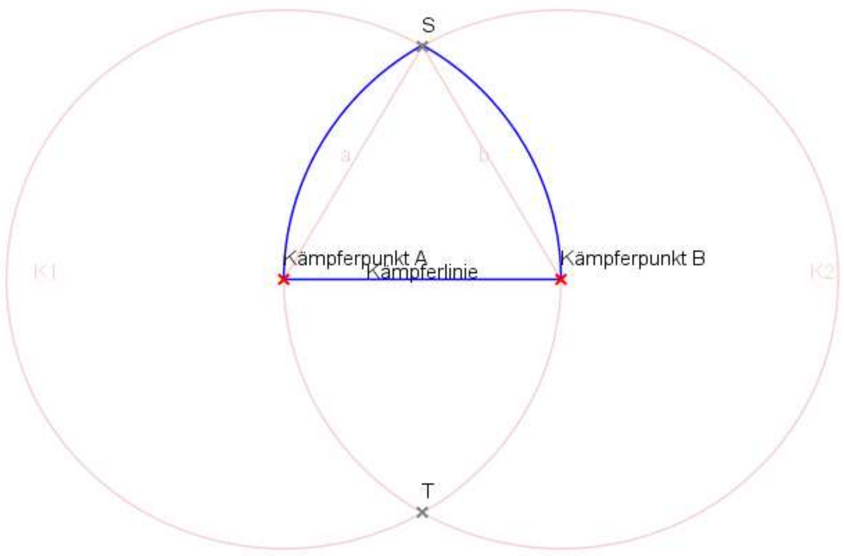
8.2 Einfacher Spitzbogen

Bei der Form des einfachen Spitzbogens liegen die Mittelpunkte der Kreisbögen an den Enden der Kämpferlinie und entsprechen somit den Kämpferpunkten. Die Radien der Kreisbögen haben folglich beim einfachen Spitzbogen die Länge der Kämpferlinie.

Konstruktionsbeschreibung:



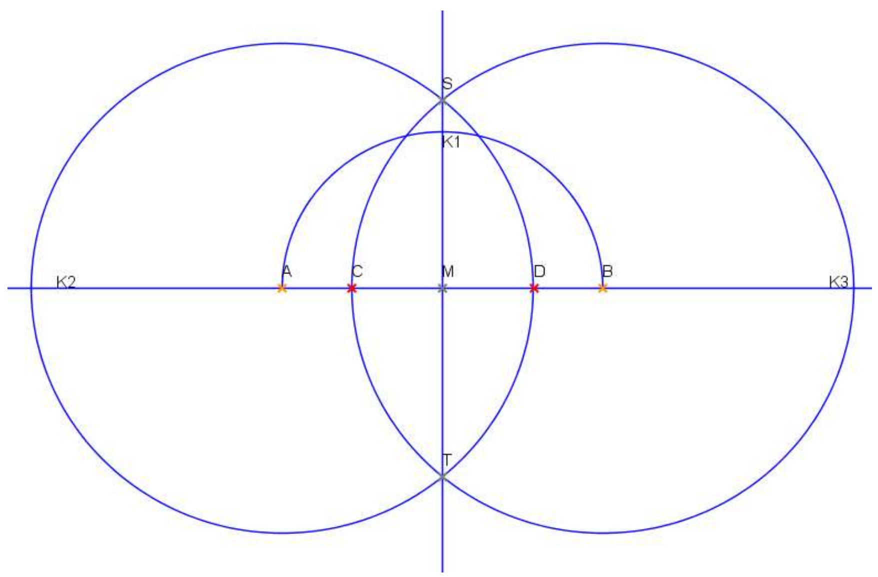
Der Spitzbogen entsteht aus dem Schnitt zweier Kreisbögen, deren Mittelpunkte auf den Enden der Kämpferlinie liegen. Je nach Breite und Höhe des Fensters muss die Kämpferlinie das Bogenfeld und den Kämpferansatz im richtigen Verhältnis trennen. Die Endpunkte der Kämpferlinie bzw. die Kämpferpunkte, die hier gleichzeitig die Mittelpunkte der Kreisbögen sind, nennt man A und B. Um sie ziehe man jeweils einen Kreis k_1 und k_2 mit dem Radius $\overline{AB}$. Die gemeinsamen Schnittpunkte der Kreise seien S und T. Hebt man nun die Kreisbögen AS und SB sowie die Strecke $\overline{AB}$ hervor, ist der einfache Spitzbogen konstruiert. Würde man nun A, B und S verbinden, so erhielte man genau ein gleichseitiges Dreieck ABS. Dieses bleibt bei der Konstruktion des einfachen Spitzbogens jedoch unsichtbar. Die Bogenspannweite des Spitzbogens entspricht in diesem Fall also genau einer Dreiecksseite und somit auch dem Radius der beiden Kreisbögen.



8.3 <u>Lanzettbogen</u>

Beim Lanzettbogen bzw. beim überhöhten Spitzbogen liegen die Mittelpunkte der Kreisbögen auf der Kämpfergeraden außerhalb der Kämpferlinie. Somit ist diesem Bogen ein gleichschenkliges Dreieck einbeschrieben. Daher ist in diesem Fall der Radius der beiden Kreisbögen größer als deren Bogenspannweite.

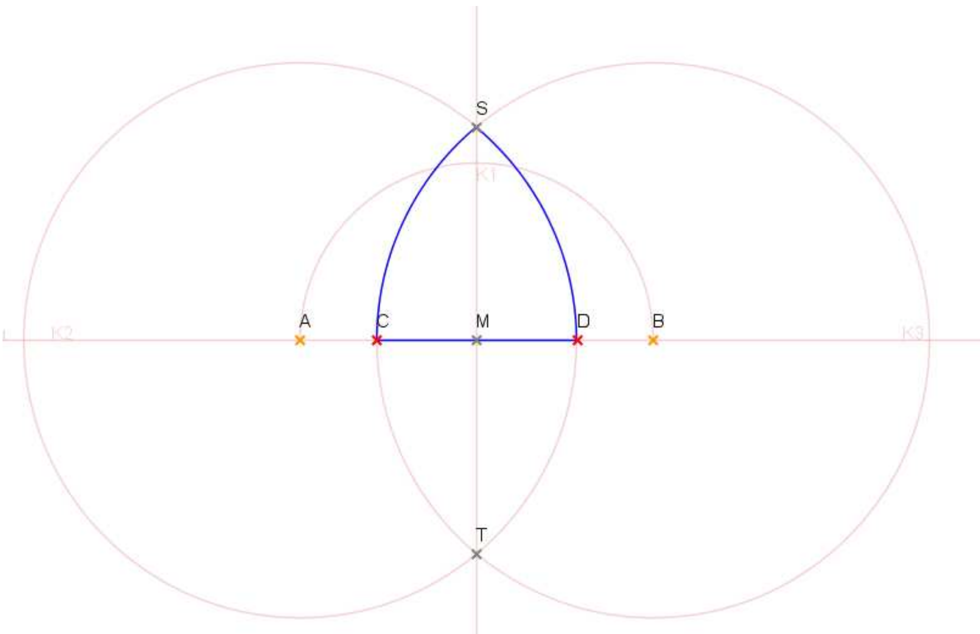
Konstruktionsbeschreibung:



Der Lanzettbogen entsteht durch die Konstruktion zweier Kreisbögen, deren Mittelpunkte sich außerhalb der Kämpferlinie befinden. Um diese Mittelpunkte zu ermitteln, muss man zunächst die Mittelsenkrechte der Kämpferlinie $\overline{CD}$ konstruieren. Der Schnittpunkt dieser Mittelsenkrechten mit der Strecke $\overline{CD}$ stellt den Mittelpunkt M der Kämpferlinie dar. Anschließend verlängere man die Kämpferlinie über C und D hinaus. Nun ziehe man einen Halbkreis k_1 oberhalb dieser Geraden um M mit einem beliebigen Radius, jedoch größer $\overline{MC}$ bzw. $\overline{MD}$. Die Schnittpunkte der verlängerten Kämpferlinie mit k_1 sind die gesuchten Mittelpunkte A und B der Kreisbögen, die den Lanzettbogen bilden. Sie liegen außerhalb der Fensteröffnung.

Weiterhin zeichne man den Kreis k_2 um den Punkt A durch den Kämpferpunkt D und den Kreis k_3 um den Punkt B durch den Kämpferpunkt C. Diese beiden Kreise legen die Schnittpunkte S und T fest. Folgende Abschnitte bilden nun den Lanzettbogen: Kreisbogen CS und SD sowie die Kämpferlinie $\overline{CD}$.

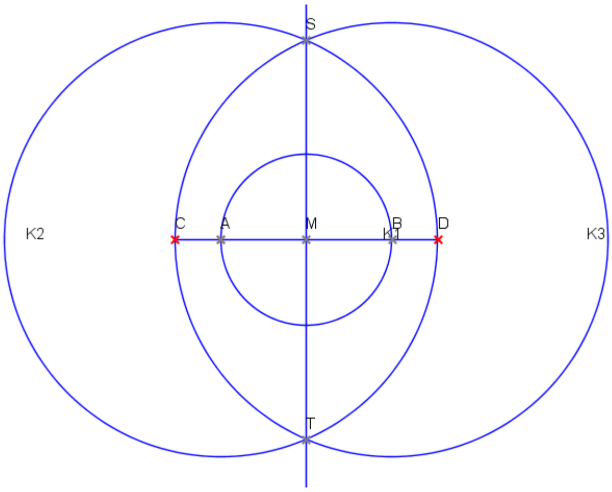
Je weiter die Mittelpunkte A und B von den Kämpferpunkten entfernt liegen, desto größer wird der Radius der Kreise k_2 sowie k_3 und desto spitzer wird der Bogen.



8.4 Gedrückter Spitzbogen

Den gedrückten Spitzbogen zeichnet aus, dass die Mittelpunkte seiner Kreisbögen innerhalb der Kämpferpunkte auf der Kämpferlinie liegen. Bei dieser Art des Spitzbogens ist der Radius der beiden Kreisbögen kleiner als deren Bogenspannweite.

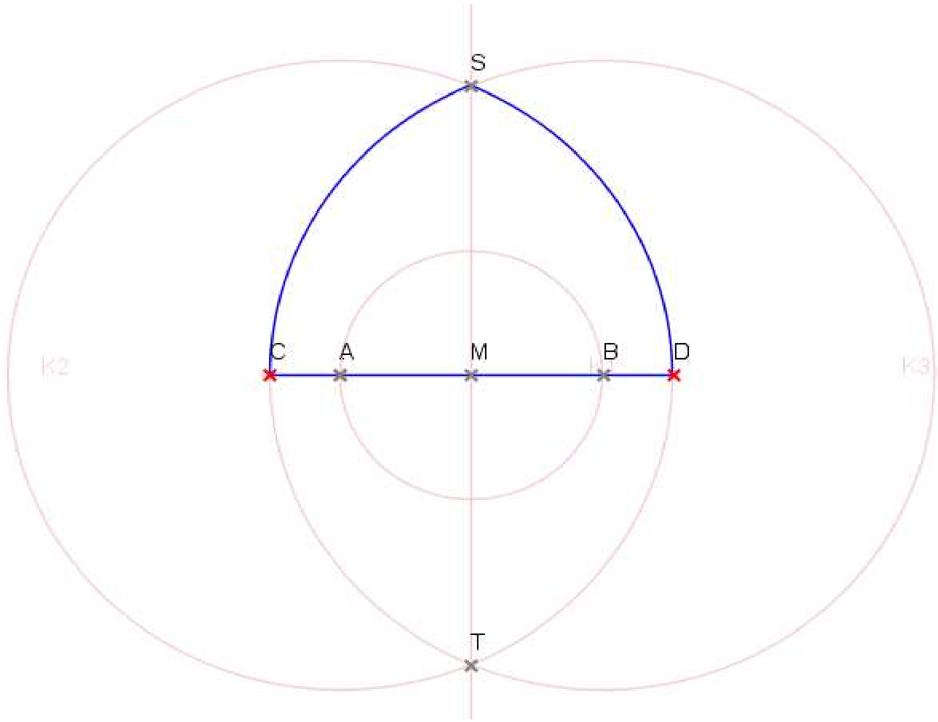
Konstruktionsbeschreibung:



Als erstes errichte man die Mittelsenkrechte auf der Kämpferlinie $\overline{CD}$ und erhält durch den Schnitt dieser beiden den Mittelpunkt M der Kämpferlinie. Nun ziehe man den Kreis k_1 um M mit einem beliebigen Radius, der jedoch kleiner als $\overline{MD}$ bzw. $\overline{MC}$ sein muss. k_1 schneidet die Kämpferlinie in den Punkten A und B, die die Mittelpunkte der gesuchten Kreisbögen des gedrückten Spitzbogens sind. Sie liegen innerhalb der Fensteröffnung.

Zeichne daraufhin einen Kreis k_2 um A mit dem Radius $\overline{AD}$ und einen Kreis k_3 um B mit dem Radius $\overline{BC}$, die die Schnittpunkte S und T erzeugen. Die Kreisbögen CS und SD sowie die Kämpferlinie bilden den gedrückten Spitzbogen.

Je enger A und B beieinander liegen, desto größer wird der Winkel bei S und desto gedrückter ist der Spitzbogen.

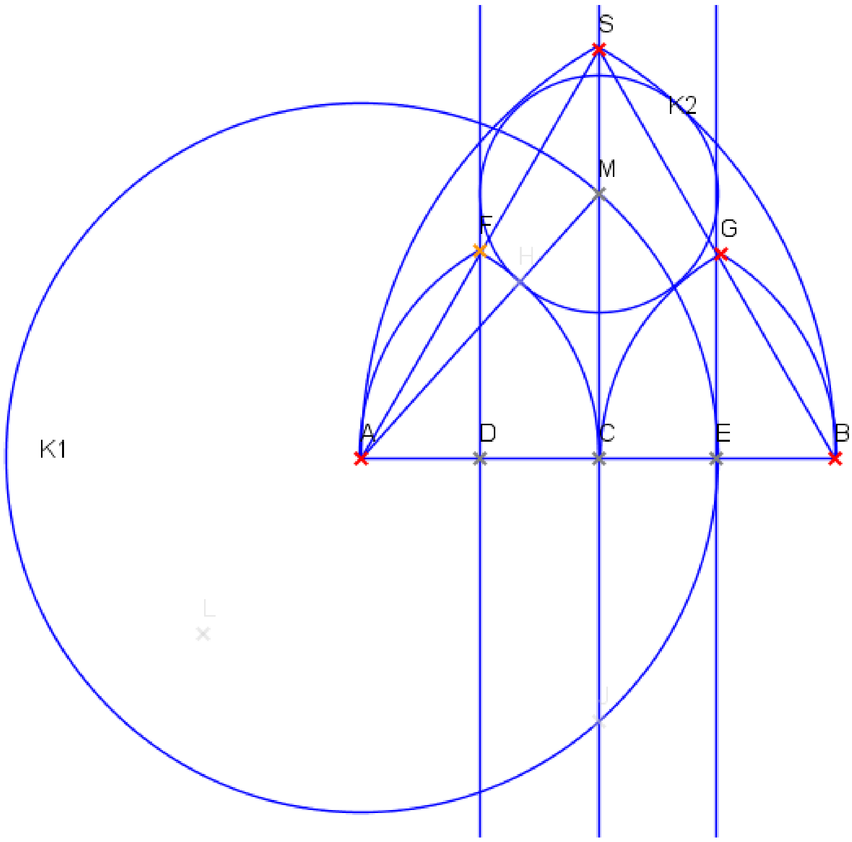


8.5 Zwei Spitzbögen und ein Kreis im Spitzbogen

Errichte zunächst einen der oben beschriebenen Spitzbögen. In diesen konstruiere wieder zwei symmetrische Spitzbögen und einen Kreis, der die drei in insgesamt vier Punkten berührt. Diese Konstruktion kann jedoch variieren, indem man den Kreis und die Spitzbögen innerhalb des Fensters verschiebt. Die Urform beispielsweise wäre die Variante, bei der die Kämpferlinie des äußeren Spitzbogens als Durchmesser des eingeschriebenen Kreises gewählt wird. Im Kölner Dom ist diese Form nicht vertreten, daher wird darauf nicht näher eingegangen. Der Schwerpunkt im Kölner Dom liegt bei den beiden im Folgenden beschriebenen Varianten.

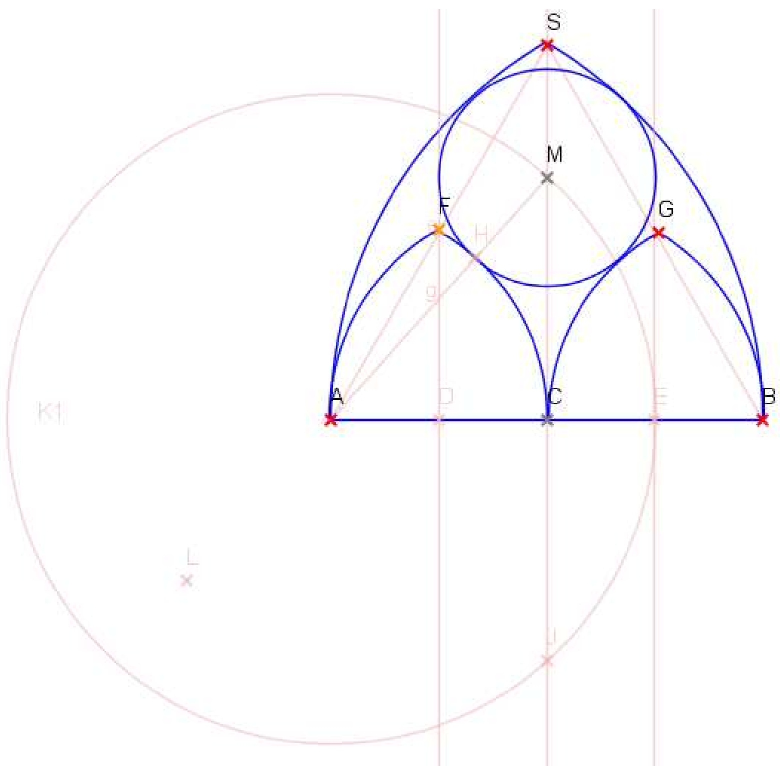
Konstruktionsbeschreibung:

8.5.1 Erste Variante



Gegeben sei ein einfacher Spitzbogen mit der Kämpferlinie $\overline{AB}$ und der Spitze S. Man konstruiere zunächst die Mittelsenkrechte der Kämpferlinie $\overline{AB}$ und der Schnittpunkt dieser beiden sei C. Errichte nun die Mittelsenkrechten der Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{CB}$ mit den entstehenden Schnittpunkten D und E. Um nun die zwei inneren Spitzbögen zu konstruieren, lege man die Punkte A und C als die Kämpferpunkte des linken und die Punkte C und B als die Kämpferpunkte des rechten Spitzbogens fest. Daraufhin verfahre wie bei der Konstruktion des einfachen Spitzbogens und bezeichne die Spitzen mit den Buchstaben F und G. Da der Radius der kleinen Spitzbögen genau der Hälfte der Kämpferlinie des großen Spitzbogens entspricht, sind die Spitzen F und G die Mittelpunkte der Schenkel des gleichseitigen Dreiecks ABS.

Anschließend wird der Kreis konstruiert, der die kleinen Spitzbögen außen und die beiden Innenseiten der Kreisbögen des großen Spitzbogens berührt. Dazu wird ein Kreis k_1 um A mit dem Radius $\overline{AE}$ gezogen. Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten auf $\overline{AB}$ durch C mit k_1 heiße M. M ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises k_2. Verbinde nun A mit M. Diese Strecke hat einen Schnittpunkt mit dem Spitzbogen AFC und dieser sei H. Zuletzt ziehe man den Kreis k_2 um M durch H. Hebt man nun den großen als auch die zwei kleinen Spitzbögen und den Kreis k_2 hervor, sind die gesuchten Spitzbögen und der Kreis konstruiert.



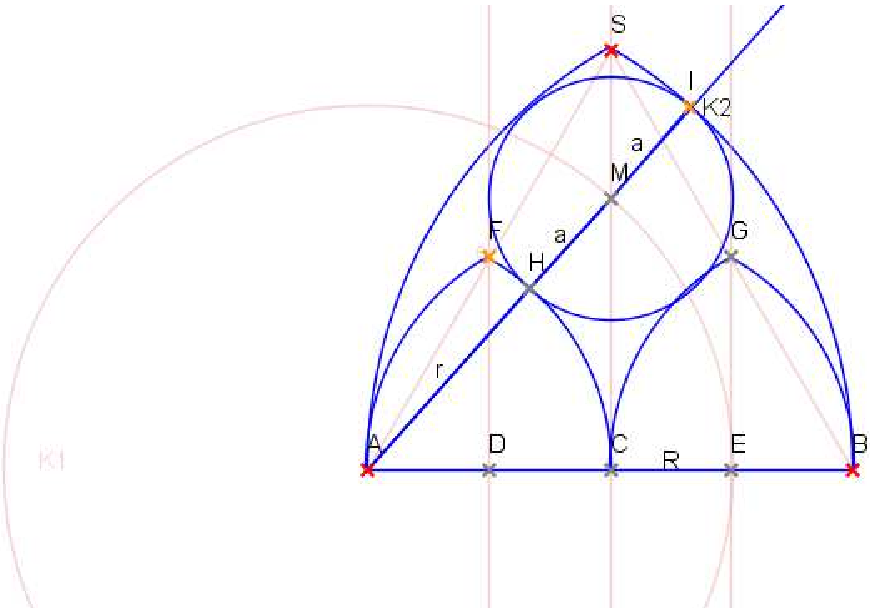
Geometrische Orte der Berührpunkte:

Der Kreis k_2 hat sowohl zwei Berührpunkte mit dem äußeren Spitzbogen als auch je einen gemeinsamen Punkt mit den kleinen Spitzbögen.

Nach Konstruktion ist M der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten und des Kreises k_1, der genau mittig zwischen dem äußeren Kreisbogen durch

B und dem linksgekrümmten Kreisbogen durch C verläuft. Auf Grund der Symmetrie dieser Konstruktion liegt der Mittelpunkt M nun gleichweit von den Kreisbögen AS, BS, CF und CG entfernt. Verbindet man A mit M, so findet man den ersten Berührpunkt H und erhält somit den Radius des Kreises k_2, der dann auch die anderen drei Kreisbögen jeweils einmal berührt.

Bedingung für die Kreisradien:

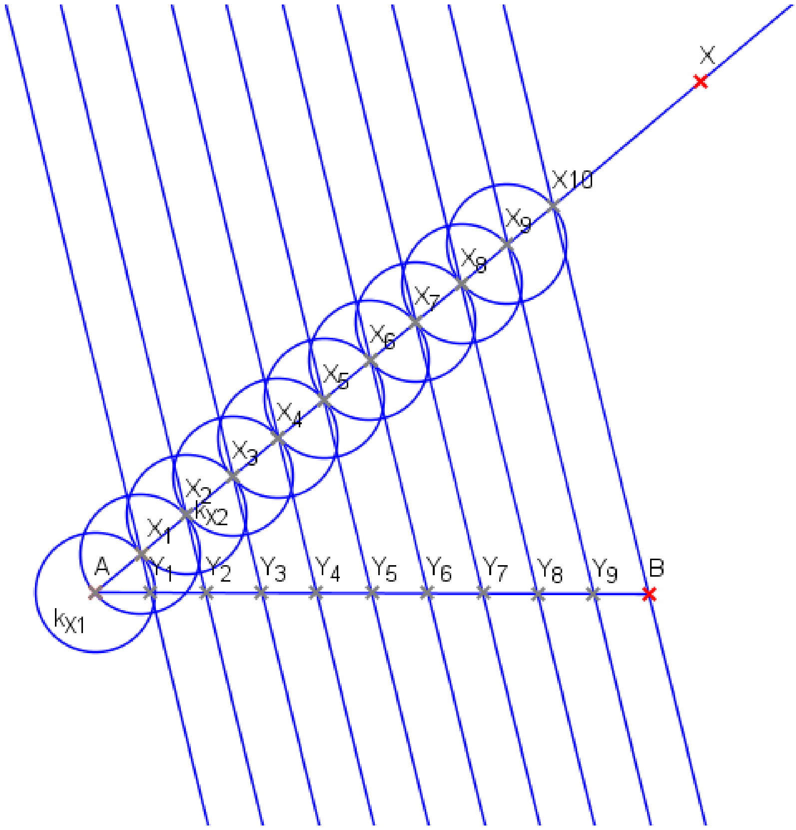


Sei r der Radius der kleinen Spitzbögen, R der Radius des großen Spitzbogens und a der Radius des Kreises k_2. Verlängert man nun die Strecke $\overline{AM}$ über M hinaus, so erhält man den Schnittpunkt I mit dem großen Spitzbogen und somit die Hilfsstrecke $\overline{AI}$=R. Laut Konstruktion entspricht die Strecke $\overline{MI}$ wie auch die Strecke $\overline{MH}$ dem Radius a. Die Hilfsstrecke $\overline{AI}$ setzt sich aus der Strecke $\overline{AH}$ = r, $\overline{HM}$ = a und $\overline{MI}$ = a zusammen, so dass gilt:

$R = r + 2a \Leftrightarrow r = R - 2a$

8.5.2 <u>Zweite Variante</u>

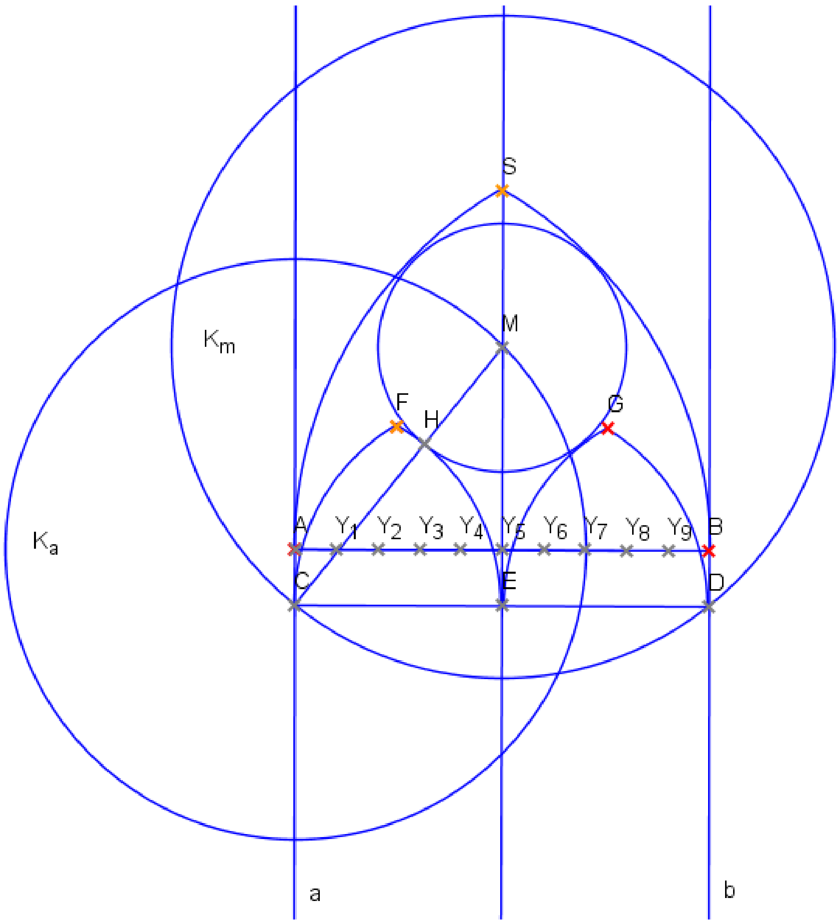
Das Charakteristische an dieser Konstruktion ist, dass die Kämpferlinie des äußeren Spitzbogens nicht mit den Kämpferlinien der eingeschriebenen Spitzbögen zusammenfällt.



Zunächst bedient man sich einer Hilfskonstruktion, damit man die Kämpferlinie des umgebenden Spitzbogens in zehn gleiche Abschnitte teilen kann.

Zeichne die Kämpferlinie $\overline{AB}$ und an A eine beliebige Halbgerade $\overrightarrow{AX}$ in einem beliebigen Winkel zwischen 0° und 90° zur Kämpferlinie (Punkt X nicht auf Strecke $\overline{AB}$. Ziehe nun mit beliebigem Radius einen Kreis k_{X1} und nenne den Schnittpunkt mit $\overrightarrow{AX}$ X_1. Um X_1 ziehe man wiederum mit demselben Radius den Kreis k_{X2} und bezeichne den Schnittpunkt mit der Halbgeraden X_2. Führe diese Konstruktion noch acht Mal durch und erhalte dadurch die Strecke $\overline{AX_{10}}$, die durch die Schnittpunkte X_1 bis X_9 in zehn gleiche Abschnitte unterteilt ist.

Nun verbinde den Punkt X_{10} mit B. Dann zeichne zu dieser Strecke die Parallelen durch die Punkte X_1 bis X_9. Diese Parallelen schneiden die Kämpferlinie in den Punkten Y_1 bis Y_9 und somit ist die Kämpferlinie $\overline{AB}$ durch diese Punkte in zehn kongruente Teilstrecken unterteilt.

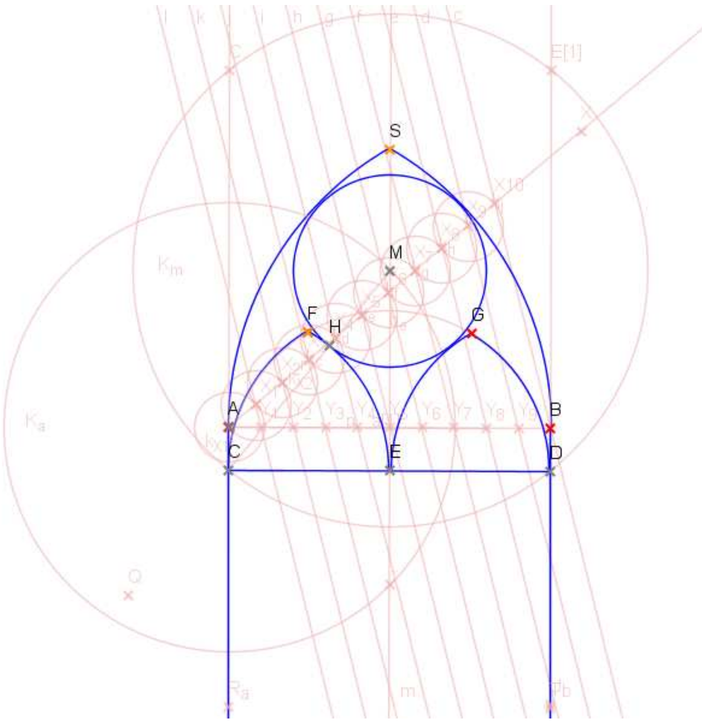


Jetzt beginne man mit der eigentlichen Konstruktion und bilde über der unterteilten Kämpferlinie $\overline{AB}$ einen einfachen Spitzbogen mit der Spitze S. In den Punkten A und B zeichne man nun die jeweiligen Senkrechten a und b zu der Strecke $\overline{AB}$, die allerdings nur unterhalb der Kämpferlinie ausgeführt werden. Anschließend wird auf dieser Kämpferlinie die Mittelsenkrechte errichtet, so dass sie die Strecke $\overline{AB}$ im Punkt Y_5 in zwei gleiche Abschnitte teilt.

Weiterhin ziehe man um A durch Y_7 den Kreis k_A, der die Mittelsenkrechte der Kämpferlinie $\overline{AB}$ im Punkt M schneidet. Zeichne nun den Kreis k_M, der den Radius von $\frac{8}{10}$ der Kämpferlinie $\overline{AB}$ besitzt, um M. Der Kreis k_M schneidet die Senkrechte a im Punkt C und die Senkrechte b im Punkt D. Verbinde diese Punkte zu der Strecke $\overline{CD}$. Diese Strecke wird natürlich auch von der Mittelsenkrechten der Kämpferlinie $\overline{AB}$ im Punkt E halbiert. Anschließend errichte man über der Strecke $\overline{CE}$ sowie über $\overline{ED}$ einen einfachen Spitzbogen. Die genannten Strecken werden somit zu Kämpferlinien. Der Spitzbogen über der Kämpferlinie $\overline{CE}$ habe die Spitze F und der Spitzbogen über der Kämpferlinie $\overline{ED}$ habe die Spitze G.

Danach werden die Punkte C und M zu der Strecke $\overline{CM}$ verbunden, die den Kreisbogen EF in dem Punkt H schneidet. Ziehe nun um M den Kreis k mit dem Radius $\overline{MH}$.

Blendet man schließlich alle Hilfslinien aus und hebt nur die drei einfachen Spitzbögen mit dem Kreis k hervor, ist das Maßwerk vollendet.



Geometrischer Ort der Berührpunkte:
Sei R der Radius des äußeren Spitzbogens, r der Radius der kleinen Bögen und a der Radius des Kreises k .

Nach Konstruktion berührt k im Punkt H bereits den Kreisbogen EF und auf Grund der Symmetrie dieser Figur befindet sich der Berührpunkt von k mit dem Kreisbogen EG genau spiegelverkehrt zur Mittelsenkrechten. Somit bleibt hier lediglich zu zeigen, dass der Kreis k zwei weitere Berührpunkte mit dem äußeren Spitzbogen aufweist.

Dafür zeichne man zunächst die Hilfslinie $\overline{AM}$ ein und verlängere sie über M hinaus. Der Schnittpunkt mit dem Kreisbogen BS sei I. Dieser ist auch gleichzeitig der Berührpunkt des Kreises k mit diesem Kreisbogen, was im Folgenden deutlich wird.
Als Erstes ist hierfür die Kongruenz der Strecken $\overline{HM}$ und $\overline{MI}$ nachzuweisen.
Die Strecke $\overline{CM}$ setzt sich nach Konstruktion aus den Teilstrecken $\overline{CH}$ und $\overline{HM}$ zusammen. $\overline{CM}$ ist nach Konstruktion $\frac{8}{10}$ R und $\overline{CH}$ nach Konstruktion $\frac{1}{2}R = \frac{5}{10}$ R. Daher beträgt die Strecke $\overline{HM}$ $\frac{3}{10}$ R.
Die Strecke $\overline{AI}$ fügt sich aus den Strecken $\overline{AM}$ und $\overline{MI}$ zusammen. $\overline{AI}$ entspricht nach Konstruktion dem Radius R und $\overline{AM}$ hat nach Konstruktion eine Länge von $\frac{7}{10}$ R. Auf Grund dessen beträgt die Länge des Teilstücks $\overline{MI}$, genau wie die Strecke $\overline{HM}$, $\frac{3}{10}$ R. Somit ist gezeigt, dass der Kreis k den Kreisbogen BS in dem Punkt I berührt. Auch hier gilt, dass der Berührpunkt des Kreises k mit dem Kreisbogen AS bezüglich der Mittelsenkrechten genau spiegelverkehrt zu I liegt.

Bedingungen der Kreisradien:

Der Radius r der kleinen Spitzbögen beträgt $\frac{1}{2}=\frac{5}{10}$R und der Radius a des Kreises k hat eine Länge von $\frac{3}{10}$R. Somit gilt:

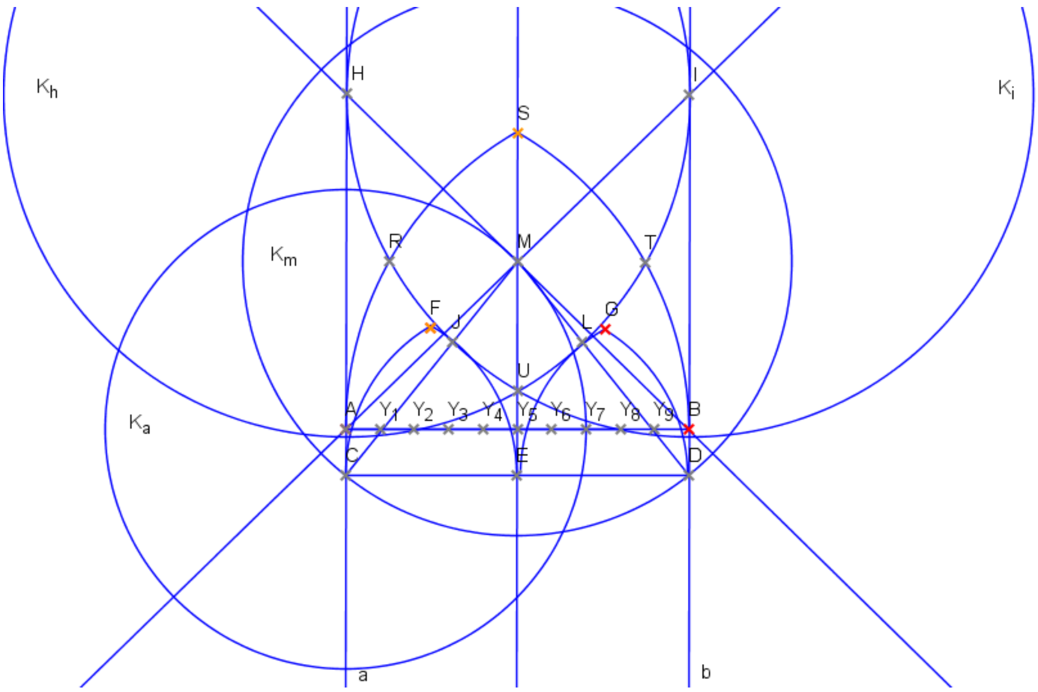
$$r=\frac{1}{2}R=\frac{5}{10}R \;\Leftrightarrow R=2r=\frac{10}{5}r$$

$$a=\frac{3}{10}R\Leftrightarrow R=\frac{10}{3}a$$

$$a=\frac{10}{6}r\Leftrightarrow r=\frac{6}{10}a$$

8.6 Zwei Spitzbögen und ein Kreisbogenviereck im Spitzbogen

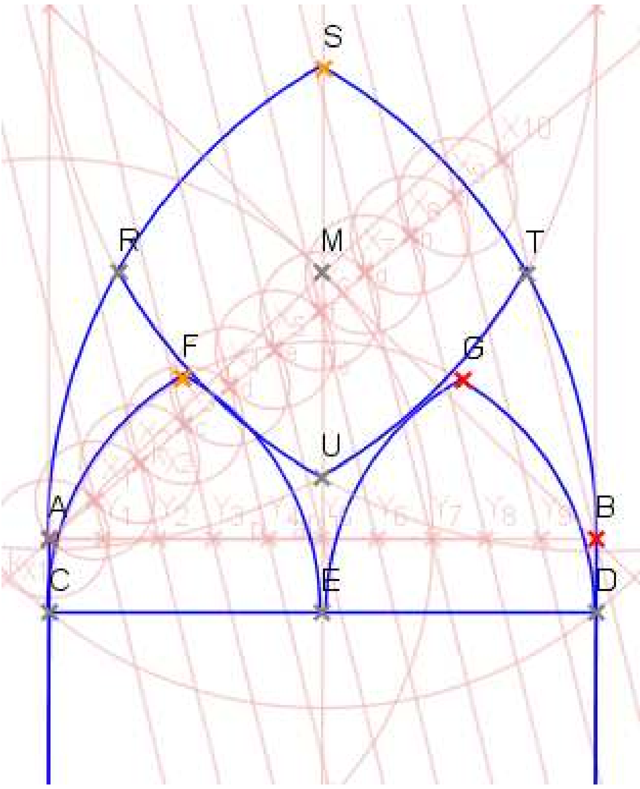
Konstruktionsbeschreibung:



Zunächst verfahre man wie „zwei Spitzbögen und ein Kreis im Spitzbogen (Zweite Variante, Kapitel 8.5.2)“ bis alles außer dem finalen Kreis konstruiert wurde.

Nun zeichnet man jeweils eine Gerade durch die Punkte A und M bzw. B und M. Diese Geraden wiederum schneiden die Geraden a und b jeweils in den Punkten H und I. Zuletzt zieht man den Kreis k_H um H durch den Punkt I und den weiteren Kreis k_I um I durch H.

Blendet man schließlich alle Hilfslinien aus und hebt nur die drei einfachen Spitzbögen und das Kreisbogenviereck mit seinen vier Bögen hervor, ist das Maßwerk konstruiert.



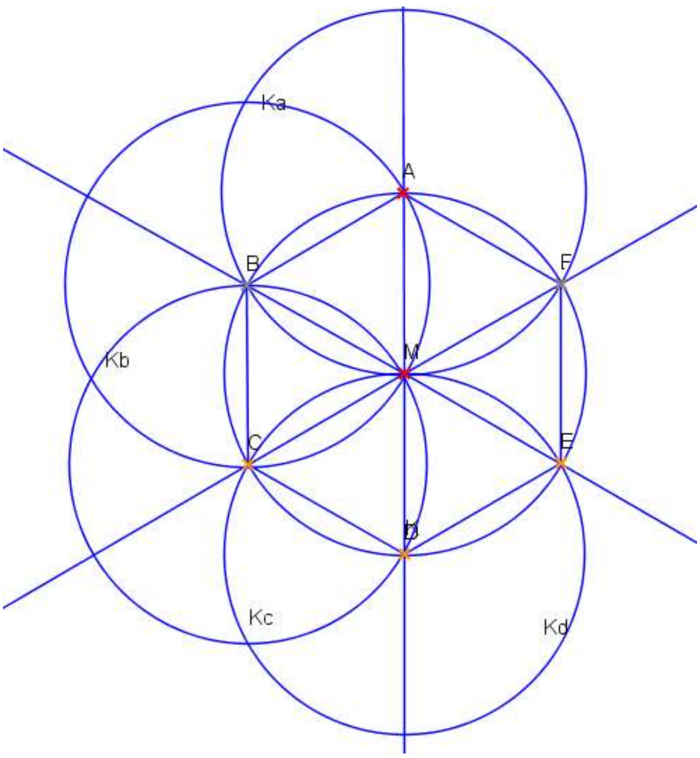
8.7 <u>Dreipass</u>

Der Dreipass ist eine geometrische Figur, die sich, wie der Name schon ausdrückt, aus drei Kreisbögen zusammensetzt. In den gotischen Maßwerkfenstern ist er von grundlegender Bedeutung, da er sowohl in seiner Grundform, als auch in zahlreichen abgewandelten Variationen vorzufinden ist. Bei diesen Konstruktionen liegen gleichseitige Dreiecke zugrunde, die wichtige Anhaltspunkte für die weiteren Konstruktionen liefern. Es gibt zahlreiche Dreipassformen.

8.7.1 Grundform Dreipass

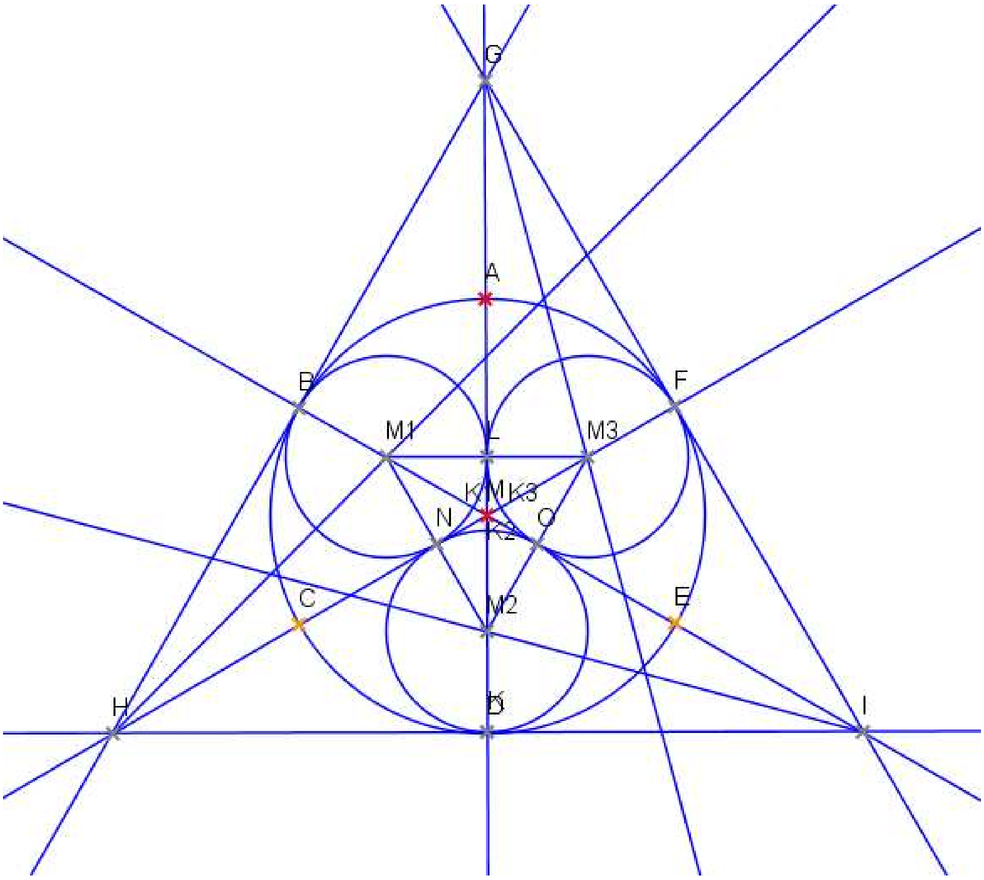
Konstruktionsbeschreibung:

Eine Möglichkeit, einen Dreipass zu konstruieren, besteht darin, in einen Kreis zunächst ein gleichseitiges Sechseck zu zeichnen, dessen Eckpunkte grundlegend zur Konstruktion des Dreipasses beitragen.



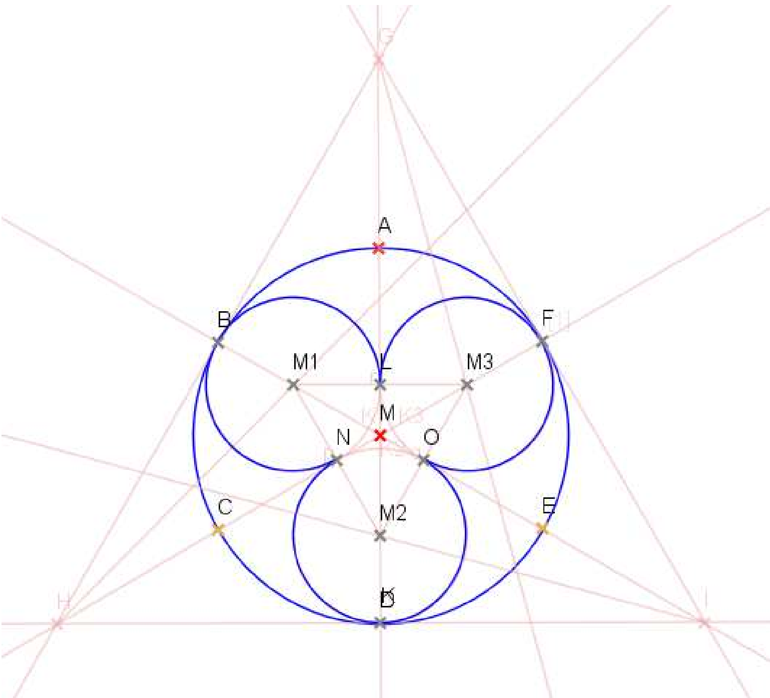
Zunächst werden zwei Punkte M und A gewählt. Nun wird den Kreis k um M mit dem Radius $\overline{MA}$ gezogen. Anschließend ziehe man um A den Kreis k_A durch M. Die beiden Schnittpunkte mit dem Kreis k nenne man B und F. Daraufhin zeichnet man den Kreis k_B um B mit dem Radius $\overline{MA}$ und erhält mit dem Kreis k den Schnittpunkt C. Wiederum wird ein Kreis k_C mit selbigem Radius um C gezogen. Hieraus resultiert der Punkt D auf k. Den Schnittpunkt E erhält man durch das Ziehen des Kreises k_D mit dem Radius $\overline{MA}$ um den zuvor erhaltenen Punkt D. Zuletzt verbindet man die Punkte A bis F zu einem

Sechseck. Dieses ist gleichseitig, was im Anschluss an die Konstruktionsbeschreibung verifiziert wird (siehe Beweis gleichseitiges Sechseck).



Im Anschluss verbinde man den Mittelpunkt M mit den Eckpunkten A, B, C, D, E und F des Sechsecks und verlängere die erhaltenen Strecken über die Sechseckspunkte hinaus. Die Halbgeraden $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MD}$ und $\overrightarrow{MF}$ sind die Winkelhalbierenden der Winkel $\angle$AMC, $\angle$CME und $\angle$EMA, da nach Konstruktion des regelmäßigen Sechsecks die Winkel bei M alle kongruent sind. Errichte in den drei Punkten B, D und F die Senkrechte auf der jeweiligen Winkelhalbierenden bzw. Halbgeraden. Diese Senkrechten sind Tangenten des Kreises k in den jeweiligen Punkten. Die Tangenten bzw. Senkrechten schneiden die Halbgeraden $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MC}$ und $\overrightarrow{ME}$ in den drei Punkten G, H und I (siehe Beweis kongruente Dreiecke). Somit erhält man die gleichschenkligen Dreiecke GMH, HMI und IMG (siehe Beweis gleichschenkliges Dreieck), in die man nun die entsprechenden Inkreise k_1 , k_2 und k_3 mit den Mittelpunkten M_1, M_2 und M_3 beschreibt. Diese Inkreise berühren sich gegenseitig und haben jeweils einen dritten Berührpunkt mit dem Ausgangskreis k . k_1 berührt k_2 im Punkt N und k_3 im Punkt L, k_2 berührt k_3 im Punkt O. k berührt k_1 im Punkt B, k_2 im Punkt D und k_3 im Punkt F.

Lässt man nun die Hilfslinien beiseite und beachtet nur die Kreisbögen NL, LO und ON, findet man den gesuchten Dreipass vor.

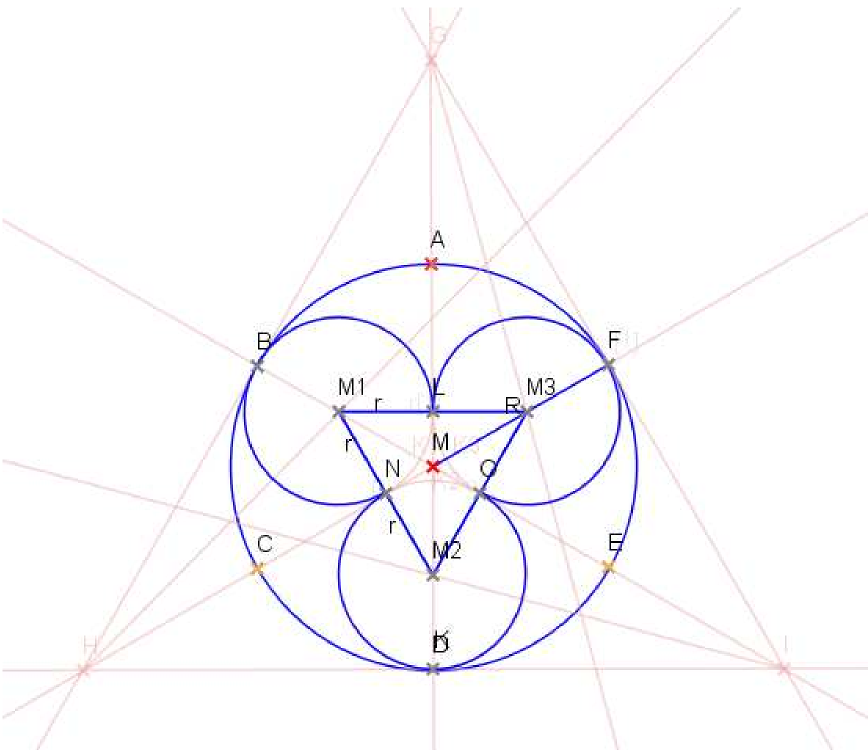


Geometrischer Ort der Berührpunkte:

Verbindet man die Mittelpunkte M_1, M_2 und M_3 des Dreipasses, so erhält man ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seitenmittelpunkte mit den Berührpunkten der Kreise k_1 , k_2 und k_3 übereinstimmen.

Da die Inkreise in kongruente Dreiecke eingezeichnet wurden, haben sie die gleichen Radien und berühren die Dreiecke an den Schenkeln jeweils an der gleichen Stelle. Daraus folgt, dass die Berührpunkte L, N, und O gleichweit von M entfernt liegen. Da jeweils zwei der kongruenten Dreiecke einen Schenkel gemeinsam haben und die zugehörigen Inkreise diesen berühren, ist dieser Berührpunkt auch ein gemeinsamer Punkt der beiden Inkreise. Gleichzeitig entspricht daher auch dieser Schenkel der Tangente an die beiden Kreise im gemeinsamen Berührpunkt. Die Radien der Inkreise stehen senkrecht auf dieser Tangente und daher ergänzen sie sich zu einer Strecke, die die Mittelpunkte dieser anliegenden Kreise verbindet. Somit entsteht das gleichseitige Dreieck $M_1 M_2 M_3$, dessen Seitenlänge dem Durchmesser der Inkreise entspricht.

Die Berührpunkte des umgebenden Kreises mit den Inkreisen sind B, D und F. Auch hier gilt, dass der Berührpunkt dieses Umkreises mit der Basis des Dreiecks dem Berührpunkt des zugehörigen Inkreises mit derselben Basis entspricht. Die Punkte B, D und F sind nach Konstruktion Berührpunkte des umgebenden Kreises mit der Dreiecksseite. Diese sind zudem genau die Berührpunkte der Inkreise mit der Dreiecksseite und somit auch mit dem umgebenden Kreis, da nach Konstruktion eines Inkreises das Lot auf eine Dreiecksseite gefällt wird. In dieser Konstruktion liegt B bzw. D und F genau auf der Winkelhalbierenden, die senkrecht wie ein Lot auf dieser Dreiecksbasis steht, da die Dreiecke gleichschenklig sind.



Bedingungen für die Kreisradien:

Sei R der Radius des Umkreises des Dreipasses, r der Radius der Kreise des Dreipasses und die Punkte L, N und O die Berührpunkte der drei Kreise des Dreipasses. Damit die obige Konstruktion des Dreipasses durchgeführt werden kann, müssen die Radien in einem bestimmten Verhältnis zueinander stehen. Um dieses darzustellen, benötigt man zunächst die Strecke zwischen dem Mittelpunkt des umgebenden Kreises und einem der Mittelpunkte der kleinen Kreise. Dies lässt sich mit Hilfe der Anwendung des Satzes von Pythagoras bewerkstelligen.

$$\left|\overline{M_2L}\right|^2 = (2r)^2 - r^2 \qquad \text{(nach Pythagoras)}$$

$$= 4r^2 - r^2$$

$$= 3r^2$$

$$\Leftrightarrow \left|\overline{M_2L}\right| = r \cdot \sqrt{3}$$

$$\left|\overline{M_2M}\right| = \frac{2}{3} r \cdot \sqrt{3}$$

(da das Dreieck gleichseitig ist, schneiden sich seine Mittelsenkrechten bzw. seine Höhen im Verhältnis 2:1)

Nachdem man den Abstand der beiden Mittelpunkte durch r ausgedrückt hat, kann man diesen nun folgendermaßen verwenden, um r in Abhängigkeit von R darzustellen.

$$R = \left|\overline{M_2M}\right| + r$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{2}{3} r \cdot \sqrt{3} + r$$

$$\Leftrightarrow R = r\left(\frac{2}{3}\sqrt{3} + 1\right) \qquad \Big| \div \left(\frac{2}{3}\sqrt{3} + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{1 \cdot R}{\frac{2}{3}\sqrt{3}+1}$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{1}{\frac{2}{3}\sqrt{3}+1} R$$

Beweis:

- gleichseitiges Sechseck:

Die Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ und $\overline{AF}$ sind nach Konstruktion gleich bzw. kongruent, da die Radien der Kreise um die Punkte gleich gewählt wurden. Es bleibt noch zu zeigen, dass die letzte Sechsecksseite $\overline{EF}$ kongruent zu den konstruierten Seiten bzw. stellvertretend hierfür der Seite $\overline{AF}$ ist. Hierfür ist zunächst festzuhalten, dass die Strecke $\overline{MA}$ gleich der Strecke $\overline{ME}$ gleich r ist. Weiterhin haben die Dreiecke MAF und MEF die Strecke $\overline{MF}$ gemeinsam, die dem Radius r entspricht. Da das konstruierte regelmäßige Sechseck aus gleichseitigen Dreiecken besteht (wegen der Konstruktion des Sechsecks mit Hilfe von Kreisen haben die Seiten der Dreiecke alle die Länge r und sind somit gleichseitig) und die Innenwinkelsumme im Dreieck (180°) somit auf jeweils drei Ecken aufgeteilt wird, beträgt jeder Winkel in den Dreiecken, und speziell der Winkel FMA, 60°. Auf Gr und der Kongruenz der Dreiecke sind auch die Winkel der anderen Dreiecke um M 60°.

Die Winkel um den Mittelpunkt eines Kreises betragen insgesamt 360°, daher folgt nun:

360° - $\angle$FMA - $\angle$AMB - $\angle$BMC - $\angle$CMD - $\angle$DME = $\angle$EMF

$\Leftrightarrow$ 360° - 60° - 60° - 60° - 60° - 60° = $\angle$EMF

Nach dieser Rechnung ist auch der Winkel EMF 60°. S omit sind die Dreiecke MAF und MEF nach dem Kongruenzsatz SWS und letztlich auch die Strecken $\overline{EF}$ und $\overline{AF}$ kongruent. Es handelt sich also um ein gleichseitiges Sechseck.

- Kongruente Dreiecke:

Um zu zeigen, dass sich je zwei Tangenten und die jeweilige Halbgerade in genau einem Punkt schneiden, müssen die beiden Dreiecke, die die Halbgerade gemeinsam haben, kongruent sein.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit nehme man die Dreiecke MBG und MFG. Diese Dreiecke sind laut SWS kongruent. Die Winkel $\angle$BMG und $\angle$FMG sind nach Konstruktion gleich groß (60°), die S trecken $\overline{BM}$ und $\overline{FM}$ entsprechen beide dem Radius R des Kreises k und die Winkel $\angle$MBG und $\angle$MFG sind nach Konstruktion rechte Winkel. Folglich sind die Dreiecke MBG und MFG kongruent. Daher schneiden sich jeweils zwei Tangenten und die von diesen eingeschlossene Halbgerade in genau einem Punkt.

- Gleichschenkliges Dreieck:

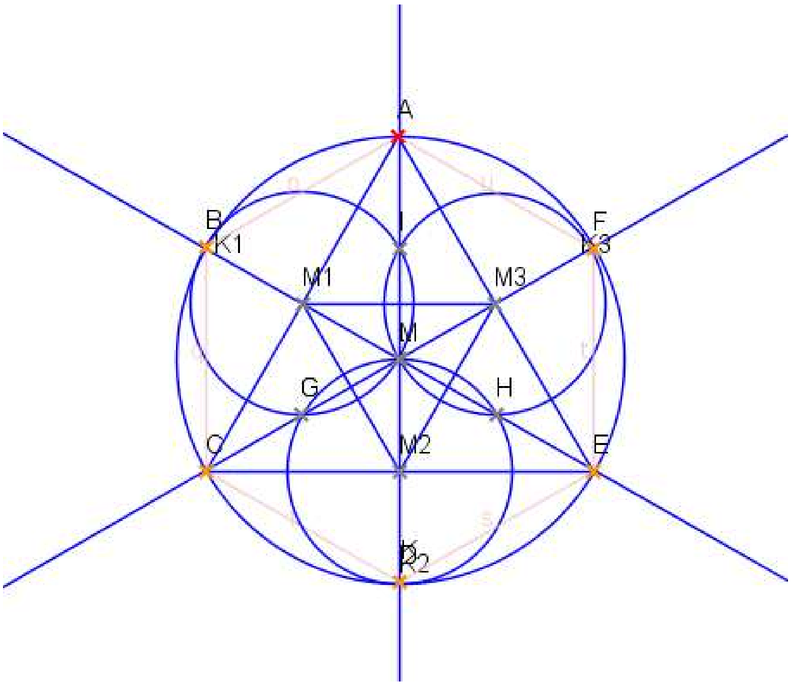
Die Schenkel $\overline{MG}$, $\overline{MH}$ und $\overline{MI}$ sind alle gleich lang und bilden daher die gleichschenkligen Dreiecke GMH, HMI und IMG.

Nach Konstruktion wurden die Winkelhalbierenden der Winkel $\angle$GMH, $\angle$HMI und $\angle$IMG gezeichnet und auf ihnen in den Punkten B, D und F die Senkrechten errichtet. Diese Senkrechten schneiden die Schenkel und mit diesen bilden sie zusammen die oben genannten Dreiecke. Da nun die Winkelhalbierende senkrecht auf der zuletzt konstruierten Dreiecksseite steht, ist diese gleichzeitig auch die Höhe und die Mittelsenkrechte des Dreiecks. Durch diese Eigenschaft wird deutlich, dass es sich um ein gleichschenkliges Dreieck handelt.

Da die Schenkel der drei Dreiecke gleich lang sind und die Winkel bei M nach Konstruktion gleich groß sind, sind die Dreiecke GMH, HMI und IMG nach SWS auch kongruent.

8.7.2 Häufig verwendete Dreipassform

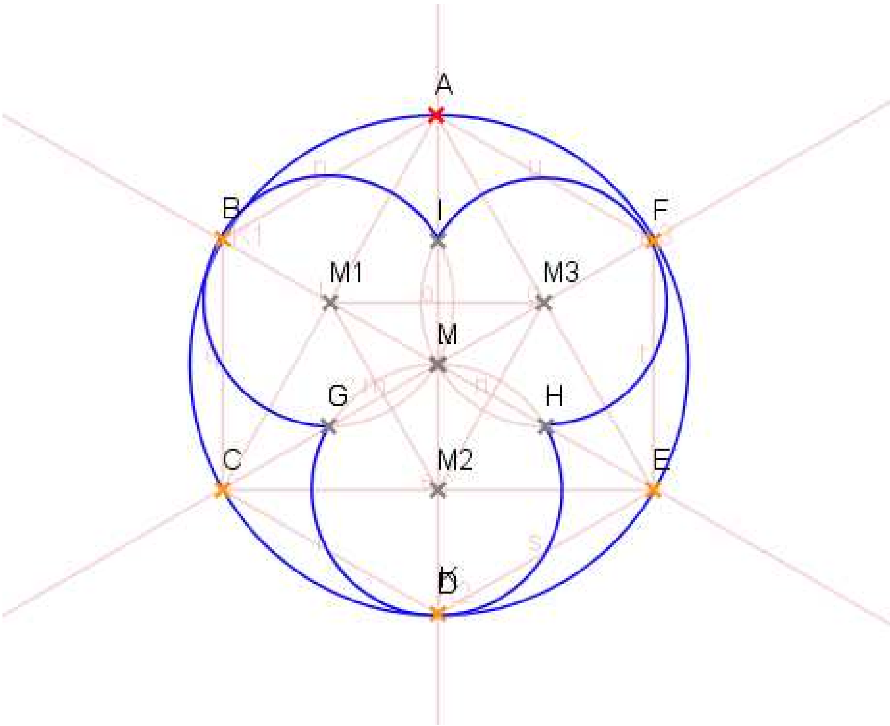
Die im Folgenden beschriebene Variante ist am Kölner Dom vorzufinden, weshalb sie hier genauere Beachtung findet.



Konstruktionsbeschreibung:

Zunächst verfahre man wie in der Konstruktion der Dreipassgrundform (Kapitel 8.7.1) bis das gleichseitige Sechseck ABCDEF erstellt ist. Anschließend wird jeder zweite Punkt zu einem gleichseitigen Dreieck (siehe Beweis gleichseitiges Dreieck) verbunden, so erhält man z.B. das Dreieck ACE. Daraufhin werden die Mittelsenkrechten der Dreiecksseiten konstruiert, wodurch die Schnittpunkte M_1, M_2 und M_3 entstehen. Verbinde M_1, M_2 und M_3 zu dem gleichseitigen Mittendreieck des gleichseitigen Dreiecks ACE. Die Eckpunkte des Mittendreiecks M_1, M_2 und M_3 sind die Mittelpunkte der drei Kreise des Dreipasses. Somit lassen sich die drei Kreise k_1=Kr(M_1, $\left|\overline{M_1M}\right|$), k_2=Kr(M_2, $\left|\overline{M_2M}\right|$) und k_3=Kr(M_3, $\left|\overline{M_3M}\right|$) ziehen, die sich folglich alle im Mittelpunkt M des Umkreises schneiden. k_2 schneidet k_1 in dem Punkt G und k_3 in dem Punkt I, k_2 und k_3 schneiden sich in dem Punkt H.

In den gotischen Fenstern sind dann nur noch die Kreisbögen GH, HI und IG zu sehen und diese Form des Dreipasses ist hiermit konstruiert.



Geometrischer Ort der Berühr- und Schnittpunkte:

Die Kreise des Dreipasses schneiden sich alle drei in M und berühren k jeweils in einem der ausgelassenen Punkte B, D oder F des Sechsecks.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit zeige man, dass der Kreis um M_3 durch M den Kreis k in F berührt bzw. $\overline{M_3M} = \overline{M_3F}$ ist. Hierfür muss zunächst bewiesen werden, dass die Dreiecke AME und AEF kongruent sind. Dies gilt nach dem Kongruenzsatz SSS: Die Dreiecke haben die Strecke $\overline{AE}$ gemeinsam und auf Grund der Sechseckskonstruktion entsprechen die Strecken $\overline{ME}$, $\overline{EF}$, $\overline{AF}$ und $\overline{AM}$ einander. Die Dreiecke sind somit gleichschenklig und bilden daher zusammen eine Raute. Daraus folgt, dass die Höhe $\overline{MM_3}$ kongruent zu der Höhe $\overline{M_3F}$ ist, beide auf der Strecke $\overline{AE}$ senkrecht stehen und sich somit zu dem Durchmesser des Inkreises ergänzen. Dieser Durchmesser $\overline{MF}$ entspricht dem Radius des umgebenden Kreises k.

Beweis:

- Gleichseitiges Dreieck:

Geht man vom gleichseitigen Sechseck aus und verbindet jeden zweiten Punkt miteinander, so erhält man ein Dreieck. Dieses ist auch gleichseitig, was über die Kongruenz der Dreiecke ABC, CDE und AEF nach SWS verständlich wird (die Schenkel entsprechen jeweils dem Radius und der von diesen eingeschlossene Winkel beträgt in allen Dreiecken 120° (gleichseitiges Sechseck)).

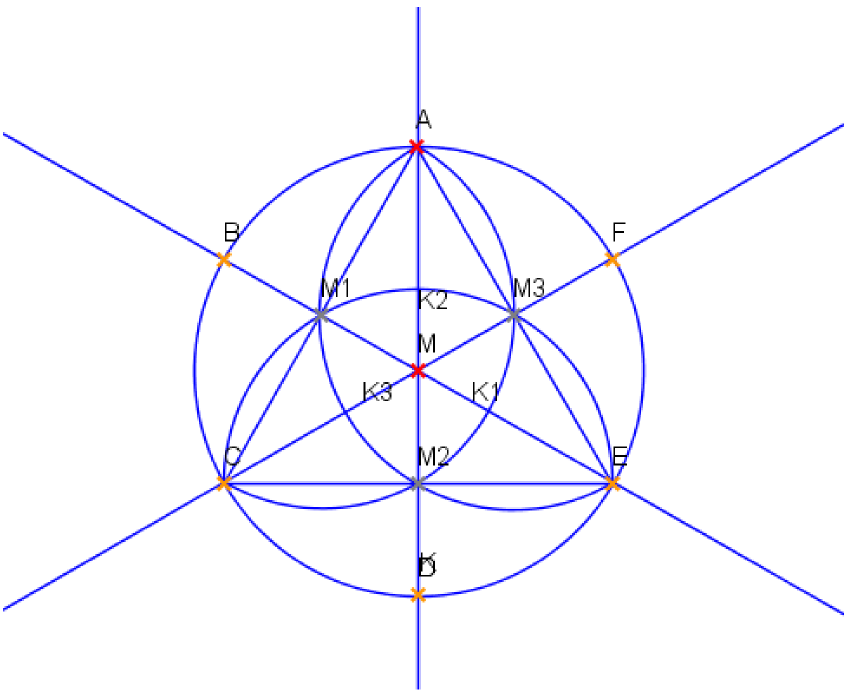
Bedingungen für die Kreisradien:

Der Beweis lässt nun eine genauere Aussage über die Verhältnisse der Radien zueinander zu. Es kann schlussfolgernd gesagt werden, dass der Radius des Umkreises k doppelt so groß ist wie der Radius eines Dreipasskreises:

R = 2r.

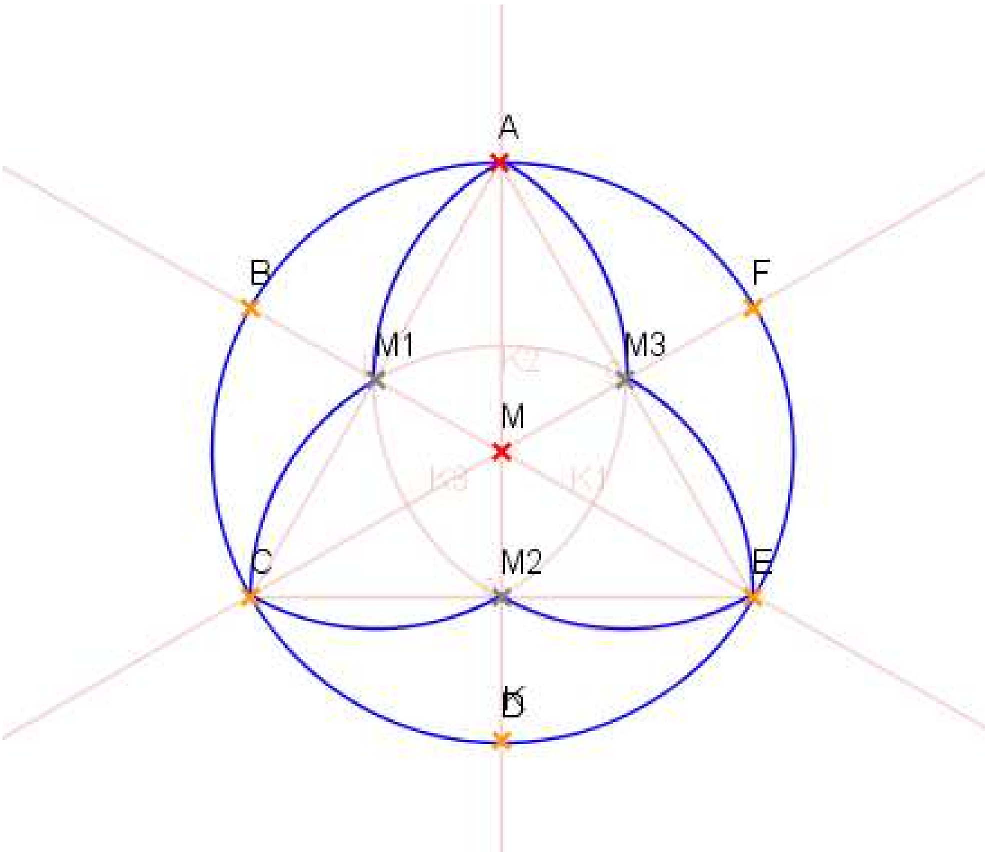
8.8 <u>Liegendes Dreiblatt</u>

8.8.1 <u>Das liegende Dreiblatt im Kreis</u>



Konstruktionsbeschreibung:

Auch bei dieser Variante liegt das gleichseitige Dreieck ACE zugrunde, weshalb auch hier der Konstruktionsanfang der Grundform des Dreipasses (Kapitel 8.7.1) erforderlich ist.
Sind nun die Mittelpunkte M_1, M_2 und M_3 der Dreiecksseiten ermittelt, so zeichne man um M_1 über der Dreiecksseite $\overline{AC}$ den Halbkreis k_1, um M_2 über der Dreiecksseite $\overline{CE}$ den Halbkreis k_2 und um M_3 über der Dreiecksseite $\overline{AE}$ den Halbkreis k_3, die in das Dreiecksfeld hineinragen. Jeweils zwei dieser Halbkreise schneiden sich in dem Mittelpunkt des Dritten. Nun sind alle Hilfslinien bzw. -punkte konstruiert, von denen für das liegende Dreiblatt nur Teilstücke benötigt werden. Folgende Kreisbögen erstellen das liegende Dreiblatt: AM_1, M_1 C, CM_2, M_2E, EM_3 und M_3A.



Geometrischer Ort der Schnittpunkte:

Die Halbkreise k_1, k_2 und k_3 verlaufen jeweils durch die Mittelpunkte M_1, M_2 und M_3 der anderen beiden Halbkreise, da über den Mittelpunkten der Seiten des gleichseitigen Dreiecks Halbkreise mit dem Radius der halben Dreiecksseite gezogen wurden. Auf Grund dessen schneiden die konstruierten Halbkreise auch den umgebenden Kreis in den Punkten A, C und E.

Bedingungen für die Kreisradien:

Sei R der Radius des umgebenden Kreises und r der Radius der Halbkreise k_1, k_2 und k_3. Nun betrachtet man das Dreieck MM_2E, wobei die Strecke $\overline{ME}$ dem Radius R und die Strecke $\overline{MM_2}$ dem Radius r entspricht. Die zuletzt genannte Strecke stimmt mit dem halben Radius R überein, da sie ein Drittel der Höhe des in den Kreis eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks beträgt. Daher gilt nach Pythagoras:

$$R^2 = \left(\frac{1}{2}R\right)^2 + r^2$$

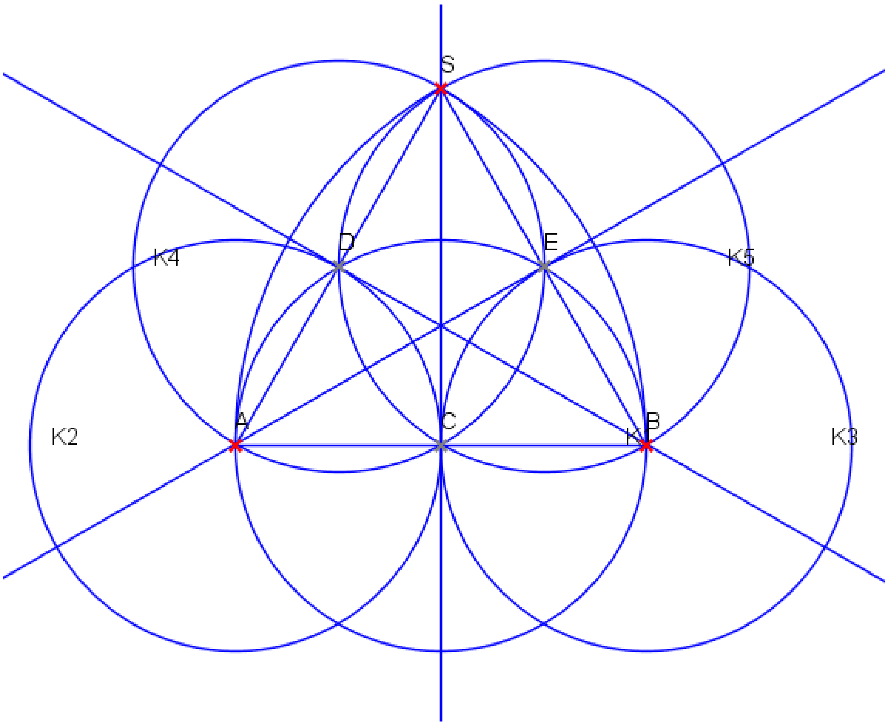
$$\Leftrightarrow r^2 = \frac{3}{4}R^2$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{2}R$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{2r}{\sqrt{3}}$$

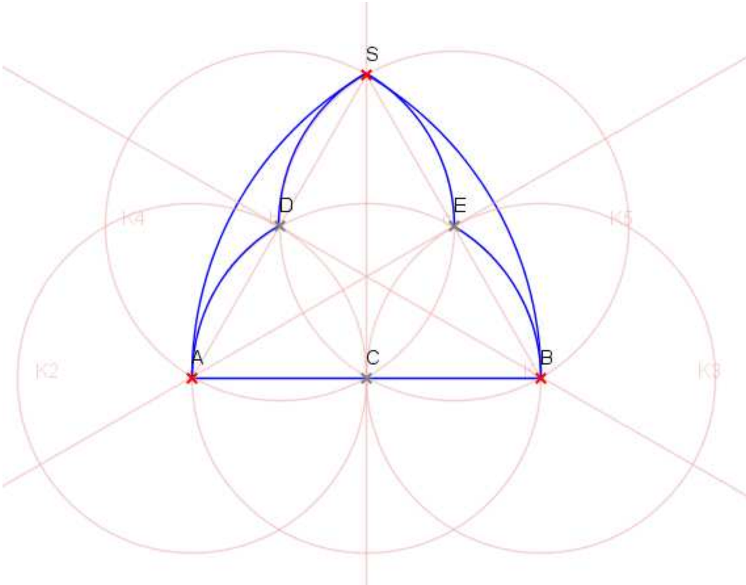
8.8.2 Das liegende Dreiblatt im Spitzbogen

Konstruktionsbeschreibung:



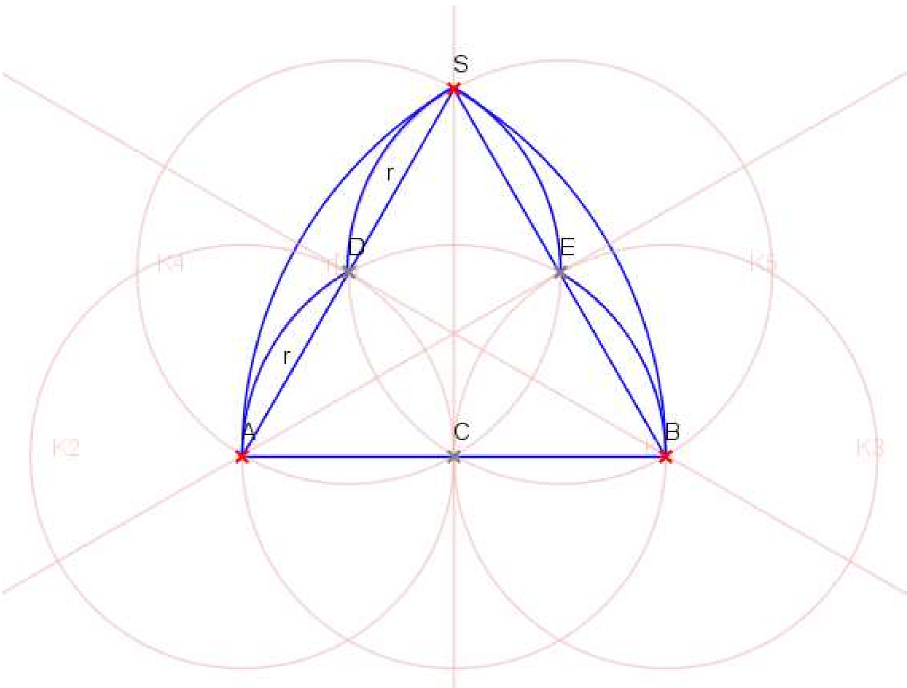
Zunächst wird ein einfacher Spitzbogen ASB konstruiert, in dem das gleichseitige Dreieck ASB einbeschrieben ist.
Nun errichte man die Mittelsenkrechten auf allen Dreieckseiten, wodurch sich die Mittelpunkte C, D und E ergeben. Ziehe nun einen Kreis k_1 um C (Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$) durch A bzw. B. Dann zeichne einen Kreis um A (k_2) und einen Kreis um B (k_3) mit dem Radius $\overline{AC}$ bzw. $\overline{BC}$. Nach Konstruktion fällt der Schnittpunkt von k_1 mit k_2 mit dem Seitenmittelpunkt D der Seite $\overline{AS}$ und der Schnittpunkt von k_1 mit k_3 mit dem Seitenmittelpunkt E der Seite $\overline{BS}$ zusammen. Weiterhin ziehe man einen Kreis um D (k_4) und einen Kreis um E (k_5) mit dem Radius $\overline{DE}$. In diesem Fall entspricht ein Schnittpunkt der zuletzt gezeichneten Kreise dem Dreieckspunkt S, da der Radius der Kreise die Länge der halben Dreiecksseite hat (Mittendreieck), und ein Weiterer dem Punkt C.

Hat man diese Hilfslinien bzw. -kreise fertig gestellt, muss man die folgenden Kreisbögen hervorheben, um diese Form des Kleeblattes zu erhalten: AD, DS, SE und EB.



Geometrischer Ort der Schnittpunkte:
Siehe Konstruktion

Bedingungen für die Kreisradien:



Sei R der Radius des umgebenden Spitzbogens und r die Radien der Kreisbögen AD, DS, SE und EB, was im Folgenden noch gezeigt wird. Da die Punkte C, D und E die Mittelpunkte der Dreiecksseiten des gleichseitigen Dreiecks ASB sind, sind auch die Strecken $\overline{AC}$, $\overline{CB}$, $\overline{EB}$, $\overline{AD}$, $\overline{CE}$, $\overline{CD}$, $\overline{DS}$ und $\overline{SE}$ kongruent. Sowohl daraus als auch auf Grund der Konstruktion folgt, dass die Radien r der Kreise k_1 bis k_5 gleich sind, aus denen die oben genannten Kreisbögen bestehen. Betrachtet man nun die Dreiecksseite $\overline{AS}$, wird deutlich, dass R in Abhängigkeit von r formuliert werden kann:

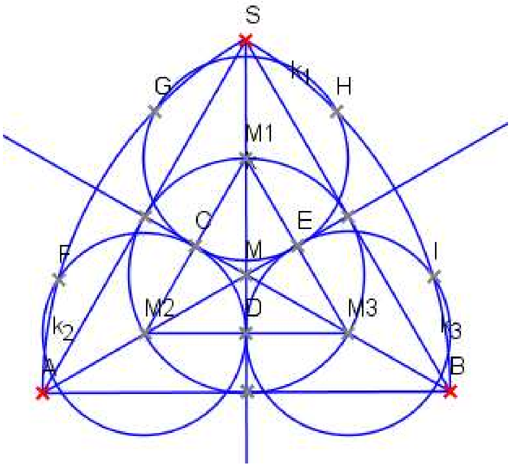
$$R = 2r \Leftrightarrow r = \frac{R}{2}$$

8.9 **Kleeblatt im Spitzbogen**

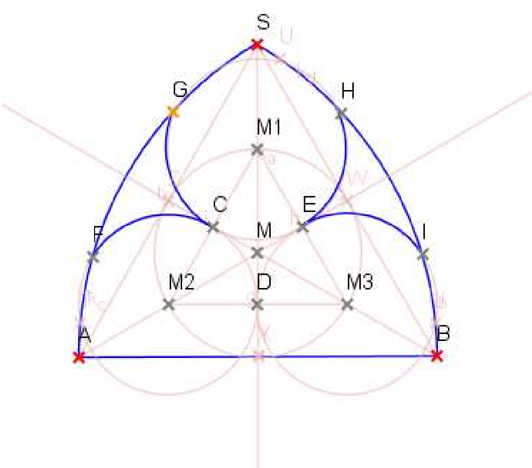
8.9.1 Erste Variante

Das Kleeblatt im Spitzbogen in der ersten Variante ist nichts anderes als ein tangierender Dreipass, der in einen Spitzbogen eingepasst ist. Jedoch berührt sich nur der Dreipass untereinander und er berührt nicht den Spitzbogen wie bei der Konstruktion mit dem umgebenden Kreis. Der Spitzbogen wird von den Kreisen des Dreipasses geschnitten. Somit hat die Bogenlinie im Fenster eine andere Erscheinungsform als bei der Grundform des Dreipasses (Kapitel 8.7.1).

Konstruktionsbeschreibung:



Bilde zunächst den einfachen Spitzbogen ABS mit dem eingeschriebenen gleichseitigen Dreieck ABS. Konstruiere daraufhin mit Hilfe der Winkelhalbierenden den Inkreis k mit dem Mittelpunkt M des Dreiecks ABS. Benenne die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden mit dem Inkreis M_1, M_2 und M_3. Anschließend verbindet man diese Punkte zu dem gleichseitigen Dreieck $M_1 M_2 M_3$, dessen Seiten die Winkelhalbierenden in den Punkten C, D und E schneiden. Zuletzt ziehe man den Kreis k_1 um M_1 durch C bzw. E, den Kreis k_2 um M_2 durch C bzw. D und den Kreis k_3 um M_3 durch D bzw. E. Der Kreis k_1 schneidet den Spitzbogen in den Punkten G und H, der Kreis k_2 im Punkt F und der Kreis k_3 im Punkt I.



Verdeutlicht man nun die Kreisbögen FC, CG, HE und EI, so ist das Kleeblatt im Spitzbogen konstruiert.

Geometrischer Ort der Berührpunkte:
Die Kreise k_1, k_2 und k_3 berühren sich untereinander in den Punkten C, D und E, da sie nach Konstruktion um die Eckpunkte des Dreiecks $M_1 M_2 M_3$ gezeichnet wurden und den Radius einer halben Dreiecksseite haben. Diese Kreise schneiden den Spitzbogen.

Bedingungen für die Kreisradien:
Sei R der Radius des Spitzbogens und r der Radius der Kreise k_1, k_2 und k_3. Der Radius des Inkreises k des einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks ABS beträgt somit $\frac{R}{6}\sqrt{3}$. Um das Verhältnis der beiden Radien zueinander darzustellen, legt man den Fokus auf das Dreieck MDM_3. Die Strecke $\overline{MM_3}$ entspricht dem Radius des Inkreises und die Strecke $\overline{MD}$ beträgt die Hälfte desselben Radius. Da r der Strecke $\overline{DM_3}$ entspricht und diese drei Seiten ein rechteckiges Dreieck bilden, folgt nach Pythagoras:

$$\left(\frac{R}{6}\sqrt{3}\right)^2 = \left(\frac{R}{12}\sqrt{3}\right)^2 + r^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{R^2}{36}3\right) = \left(\frac{R^2}{144}3\right) + r^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{R^2}{12}\right) = \left(\frac{R^2}{48}\right) + r^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3R^2}{48}\right) = r^2$$

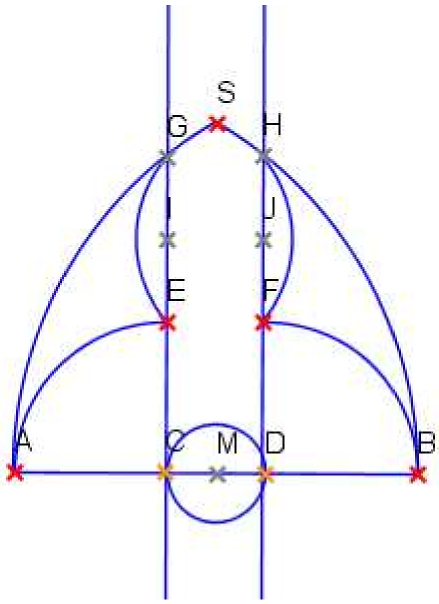
$$\Leftrightarrow \left(\frac{R^2}{16}\right) = r^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{R}{4} = r$$

8.9.2 Zweite Variante

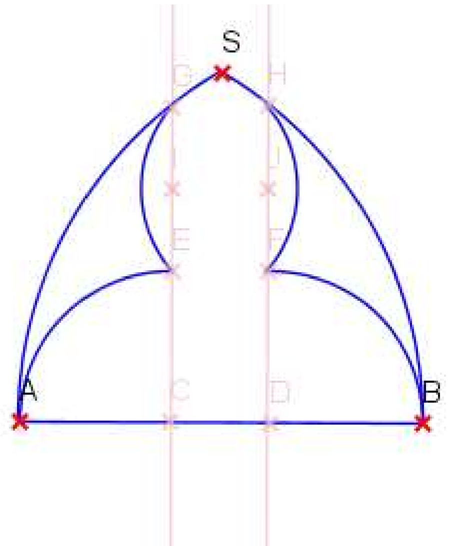
In der zweiten Variante des Kleeblatts im Spitzbogen ist die Form des obersten Kleeblatts im Gegensatz zur ersten Variante (Kapitel 8.9.1) zugespitzt und schneidet den umgebenden Spitzbogen in zwei Punkten.

Konstruktionsbeschreibung:



Zunächst wird die Kämpferlinie $\overline{AB}$ gezeichnet und auf ihr der Spitzbogen ASB errichtet. Diese wird von dem Punkt M halbiert. Um M ziehe man nun einen Kreis k_1 mit dem Radius, der einem Achtel der Kämpferlinie entspricht (siehe Hilfskonstruktion, Kapitel 8.5.2) und benenne die Schnittpunkte mit der Kämpferlinie C und D. Anschließend zieht man einen Kreis k_2 um C durch A und einen Kreis k_3 um D durch B. Zusätzlich zeichne man die Senkrechte c in C zur Kämpferlinie sowie die Senkrechte d in D. Den Schnittpunkt von k_2 mit c oberhalb der Kämpferlinie nenne man E, den von k_3 und D oberhalb der Kämpferlinie F. Zusätzlich schneidet die Senkrechte c den Spitzbogen in dem Punkt G und die Senkrechte d den Spitzbogen in dem Punkt H. Nun trage man auf der Strecke $\overline{EG}$ den Mittelpunkt I und auf der

Strecke $\overline{FH}$ den Mittelpunkt J ab. Zuletzt ziehe man den Kreis k_4 um I durch F bzw. H und den Kreis k_5 um J durch E bzw. G.



Blendet man alle Hilfskonstruktionen aus und verdeutlicht die Kreisbögen AS, SB, AE, EG, BF und FH, ist diese Konstruktion abgeschlossen.

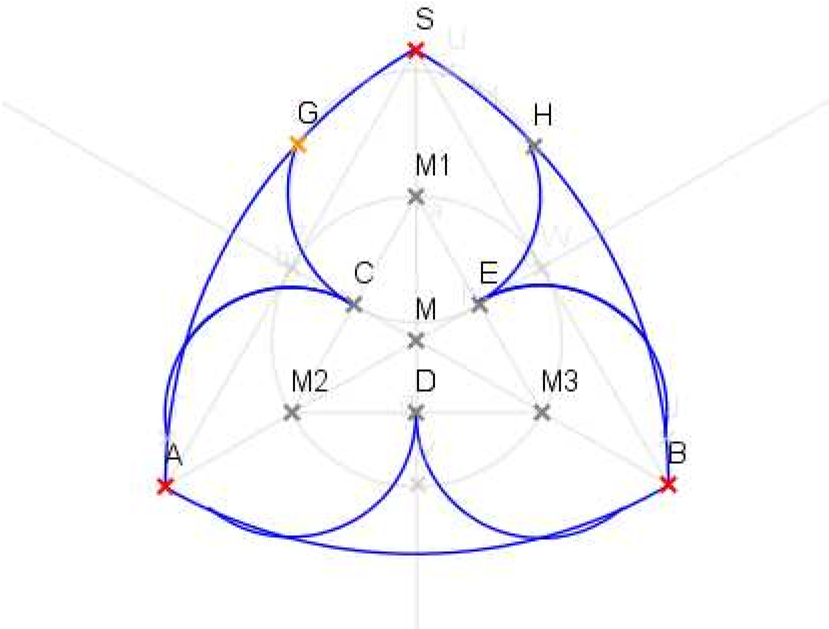
Geometrischer Ort der Schnittpunkte:
Der Kreis k_2 schneidet den Kreis k_4 im Punkt E und der Kreis k_4 schneidet wiederum den Spitzbogen im Punkt G nach Konstruktion. Dies gilt natürlich auch spiegelverkehrt für die Punkte F und H.

Bedingungen für die Kreisradien:
siehe Konstruktion

8.10 <u>Kleeblatt im Kreisbogendreieck</u>

Konstruktionsbeschreibung:
Diese Konstruktion ist nur eine leicht abgeänderte Version der ersten Variante der Konstruktion „Kleeblatt im Spitzbogen“ (8.9.1).
Man verfährt hier genau wie bei der obigen Konstruktionsbeschreibung bis man die drei Kreise im Spitzbogen fertig gestellt hat. Dann jedoch

vernachlässigt man die Kämpferlinie und hebt zusätzlich die Kreisbögen AD und DB hervor. Zuletzt zieht man noch einen Kreis um S durch A bzw. B und die Konstruktion ist fertig gestellt.



Geometrischer Ort der Berührpunkte:
s. Kleeblatt im Spitzbogen

Bedingungen für die Kreisradien:
s. Kleeblatt im Spitzbogen

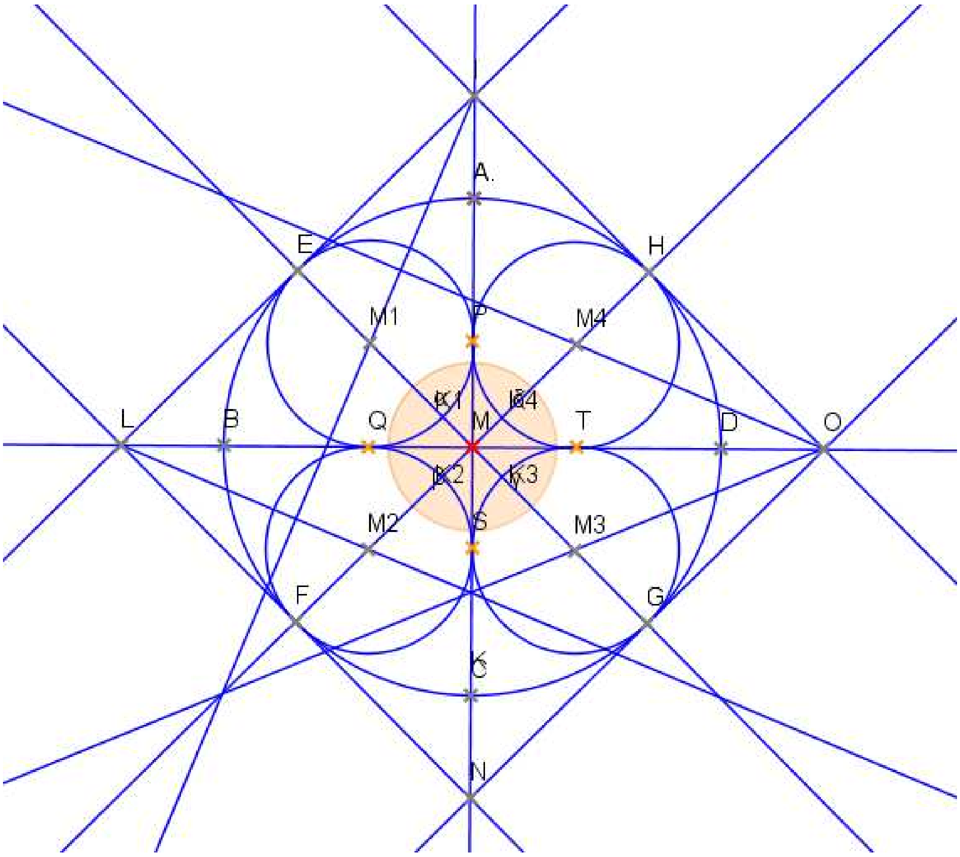
8.11 <u>Vierpass</u>

Der Vierpass ist ein sehr oft verwendetes Ornament im Maßwerk der Gotik. Seine Grundform besteht aus vier gleichen, sich gegenseitig berührenden Kreisen, die als Gebilde einen gemeinsamen Umkreis haben. In gotischen Fenstern findet man zumeist Vierpässe, die sich entweder aus vier Halbkreisbögen oder aus vier Dreiviertelkreisbögen zusammensetzen. Somit gibt es auch hier verschiedene Vierpassformen.

8.11.1 Grundform Vierpass

Konstruktionsbeschreibung:

Bei der Konstruktion des Vierpasses schreibt man in einen Kreis zunächst ein Quadrat ein. Die Eckpunkte dieses Quadrates bilden das Grundgerüst für die weitere Konstruktion.



Zu Beginn wählt man zwei Punkte M und A. Dann wird ein Kreis k um M durch A gezeichnet. Im Anschluss daran verbindet man diese beiden Punkte zu der Strecke $\overline{MA}$ und verlängert sie über A und M hinaus. Der daraus resultierende zweite Schnittpunkt der Geraden mit dem Kreis sei C. Bilde die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AC}$ (diese geht selbstverständlich durch den Kreismittelpunkt M). Bezeichne die zwei entstandenen Schnittpunkte mit k B und D.

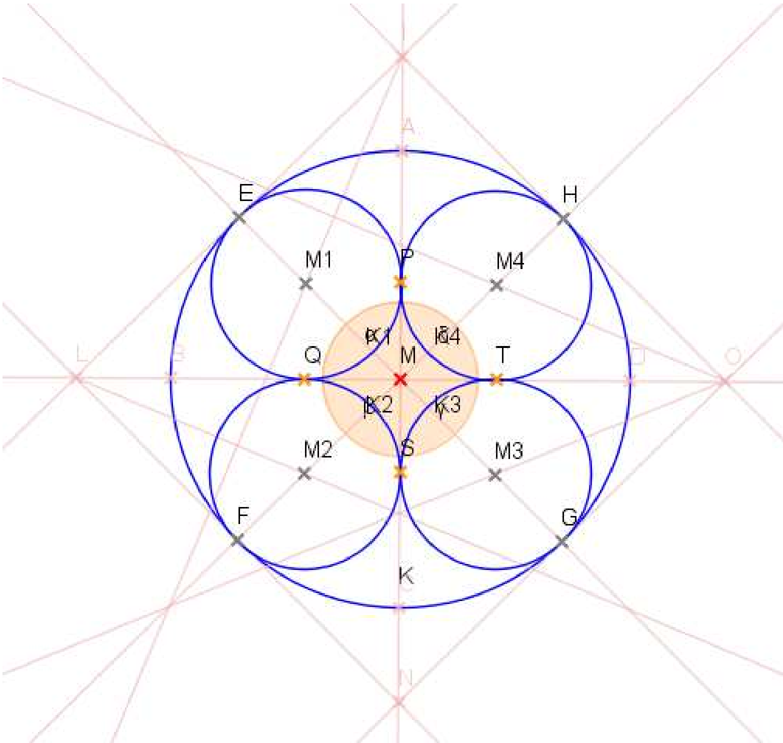
Konstruiere nun die Winkelhalbierenden der vier entstandenen rechten Winkel bei M, die den Kreis k in den verschiedenen Punkten E, F, G und H schneiden. In diesen Punkten lassen sich nun die Senkrechten auf den jeweiligen Winkelhalbierenden errichten, die in diesem Falle natürlich auch Tangenten an k darstellen. Diese schneiden sich in den vier Punkten I, L, N und O und bilden zusammen mit den Halbgeraden $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ und $\overrightarrow{MD}$ (die Halbgeraden gehen nach Konstruktion auch durch die Schnittpunkte I, L, N und O der Tangenten) die kongruenten Dreiecke IML, LMN, NMO und OMI (siehe Beweis Kongruente Dreiecke in Kapitel 8.7.1, Grundform Dreipass). In jedem der entstandenen Dreiecke wird nun eine weitere Winkelhalbierende benötigt, um die Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 und M_4 der Inkreise der Dreiecke zu bestimmen. Diese sind gleichzeitig die Kreise k_1, k_2, k_3 und k_4 des Vierpasses.

k_1 berührt k_2 im Punkt Q und k_4 im Punkt P. k_2 und k_3 haben S als gemeinsamen Berührpunkt, k_3 und k_4 den Punkt T. k berührt die Inkreise in den Punkten E, F, G und H (Beweis siehe Grundform Dreipass, Kapitel 8.7.1).

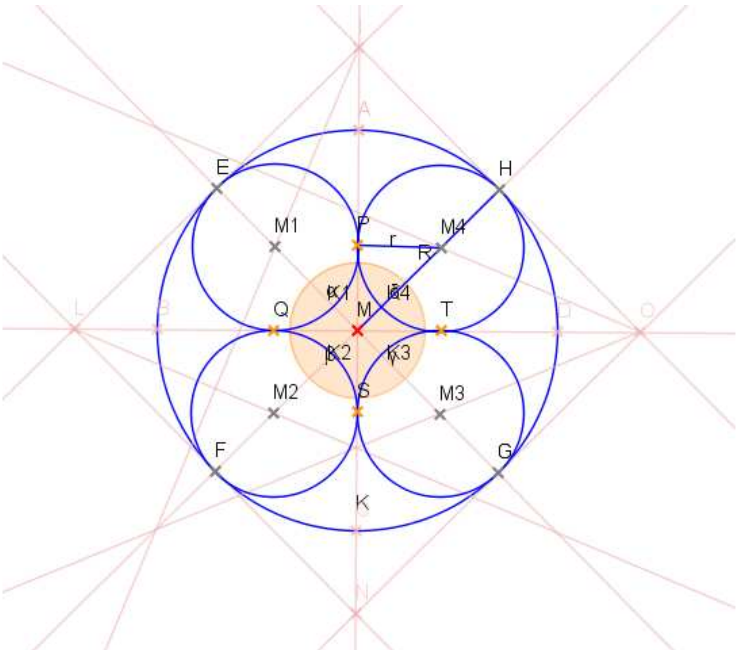
Hebt man nur die Dreiviertelkreisbögen PQ, QS, ST und TP hervor, dann ist der Vierpass, wie er in den gotischen Fenstern zu sehen ist, konstruiert.

Geometrischer Ort der Berührpunkte:

Siehe Grundform Dreipass (Kapitel 8.7.1)



Bedingungen für die Kreisradien:



Sei R der Radius des Kreises k und r die Radien der Inkreise.

So gilt:

$$(R-r)^2+(R-r)^2=(2r)^2 \qquad \text{(nach Pythagoras)}$$

$\Leftrightarrow 2 \cdot \left(R^2 - 2Rr + r^2\right) = 4r^2$ (2. Binomische Formel)

$\Leftrightarrow 2R^2 - 4Rr + 2r^2 = 4r^2$

$\Leftrightarrow 2R^2 - 4Rr - 2r^2 = 0$

$\Leftrightarrow R^2 - 2Rr - r^2 = 0$

$\Leftrightarrow r^2 + 2Rr - R^2 = 0$

Nach P-Q-Formel gilt:

$r = -R \pm \sqrt{R^2 + R^2}$

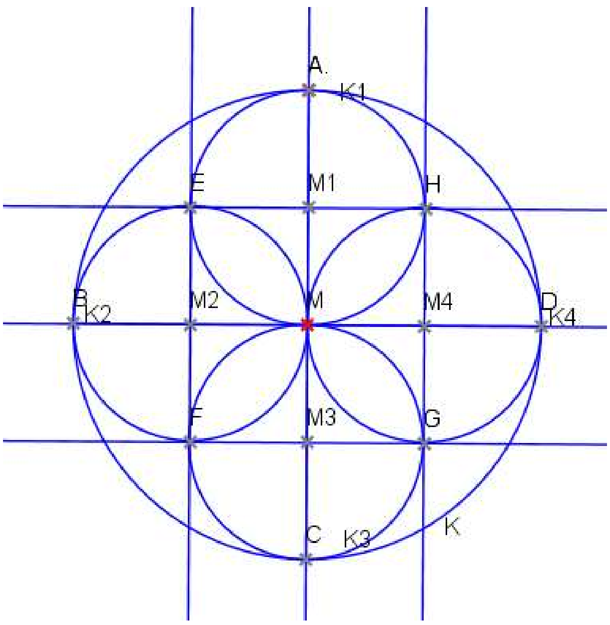
$\Leftrightarrow r = -R \pm R\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow r = R\left(-1 + \sqrt{2}\right)$ oder $r = R\left(-1 - \sqrt{2}\right)$

Die zweite Möglichkeit $r = R\left(-1 - \sqrt{2}\right)$ ist nicht realisierbar, da der Radius nicht negativ sein kann. Somit zeigt lediglich die erste Möglichkeit, wie sich der Radius der vier Kreise des Vierpasses in Abhängigkeit von dem Radius des sie umgebenden Kreises k verhält.

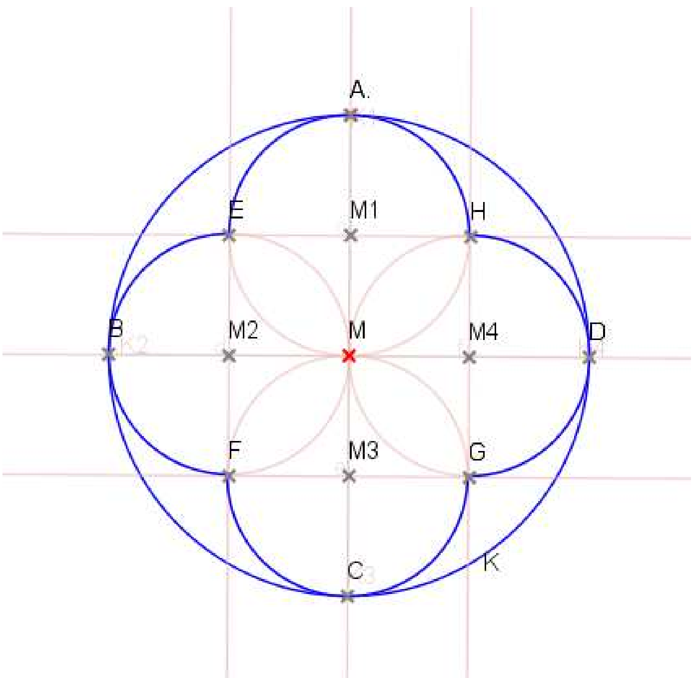
8.11.2 Häufig verwendete Vierpassform

Konstruktionsbeschreibung:



Zunächst verfahre man wie in der Konstruktion der Vierpassgrundform (Kapitel 8.11.1) bis die Punkte A, B, C und D ermittelt sind. Daraufhin werden die Mittelsenkrechten der Strecken $\overline{AM}$, $\overline{BM}$, $\overline{CM}$ und $\overline{DM}$ errichtet, deren Schnittpunkte mit M_1, M_2, M_3 und M_4 bezeichnet werden. Die Schnittpunkte der Mittelsenkrechten untereinander, die die Eckpunkte eines Quadrates darstellen, nenne man E, F, G und H. Die Punkte M_1, M_2, M_3 und M_4 stellen die Mittelpunkte der vier Kreise des Vierpasses dar. Der Radius dieser Kreise entspricht dem Abstand von M zu einem der Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 und M_4. Somit schneiden sich die Kreise in M, in den Schnittpunkten E, F, G und H der Mittelsenkrechten und sie berühren den Kreis k in jeweils einem der Punkte A, B, C oder D.

Vernachlässigt man nun die Hilfskonstruktionen und verdeutlicht die Halbkreisbögen EF, FG, GH und HE, ist der Vierpass in seiner Erscheinungsform fertig gestellt.



Geometrischer Ort der Berühr- und Schnittpunkte:

Nach Konstruktion liegen die Mittelpunkte des Vierpasses mittig auf den Strecken $\overline{AM}$, $\overline{BM}$, $\overline{CM}$ und $\overline{DM}$. Daher wird deutlich, dass die

Inkreise, deren Radius die Hälfte des Radius des sie umgebenden Kreises k beträgt, M als gemeinsamen Schnittpunkt haben und k jeweils in einem der Punkte A, B, C oder D berühren.

Weiterhin gilt, dass sich jeweils zwei Mittelsenkrechte in einem der Punkte E, F, G oder H schneiden und somit ein Quadrat bilden, was im Folgenden näher erläutert wird.

Die Vierecke MM_1EM_2, MM_2FM_3, MM_3GM_4 und MM_4HM_1 sind Quadrate, da zunächst nach Konstruktion alle Winkel um M 90° betragen. Die Strecken $\overline{MM_1}$, $\overline{MM_2}$, $\overline{MM_3}$ und $\overline{MM_4}$ sind nach Konstruktion kongruent und die Winkel $\angle$MM_1E, $\angle$MM_2E, $\angle$MM_2F, $\angle$MM_3F, $\angle$MM_3G, $\angle$MM_4G, $\angle$MM_4H und $\angle$ MM_1E sind nach Konstruktion ebenfalls 90°. Da die Winkelsumme in e inem Viereck 360° beträgt, ergibt sich auch für die übrig gebliebenen Winkel $\angle M_1$EM_2, $\angle M_2$FM_3, $\angle M_3$GM_4 und $\angle M_4$HM_1 eine Gradzahl von 90. Da die Strecken $\overline{MM_1}$, $\overline{MM_2}$, $\overline{MM_3}$ und $\overline{MM_4}$ gleich sind, folgt nach der Parallelogrammregel, dass die zwei fehlenden Seiten auch dieser Länge entsprechen. Aus diesen vier Quadraten setzt sich schließlich das Viereck EFGH zusammen, welches folglich auch die Bedingungen eines Quadrates erfüllt. Seine Seiten haben die Länge des Durchmessers eines Inkreises. Somit wird deutlich, dass die Schnittpunkte der Mittelsenkrechten untereinander mit den Schnittpunkten der Kreise untereinander übereinstimmen.

Bedingung für die Kreisradien:

Die Radien r der kleinen Kreise des Vierpasses und der Radius R des sie umgebenden Kreises verhalten sich bei diesem Vierpass wie die Radien in der Variante der häufig verwendeten Dreipassformen (Kapitel 8.7.2), denn auch hier schneiden sich die kleinen Kreise alle im Mittelpunkt M des Kreises k . Somit gilt auch hier: R=2r.

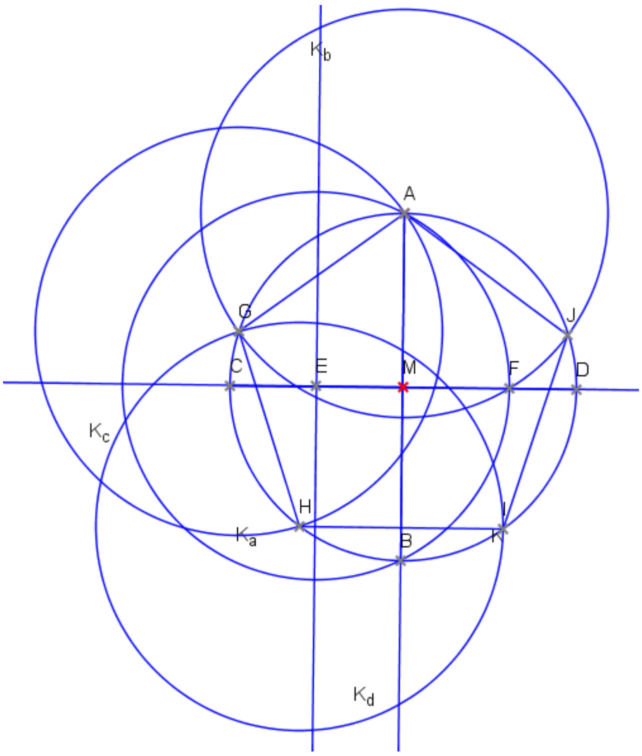
Beweis:

- Quadrat:

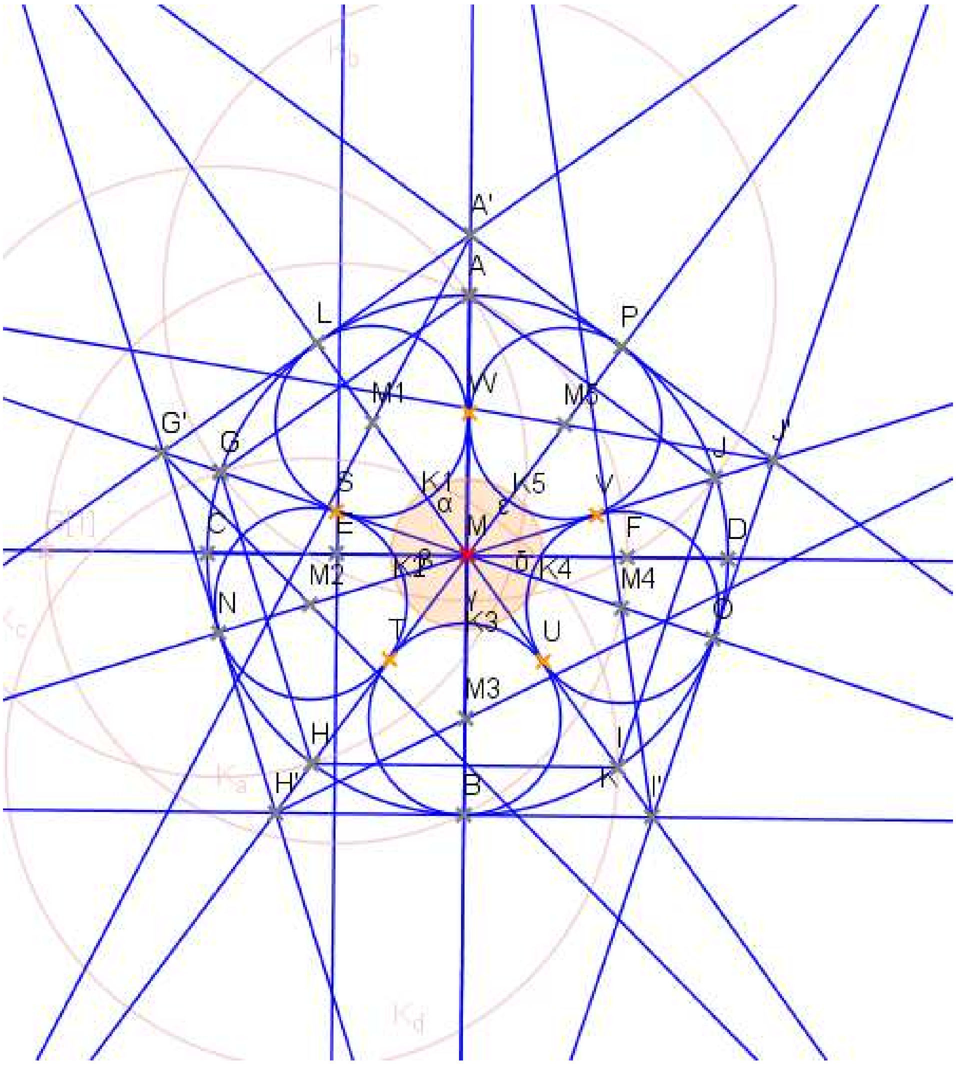
Die vier Punkte A, B, C und D sind regelmäßig auf dem Kreis k angeordnet, so dass sie die Eckpunkte eines Quadrates darstellen. Diese haben alle den gleichen Abstand zu M, da sie auf dem Kreis liegen und deren Entfernung von M somit dem Radius des Kreises k entspricht. Die Winkel um M betragen alle 90° (wege n Konstruktion der Senkrechten). Daher wären die Dreiecke AMB, BMC, CMD und DMA nach SWS kongruent und folglich auch die Seiten des Vierecks ABCD gleichlang. Die Winkel ∠MAB, ∠MBA, ∠MBC, ∠MCB, ∠MCD, ∠MDC, ∠MDA und ∠MAD sind nach dem Basiswinkelsatz 45° und ergänzen sich jeweils zu 90°. Somit handelt es sich bei dem Viereck ABCD um ein Quadrat.

8.12 <u>Fünfpass</u>

Konstruktionsbeschreibung:

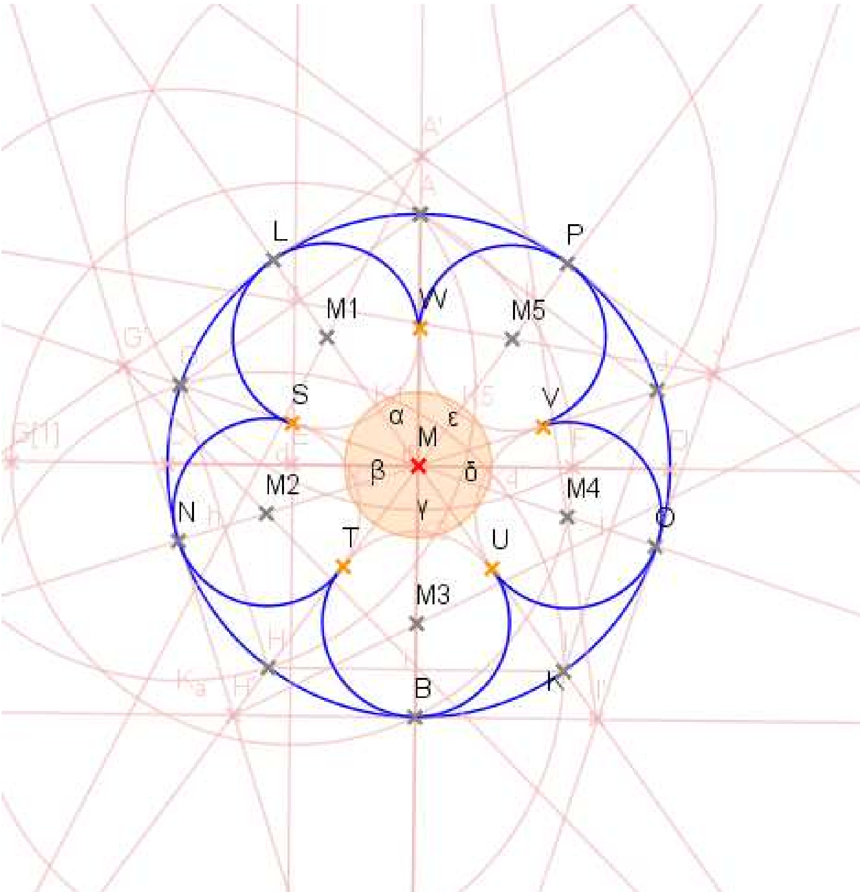


Zunächst werden zwei beliebige Punkte M und A gewählt. M sei der Mittelpunkt des großen Kreises k , der den Radius $\overline{MA}$ hat. Verbinde A mit dem Punkt M und verlängere $\overline{AM}$ über M hinaus. Der zweite Schnittpunkt mit k sei B. Errichte nun die Mittelsenkrechte auf $\overline{AB}$ durch M geht. Diese Senkrechte schneidet den Kreis k in den Punkten C und D. Führe die Konstruktion der Mittelsenkrechten nochmals über der Strecke $\overline{CM}$ durch und erhalte den Mittelpunkt E. Nun wird ein Kreis k_A um E durch A gezogen, der die Strecke $\overline{CD}$ im Punkt F schneidet. Die Strecke $\overline{AF}$ entspricht der Länge einer Seite des regelmäßigen Fünfecks. Nun ziehe den Kreis k_B um A durch F, der den Kreis k in den Punkten G und J schneidet. Weiterhin zeichne man einen Kreis k_C um G durch A, so dass der Schnittpunkt H mit k entsteht. Die gleiche Konstruktion führe man nun um H durch und erhalte durch den Schnitt von k mit k_D den Punkt I. Verbindet man die zuletzt konstruierten Punkte, so zeichnet sich auf k das regelmäßige Fünfeck AGHIJ ab.



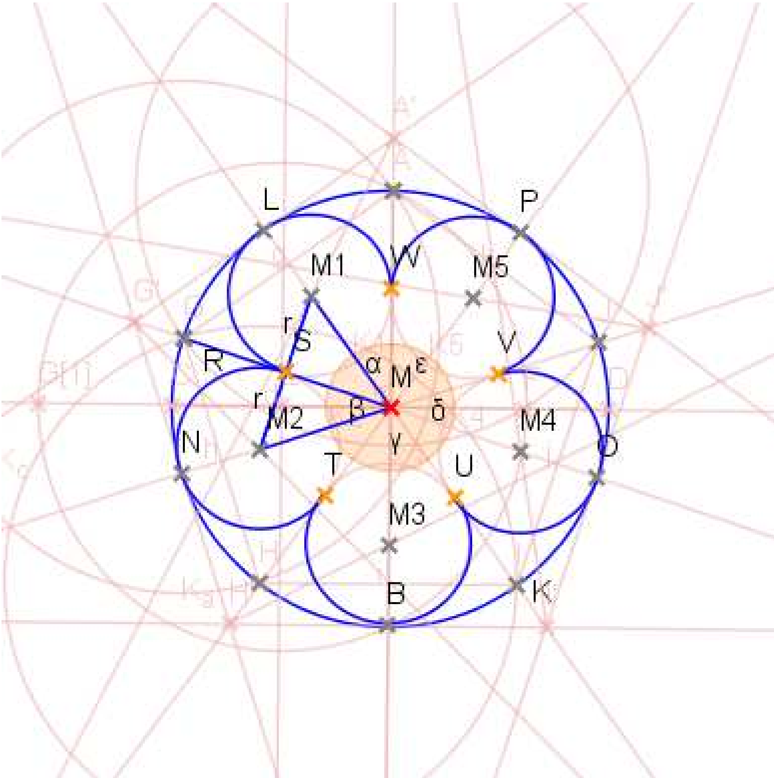
Verbinde den Mittelpunkt M mit den fünf Ecken des Fünfecks und verlängere diese Strecken über die Eckpunkte hinaus. Konstruiere alle Winkelhalbierenden der Winkel bei M. Die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden mit dem Kreis k seien L, N, B, O und P. Anschließend werden die Senkrechten zu den Winkelhalbierenden in den fünf Punkten gebildet. Jeweils zwei dieser Senkrechten schneiden sich in einem Punkt, durch den auch immer eine der zuvor konstruierten Halbgeraden durch die Eckpunkte des Fünfecks verläuft. Diese Schnittpunkte seien gemäß der benachbarten Eckpunkte des Fünfecks A', G', H', I' und J' genannt. Wie bei den oben beschriebenen Grundformen der Pässe bilden die gerade errichteten Senkrechten und diese über die Eckpunkte verlängerten Strecken Dreiecke. Schließlich werden auch hier die Inkreise k_1, k_2, k_3, k_4 und k_5 dieser Dreiecke mit den Mittelpunkten M_1, M_2, M_3, M_4 und M_5 konstruiert. k_1 berührt k_2 im Punkt S und k_5 im Punkt W. k_2 und k_3 teilen sich den Berührpunkt T sowie k_3 und k_4 den Punkt U. Der Berührpunkt V ist den Kreisen k_4 und k_5 gemeinsam.

Wenn man schließlich die Kreisbögen ST, TU, UV, VW und WS hervorhebt, ist der Fünfpass in seiner Erscheinungsform erstellt.



Geometrischer Ort der Berührpunkte:
siehe Grundform Dreipass (Kapitel 8.7.1)

Bedingungen für die Kreisradien:



Sei R der Radius des Umkreises und r der Radius der Fünfpasskreise. Als Hilfskonstruktion fügt man nun das Dreieck $M_1 M_2 M$ ein. Für dieses gleichschenklige Dreieck mit einem 72°-Winkel an der Spitze M gilt:

$$\sin 36° = \frac{r}{R-r}$$

$$\Leftrightarrow (R-r) \cdot \sin 36° = r$$

$$\Leftrightarrow (R \cdot \sin 36° - r \cdot \sin 36°) = r$$

$$\Leftrightarrow R \cdot \sin 36° = r + r \cdot \sin 36°$$

$$\Leftrightarrow R \cdot \sin 36° = r \cdot (1 + \sin 36°)$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{r \cdot (1 + \sin 36°)}{\sin 36°}$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{R \cdot \sin 36°}{(1 + \sin 36°)}$$

Somit verhalten sich die Radien des Fünfpasses zueinander wie gezeigt.

Beweis:

- regelmäßiges Fünfeck:

Um zu zeigen, dass die Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks stimmt, wird hier zunächst die Seite eines regelmäßigen Fünfecks berechnet, um sie dann mit der Seitenlänge des oben konstruierten Fünfecks zu vergleichen.

Als Erstes zeichne man in ein regelmäßiges Fünfeck ABCDEF folgende Hilfskonstruktion ein: Verbinde die Punkte A, B und M miteinander und erhalte das gleichnamige Dreieck. Auf Grund des regelmäßigen Fünfecks ist der Winkel ∠AMB 72° groß. Das Dreieck AMB ist gleichschenklig, da $\overline{MA}$ und $\overline{MB}$ kongruent sind und somit betragen die Basiswinkel (der Einfachheit halber nenne man sie β) jeweils 54°. Die Winkelhalbierende des Winkels α schneidet die Seite $\overline{AB}$ in dem Punkt G. Nun kann man über das Dreieck AMG folgende Aussage treffen:

$\cos\beta = \frac{\overline{MA}}{\overline{GA}}$, mit $\overline{MA}$ = R und $\overline{GA}$ = halbe Fünfecksseite a

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{a}{2} = \cos(54°) \cdot R$$

$$\Leftrightarrow \qquad a = 2 \cdot \cos(54°) \cdot R \text{ oder auch } a = R \cdot \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$$

Nun wird gezeigt, dass die Stecke $\overline{EF}$, die als Abtragung der Seitenlänge des Fünfecks diente, dieselbe Länge wie a besitzt.

Die Strecke $\overline{EM}$ entspricht der Länge von R und nach Konstruktion folgt, dass die Strecke $\overline{DM}$ die Hälfte von R beträgt.

Weiterhin folgt nach Pythagoras:

$$\overline{DE}^2 = R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \overline{DE} = \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + R^2} = R \cdot \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

Hieraus folgt, dass:

$$\overline{MF} = \overline{DE} - \frac{R}{2}$$

$$\Leftrightarrow \overline{MF} = R \cdot \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{R}{2}$$

$$\Leftrightarrow \overline{MF} = R \cdot \left(\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{2}\right)$$

Nach Pythagoras gilt weiter:

$$\overline{EF}^2 = R^2 + \overline{MF}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{EF}^2 = R^2 + \left(R \cdot \left(\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{2}\right)\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{EF} = \sqrt{R^2 + \left(R \cdot \left(\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{2}\right)\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \overline{EF} = R \cdot \sqrt{1 + \left(\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{2}\right)^2}$$

Durch weitere Umformung folgt:

$$\frac{\overline{EF}}{R} = \sqrt{1 + \left(\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{2}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{EF}}{R} = \sqrt{1+\left(\sqrt{\frac{5}{4}}-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{EF}}{R} = \sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{EF}}{R} = \sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2}$$ (2. binomische Formel)

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{EF}}{R} = \sqrt{1+\frac{5-2\cdot\sqrt{5}+1}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{EF}}{R} = \sqrt{\frac{4}{4}+\frac{5-2\cdot\sqrt{5}+1}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{EF}}{R} = \sqrt{\frac{4+5-2\cdot\sqrt{5}+1}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{EF}}{R} = \sqrt{\frac{10-2\cdot\sqrt{5}}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{EF}}{R} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{EF} = R\cdot\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$$

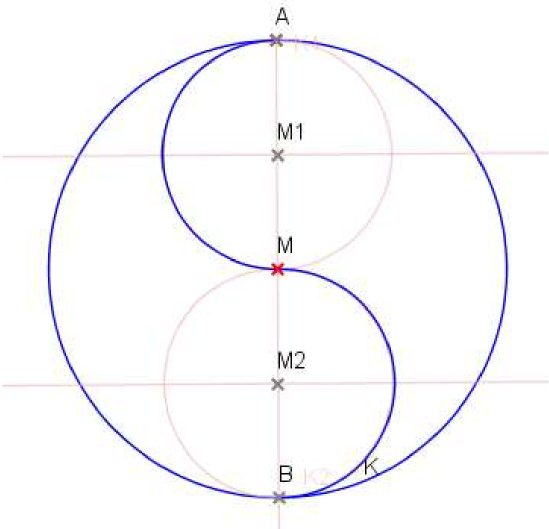
Durch diese Rechnung wird deutlich, dass die Seite a des oben genannten regulären Fünfecks der Seitenlänge $\overline{EF}$ des konstruierten Fünfecks entspricht. Damit stimmt die Behauptung, dass das Fünfeck AGHIJ regelmäßig sei.

8.13 Fischblasen

Die Fischblase, oder Schneuß genannt, ist besonders in der Spätgotik vorzufinden. Hierbei handelt es sich um eine geschwungene Ornamentform, die auf der einen Seite von einem Kreisbogen begrenzt wird und auf der anderen Seite in einen spitzen Schweif ausläuft. Eine häufige Form der Anordnung dieser ist, dass sich zwei oder mehr Schneuße zu einem Kreis zusammensetzen. Wie andere Konstruktionen der Gotik wurde auch die Fischblase weiterentwickelt. So entstanden langgezogene, flammenartige Fischblasen, die dem in Frankreich entwickelten Flamboyant-Stil zugeordnet werden. Diese langgezogenen Fischblasen sind nur an einer Stelle im Gemäuer der Nordseite des Kölner Doms eingemeißelt. Die Halbkreise dieser zwei Fischblasen treffen in der Mitte des Bogenfeldes zusammen und die Schweifspitzen enden an den Kämpferpunkten des umgebenen Spitzbogens. Auf diese Konstruktion wird im nächsten Kapitel genauer eingegangen.

8.13.1 Zweischneuß

Konstruktionsbeschreibung:



Wähle beliebige Punkte M und A, wobei M der Mittelpunkt des Kreises k mit dem Radius $\overline{MA}$ ist. Verbinde nun A mit M und verlängere die Strecke $\overline{AM}$ über M hinaus. Der Schnittpunkt mit k sei B. Errichte die Mittelsenkrechte auf $\overline{AM}$ als auch auf $\overline{BM}$ und bezeichne die Schnittpunkte mit den Buchstaben M_1 und M_2. Anschließend werde um M_1 durch M der Kreis k_1 und um M_2 durch M der Kreis k_2 gezogen, so dass die Kreise sich in M berühren. Den Kreis k berührt k_1 in dem Punkt A und k_2 in dem Punkt B.

Verdeutlicht man nun die Halbreise AM und MB, so dass sie in einer S-Form erscheinen, ist der Zweischneuß konstruiert.

Geometrischer Ort der Berührpunkte:

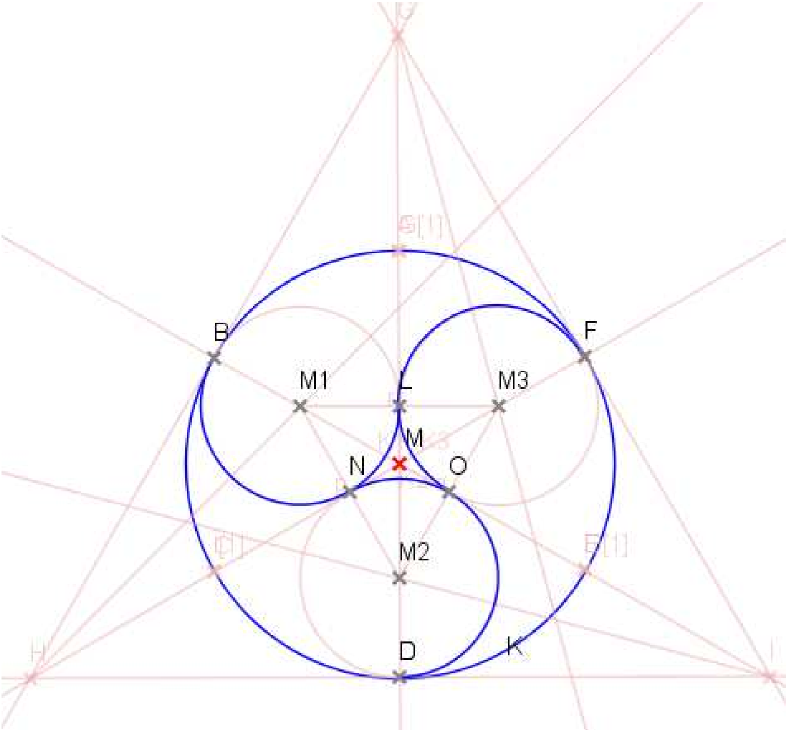
Da M_1 und M_2 die Mittelpunkte der kleinen Kreisbögen sind und der Radius dieser die Hälfte des Radius des großen Kreises beträgt, berühren sie sich in M und außen berühren sie den Kreis k jeweils in einem Punkt A bzw. B. Da der Radius von k genau dem Durchmesser der kleinen Kreisbögen entspricht, wird deutlich, dass sie Halbkreise sind.

Bedingung für die Kreisradien:

Sei R der Radius des umgebenden Kreises und r der Radius der Halbkreise. 2R entspricht der Strecke $\overline{AB}$ und r den Strecken $\overline{AM_1}$, $\overline{M_1M}$, $\overline{MM_2}$ und $\overline{M_2B}$. $\overline{AB}$ setzt sich aus den vier letztgenannten Teilstrecken zusammen, die nach Konstruktion die gleiche Länge besitzen. Somit wird deutlich, dass r ein Viertel von 2R (R = 2r) beträgt.

8.13.2 Dreischneuß

Konstruktionsbeschreibung:



Zunächst führt man die Konstruktion der Grundform des Dreipasses (Kapitel 8.7.1) durch. Die Kreise des Dreipasses haben zwei Berührpunkte mit den benachbarten Dreipasskreisen und einen mit dem Kreis k (siehe Dreipass, Kapitel 8.7.1).

Nun nehme man die zuerst genannten Berührpunkte L, N und O und betrachte die kürzeren Kreisbögen zwischen diesen Punkten und dem jeweiligen Berührpunkt mit dem umgebenden Kreis B, D oder F als imaginär. Dadurch ergibt sich die Form des Dreischneußes.

Geometrischer Ort der Berührpunkte:
siehe Dreipass (Kapitel 8.7.1)

Bedingungen für die Kreisradien und Beweis:
siehe Dreipass (Kapitel 8.7.1)

Diese Pässe lassen sich erweitern, solang die Konstruktion des zugrunde liegenden regelmäßigen Vielecks möglich ist. Zumeist sind alle Formen bis zur Größe des Sechserschneußes vorzufinden.

9 <u>Die Fenster des Kölner Doms</u>

Dieses Kapitel behandelt die Rekonstruktion der Fenster des Kölner Doms. Beginnend mit dem Fenster des Hauptportals im Westen werden die einzelnen Fenster gegen den Uhrzeigersinn aufeinander folgend rekonstruiert, wobei sich das Nordquerfenster am Ende des „Rundgangs" befindet. Dennoch sind die Triforienfenster in diesem Kapitel als letzte zu finden, da sie unterhalb einiger Fenster als Fortsetzung dienen.

In dieser Examensarbeit konnten sich die Fensterrekonstruktionen jedoch nur auf Fotoaufnahmen (siehe im weiteren Verlauf des Kapitels) und nicht auf Konstruktionspläne stützen. Somit ist nur augenscheinlich und folglich subjektiv festzustellen, dass die Rekonstruktionszeichnungen den Fenstern gänzlich entsprechen. Dadurch bestätigt sich die Auffassung von Klaus Kindinger, dass sich die Fensterrekonstruktionen vom Schwierigkeitsgrad in drei Kategorien einteilen lassen:

„Kategorie I <u>Die Konstruktion ist geometrisch nachvollziehbar.</u>

Kategorie II <u>Die Konstruktion ist zum Teil geometrisch, zum Teil aber auch nur experimentell nachvollziehbar.</u>

Kategorie III <u>Die Konstruktion ist meist nur experimentell nachvollziehbar.</u>" (Mathematikunterricht, Heft 3 /1995, S. 26)

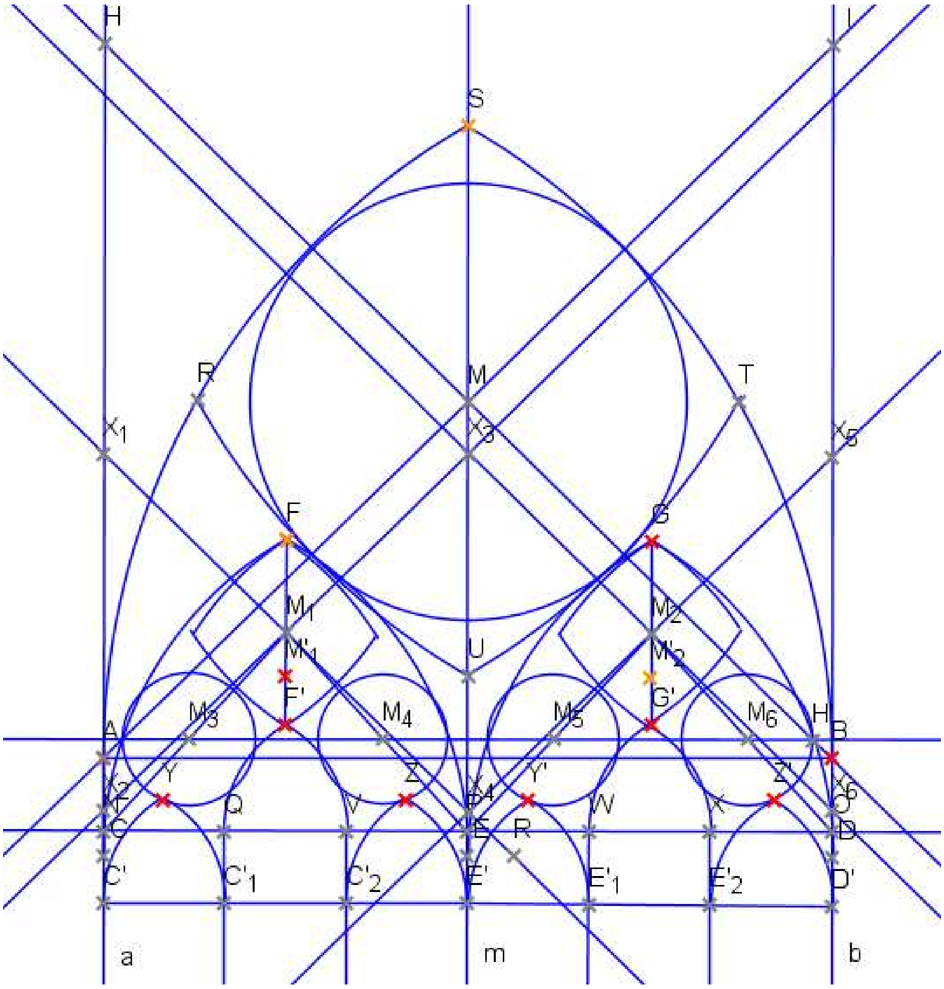
Diese Einteilung trifft auch auf die nachfolgenden Rekonstruktionen der Fenster des Kölner Doms zu.

Auf Grund der zahlreichen Varianten einer gotischen Grundkonstruktion ist die Eindeutigkeit der zutreffenden Variante durch die Fotoaufnahmen schwer zu beurteilen. Weiterhin stellen die Konstruktionsungenauigkeiten (Kapitel 5), die damals bereits auftraten, ein Problem dar, da sie die folgenden Rekonstruktionen erschwert haben.

9.1 Westportalfenster

Das Westportalfenster ist eines der größten Fenster des Kölner Doms und befindet sich an der Westfassade über dem Hauptportal. Es wurde von dem preußischen Kronprinz Friedrich und seiner Frau Victoria gestiftet und 1877 in das Maßwerk eingesetzt.

Da dieses Fenster sehr komplex aufgebaut ist, wird zuerst das Grundgerüst (siehe erste Zeichnung) konstruiert und dann wird auf das Innenleben dieses Gerüsts eingegangen. Zuletzt wird der Inhalt des großen Kreisbogenvierecks, welches sich in der Spitze des Spitzbogens ABS befindet, gestaltet.

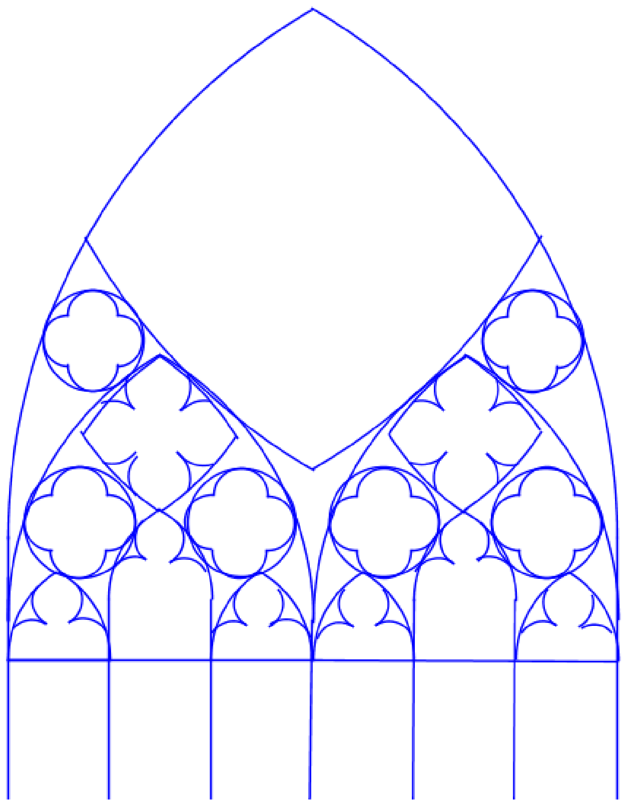


Um das Grundgerüst des Westportalfensters zu konstruieren, beginnt man wieder mit der Konstruktion „Zwei Spitzbögen und ein Kreisbogenviereck im Spitzbogen“ (Kapitel 8.6), aus der man zunächst auch die Bezeichnung der Punkte übernimmt. Somit erhält man die Spitzbögen ABS, CEF und EDG. Parallel zu den Kämpferlinien $\overline{CE}$ und $\overline{ED}$ der zwei zuletzt genannten Spitzbögen zieht man anschließend zwei neue Kämpferlinien $\overline{NP}$ und $\overline{PO}$. Diese liegen parallel, jedoch oberhalb der vorherigen Kämpferlinien in einem Abstand von $\frac{\overline{AC}}{4}$ (siehe Hilfskonstruktion, Kapitel 8.5.2). Um schließlich die sechs kleinen Spitzbögen zu konstruieren, die sich in den Spitzbögen CEF und EDG befinden, werden nun die Kämpferlinien $\overline{NP}$ und $\overline{PO}$ gedrittelt. Somit entstehen die Punkte Q, V, W und X. Auf diesen Punkten werden nun die beiden mittleren Spitzbögen errichtet. Für die Konstruktion der vier weiteren Spitzbögen zehntelt man die Kämpferlinien $\overline{CE}$ und $\overline{ED}$ zunächst. Daraufhin zieht man einen Kreis um C bzw. D, dessen Radius sieben Zehntel entspricht. Diese Kreise schneiden die Mittelsenkrechte auf der zugehörigen Kämpferlinie in M'_1 bzw. M'_2. Um diese Punkte wiederum ziehe man jeweils einen Kreis, dessen Radius acht Zehntel der Kämpferlinien $\overline{CE}$ bzw. $\overline{ED}$ entspricht. Die Schnittpunkte dieser Kreise mit den nach unten verlängerten Strecken $\overline{AC}$ (a), $\overline{ME}$ (m) und $\overline{BD}$ (b) nenne man C', E' und D'. Nun verbinde man C' mit E' und E' mit D' und drittelt die entstandenen Strecken. Die insgesamt sieben dadurch konstruierten Punkte C´, C'_1, C'_2, E´, E'_1, E'_2 und D´ stellen nun die Kämpferpunkte für die vier letzten einfachen Spitzbögen dar, die somit konstruiert werden können. Folglich sind schließlich die sechs kleinen Spitzbögen errichtet, deren Spitzen mit den Buchstaben Y, F', Z, Y', G' und Z' bezeichnet werden.

Anschließend halbiert man die Strecke $\overline{FF'}$ bzw. die Strecke $\overline{GG'}$ und erhält den Mittelpunkt M_1 bzw. M_2 des jeweiligen Kreisbogenvierecks. Nun konstruiert man die Parallelen durch M_1 zu den Strecken $\overline{BH}$ und $\overline{AI}$ (H und I wie in der Konstruktion „Zwei Spitzbögen und ein Kreisbogenviereck im Spitzbogen", Kapitel 8.6) sowie die Parallelen zu den beiden Strecken durch M_2. Diese Parallelen schneiden jeweils die Senkrechten a und b in den zwei Punkten X_1, X_2 und X_5, X_6, sowie die Senkrechte m in zwei weiteren Punkten X_3 und X_4. Zieht man nun Kreise mit dem Radius $\overline{X_1F'}$ um diese sechs Punkte, so entstehen acht Schnittpunkte, die die Eckpunkte der insgesamt zwei Kreisbogenvierecke in den Spitzbögen darstellen.

Es fehlen jedoch noch die vier kleinen Kreise, die sich zwischen den Kreisbogenvierecken und den äußeren kleinen Spitzbögen befinden. Um die Mittelpunkte dieser Kreise zu erhalten, zeichne man zunächst die Parallele zur Kämpferlinie $\overline{AB}$ durch den Schnittpunkt H´ von $\overline{BH}$ mit dem Kreisbogen DG. Die vier Kreismittelpunkte M_3, M_4, M_5 und M_6 ergeben sich schließlich aus dem Schnitt der entstandenen

Parallele durch H´ mit den Strecken $\overline{M_1N}$, $\overline{M_1P}$, $\overline{M_2P}$, sowie $\overline{M_2O}$ und sie haben den Radius $\overline{M_3Y}$. Somit ist das Grundgerüst hergestellt.



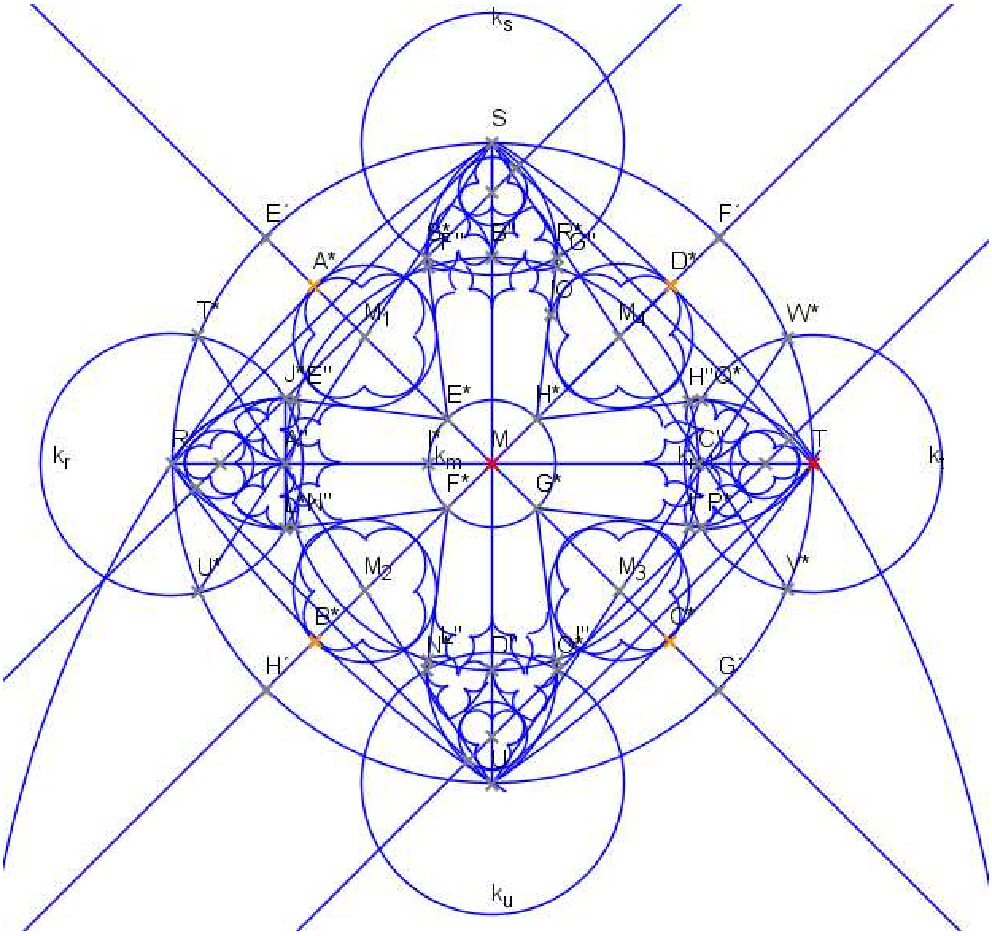
Das Innenleben der sechs kleinen Spitzbögen zeigt die erste Variante des Kleeblattbogens im Spitzbogen (Kapitel 8.9.1) auf. Die Füllung der vier darüber liegenden Kreise besteht aus der häufig verwendeten Variante des Vierpasses (Kapitel 8.11.2). In die zwei Kreisbogenvierecke schreibt man die Grundform des Vierpasses (Kapitel 8.11.1) ein, wobei die Vierpasskreise die umgebenden Kreisbögen des jeweiligen Kreisbogenvierecks schneiden. Lediglich die Kreisbögen zwischen diesen Schnittpunkten und den Berührpunkten der Vierpasskreise untereinander sind später im Fenster ersichtlich und bilden somit ein Vierblatt. Folglich werden die Vierpasskreise nicht vollständig ausgeführt und spitzen sich in den Ecken der zwei Kreisbogenvierecke zu.

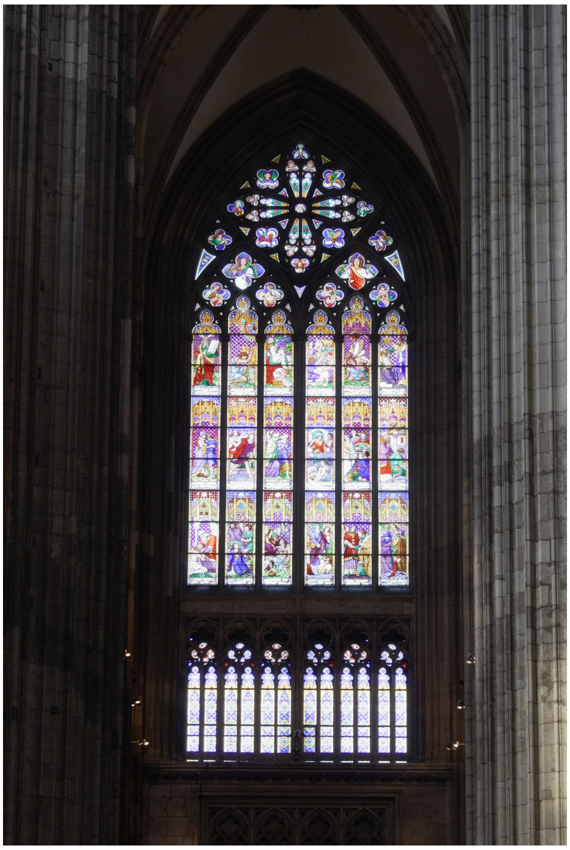
Zum Schluss dieses Konstruktionsabschnitts fügt man passend jeweils einen Kreis am rechten und linken Rand des Fensters unterhalb des Kreisbogenvierecks ein, wie dies im Kapitel über die Konstruktionsungenauigkeiten schon erwähnt wurde.

Nun konzentriert sich die Konstruktion auf den Inhalt des großen Kreisbogenvierecks SRUT mit seinem Mittelpunkt M. Es zeigt eine Art Blume mit vier Blütenblättern, zwischen denen sich Kreise befinden.
Zunächst verbindet man die Punkte S und U sowie die Punkte R und T, wobei die entstandenen Strecken in M senkrecht aufeinander stehen. Dann ziehe man einen Kreis k_M um M mit dem Radius, der ein Fünftel der Strecke $\overline{MS}$ beträgt (siehe Hilfskonstruktion, Kapitel 8.5.2). Weiterhin konstruiere man die Winkelhalbierenden der Winkel ∠SMR, ∠RMU, ∠UMT und ∠TMS, die die Bögen des Kreisbogenvierecks in A*, B*, C* und D* und den Kreis k_M in den Punkten E*, F*, G* und H* schneiden. Zusätzlich benenne man den Schnittpunkt der Strecke $\overline{MR}$ mit dem Kreis k_M I*.
Daraufhin trägt man in den Punkten S, R, U und T jeweils zwei 30°-Winkel über und unter der zugehörigen Strecke durch M ab. Um die Punkte S, R, U und T zieht man jeweils die Kreise k_S, k_R, k_U und k_T mit dem Radius $\frac{\overline{RI*}}{2}$ und erhält mit den Schenkeln der abgetragenen Winkel die Schnittpunkte J*, L*, N*, O*, P*, Q*, R* und S*. Aus diesen Punkten werden nun die vier Spitzbögen J*RL*, N*UO*, P*TQ* und R*SS* errichtet. Um diese Blätter fertig zu stellen, verbinde man J* mit E*, L* mit F*, N* mit F*, O* mit G*, P* mit G*, Q* mit H*, R* mit H* und S* mit E*.
Nun wird auf die vier Kreise zwischen diesen Blättern eingegangen.
Zunächst wird der Umkreis des Kreisbogenvierecks gezeichnet, der den Mittelpunkt M und den Radius $\overline{MR}$ aufweist. Dieser Umkreis schneidet die Kreise k_S, k_R, k_U und k_T in den Punkten T*, U*, V* und W*. Verbindet man nun S mit U*, S mit V*, U mit T* und U mit W*,

schneiden diese Strecken jeweils die passende Winkelhalbierende in den Punkten M_1, M_4, M_2 und M_3. Dies sind die gesuchten Mittelpunkte der Kreise zwischen den Blättern. Daraufhin zeichnet man Kreise um diese Mittelpunkte mit dem Radius $\overline{M_1 A*}$.

Das Innenleben der vier Kreise zwischen den Blättern des Kreisbogenvierecks wird von der häufig verwendeten Vierpassform (Kapitel 8.11.2) gefüllt.
In die vier Blätter werden nun der Kreis und die zwei Spitzbögen eingesetzt. Um dies zu erreichen hilft zunächst der Schnittpunkt der Strecke $\overline{L*J*}$ und der Strecke $\overline{MR}$ weiter, den man A´´ bezeichnet. Anschließend ziehe man einen Kreis k_{M1} um den Punkt M durch A´´, der $\overline{MS}$ in B´´, $\overline{MT}$ in C´´ und $\overline{MU}$ in D´´ schneidet. Andererseits schneidet der Kreis k_{M1} die Blätter in den Punkten E´´, F´´, G´´, H´´, I´´, J´´, L´´ und N´´. Jetzt werden die Spitzbögen über den Strecken $\overline{A''E''}$, $\overline{F''B''}$, $\overline{B''G''}$, $\overline{H''C''}$, $\overline{C''I''}$, $\overline{J''D''}$, $\overline{D''L''}$ und $\overline{N''A''}$ in den Blättern errichtet.
Um den Mittelpunkt des Kreises über diesen Spitzbögen zu finden zeichne man die Parallele zu $\overline{RS}$ durch J*, die die Strecken $\overline{MR}$ und $\overline{MS}$ schneidet. Diese Schnittpunkte sind zwei der vier gesuchten Mittelpunkte. Zusätzlich konstruiert man auch die Parallele zu $\overline{TU}$ durch O*, die die Strecken $\overline{MT}$ und $\overline{MU}$ schneidet und somit die zwei weiteren Mittelpunkte liefert. Anschließend fällt man von diesen Mittelpunkten jeweils das Lot auf die Strecke $\overline{ST}$ bzw. $\overline{UR}$, um den Abstand dieses Lotfußpunktes zum jeweiligen Mittelpunkt als Radius zu nutzen. Als letzen Schritt zur Fertigstellung des Innenlebens der Blätter setzt man in die Spitzbögen zunächst das Kleeblatt im Kreisbogendreieck (Kapitel 8.10), darunter die zweite Variante des Kleeblatts im Spitzbogen (Kapitel 8.9.2) und in die Kreise dieser Blätter die häufig verwendete Variante des Dreipasses ein (Kapitel 8.7.2).

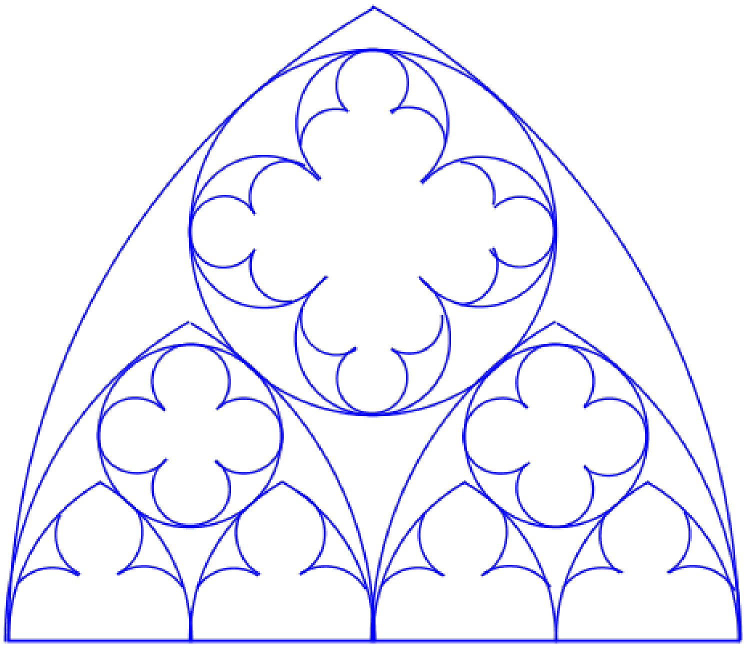

k_s
S
E´
F´
A*
D*
M_1
M_4
T*
W*
J*E''
H''Q*
E*
H*
R
A''
I*
k_m
M
C''
T
k_r
k_t
F*
G*
P*
M_2
M_3
U*
V*
B*
C*
H´
G´
D''
U
k_u

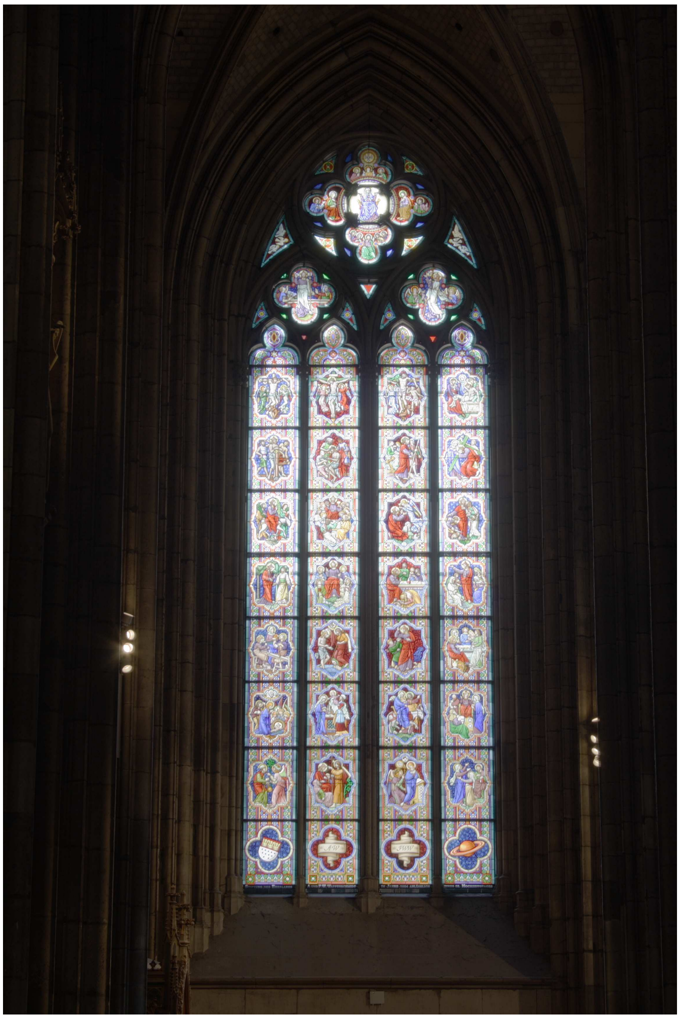


9.2 Bayernfenster und derartig konstruierte Fenster

Der Name der Fenster rührt daher, dass König Ludwig I. diese Fenster 1848 zum Domjubiläum gestiftet hat. Die fünf Bayernfenster befinden sich im südlichen Seitenschiff. Das Maßwerk dieser Fenster lässt sich jedoch auch in anderen Fenstern des Doms wieder finden, somit kann das Maßwerk nicht als Besonderheit der Bayernfenster gesehen werden.

Zur Konstruktion dieses Fensters des Kölner Doms zeichne man zunächst die erste Variante der Konstruktion „zwei Spitzbögen und ein Kreis im Spitzbogen“ (Kapitel 8.5.1). In die beiden konstruierten Spitzbögen wird nun nochmals die erste Variante aus dem Kapitel „zwei Spitzbögen und ein Kreis im Spitzbogen“ (Kapitel 8.5.1) einbeschrieben. Somit erhält man vier kleine Spitzbögen, die die Kämpferlinie vierteln. In diese werden schließlich Kleeblätter konstruiert (siehe Kapitel 8.9.1: „Kleeblatt im Spitzbogen – erste Variante“) und die drei entstandenen Kreise werden mit der Grundform des Vierpasses ausgefüllt (Kapitel 8.11.1). Zuletzt konstruiert man die Dreipassgrundform (Kapitel 8.7.1) in die Kreise des Vierpasses, die sich in dem größten Kreis befinden.





9.3 Südquerhausfenster

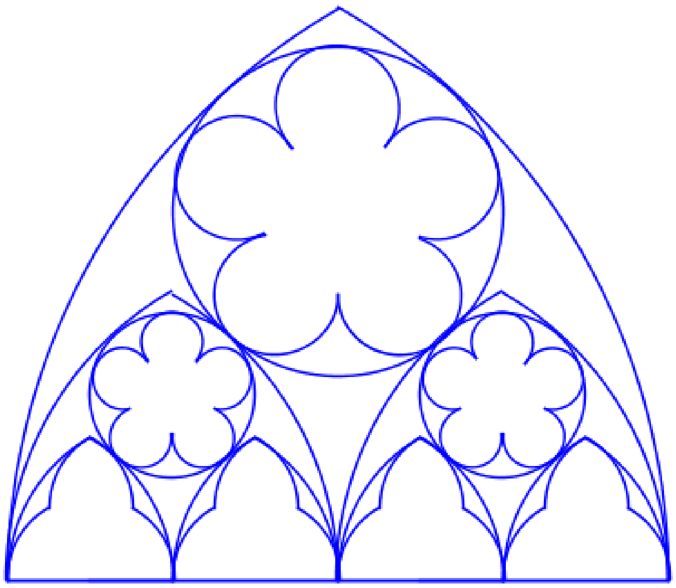
Das Fenster der Südquerhausfassade ist ein Geschenk des König Wilhelm I. von Preußen, welches 1863 eingesetzt wurde. Dieses wurde jedoch im zweiten Weltkrieg zerstört. Unzureichende Verglasungen des Fensters führten dazu, dass Gerhard Richter in jüngster Vergangenheit die Verglasung neu gestaltete.

Die Konstruktion des Südquerhausfensters entspricht der Konstruktion des Westportalfensters, die zuvor bereits geschildert wurde. Ein winziger, aber dennoch wichtiger Unterschied ist, dass die Vierpässe in den Kreisen im Kreisbogenviereck, nebst den Blättern, im Gegensatz zum Westportalfenster um 45° gedreht sind.

9.4 Chorseitenschifffenster

Das Fenster, welches nachfolgend konstruiert wird, befindet sich in der Höhe des Binnenchors an der südlichen Fassade. Eines dieser Fenster gehört zu der Marienkapelle, die anderen liegen, aus westlicher Richtung gesehen, unmittelbar davor.

Der äußere Umriss des Fensters entspricht der ersten Variante der Konstruktion „Zwei Spitzbögen und ein Kreis im Spitzbogen“ (Kapitel 8.5.1). Diese Konstruktion wird wiederum in die zwei kleineren Spitzbögen eingesetzt. Somit entstehen drei Kreise, in die jeweils die Grundform des Fünfpasses (Kapitel 8.13) eingesetzt wird, so dass das Resultat einer Blüte entspricht. In den entstandenen vier kleinsten Spitzbögen wird die Konstruktion „Liegendes Dreiblatt im Spitzbogen“ Kapitel 8.9.2) durchgeführt. Nun ist das Fenster vollständig aus den einzelnen Grundkonstruktionen zusammengesetzt.



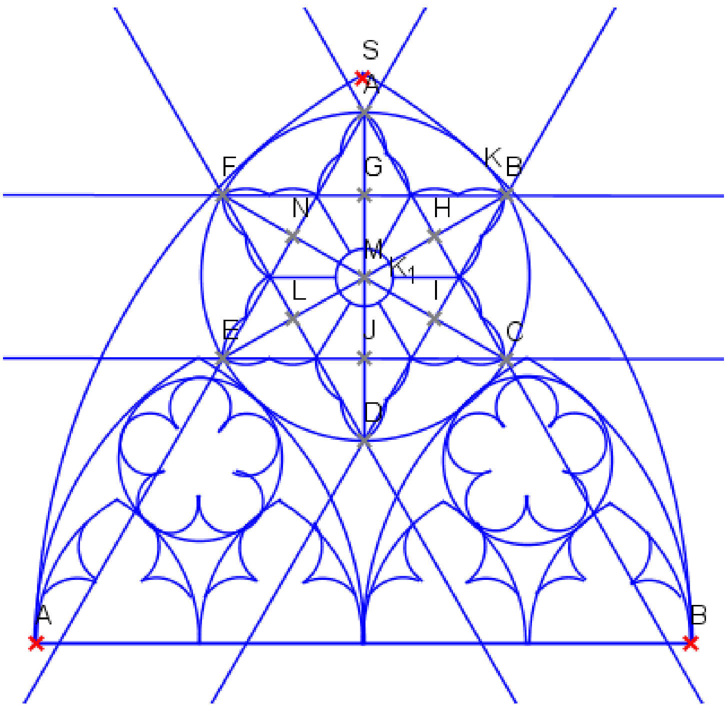
9.5 Die Königsfenster

Die majestätischen Königsfenster befinden sich im Obergaden des Hochchors und liegen unmittelbar nebeneinander. Sie sind von kunsthistorischer Bedeutung, da sie noch aus der mittelalterlichen Farbverglasung bestehen und stellen den größten Glasmalereizyklus des Mittelalters dar. Diese Fenster bilden 48 Könige ab.

Die Konstruktionsanleitungen beginnen mit dem Königsfenster, welches sich im Hochchor nahe der Vierung befindet. Danach werden die Fenster konstruiert, die nacheinander weiter in den Chor hineinragen bis zum letzten Königsfenster, dass die Ostseite des Hochchores auskleidet.

9.5.1 Obergaden des Chors – 1. Königsfenster

Das folgende Königsfenster befindet sich im Obergaden des Chors unmittelbar bei der Vierung des Doms.

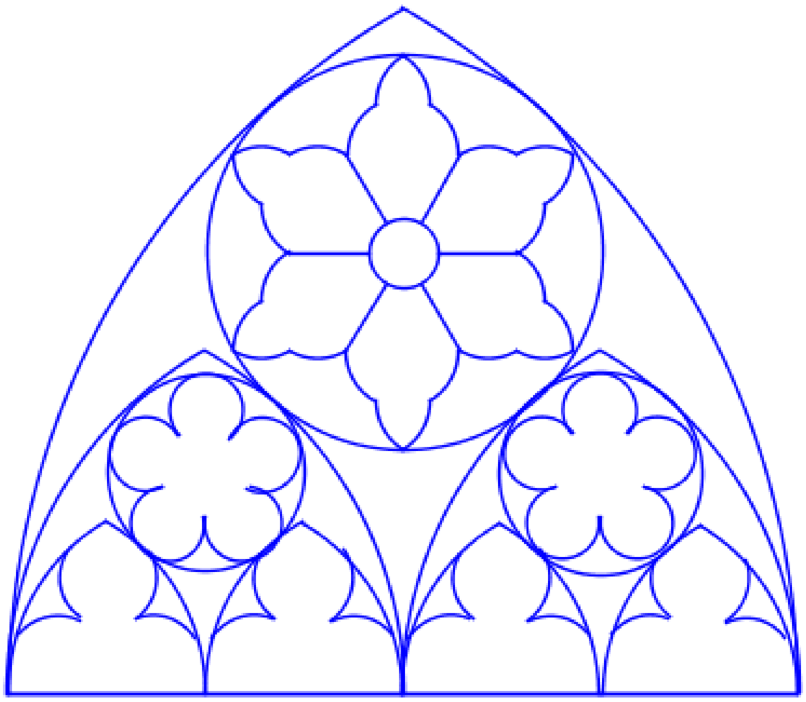


Die Konstruktion der Königsfenster beginnt mit der zweiten Variante der Konstruktion „Zwei Spitzbögen und ein Kreis im Spitzbogen“ (Kapitel 8.5.1), wobei dieser Konstruktionsvorgang in den zwei entstandenen kleinen Spitzbögen wiederholt wird. Nun wird in die zwei kleineren Kreise jeweils die Grundform des Fünfpasses (Kapitel 8.13) und in die vier kleinsten Spitzbögen jeweils ein Kleeblatt eingefügt.

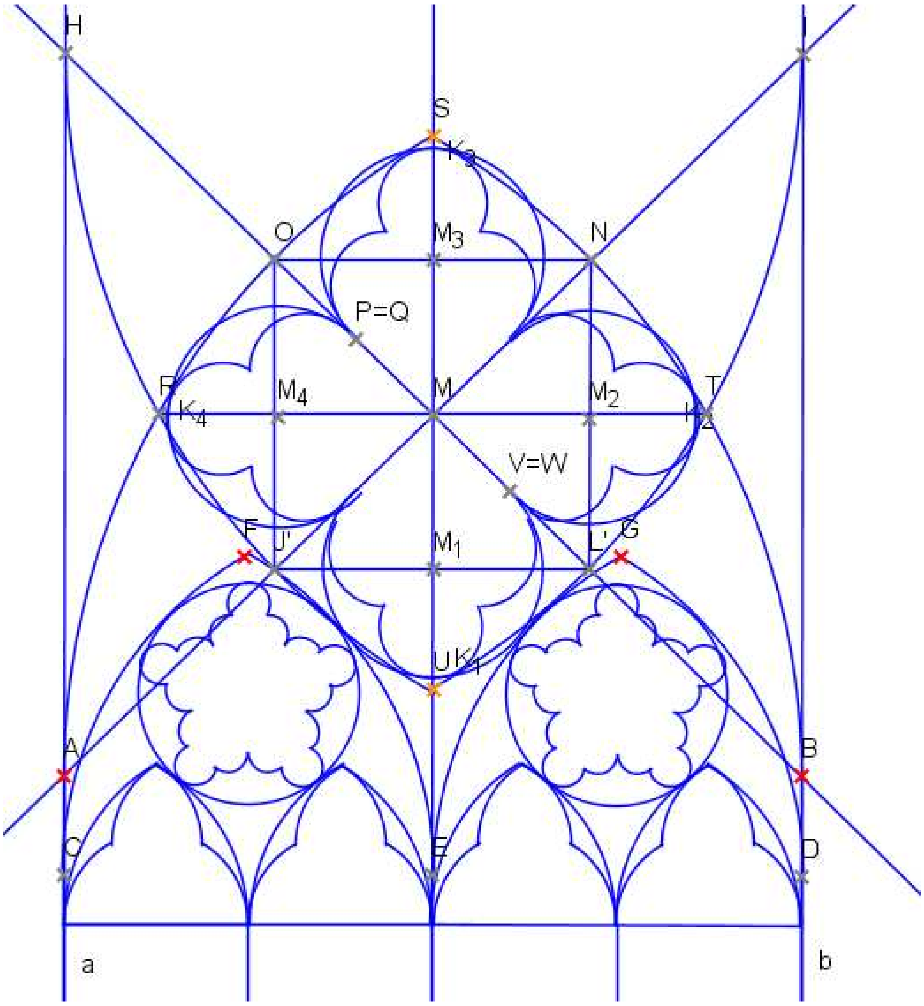
Anschließend richtet sich der Fokus auf den großen Kreis, den man der Einfachheit halber k nennt und der den Mittelpunkt M besitzt. Im Kreis k errichtet man ein regelmäßiges Sechseck ABCDEF, wie schon in der Konstruktionsanleitung der Grundform des Dreipasses (Kapitel 8.8.1) erläutert wurde.

Die Eckpunkte des Sechsecks verbindet man mit dem Kreismittelpunkt M. Um diesen Mittelpunkt ergeben sich somit sechs 60°-Winkel. Nun konstruiert man die zugehörigen Mittelpunkte dieser sechs Strecken und bezeichnet sie mit den Buchstaben G, H, I, J, L und N. Konstruiert man die jeweilige Senkrechte in diesen Punkten auf den zugehörigen Strecken, so bewirken je zwei benachbarte Senkrechten einen Schnittpunkt. Zwei benachbarte Schnittpunkte dieser Senkrechten bilden nun in Kombination mit einem passenden Eckpunkt des regelmäßigen Sechsecks ABCDEF ein gleichseitiges Dreieck. Insgesamt entstehen somit sechs gleichseitige Dreiecke. In diese sechs gleichseitigen Dreiecke werden wiederum liegende Dreiblätter eingezeichnet.

Zum Schluss wird um M ein weiterer Kreis k_1 konstruiert, dessen Radius nach ästhetischem Belieben gewählt werden kann, jedoch sollte er kleiner als die Hälfte des Radius des Kreises k sein.



9.5.2 <u>Obergaden des Chors – 2. Königsfenster</u>

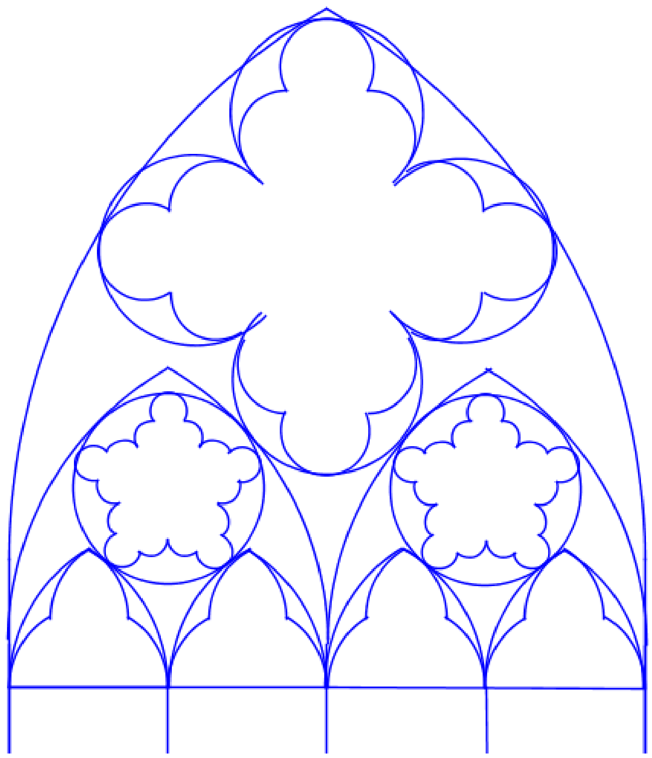


Zunächst bedient man sich der Konstruktion „Zwei Spitzbögen und ein Kreisbogenviereck im Spitzbogen“ (Kapitel 8.6) und übernehme die Punkte, wie sie in dieser Konstruktion vorgegeben sind. Für die Konstruktion dieses Fensters sind jedoch noch weitere Schnittpunkte aus der genannten Grundkonstruktion zu benennen, nämlich der Schnittpunkt O des Bogens AS mit der Strecke $\overline{BH}$, der Schnittpunkt L’ des Bogens IU mit der Strecke $\overline{BH}$, der Schnittpunkt N des Bogens BS mit der Strecke $\overline{AI}$ und der Schnittpunkt J’ des Bogens HU mit der Strecke $\overline{AI}$. Zusätzlich bildet man aus den Punkten R und T eine Strecke.

Nun verbinde man die Punkte J', L', N und O zu den Strecken $\overline{J'L'}$, $\overline{L'N}$, $\overline{NO}$ und $\overline{OJ'}$, als auch die einzelnen Punkte mit dem Mittelpunkt M. Die Strecke $\overline{J'L'}$ schneidet wiederum die Strecke $\overline{SU}$ in M_1, die Strecke $\overline{L'N}$ die Strecke $\overline{RT}$ in M_2, die Strecke $\overline{NO}$ die Strecke $\overline{SU}$ in M_3 und die Strecke $\overline{OJ'}$ die Strecke $\overline{RT}$ in M_4, wobei diese Punkte dann die Mittelpunkte der Vierpasskreise ergeben.

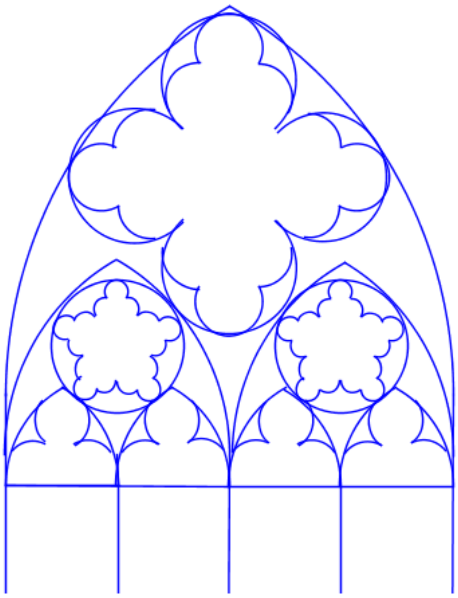
Um den Radius der einzelnen Kreise zu bestimmen, muss man zunächst jeweils das Lot von M_1 und M_2 auf die Strecke $\overline{ML'}$ als auch jeweils das Lot von M_3 und M_4 auf die Strecke $\overline{MO}$ fällen, wodurch die Lotfußpunkte P, Q, V und W entstehen. Daraufhin ziehe man den Kreis k_1 um M_1 durch P, den Kreis k_2 um M_2 durch Q, den Kreis k_3 um M_3 durch V und den Kreis k_4 um M_4 durch W. Wenn man nun das Kreisbogenviereck und weitere Hilfszeichnungen wegnimmt, ist der obere Teil des Fensters fertig gestellt.

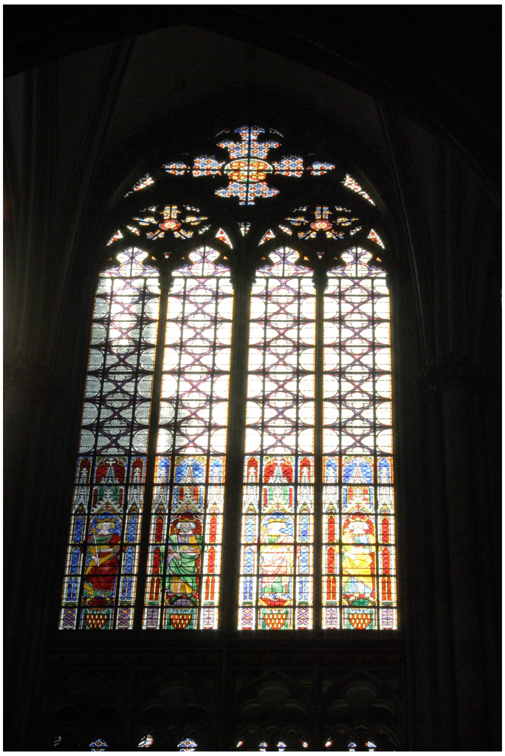
Weiterhin füllt man die zwei Spitzbögen CFE und EGD mit der zweiten Variante „Zwei Spitzbögen und ein Kreis im Spitzbogen“ (Kapitel 8.5.2). In die zwei Kreise wird jeweils als Hilfskonstruktion ein Fünfpass (Kapitel 8.13) eingeschrieben und in die einzelnen Fünfpasskreise wiederum die häufig verwendete Variante des Dreipasses (Kapitel 8.8.2). Anschließend nimmt man den Fünfpass wieder zurück. Zuletzt wird in den vier kleinen Spitzbögen das liegende Dreiblatt angefertigt und die Maßwerkzeichnung ist fertig gestellt.



9.5.3 Obergaden des Chors – 3. Königsfenster

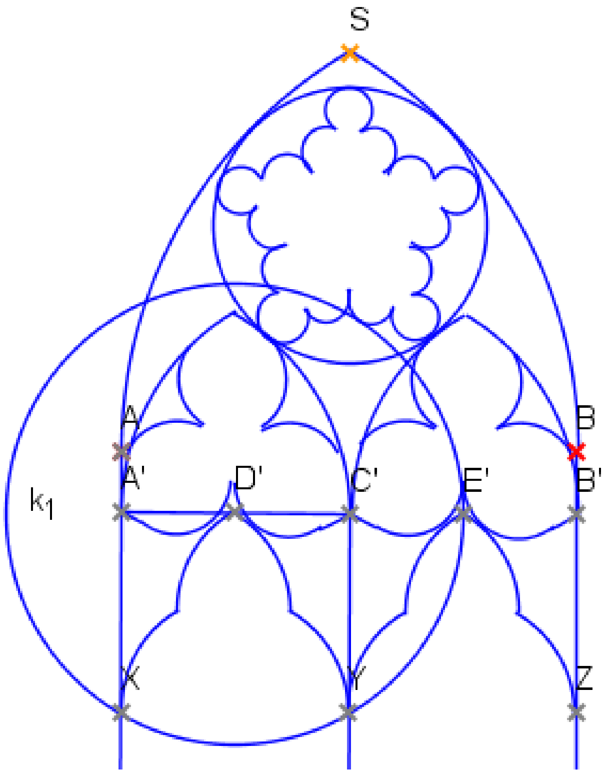
Bei dieser Konstruktion des Maßwerks verfährt man genau wie bei dem zuvor aufgeführten Königsfenster. Der einzige Unterschied besteht darin, dass zum Schluss in die vier kleinen Spitzbögen anstelle eines liegenden Dreiblatts die erste Variante des „Kleeblatts im Spitzbogen“ (Kapitel 8.9.1) eingefügt wird.





9.5.4 Obergaden des Chors – 4. Königsfenster

Das letzte Königsfenster schmückt die Ostseite des Hochchors.

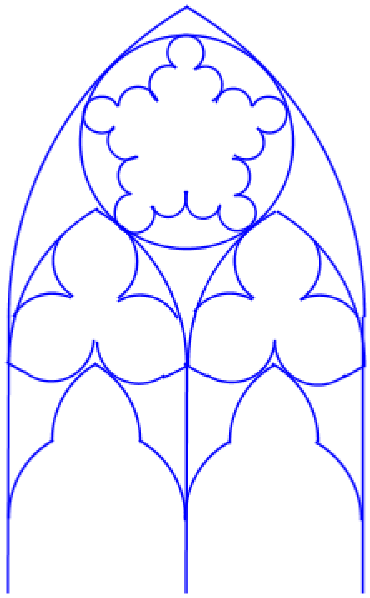


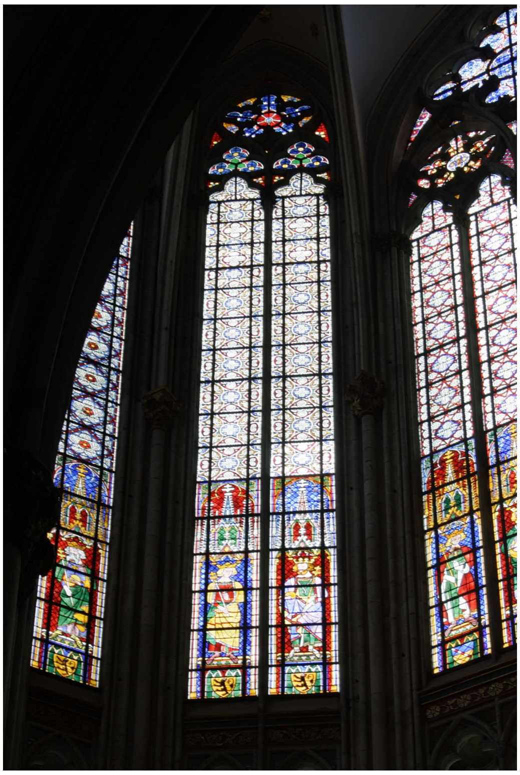
Das Grundgerüst dieser Konstruktion des Maßwerks besteht aus der zweiten Variante der Konstruktion „Zwei Spitzbögen und ein Kreis im Spitzbogen“ (Kapitel 8.5.2).

Daraufhin wird in den Kreis die Grundform des Fünfpasses (Kapitel 8.12) einbeschrieben, in dessen Kreisen wiederum die Grundform des Dreipasses (Kapitel 8.7.1) ausgeführt wird. Die einzelnen Kreisbögen des Fünfpasses sind im Maßwerk nicht ersichtlich und dienen nur als Hilfskonstruktion.

In die zwei kleinen Spitzbögen wird je ein Kleeblatt wie in der Konstruktion „Kleeblatt im Kreisbogendreieck“ (Kapitel 8.10) eingefügt.

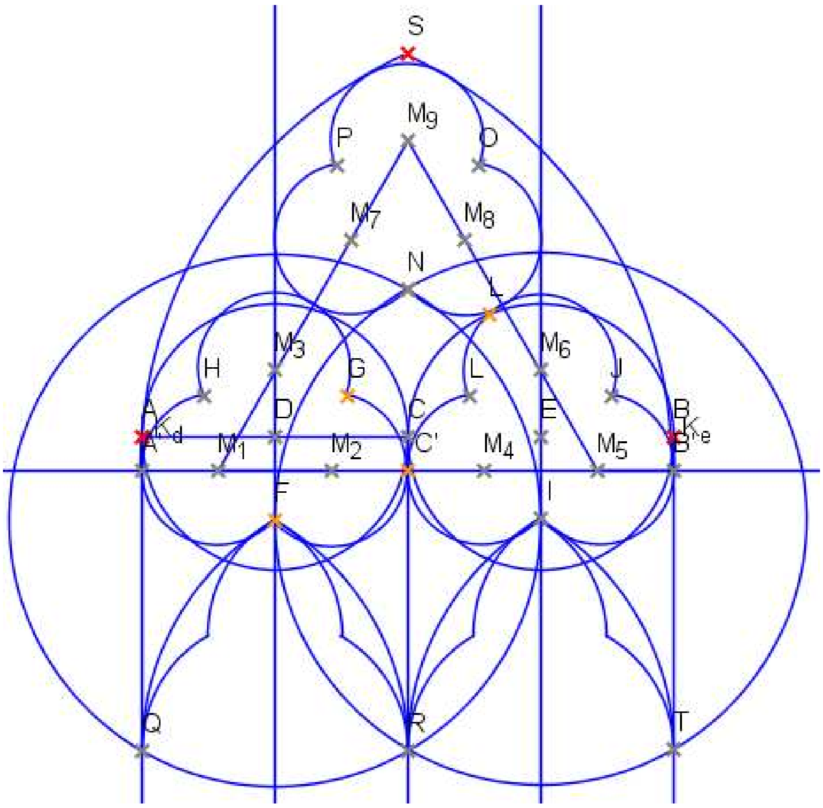
Dann zieht man den Kreis k_1 um den Mittelpunkt D’ der Kämpferlinie $\overline{A'C'}$ des linken kleinen Spitzbogens. Der Radius dieses Kreises entspricht der Länge seiner Kämpferlinie $\overline{A'C'}$. Dieselbe Konstruktion führt man im Anschluss daran an dem rechten kleinen Spitzbogen durch. Der Kreis k_1 schneidet die Senkrechten, die durch die zugehörigen Kämpferpunkte abwärts verlaufen, in den Punkten X und Y. Mit Hilfe dieser Punkte und mit dem Punkt D’ kann man nun das letzte Element, das liegende Dreiblatt, errichten. Die gleiche Konstruktion muss natürlich auch in dem benachbarten kleinen Spitzbogen durchgeführt werden.





9.6 Fensterzyklus in den Chorkapellen

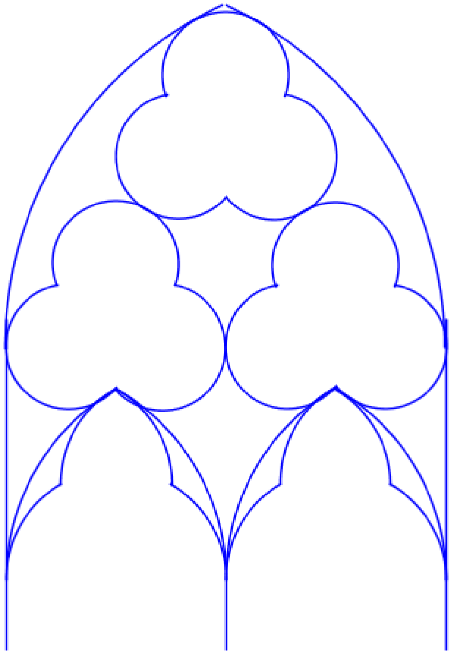
Die Fenster im Chorkapellenkranz schmücken, wie der Name schon sagt, die einzelnen Kapellen des Chors.
Im Bogenfeld weisen die Fenster einen dreifachen Dreipass auf, der im Kämpferansatz von zwei Spitzbögen fortgeführt wird, in denen sich jeweils ein liegendes Dreiblatt (Kapitel 8.8.2) befindet.



Zunächst zeichnet man die Kämpferlinie $\overline{AB}$, die der Breite des Fensters entspricht. Nun halbiert man diese Strecke im Punkt C durch Errichtung der Mittelsenkrechte, so dass die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{CB}$ entstehen, welche wieder durch die Punkte D und E halbiert werden. Anschließend zieht man den Kreis k_D um den Punkt D und den Kreis k_E um den Punkt E mit dem Radius $\overline{AD}$ (entspricht einem Viertel der Kämpferlinie), so dass die Kreise sich in C berühren.
Jetzt konstruiert man jeweils die Variante des Dreipasses in die Kreise, wie es im Kapitel 8.7.2 beschrieben ist. Dies dient jedoch nur als

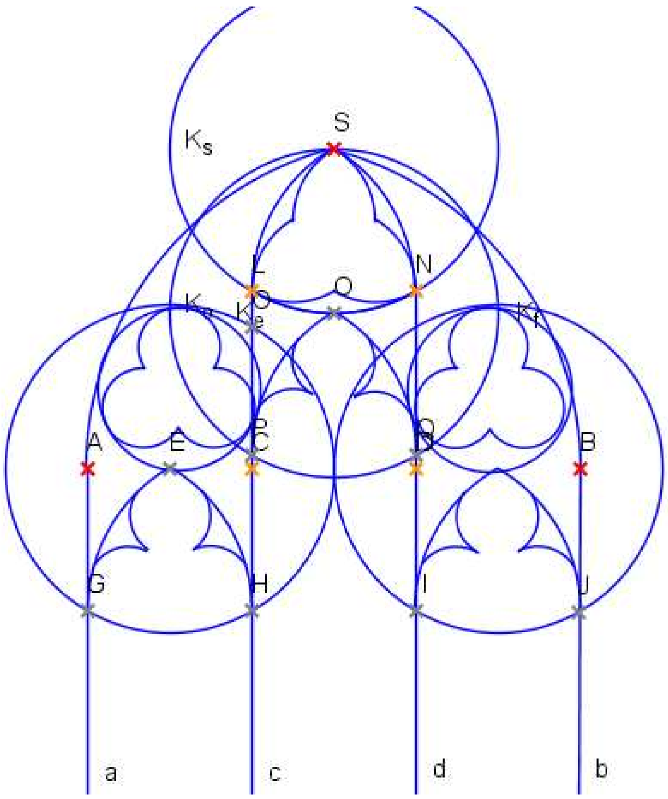
Hilfskonstruktion, um die Mittelpunkte M_1 bis M_6 der einzelnen Passkreise zu erhalten. Weiterhin verschiebt man die Kämpferlinie $\overline{AB}$ mit dem Mittelpunkt C so, dass vier der Mittelpunkte der Dreipasskreise auf ihr liegen und die zwei restlichen Mittelpunkte darüber. Diese Konstruktionsschritte wurden vollzogen, damit die Verhältnisse der Passmittelpunkte zur Kämpferlinie im richtigen Verhältnis stehen.
Die bisherigen Konstruktionen kann man nun alle vernachlässigen bis auf die Mittelpunkte M_1 bis M_6 und die Kämpferlinie $\overline{AB}$ mit dem Mittelpunkt C.
Als nächstes werden die beiden Kreisbögen des gedrückten Spitzbogens errichtet, deren Mittelpunkte die Punkte M_1 bzw. M_5 sind und die jeweils durch die verschobenen Kämpferpunkte A' bzw. B' gehen (vgl. Binding 1989, S. 214f.). Nun zeichnet man die sechs einzelnen Passkreise um die Mittelpunkte M_1 bis M_6 mit Radius $\overline{M_2C'}$, wobei C' hier dem Mittelpunkt der verschobenen Kämpferlinie entspricht. Die entstandenen Dreipasskreise schneiden sich in den Punkten F, G, H, I, J und L.
Im nächsten Schritt errichtet man ein gleichseitiges Dreieck, indem man den Kreis um M_1 durch M_5 zieht und umgekehrt. Als Schnittpunkt dieser Kreise erhält man die Dreiecksspitze M_9. Um die Dreiecksspitze ziehe man einen Kreis mit dem Radius $\overline{M_1M_3}$ und nenne die Schnittpunkte mit den Dreiecksseiten M_7 und M_8. Auch hier werden um die Punkte M_7 bis M_9 die drei Passkreise mit dem Radius der anderen Dreipässe gezeichnet. Die zuletzt konstruierten Dreipasskreise schneiden sich in den Punkten N, O und P.
Nun hebt man die Kreisbögen FG, GH, HF, IJ, JL, LI, NO, OP und PN hervor. Diese stellen die drei sich berührenden Dreipässe im Spitzbogen A'B'S dar, die somit fertig gestellt sind.
Errichte nun die Senkrechte in A', B' und C' zu der verschobenen Kämpferlinie. Diese Senkrechten werden nur im Kämpferansatz ausgeführt und begrenzen somit das Fenster. Dann ziehe man den

Kreis k_F um F und den Kreis k_I um I mit dem Radius $\overline{AC}$, wobei man die Schnittpunkte mit den zuvor errichteten Senkrechten Q, R und T nennt. Nun können die Spitzbögen QFR und RIT, wie in den Grundkonstruktionen beschrieben, erstellt werden. Zum Schluss fügt man das liegende Dreiblatt ein.



9.7 Fenster der Sakristei

Wendet man sich der Sakristei zu, so erblickt man einige Fenster, die folgendermaßen aufgebaut sind:



Zu Anfang konstruiert man einen gedrückten Spitzbogen ABS und errichtet die Senkrechten a in A und b in B zur Kämpferlinie, jedoch führt man sie nur abwärts aus. Die Mittelpunkte C und D der beiden Kreisbögen AS und BS dritteln (siehe Hilfskonstruktion, Kapitel 8.5.2) die Kämpferlinie $\overline{AB}$ und die Senkrechten c und d durch diese Punkte dritteln den Kämpferansatz. Nun bestimme man die Mittelpunkte der Strecken $\overline{AC}$ sowie $\overline{DB}$ und benenne sie mit den Buchstaben E und F. Ziehe den Kreis k_E um E mit dem Radius $\overline{AC}$ und den Kreis k_F um F mit demselben Radius. k_E schneidet die Senkrechte a im Punkt G sowie die Senkrechte c in H, und k_F bildet mit der Senkrechten d den Schnittpunkt I und mit der Senkrechten b den Schnittpunkt J.

Mit den drei Punkten E, G und H bzw. F, I und J bilde man nun die Spitzbögen GEH und IFJ, deren Spitzen sich dann unmittelbar auf der Kämpferlinie des umgebenden, gedrückten Spitzbogens befinden.

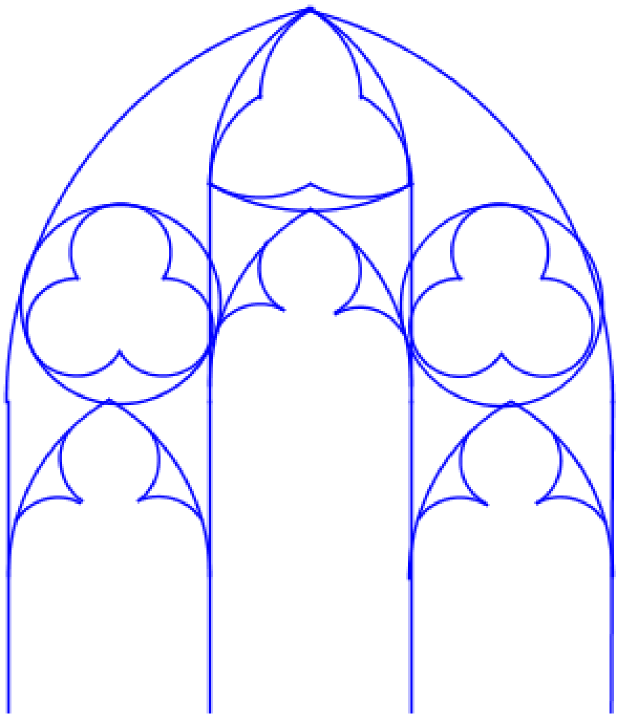
Weiterhin ziehe man den Kreis k_S um S mit dem Radius $\overline{AC}$, der die Senkrechte c im Punkt L und die Senkrechte d in dem Punkt N schneidet. Auch hier kann nun der Spitzbogen LSN konstruiert werden, der zusammen mit dem Kreis k_S das gleichnamige Kreisbogendreieck bildet.

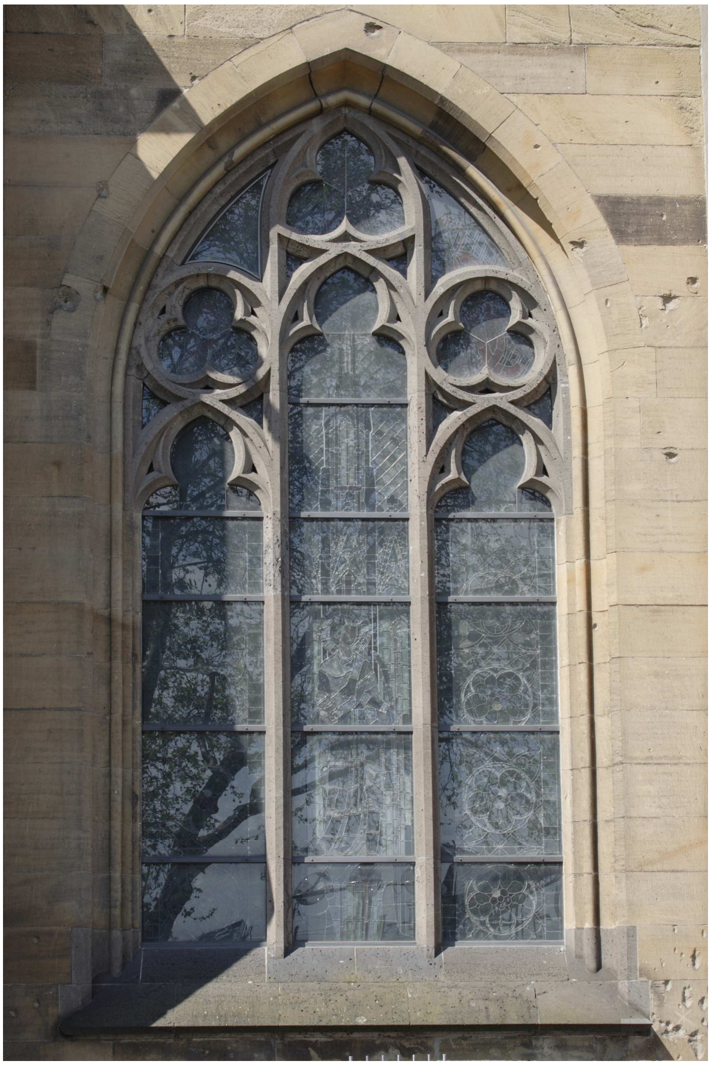
Um einen weiteren Hilfspunkt zu erhalten, zeichne man die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{CD}$; diese trifft den Bogen LN des Kreisbogendreiecks in O. Wieder konstruiere man den Kreis k_O um O mit dem Radius $\overline{AC}$. Er schneidet die Senkrechte c in P und die Senkrechte d in Q. Die Punkte O, P und Q lassen dann die Konstruktion eines weiteren Spitzbogens OPQ zu.

Die Kreise über den äußeren Spitzbögen sind nun passend eingefügt, wie dies im Kapitel über die Konstruktionsungenauigkeiten schon erwähnt wurde.

In das Kreisbogendreieck wird ein liegendes Dreiblatt eingezeichnet, das der Konstruktion „liegendes Dreiblatt im Spitzbogen“ (Kapitel 8.8.2) entspricht.

Zuletzt wird in die Kreise jeweils die Grundform des Dreipasses (Kapitel 8.7.1) eingefügt, sowie in die Spitzbögen GEH, IFJ und LSN jeweils ein Kleeblatt eingepasst.



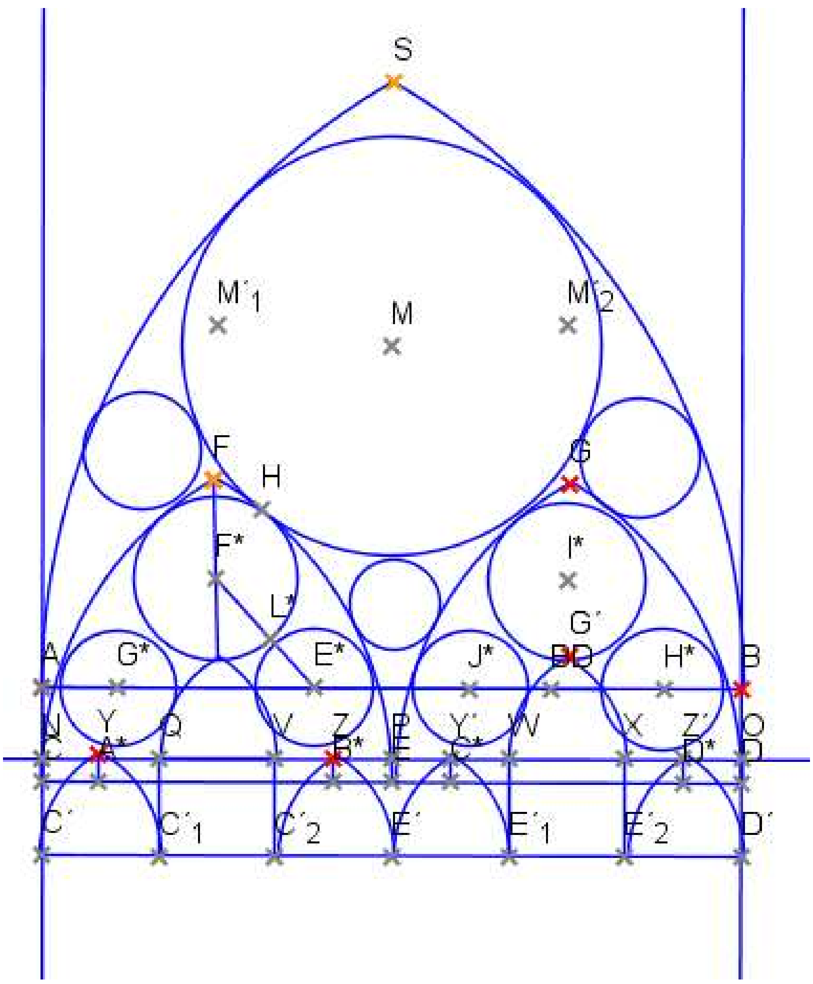


9.8 Nordquerhausfenster

Dieses Fenster entdeckt man über dem nördlich gelegenen Seiteneingang; es wurde von den Kölner Bürgern 1850 gestiftet. Auch dieses Fenster erlitt wie das Südquerhausfenster im zweiten Weltkrieg große Schäden.

Das Nordquerhausfenster ist geographisch betrachtet das Gegenstück zum Südquerhausfenster, jedoch ist es optisch leicht verändert. Der obere Teil des Fensters stellt hier eine Rosette dar, deren Innenleben jedoch wieder dem Innenleben des Kreisbogenvierecks des Südquerhausfensters gleicht.

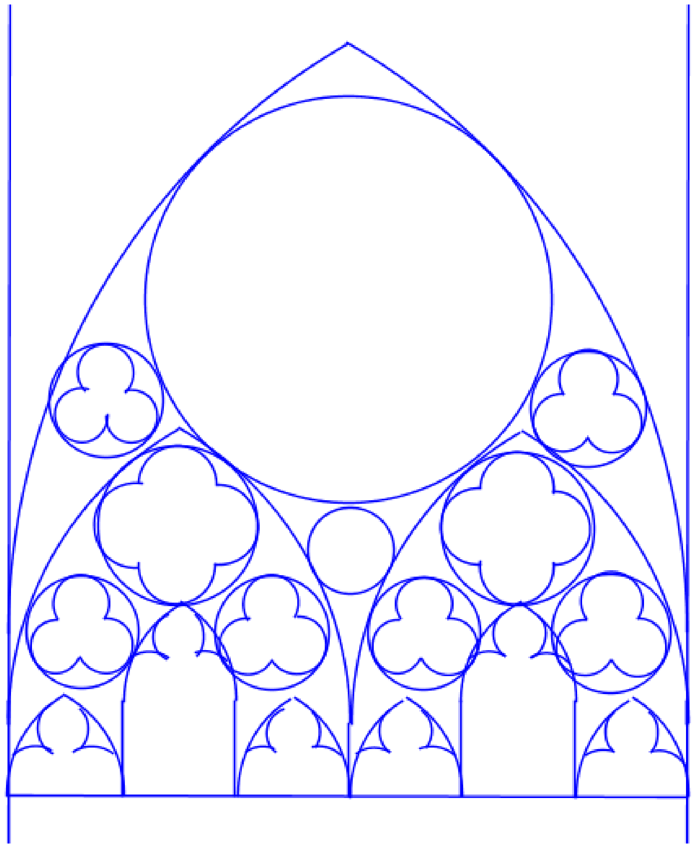
Auch hier werden auf Grund der Komplexität zuerst das Grundgerüst des Fensters und dann das Innenleben konstruiert, wobei die Rosette nochmals eigens behandelt wird.



Um das Grundgerüst herzustellen, beginnt man mit der zweiten Variante der Konstruktion „Zwei Spitzbögen und ein Kreis im Spitzbögen“ (Kapitel 8.5.2).
Die weitere Konstruktion in den zwei kleineren Spitzbögen folgt zuerst der Konstruktion des Westportalfensters (Kapitel 9.1), bis die sechs kleineren Spitzbögen erstellt sind.
Um nun die Mittelpunkte der sechs kleinen Kreise zu finden, fällt man zunächst das Lot von den Punkten Y, Z, Y´ und Z´ auf die Kämpferlinie $\overline{CD}$, wodurch die Lotfußpunkte A*, B*, C* und D* entstehen.
Dann ziehe man den Kreis um A* durch B*, der die Kämpferlinie $\overline{AB}$ in E* und die Strecke $\overline{FF`}$ in F* schneidet, den Kreis um B* durch A*, der die Kämpferlinie $\overline{AB}$ in G* schneidet, den Kreis um C* durch D*, der die Kämpferlinie $\overline{AB}$ in H* und die Strecke $\overline{GG`}$ in I* schneidet und zuletzt den Kreis um D* durch C*, der die Kämpferlinie $\overline{AB}$ in J* schneidet. Diese sechs Punkte E*, F*, G*, H*, I* und J* sind die Mittelpunkte der gesuchten Kreise. Um F* und um I* ziehe man nun jeweils einen Kreis k_F bzw. k_I mit dem Radius $\overline{F*H}$ (H ist ein Punkt aus der zweiten Variante der Konstruktion „Zwei Spitzbögen und ein Kreis im Spitzbogen“, Kapitel 8.5.2). Verbindet man F* mit E*, schneidet diese Strecke den Kreis k_F im Punkt L*. Nun ziehe man um E*, H*, G* und J* jeweils einen Kreis mit dem Radius $\overline{L*E*}$ und die letzten vier Kreise sind fertig gestellt.

Das Innenleben der sechs kleinen Spitzbögen enthält jeweils ein Kleeblatt im Spitzbogen der ersten Variante (Kapitel 8.9.1). Die mittleren Kreise weisen im Inneren die häufig verwendete Variante des Vierpasses (Kapitel 8.11.2) auf. In den benachbarten Kreisen ist die häufig verwendete Variante des Dreipasses (Kapitel 8.7.2) eingefügt.

Wie schon im Sakristeifenster durchgeführt, fügt man zum Schluss dieser Konstruktionseinheit passend jeweils einen Kreis am rechten und linken Rand des Fensters unterhalb der Rosette und den Kreis, der zwischen der Rosette und den Spitzbögen liegt, ein.



An dieser Stelle wird der Fokus auf die Rosette mit dem Kreismittelpunkt M gerichtet. Die Rosette weist denselben Inhalt auf wie das Kreisbogenviereck im Westportalfenster.

Nun zeichnet man eine Gerade durch M´, die den Rosettenkreis in A´ und B´ schneidet und wiederum eine Senkrechte auf dieser durch M´ bildet. Hierdurch entstehen die Schnittpunkte C´ und D´. Dann ziehe man den Kreis k_M um M´ mit dem Radius, der ein Fünftel des Radius des Rosettenkreises beträgt (siehe Hilfskonstruktion, Kapitel 8.5.2). Anschließend konstruiere man die Winkelhalbierenden der Winkel ∠A´M´D´, ∠D´M´B´, ∠B´M´C´ und ∠C´M´A´, die den Rosettenkreis in E´, F´, G´ und H´ und den Kreis k_M in den Punkten I´, J´, L´ und N´ schneiden.

Weiterhin trägt man in den Punkten A´, B´, C´ und D´ jeweils zwei 30°-Winkel über und unter der zugehörigen Gerade durch M´ ab. Um die

Punkte A´, B´, C´ und D´ zieht man jeweils einen Kreis mit dem Radius $\frac{\overline{E'I'}}{2}$ und erhält mit den Schenkeln der abgetragenen Winkel die Schnittpunkte O´, P´, Q´, R´, S´, T´, U´ und V´. Mit Hilfe dieser Punkte kann man nun die vier Spitzbögen V´C´O´, P´A´Q´, R´D´S´ und T´B´U´ konstruieren.

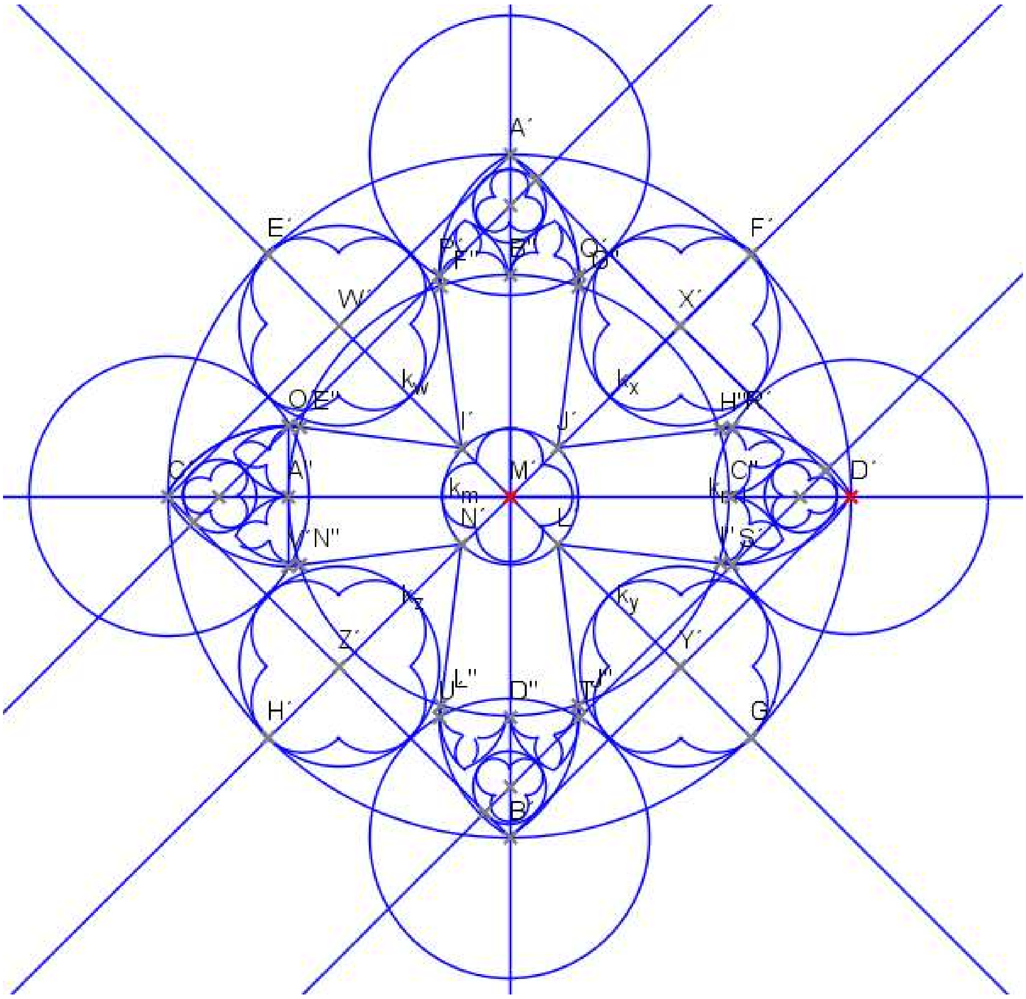
Im nächsten Schritt bilde man die Strecken $\overline{O'I'}$, $\overline{P'I'}$, $\overline{Q'J'}$ $\overline{R'J'}$, $\overline{S'L'}$, $\overline{T'L'}$, $\overline{U'N'}$ und $\overline{V'N'}$. Auch die Strecken $\overline{A'D'}$, $\overline{D'B'}$, $\overline{B'C'}$ und $\overline{C'A'}$ werden konstruiert. $\overline{C'A'}$ schneidet die Strecke $\overline{M'E'}$ im Punkt W´, $\overline{A'D'}$ die Strecke $\overline{M'F'}$ im Punkt X´, $\overline{D'B'}$ die Strecke $\overline{M'G'}$ im Punkt Y´ und $\overline{B'C'}$ die Strecke $\overline{R'J'}$ im Punkt Z´.

Um das Grundgerüst der Rosette fertig zu stellen, ziehe man nun den Kreis k_W um W´ durch E´, den Kreis k_X um X´ durch F´, den Kreis k_Y um Y´ durch G´ und den Kreis k_Z um Z´ durch H´.

Das Innenleben der vier Kreise zwischen den Blättern und des Kreises in der Mitte der Rosette wird von der häufig verwendeten Vierpassform (Kapitel 8.11.2) gefüllt.

Um nun den Kreis und die zwei Spitzbögen in den vier Blättern zu konstruieren, benenne man den Schnittpunkt der Strecke $\overline{V'O'}$ mit der Strecke $\overline{M'C'}$ als Hilfspunkt A´´. Anschließend zieht man den Kreis k_{M1} um den Punkt M´ durch A´´, der $\overline{M'A'}$ in B´´, $\overline{M'D'}$ in C´´ und $\overline{M'B'}$ in D´´ schneidet. Andererseits schneidet der Kreis k_{M1} die Rosettenblätter in den Punkten E´´, F´´, G´´, H´´, I´´, J´´, L´´ und N´´. Jetzt werden die Spitzbögen über den Strecken $\overline{A''E''}$, $\overline{F''B''}$, $\overline{B''G''}$, $\overline{H''C''}$, $\overline{C''I''}$, $\overline{J''D''}$, $\overline{D''L''}$ und $\overline{N''A''}$ in den Blättern errichtet.

Um den Mittelpunkt des Kreises über diesen Spitzbögen zu finden, zeichne man die Parallele zu $\overline{C'A'}$ durch O´, die die Strecken $\overline{M'C'}$ und $\overline{M'A'}$ schneidet. Diese Schnittpunkte sind zwei der vier gesuchten Mittelpunkte. Natürlich konstruiert man auch die Parallele zu $\overline{D'B'}$ durch T´, die die Strecken $\overline{M'D'}$ und $\overline{M'B'}$ schneidet und somit die zwei weiteren Mittelpunkte liefern. Anschließend fällt man von diesen Mittelpunkten jeweils ein Lot auf die Strecke $\overline{A'D'}$ bzw. $\overline{B'C'}$, um den Abstand dieses Lotfußpunktes zum jeweiligen Mittelpunkt als Radius zu nutzen. Als letzten Schritt zur Fertigstellung der Rosette fügt man in die Spitzbögen der Rosettenblätter die zweite Variante des „Kleeblatts im Spitzbogen“ (Kapitel 8.9.2) ein und in die Kreise dieser Blätter die „Häufig verwendete Dreipassform“ (Kapitel 8.7.2).



9.9 Triforienfenster

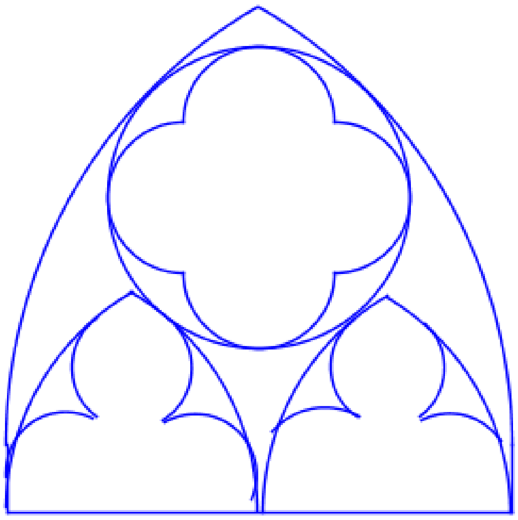
Die Fenster, die in diesem Kapitel beschrieben werden, befinden sich, wie der Name schon sagt, im Bereich des Triforiums. Das Triforium ist die Zone im Wandaufriss zwischen Erdgeschossarkaden und den Obergaden. Im Kölner Dom sind drei verschiedene Typen dieser Fenster vorzufinden.

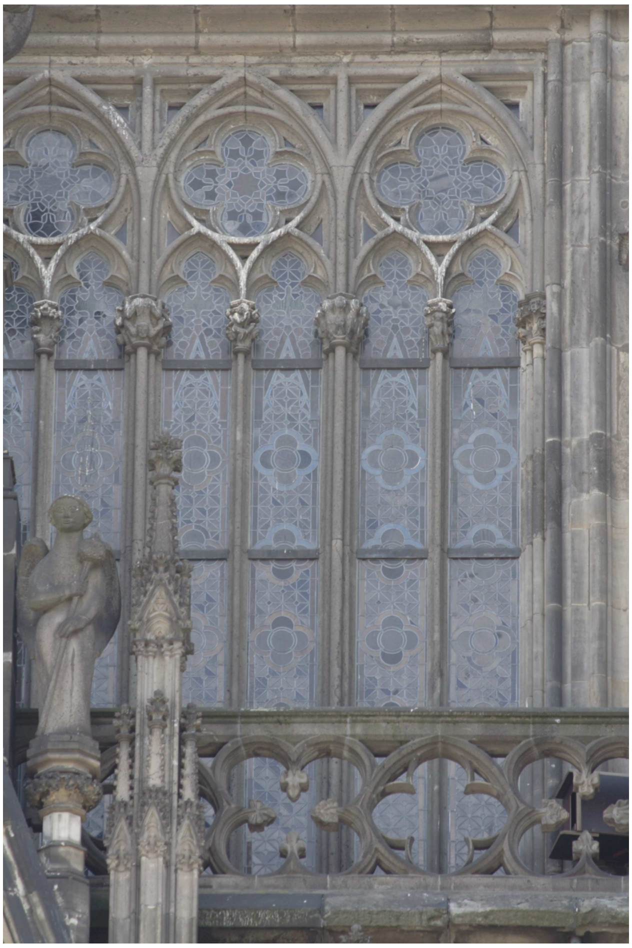
9.9.1 1. Triforiumfenster

Diese Fenster findet man im Triforium in der Westfassade unmittelbar unter dem Westportalfenster.

Zu Beginn konstruiert man die zweite Version „Zwei Spitzbögen und ein Kreis im Spitzbogen“, um die umgebenden Bedingungen zu schaffen.

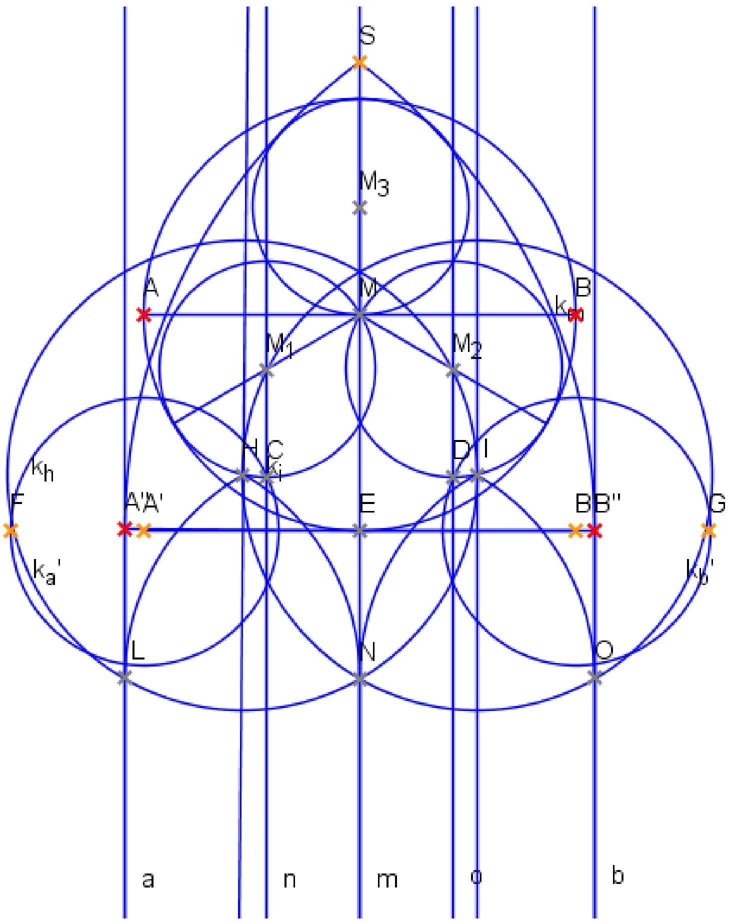
In den Kreis fügt man die oben genannte Version des Vierpasses (Kapitel 8.11.2) ein. Die Spitzbögen füllt man mit der ersten Version des Kleeblattes im Spitzbogen. Somit ist das Maßwerk dieses Triforiumfensters bereits hergestellt.





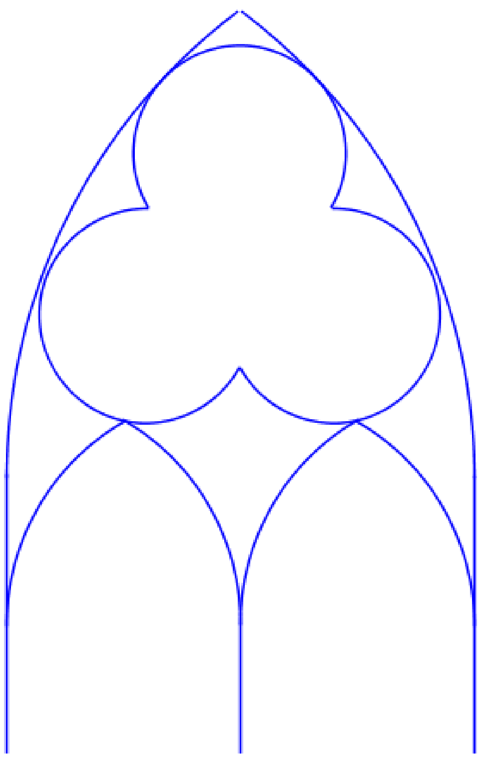
9.9.2 <u>2. Triforiumfenster</u>

Angrenzend an das Südquerhausfenster schmückt dieses Fenster unter anderem das Triforium der Südfassade.

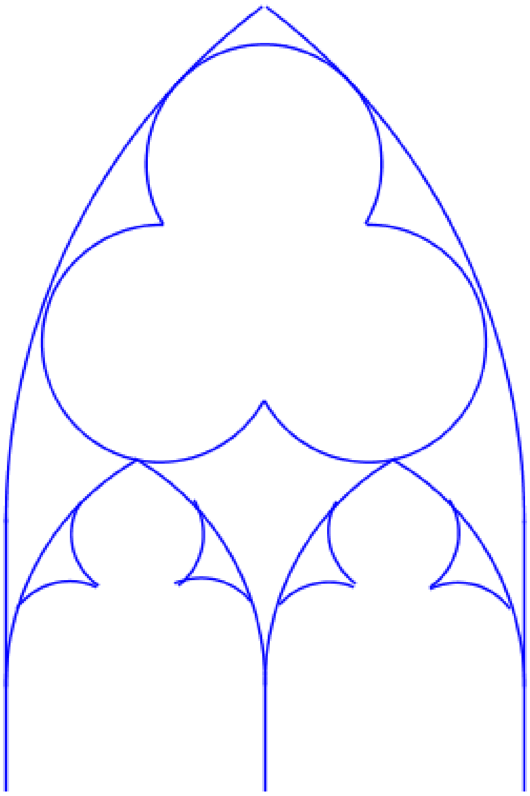


Auch bei dieser Konstruktion beginnt man mit der Errichtung der Kämpferlinie $\overline{AB}$ mit dem Mittelpunkt M, um den man den Kreis k_M durch A und B zieht. In diesen Kreis konstruiere man die häufig verwendete Variante des Dreipasses (Kapitel 8.7.2) mit den Mittelpunkten M_1, M_2 sowie M_3. Durch M_1 und M_2 zeichne man die Senkrechten n und o zu der Kämpferlinie, die die zugehörigen Passkreise in den Punkten C und D schneiden. Nun verschiebe man die Kämpferlinie mit ihren Punkten A, B und M parallel, bis sie senkrecht durch den Punkt E geht, der den Schnittpunkt von k_M mit der Senkrechten m in M zur Kämpferlinie bildet. Zieht man um die neuen

Kämpferpunkte A’ und B’ jeweils den Kreis $k_{A'}$ bzw. $k_{B'}$ durch die Punkte C und D, erhält man mit der nach außen beidseitig verlängerten Kämpferlinie die Schnittpunkte F und G. Diese bilden die Mittelpunkte für die beiden Bögen, aus denen sich der leicht lanzettartige Spitzbogen A’’SB’’ zusammensetzt. Zusätzlich errichte man die Senkrechte a in A’’ und die Senkrechte b in B’’ auf der verlängerten Kämpferlinie $\overline{A'B'}$.
Nun konstruiert man die Mittelsenkrechten der Strecken $\overline{A''E}$ und $\overline{EB''}$. Die Schnittpunkte dieser Mittelsenkrechten mit jeweils einem der beiden unteren Dreipasskreise nenne man H und I. Schließlich ziehe man den Kreis k_H um H und den Kreis k_I um I mit dem Radius $\overline{A''E}$. Der Kreis k_H schneidet die Senkrechte a unterhalb der neuen Kämpferlinie in dem Punkt L und die Senkrechte m in N. N ist auch der Schnittpunkt des Kreises k_I und der Senkrechten m, jedoch bildet k_I auch den Schnittpunkt O mit der Senkrechten b. Nach Bestimmung der Punkte L, N und H sowie N, O und I können zum Schluss noch zwei Spitzbögen dort eingefügt werden.

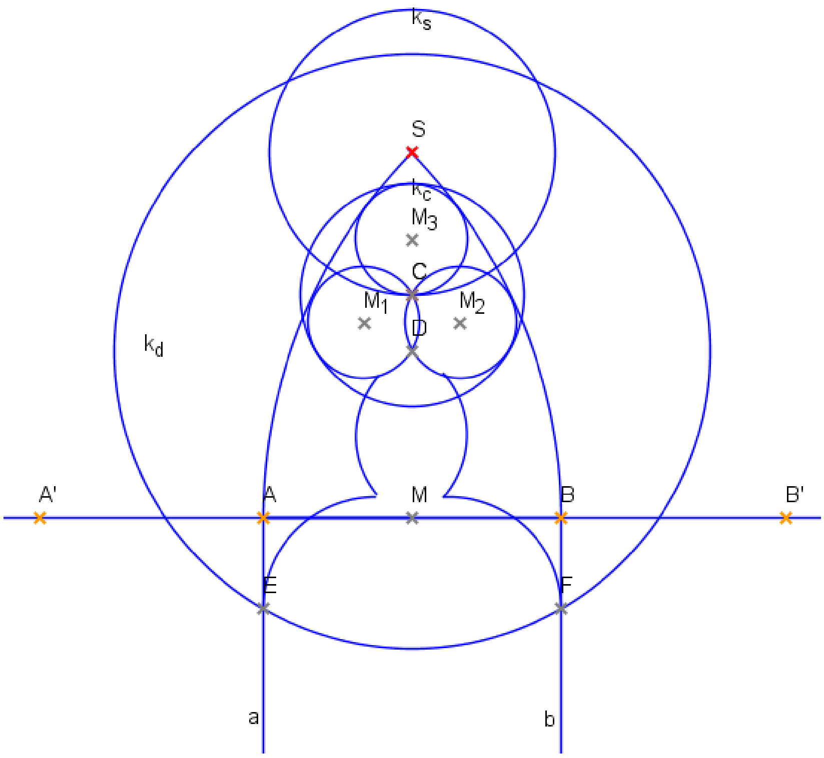


Eine Variation dieses Triforiumfensters existiert im Triforium unter dem Nordquerhausfenster. Der Unterschied besteht darin, dass in die zwei kleinen Spitzbögen noch zusätzlich die erste Variation des „Kleeblatts im Spitzbogen“ eingesetzt wurde.



9.9.3 3. Triforiumfenster

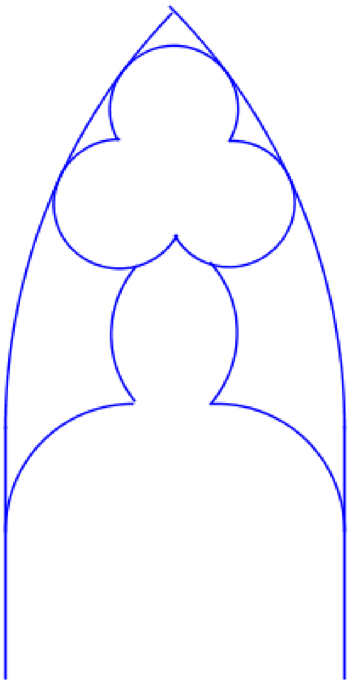
Das dritte Fenster dieser Art ist zum Beispiel in das Triforium des Chors eingemeißelt und befindet sich somit unter einem der Königsfenster.



Als erstes wird bei dieser Konstruktion die Kämpferlinie $\overline{AB}$ errichtet und auf ihr der Mittelpunkt M markiert. Dann konstruiert man auf der Kämpferlinie den Lanzettbogen ABS. Die Mittelpunkte A’ und B’ seiner beiden Kreisbögen liegen auf der verlängerten Kämpferlinie. Man erhält sie, indem man sowohl einen Kreis um A als auch einen Kreis um B zieht, dessen Radius jeweils sechs Achtel der Kämpferlinie beträgt (siehe Hilfskonstruktion, Kapitel 8.5.2). Um nun den Dreipass zu konstruieren, wird zunächst um S der Kreis k_S mit dem Radius $\overline{AM}$ gezogen. Der Schnittpunkt dieses Kreises mit der Strecke $\overline{SM}$ stellt den Mittelpunkt C des den Dreipass umgebenden Kreises dar. Der Radius dieses Kreises k_C wiederum beträgt drei Achtel der Kämpferlinie. In ihn wird die häufig verwendete Variante des Dreipasses (Kapitel 8.7.2) mit seinen Mittelpunkten M_1, M_2 sowie M_3 einbeschrieben.

Im Anschluss daran errichtet man die Senkrechte a in A zur Kämpferlinie und die Senkrechte b in B ebenfalls zur Kämpferlinie.

Für den nächsten Konstruktionsschritt benenne man der Einfachheit halber den Schnittpunkt der zwei Passkreise, die die Mittelpunkte M_1 und M_2 haben, mit D. Um D ziehe man dann den Kreis k_D mit dem Radius $\overline{AB}$, der die Senkrechte a in dem Punkt E und die Senkrechte b in dem Punkt F schneidet. Zuletzt konstruiert man mit den Punkten D, E und F die zweite Variante des „Kleeblatts im Spitzbogen“ (Kapitel 8.9.2).



10 Unterrichtsreihe

Diese Unterrichtsreihe ist für die Jahrgangsstufe 9 und 10 konzipiert.

10.1 Verlauf der Unterrichtsreihe

1. Doppelstunde: Einführung in die Thematik „Maßwerk gotischer Kirchenfenster“ und Zusammenstellung wichtiger Grundlagen der Gotik
2. Doppelstunde: Gotische Grundkonstruktionen kennen (vertieft durch Stationenlernen)
3. Doppelstunde: Exkursion zum Kölner Dom
4. Doppelstunde: Eigene Kreation und Konstruktion eines Fensters (Scherenschnitt)

10.2 Intention der Unterrichtsreihe

Nach den Kernlehrplänen des Landes NRW im Fach Mathematik für die Sekundarstufe 1 sollen sich die Schüler im Unterricht mit den mathematischen Aspekten in der Natur, Gesellschaft und Kultur auseinandersetzen und sie daraufhin analysieren. Weiterhin sollen sie lernen, diese mathematischen Aspekte sprachlich angemessen auszudrücken und sie als Arbeitsgrundlage anzuwenden bzw. weiterzuentwickeln. Der Umgang mit diesen mathematischen Sachverhalten soll darüber hinaus außerschulische Kompetenzen stärken und somit die Persönlichkeit fördern. Die Schüler sollen Verantwortung für den eigenen Lernprozess übernehmen und eigenständig Strategien zur Problemlösung finden.

In der Geometrie sollten die Schüler am Ende der Sekundarstufe 1 dazu in der Lage sein, ebene und räumliche Figuren sowohl in der Mathematik als auch in der Realität zu erkennen und bezüglich ihrer

Eigenschaften zu vergleichen. Hierzu sollten sie die zutreffenden Fachbegriffe korrekt anwenden und sie in der Umwelt wiederfinden können. Weiterhin sollten Schüler geometrische Figuren konstruieren und skizzieren können, was sie mit Hilfe grundlegender mathematischer Sätze bewerkstelligen sollen.

10.3 Unterrichtsplanung

1. Doppelstunde: Einführung in die Thematik „Maßwerk gotischer Kirchenfenster“ und Zusammenstellung wichtiger Grundlagen der Gotik

Phase/Zeit	Unterrichtsgeschehen	Methoden/Sozialform	Medien
Einstieg, Motivationsphase Ca. 10 Min.	- Begrüßung - Lehrer (L) zeigt Bild 1 des Fensters des Kölner Doms und fordert Schüler auf, sich dazu zu äußern - Schüler (S) äußern sich und beschreiben das Fenster - L. zeigt weitere Fenster gotischer Kirchen und fragt S., wie man Fenster zusammensetzen könnte - S. sollen Einzelteile der Fensterkonstruktion des ersten	- Klassengespräch bzw. Lehrer-Schüler-Interaktion	- Bild 1 (siehe Anhang) - Bilder 2-14 (siehe Anhang) - Beamer und Computer

	Bildes aufzählen (Grundgerüst, Fünfpass, liegendes Dreiblatt)		

Didaktisch-methodischer Kommentar:

Mit dem Bild des Fensters des Kölner Doms und der anschließenden auffordernden Frage des Lehrers werden die Schüler direkt angesprochen. Das Interesse der Schüler wird geweckt und es motiviert sie, sich mit der Thematik auseinanderzusetzen. Diese visuelle Unterstützung soll die Schüler auch auf die geometrischen Grundkonstruktionen aufmerksam machen. Durch die Äußerungen seitens der Schüler wiederholen sie den korrekten Aufbau einer Beschreibung und lernen geometrische Fachbegriffe passend anzuwenden. Die weiteren Fensterbilder werden gezeigt, um die Vielzahl der Fenster und die Vielfalt der gotischen Grundkonstruktionen zu verdeutlichen. Die Form des Klassengesprächs wird gewählt, damit für alle Schüler die Fensterbilder gut sichtbar sind und sich alle Schüler angesprochen fühlen.

Phase/Zeit	Unterrichtsgeschehen	Methoden/Sozialform	Medien
Erarbeitungsphase Ca. 30 Min.	- L. wiederholt nochmals die drei Einzelkonstruktionen des Fensters - L. teilt die S. in drei Gruppen ein, wobei sich jede dieser Gruppen	- arbeitsteilige Gruppenarbeit	- jede Gruppe erhält einen Zeichenblock, Zirkel, Bleistift, Lineal, Folie

	mit einer Einzelkonstruktion (Grundgerüst, Fünfpass, liegendes Dreiblatt) beschäftigt - S. sollen in den Gruppen versuchen die jeweilige Einzelkonstruktion zu erstellen und die Konstruktionsbeschreibung auf Folie festhalten		

Didaktisch-methodischer Kommentar:

Die Schüler setzen sich zur Gruppenarbeit zusammen, damit die Kommunikation unter den Schülern besser erfolgen kann und somit die Zusammenarbeit gefördert wird. Durch die Gruppenarbeit sind die Schüler anfangs dazu angehalten, selbstständig Überlegungen bzw. Hypothesen aufzustellen und sie zu verbalisieren. Sie sollen selbst herausfinden, wie die Einzelfigur konstruiert wird. Somit lernen sie eigenständig zu arbeiten und Probleme zu lösen. Dieser Auftrag soll eine Vertiefung der Arbeit mit Lineal und Zirkel und des Lernens der geometrischen Grundkonstruktionen erreichen. Die Motivation, die richtige Lösung zu erhalten, um somit schließlich das Fenster zusammensetzen zu können, wird durch den Auftrag gesteigert. Der Lehrer teilt hier die Gruppen ein, damit jede Gruppe aus starken und schwachen Schülern besteht und sich die Schüler somit gegenseitig besser unterstützen können. Hierdurch entsteht zum einen kein großer Zeitverlust und zum anderen sind die Gruppen etwa gleich stark. Bei Bedarf wird diese Erarbeitungsphase in der nächsten Stunde weitergeführt.

Phase/Zeit	Unterrichtsgeschehen	Methoden/Sozialform	Medien
Reflexion Ca. 30 Min.	- S. setzen sich zurück auf ihre Plätze - L. wiederholt die wichtigsten Details des Fensterbildes des Kölner Doms und zeigt nochmals kurz die Unterschiede zu den anderen Fenstern auf und benennt die gotischen Grundfiguren - Nacheinander kommt je ein S. aus jeder Gruppe an die Tafel und trägt die zuvor erarbeitete Konstruktionsbeschreibung vor, die ein S. einer anderen Gruppe	- Lehrervortrag - Schülerpräsentation	- Fensterbild 1 des Kölner Doms - Beamer und Computer - Tafel

	ausführt		

Didaktisch-methodischer Kommentar:

Die Schüler lernen hier, ihre Lösungsvorschläge zu verbalisieren und sie haben die Möglichkeit, ihre Lösung zu überprüfen. Dadurch, dass ein Schüler einer anderen Gruppe die Konstruktion ausführt, tritt sofort eine bessere Kontrolle ein. Die anderen Schüler sollen versuchen, die Lösung nachzuvollziehen und bei Bedarf kritisch zu hinterfragen und gegebenenfalls den Fehler aufzudecken. Falls die richtige Lösung nicht von den Schülern vorgeschlagen wird, stellt der Lehrer sie vor und erklärt, warum sie so funktioniert.

Phase/Zeit	Unterrichtsgeschehen	Methoden/Sozialform	Medien
Festigung Ca. 18 Min.	- S. konstruieren das Fenster des Kölner Doms in ihre Gotikmappe - HA: Schüler sollen Informationen zur Gotik sammeln	- Einzelarbeit	- Fensterbild 1 des Kölner Doms - Beamer und Computer - Gotikmappe (vom L. für jeden S. angefertigt) - Tafel

Didaktisch-methodischer Kommentar:

In dieser Phase lernen die Schüler eigenständig zu arbeiten und Konstruktionsbeschreibungen zu befolgen. Sie schulen ihre Feinmotorik durch den Gebrauch der Zeichenmaterialien.

Phase/Zeit	Unterrichtsgeschehen	Methoden/Sozialform	Medien
Abschluss Ca. 2 Min.	- L. gibt Hausaufgaben auf, die ein Hintergrundwissen zur Gotik schafft	- Lehrervortrag	- HA: Was ist Gotik?

Didaktisch-methodischer Kommentar:

Die Hausaufgabe dient dazu, ein Hintergrundwissen zur Gotik zu schaffen. Dadurch soll der Bezug zwischen Geometrie und Lebenswirklichkeit verdeutlicht werden und den Schülern wird aufgezeigt, wie wichtig die Geometrie in unserer Umwelt ist. Die offene Fragestellung ermöglicht den Schülern wiederum eine eigenständige Informationsbeschaffung.

Grobziele:

- Erfahrungen zur Konstruktion geometrischer und gotischer Grundformen sammeln

Feinziele:

- Geometrische und gotische Figuren entdecken
- Eigenschaften gotischer Fenster entdecken, nennen, beschreiben und rekonstruieren können
- Geometrisches Verständnis fördern

2. Doppelstunde: Gotische Grundkonstruktionen kennen (vertieft durch Stationenlernen)

Phase/Zeit	Unterrichtsgeschehen	Methoden/Sozialform	Medien
Einstieg Ca. 15 Min.	- Begrüßung - L erinnert an letzte Stunde und zeigt das Bild des Fensters des Kölner Doms mit dem Beamer und klärt ggf. Probleme der Konstruktionen - L. zeigt weitere selektierte Bilder gotischer Kirchenfenster (siehe Anhang)	- Lehrer-Schüler-Interaktion	- Fensterbild 1 des Kölner Doms - Beamer und Computer - HA - Gotikmappe

	- HA werden besprochen (L. und S. ergänzen ggf. in Gotikmappe)		

Didaktisch-methodischer Kommentar:

Die einführende, kurze Wiederholung der vorherigen Stunde dient als Grundlage dieser Doppelstunde. Zusätzlich werden noch offene Fragen geklärt. Zur Vorbereitung der nächsten Unterrichtsphase zeigt der Lehrer weitere ausgewählte Fensterbilder, die hauptsächlich die vier im Anschluss zu erarbeitenden Grundkonstruktionen aufweisen. Die Hausaufgabenabfrage ruft die Erinnerung hervor und räumt Unklarheiten aus. Sie soll zur zusammenstellenden Übersicht zur Gotik beitragen.

Phase/Zeit	Unterrichtsgeschehen	Methoden/Sozialform	Medien
Erarbeitungsphase Ca. 50 Min.	- L. erklärt die Stationen - S bearbeiten die Stationen und überprüfen selbst ihre Ergebnisse	- Stationenlernen	- Stationen 1-4 (Dreipass, Vierpass, 1. Variante Kleeblatt, Zweischneuß) (siehe Anhang) - Konstruktionsbilder mit Hilfslinien für schwächere Schüler (siehe Anhang) - Lösungen zu den Stationen (siehe Anhang)

Didaktisch-methodischer Kommentar:

Die Stationen wurden vorher im Frontbereich der Klasse aufgebaut, um die Schüler nicht an ihren Arbeitsplätzen zu stören. Die Schüler holen sich in beliebiger Reihenfolge je ein Arbeitsblatt. Sie bleiben auf ihrem Platz, da sie dort alle Materialien zur Verfügung haben. Dadurch, dass die Schüler selbst entscheiden können, welche Station sie zuerst erledigen, wird die Selbstständigkeit gefördert. Der Schwierigkeitsgrad der Stationen ist variabel gestaltet, so dass jeder Schüler selbstständig entscheiden kann, ob er die Konstruktion eigenständig erarbeitet oder ein Konstruktionsblatt mit Hilfslinien bevorzugt (Binnendifferenzierung). Wie es in den Kernlehrplänen gefordert wird, schulen die Schüler ihr geometrisches Verständnis, indem sie Figuren selbst konstruieren. Sich über einen bestimmten Zeitraum kontinuierlich zu konzentrieren, stellt ein weiteres Ziel der Stationsarbeit dar.

Phase/Zeit	Unterrichtsgeschehen	Methoden/Sozialform	Medien
Reflexion und Festigung Ca. 15 Min.	- die einzelnen Stationen werden nochmals im Plenum besprochen - L. bestätigt richtige Antworten und ergänzt sie gegebenenfalls - Stationen, die die S. nicht erledigt haben, sollen sie zu Hause nachholen	- Lehrer-Schüler-Interaktion	Stationen 1-4

Didaktisch-methodischer Kommentar:

Hier werden die neu erlangten Informationen noch einmal mündlich von den Schülern wiederholt. Die Ergebnisse werden kontrolliert, damit keine falschen Annahmen „haften“ bleiben. Da es durchaus sein kann, dass ein paar Schüler ihre Stationen nicht zu Ende führen können, sichert diese Phase, dass kein Schüler vernachlässigt wird, weil ihm Informationen fehlen. Schüler, die falsche Ergebnisse erzielt haben, haben die Möglichkeit, diese noch einmal zu überdenken. Die Hausaufgabe sichert nochmals die Aufnahme der Informationen insbesondere auch für die Schüler, die zu langsam waren.

Phase/Zeit	Unterrichtsgeschehen	Methoden/Sozialform	Medien
Abschluss Ca. 15 Min.	- für die anstehende Exkursion verteilt L. Referate zum Kölner Dom	- Lehrervortrag	

Didaktisch-methodischer Kommentar:

Durch die erteilte Hausaufgabe lernen die Schüler selbständig Referate zu verfassen und sich die dazu notwendigen Informationen eigenständig zu verschaffen. Themen hierfür wären beispielsweise:

- Maßwerk
- Arbeit der Steinmetze
- Geschichte des Kölner Doms

- Geschichte der einzelnen Fenster
- ...

Grobziele:

- Erfahrungen zur Konstruktion und zur Konstruktionsbeschreibung sammeln

Feinziele:

- Geometrische und gotische Figuren entdecken
- Eigenschaften gotischer Fenster beschreiben und rekonstruieren können
- Übung im Zeichnen und somit Feinmotorik gewinnen
- Geometrisches Verständnis fördern
- Selbstständigkeit fördern

3. Doppelstunde: Exkursion zum Kölner Dom

Die Exkursion nimmt zwei Unterrichtsstunden ein. Durch die Vorträge der einzelnen Referate gestalten die Schüler selbstständig eine Führung durch den Kölner Dom. Der Lehrer hat im Vorfeld die Referate bereits in einer passend aufeinander folgenden Weise angeordnet. Während der Referate hat der Lehrer die Möglichkeit, die Schüler evtl. zu verbessern oder Informationen zu ergänzen.

Didaktisch-methodischer Kommentar:
Der Vorteil einer Exkursion ist, dass die Schüler die Möglichkeit erhalten ihre vorherigen Konstruktionen in der Lebenswirklichkeit wieder zu finden. Weiterhin wird deutlich, dass die Geometrie in der Architektur einen bedeutenden Platz einnimmt und die Kirchenfenster vom Schwierigkeitsgrad und von der Komplexität her sehr unterschiedlich gestaltet sein können. Zusätzlich lernen die Schüler Referate zu gestalten und ihre Vorträge vor einer größeren Gruppe zu halten.

4. Doppelstunde: Eigene Kreation und Konstruktion eines Fensters (Scherenschnitt)

Phase/Zeit	Unterrichtsgeschehen	Methoden/Sozialform	Medien
Einleitung Ca. 10 Min.	- L. erinnert an die vorherige Exkursion und die	- Lehrervortrag	- Konstruktionen der Stationen 1-4

	Grundkonstruktionen, die die S. bereits ausführen können		

Didaktisch-methodischer Kommentar:

Die einführende, kurze Wiederholung der vorherigen Stunde dient als Grundlage dieser Doppelstunde. Zusätzlich werden noch offene Fragen geklärt.

Phase/Zeit	Unterrichtsgeschehen	Methoden/Sozialform	Medien
Erarbeitungsphase Ca. 60 Min.	- L. erteilt den Auftrag, dass jeder S. ein eigenes Fenster auf Pappe konstruieren soll und anschließend einen Scherenschnitt daraus gestaltet	- Einzelarbeit	- Pappe - Schere

Didaktisch-methodischer Kommentar:

Dadurch, dass die Schüler selbst entscheiden können, wie sie ihr Fenster gestalten, wird die Selbstständigkeit gefördert. Der Schwierigkeitsgrad wird somit von jedem Schüler individuell bestimmt (Binnendifferenzierung). Wie es in den Kernlehrplänen gefordert wird, schulen die Schüler ihr geometrisches Verständnis, indem sie Figuren selbst konstruieren. Sich über einen bestimmten Zeitraum kontinuierlich zu konzentrieren ist ein weiteres Ziel.

Phase/Zeit	Unterrichtsgeschehen	Methoden/Sozialform	Medien
Reflexion Ca. 20 Min.	- S. stellen ihre Fensterkonstruktionen bzw. ihren Scherenschnitt vor - S. kleben ihren Scherenschnitt in die Gotikmappe ein, die somit fertig gestellt ist	- Schülervortrag	- Scherenschnitt - Gotikmappe

Didaktisch-methodischer Kommentar:

Die eigenständige Konstruktion stellt einen gelungenen Abschluss dieser Unterrichtsreihe dar. Weiterhin üben die Schüler ihre Werke geeignet zu präsentieren. Die Gotikmappe stellt einen abschließenden Überblick über das Thema dar.

Grobziele:

- Konstruktion eines eigenen Fensters

Feinziele:

- Übung im Zeichnen und somit Feinmotorik gewinnen
- Geometrisches Verständnis fördern
- Selbstständigkeit fördern
- Geometrische und gotische Figuren konstruieren
- Gotische Fenster beschreiben und rekonstruieren

11 Schlussbetrachtung

Durch die vorliegende Examensarbeit bestätigt sich die Ansicht von H. P. Berlage. Es wird deutlich, dass für jegliche Bauelemente die Grundsätze der Geometrie unabdingbar sind. Sie ist für die Architektur und die Lebenswelt unentbehrlich.

Durch die Geometrie wird in der Gotik ein hohes Maß an Ästhetik erreicht, da die Verhältnisse der geometrischen Elemente zueinander meist passend abgestimmt wurden. Das Maßwerk, welches ein Steinprofil aus geometrischen Figuren darstellt und meist aus Kreisbögen gebildet wird, verziert gotische Kirchen und verleiht ihnen somit einen besonderen Charakter. Die Entstehung des Maßwerks in der Gotik ermöglichte erstmals eine höhere Bauweise und somit größere Fenster, die eine stärkere Lichtdurchflutung in den Kirchenräumen zuließen. Dadurch sollte gotischen Gotteshäusern eine absolute göttliche Ordnung übertragen werden.

Auch die Erkenntnis, dass die Geometrie in der Lebensumwelt allgegenwärtig ist, sollte neben der Theorie im Unterricht verstärkt aufgezeigt werden, um die Motivation und die Begeisterung der Schüler für die Geometrie zu wecken und aufrecht zu erhalten. Dieses Anliegen wird in der zuvor beschriebenen Unterrichtsreihe erfüllt, da die erlernte Theorie in der Exkursion anhand der Kirchenfenster des Kölner Doms nachvollzogen werden kann. Unterstützt wird diese Kombination aus Theorie und Praxis durch die Kreation eines eigenen Fensters.

Auf Grund seiner Komplexität konnte hier nur ein Teil des Themas beleuchtet werden, da eine Vielzahl von gotischen Grundelementen existiert, deren genauere Betrachtung den Umfang der Arbeit überschritten hätte. Aus diesen ließen sich wiederum zahlreiche unterschiedliche gotische Fenstertypen konstruieren. Daher beschränkt sich diese Arbeit auf die Fenster des Kölner Doms, die zu dieser Auswahl der gotischen Grundkonstruktionen geführt haben.

12 Literaturverzeichnis

Bücher:

- Behling, Lottlisa: Gestalt und Geschichte des Masswerks. Halle (Saale) 1944.
- Bernhard, Frieder: Technisches Zeichnen für Steinmetze. München 1988.
- Binding, Günther: Was ist Gotik? Eine Analyse der gotischen Kirchen in Frankreich, England und Deutschland 1140-1350. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 2000.
- Binding, Günther: Masswerk. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1989.
- Euclides : Die Elemente/1. Leipzig 1933.
- Falken-Lexikon: das Wissen unserer Zeit. München 1993, 325.
- Hecht, Konrad: Maß und Zahl in der gotischen Baukunst: 3 Teile in 1 Band. Nachdruck der Ausgabe Göttingen 1969-72; 1979.
- Helten, Leonhardt: Mittelalterliches Maßwerk, Entstehung-Syntax-Topologie. Berlin 2006.
- MU Mathematikunterricht. Beiträge zu seiner fachinhaltlichen und fachdidaktischen Gestaltung. Jahrgang 41 · Heft 3 /1995.
- Müller, Rudolf: Gotische Maßwerkfenster. PZ-Information 10/2002.
- Müller, Werner: Dtv-Atlas zur Baukunst/2. München 1987.
- Rode, Herbert: Die Mittelalterlichen Glasmalereien des Kölner Doms. Berlin 1974.
- Ungewitter, Georg Gottlob: Lehrbuch der gothischen Constructionen. 2.Auflage, Leipzig 1885.
- Wolff, Arnold: Chronologie der ersten Bauzeit des Kölner Doms 1248-1277. Köln 1968.

Sekundärliteratur:

- Berlage, H. P.: Grundlagen und Entwicklung der Architektur. Berlin 1908.
- v. Drach, A.: Das Hüttengeheimnis vom gerechten Steinmetzengrund. Marburg 1897.

Internetseiten:

- J:\Internetseiten_Masswerk\SwissEduc - Teaching and Learning - Mathematik Unterrichtsmaterialien - Gotische Fenster.htm (16.01.2008)
- http://de.wikipedia.org/wiki/Ma%C3%9Fwerk (16.01.2008)
- http://www.michael-holzapfel.de/themen/gotik/masswerk.htm (16.01.2008)
- http://www.michael-holzapfel.de/themen/gotik/domR-fr3.htm (16.01.2008)
- http://bildungsstandards.bildung-rp.de/uploads/media/Anregungen_9-10.pdf (26.01.2008)
- http://www.mspengler.de/BAUSTELLE/MATHEMATIK/BeweiseGotik.pdf (16.01.2008)
- http://www.mspengler.de/BAUSTELLE/MATHEMATIK/GOTIK/index.html (16.01.2008)
- http://www.gdv.informatik.uni-frankfurt.de/diplomarbeiten/pdf/Diplomarbeiten_final/Diplomarbeit_ksagheb.pdf (26.01.2008)
- http://www.vsmp.ch/dmk/Gotik/docs/allgemein/glossar1.html (26.01.2008)
- http://www.mathematik.uni-mainz.de/schule/fachdidaktik/martin-mattheis/lehrveranstaltungen/seminar-ws-06-07/GotischesMasswerk.pdf (26.02.2008)
- http://www.unterricht.kunstbrowser.de/downloads/gotikgrundkonstruktionen.pdf (16.01.2008)

- http://www.grin.com/de/preview/48902.html (26.01.2008)
- http://www.vsmp.ch/dmk/Gotik/docs/konstruktionen/konstruktionen.html (26.01.2008)
- http://www.herder-oberschule.de/madincea/skripten/LFB-MINT_2007_(2).pdf (16.04.2008)
- http://www.serrets.de/pdf/projekt_kirchenfenster.pdf (26.01.2008)
- http://kunst.gymszbad.de/architektur/arch-gotik/gotik/rosetten/rosetten.htm (16.01.2008)
- http://www.swisseduc.ch/mathematik/gotische_fenster/ (16.01.2008)
- http://geonext.uni-bayreuth.de/index.php?id=1917 (01.02.2008)

CD:

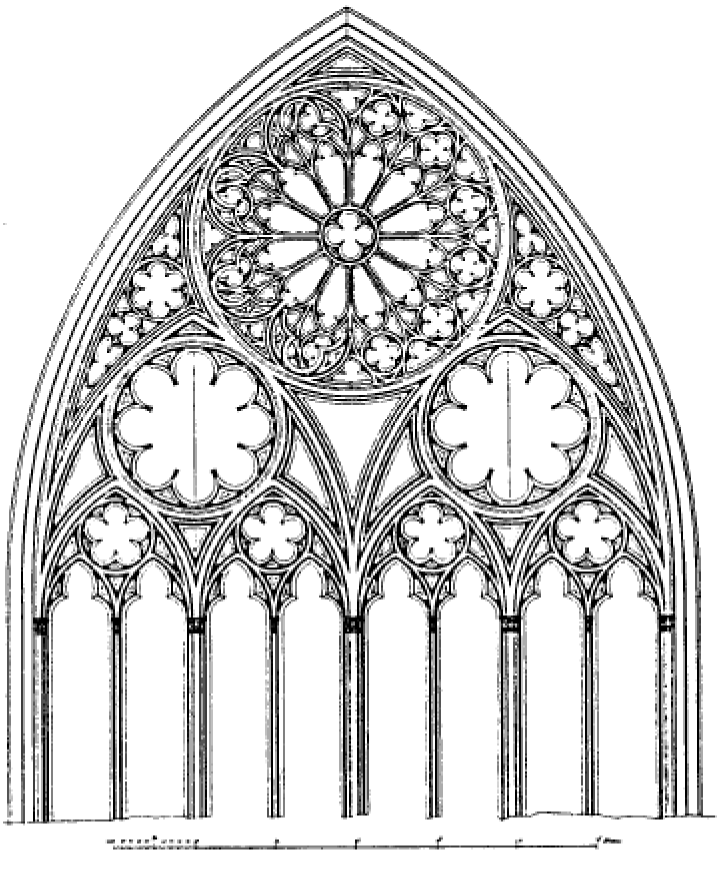
- Kölner Dom: ein virtueller Rundgang durch 2000 Jahre Kunst, Kultur und Geschichte, Köln 1998

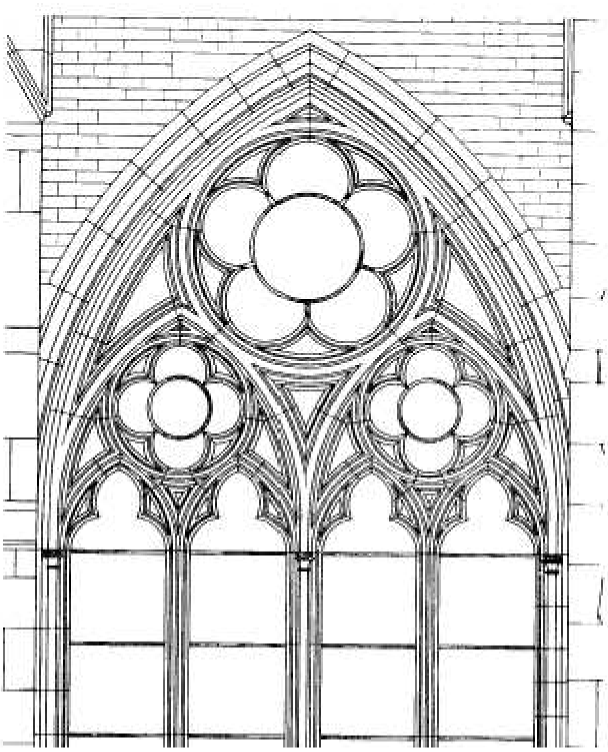
Außerdem bedanken wir uns herzlich bei:

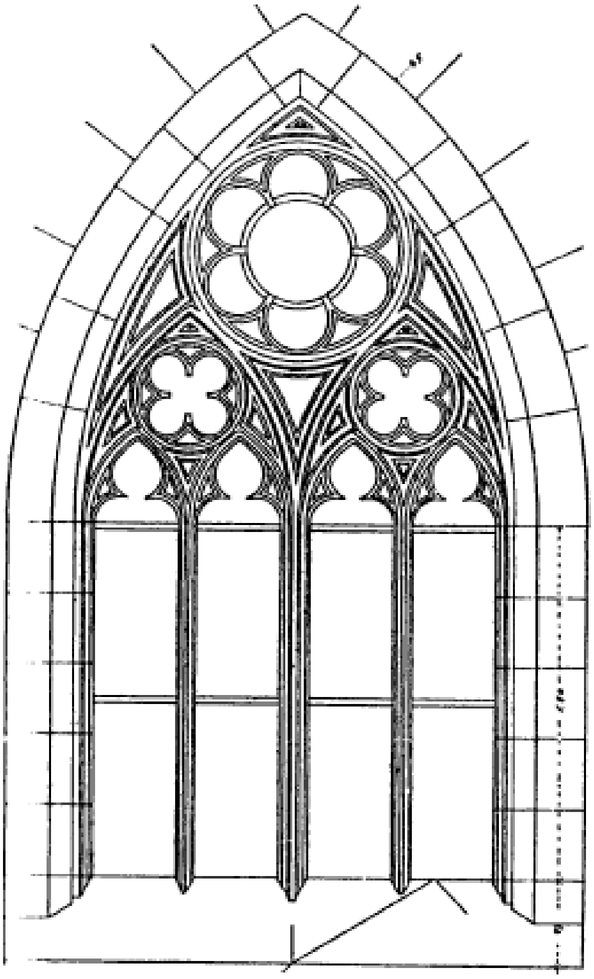
- Stephan Henn für die hervorragenden Photographien der Fenster des Kölner Doms
- dem Personal der Dombauverwaltung, insbesondere bei Frau Dr. Leonie Becks und dem Personal der Dombauhütte

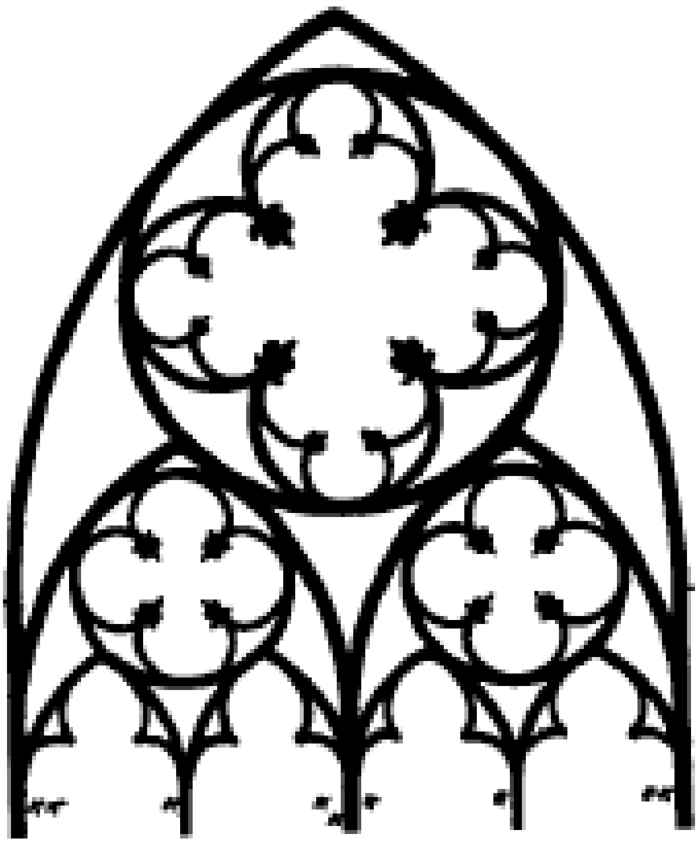
Anhang

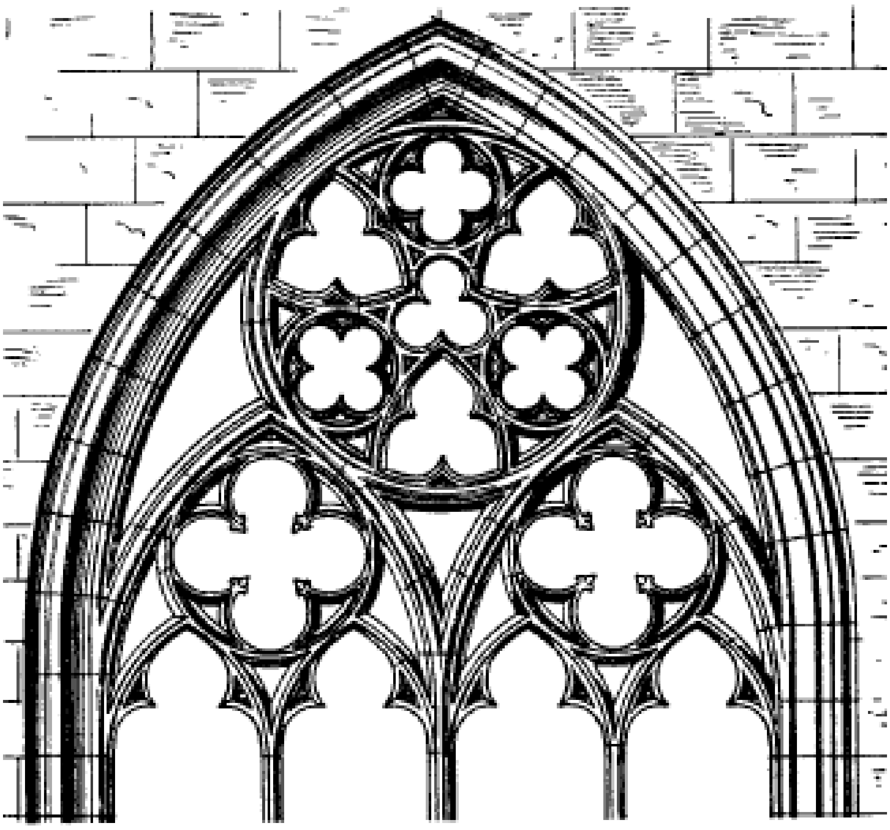
- Bilder 1-14 (Bilder 2-11: Binding 1989;
  Bilder 1 und 12-14: Stephan Henn)
- Arbeitsblätter für die Stationen 1-4

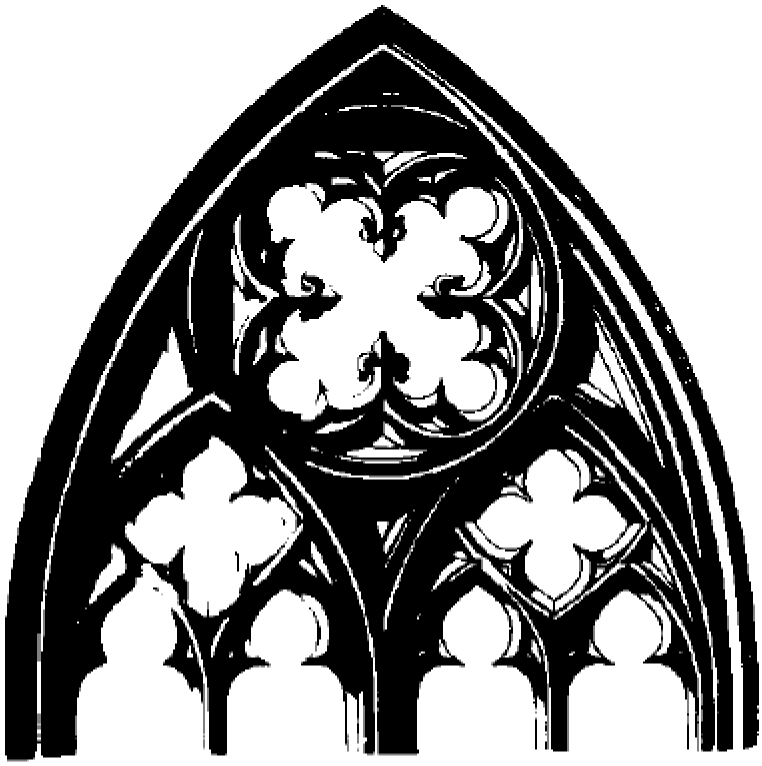


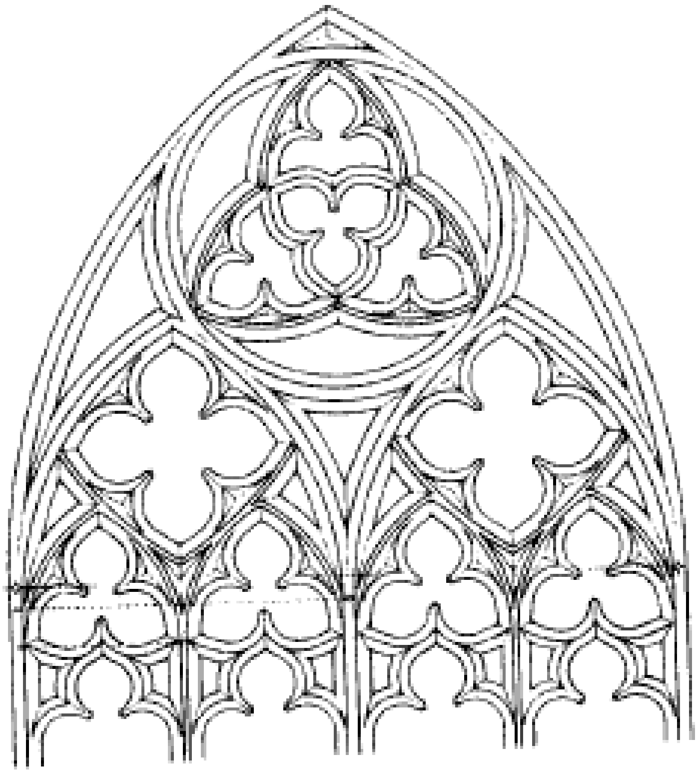


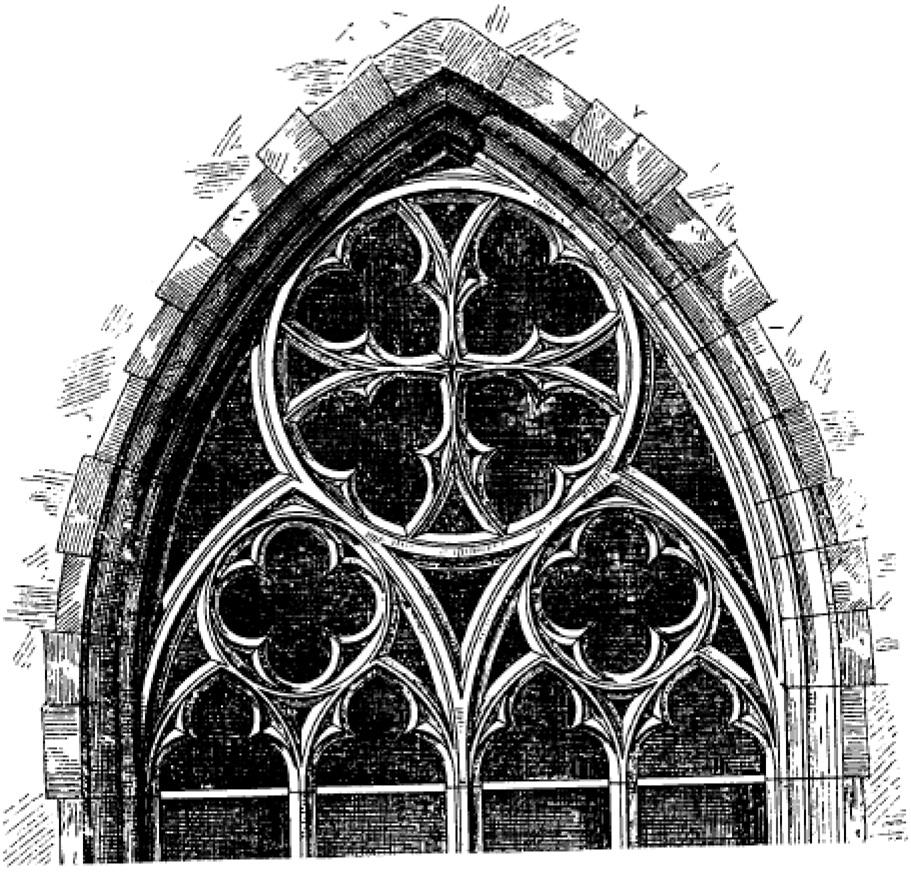


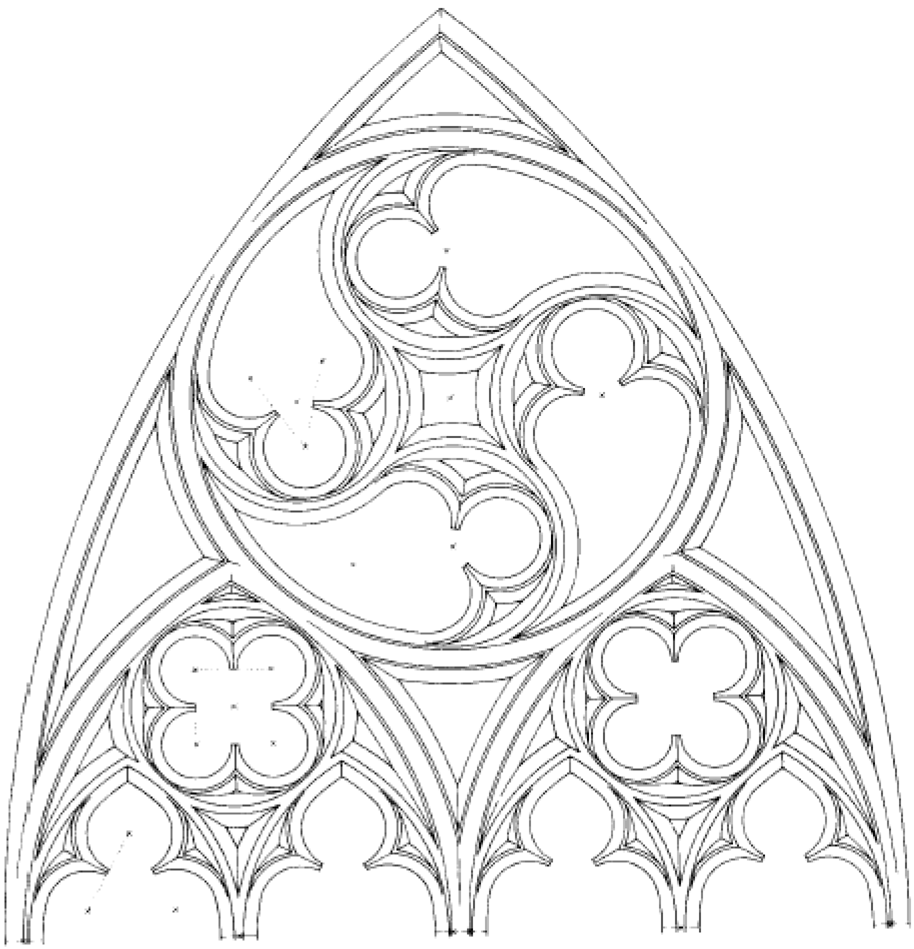


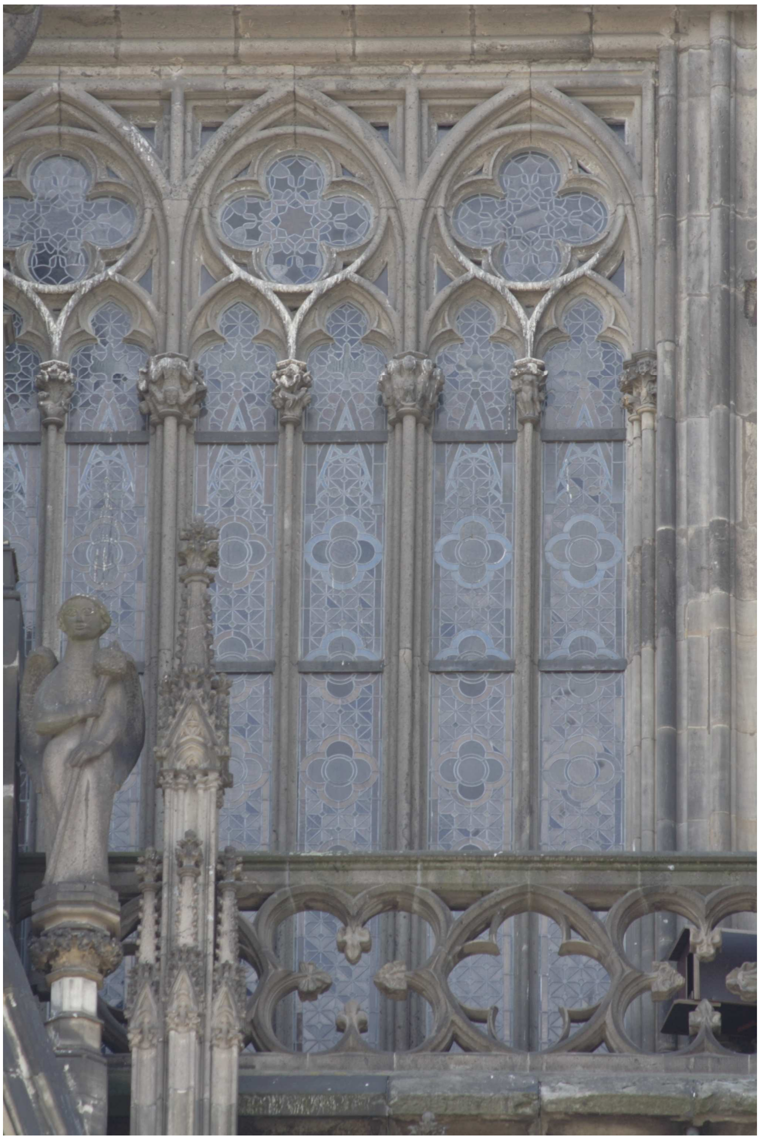






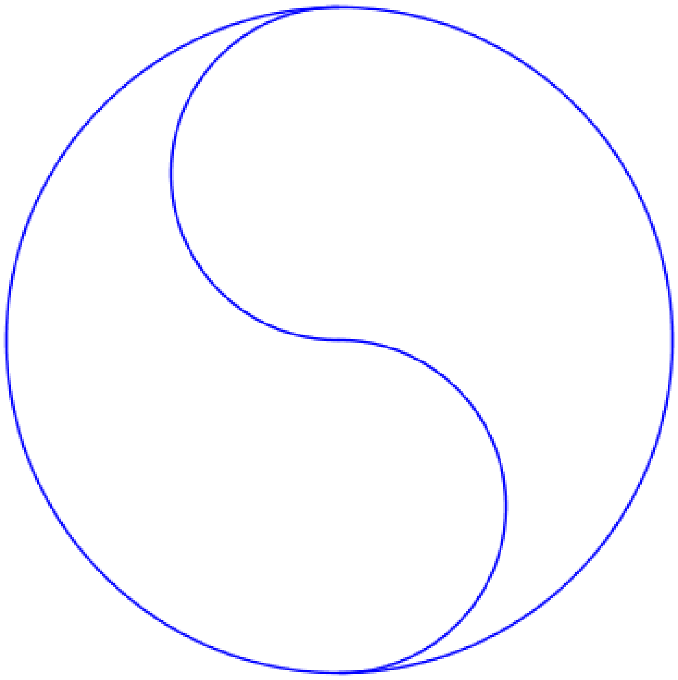




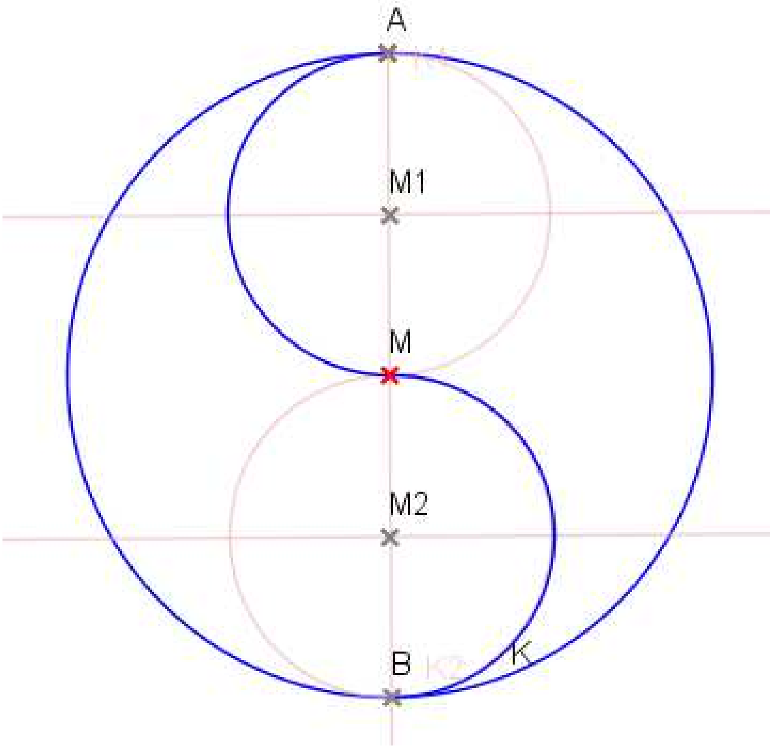


Station 1

Konstruiere einen Zweischneuß in einen beliebigen Kreis!



Hilfestellung:

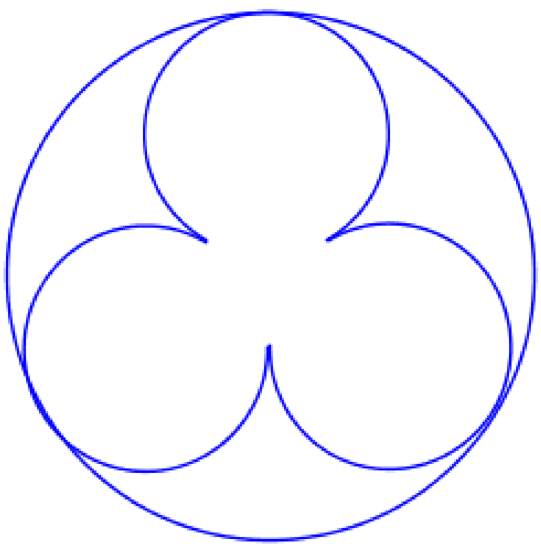


Lösung:

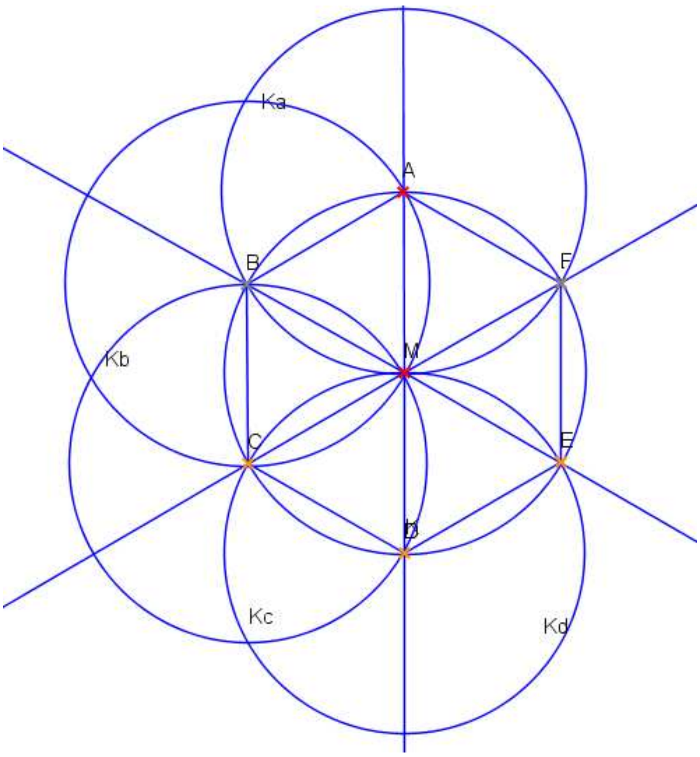
Wähle beliebige Punkte M und A, wobei M der Mittelpunkt des Kreises k mit dem Radius $\overline{MA}$ ist. Verbinde nun A mit M und verlängere die Strecke $\overline{AM}$ über M hinaus. Der Schnittpunkt mit k sei B. Errichte die Mittelsenkrechte auf $\overline{AM}$ als auch auf $\overline{BM}$ und bezeichne die Schnittpunkte mit den Buchstaben M_1 und M_2. Anschließend werde um M_1 durch M der Kreis k_1 und um M_2 durch M der Kreis k_2 gezogen, so dass die Kreise sich in M berühren. Den Kreis k berührt k_1 in dem Punkt A und k_2 in dem Punkt B.
Verdeutlicht man nun die Halbreise AM und MB, so dass sie in einer S-Form erscheinen, ist der Zweischneuß konstruiert.

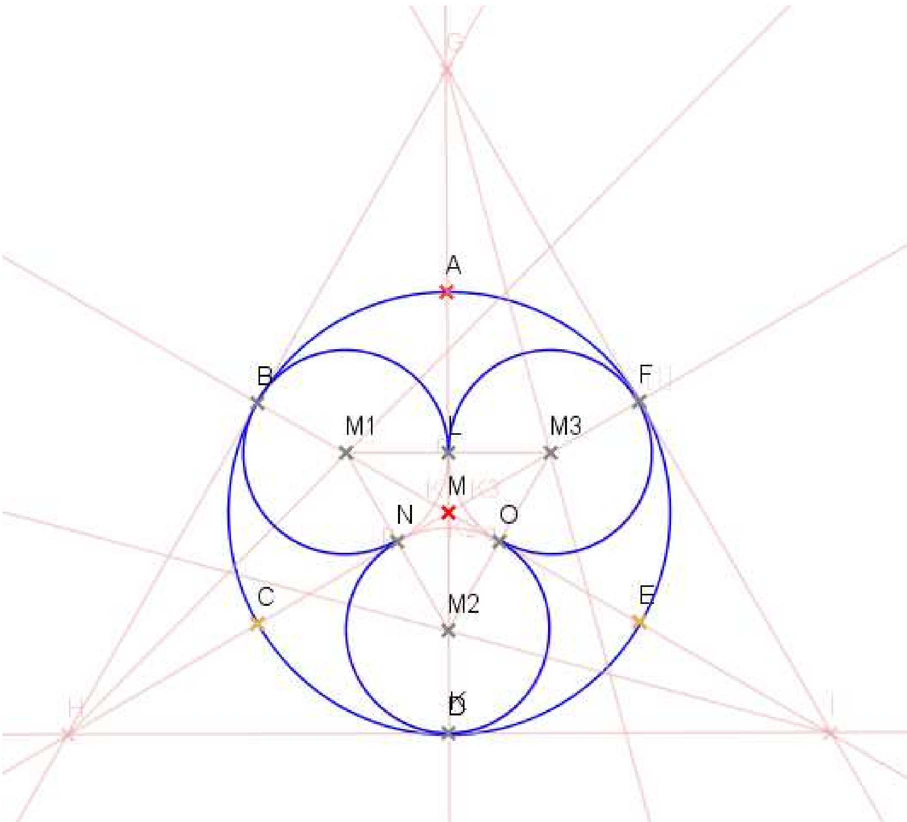
Station 2

Konstruiere die Grundform eines Dreipasses in einen beliebigen Kreis!



Hilfestellung:





Lösung:

Zunächst werden zwei Punkte M und A gewählt. Nun wird ein Kreis k um M mit dem Radius $\overline{MA}$ gezogen. Anschließend ziehe man um A einen Kreis k_A durch M. Die beiden Schnittpunkte mit dem Kreis k nenne man B und F. Daraufhin zeichnet man einen Kreis k_B um B mit dem Radius $\overline{MA}$ und erhält mit dem Kreis k den Schnittpunkt C. Wiederum wird ein Kreis k_C mit selbigem Radius um C gezogen. Hieraus resultiert der Punkt D auf k. Den Schnittpunkt E erhält man durch das Ziehen eines Kreises k_D mit dem Radius $\overline{MA}$ um den zuvor erhaltenen Punkt D. Zuletzt verbindet man die Punkte A bis F zu einem Sechseck.

Im Anschluss daran verbinde man den Mittelpunkt M mit den Eckpunkten A, B, C, D, E und F des Sechsecks und verlängere die erhaltenen Strecken über die Sechseckspunkte hinaus. Die Halbgeraden $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MD}$ und $\overrightarrow{MF}$ stellen gleichzeitig die Winkelhalbierenden der Winkel $\angle$AMC, $\angle$CME und $\angle$EMA dar, da nach Konstruktion des regelmäßigen Sechsecks die Winkel bei M alle kongruent sind. Errichte in den drei Punkten B, D und F die Senkrechte auf der jeweiligen Winkelhalbierenden bzw. Halbgeraden, die zugleich die Tangenten des Kreises k in den jeweiligen Punkten sind. Die Tangenten bzw. Senkrechten schneiden die Halbgeraden $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MC}$ und $\overrightarrow{ME}$ in den drei Punkten G, H und I.

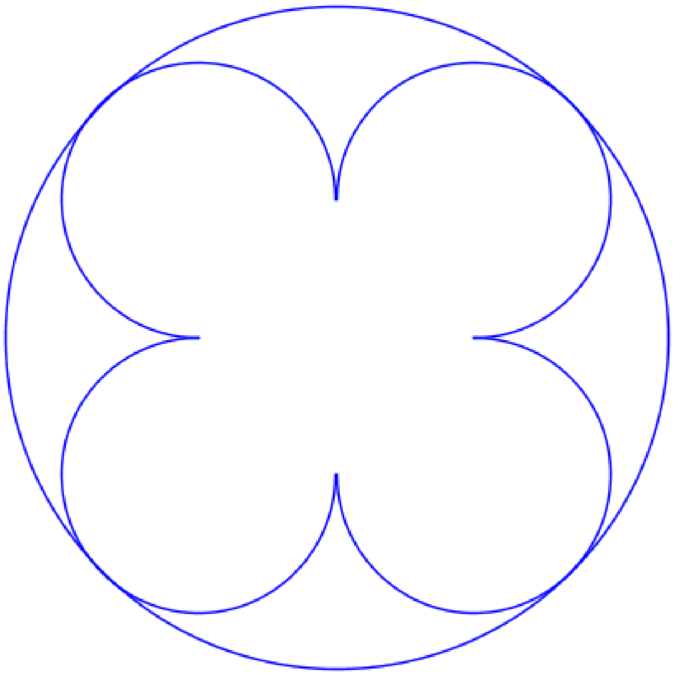
Somit erhält man die gleichschenkligen Dreiecke GMH, HMI und IMG, in die man nun die entsprechenden Inkreise k_1, k_2 und k_3 mit den Mittelpunkten M_1, M_2 und M_3 einschreibt. Diese Inkreise berühren sich gegenseitig und haben jeweils einen dritten Berührpunkt mit dem Ausgangskreis k. k_1 berührt k_2 im Punkt N und k_3 im Punkt L, k_2

berührt k_3 im Punkt O. k berührt k_1 im Punkt B, k_2 im Punkt D und k_3 im Punkt F.

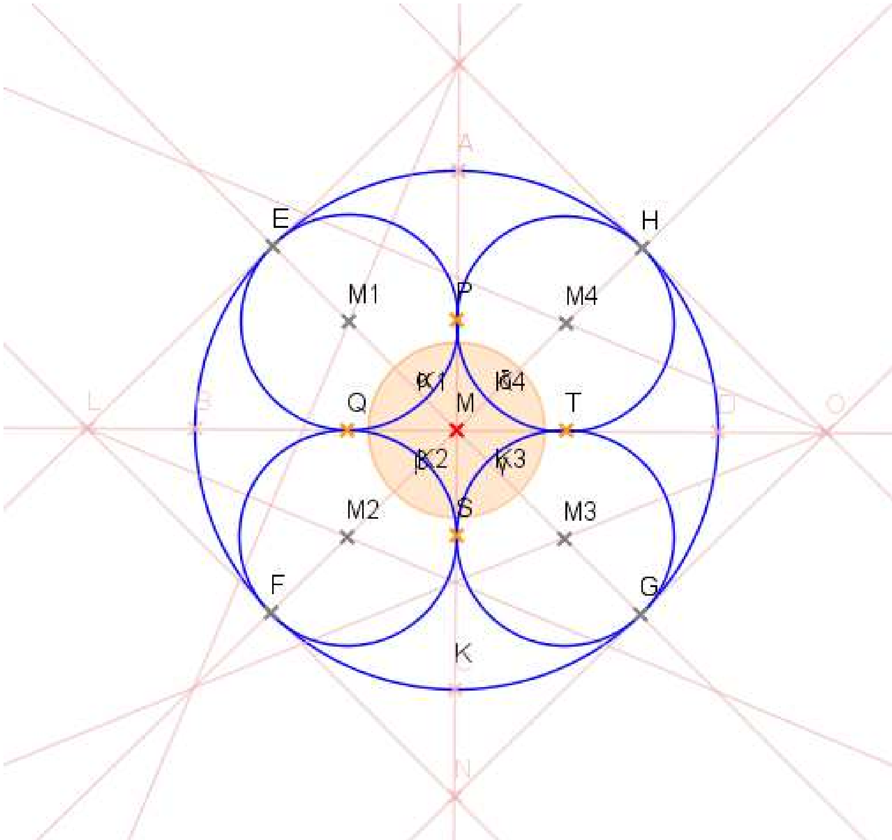
Lässt man nun die Hilfslinien beiseite und beachtet nur die Kreisbögen NL, LO und ON, findet man den gesuchten Dreipass vor.

Station 3:

Konstruiere die Grundform eines Vierpasses in einen beliebigen Kreis!



Hilfestellung:



Lösung:

Zu Beginn wählt man zwei Punkte M und A. Dann wird ein Kreis k um M durch A gezeichnet. Im Anschluss daran verbindet man diese beiden Punkte zu der Strecke $\overline{MA}$ und verlängert sie über A und M hinaus. Der daraus resultierende zweite Schnittpunkt der Geraden mit dem Kreis sei C. Bilde die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AC}$. Bezeichne die zwei entstandenen Schnittpunkte mit k B und D.

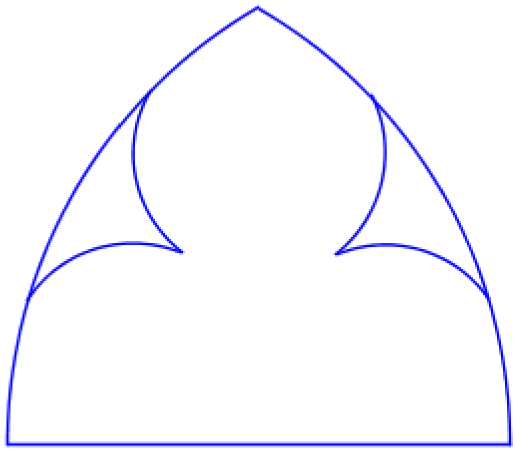
Konstruiere nun die Winkelhalbierenden der vier entstandenen rechten Winkel bei M, die den Kreis k in den verschiedenen Punkten E, F, G und H schneiden. In diesen Punkten lassen sich nun die Senkrechten auf den jeweiligen Winkelhalbierenden errichten, die in diesem Falle natürlich auch Tangenten an k darstellen. Diese schneiden sich in den vier Punkten I, L, N und O und bilden zusammen mit den Halbgeraden $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ und $\overrightarrow{MD}$ die Dreiecke IML, LMN, NMO und OMI. In jedem der entstandenen Dreiecke wird nun eine weitere Winkelhalbierende benötigt, um die Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 und M_4 der Inkreise der Dreiecke, welche gleichzeitig die Kreise k_1, k_2, k_3 und k_4 des Vierpasses sind, zu bestimmen.

k_1 berührt k_2 im Punkt Q und k_4 im Punkt P. k_2 und k_3 haben S als gemeinsamen Berührpunkt, k_3 und k_4 den Punkt T. k berührt die Inkreise in den Punkten E, F, G und H.

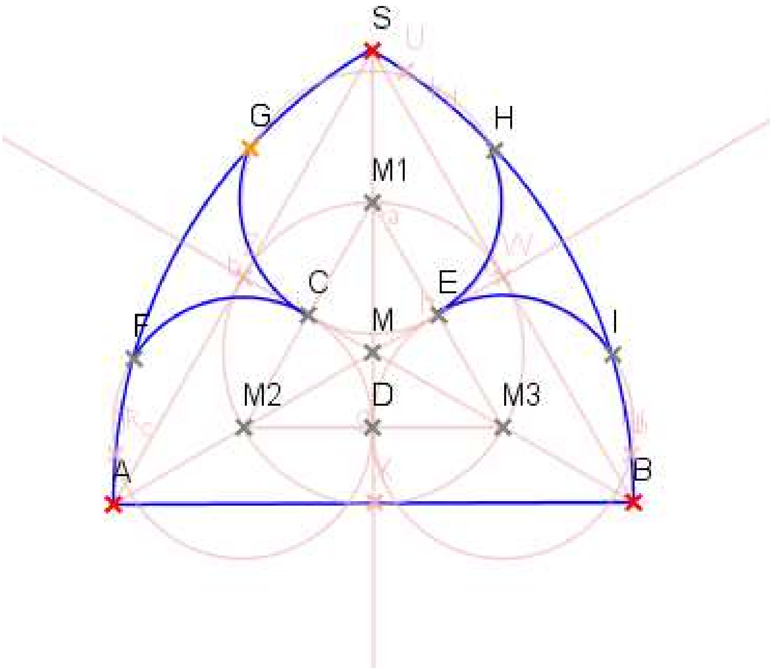
Hebt man nur die Dreiviertelkreisbögen PQ, QS, ST und TP hervor, dann ist der Vierpass, wie er in den gotischen Fenstern zu sehen ist, konstruiert.

Station 4:

Konstruiere ein Kleeblatt in einen Spitzbogen!



Hilfestellung:



Lösung:

Bilde zunächst den einfachen Spitzbogen ABS mit dem eingeschriebenen gleichseitigen Dreieck ABS. Daraufhin konstruiere mit Hilfe der Winkelhalbierenden den Inkreis k mit dem Mittelpunkt M des Dreiecks ABS. Benenne die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden mit dem Inkreis M_1, M_2 und M_3. Anschließend verbindet man diese Punkte zu dem gleichseitigen Dreieck $M_1 M_2 M_3$, dessen Seiten die Winkelhalbierenden in den Punkten C, D und E schneiden. Zuletzt ziehe man den Kreis k_1 um M_1 durch C bzw. E, den Kreis k_2 um M_2 durch C bzw. D und den Kreis k_3 um M_3 durch D bzw. E. Der Kreis k_1 schneidet den Spitzbogen in den Punkten G und H, der Kreis k_2 im Punkt F und der Kreis k_3 im Punkt I.

Verdeutlicht man nun die Kreisbögen FC, CG, HE und EI, so ist das Kleeblatt im Spitzbogen konstruiert.

Erklärung

„Ich versichere, dass ich die schriftliche Hausarbeit - einschließlich beigefügter Zeichnungen, Kartenskizzen und Darstellungen – selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel genutzt habe. Alle Stellen der Arbeit, die dem Wortlaut oder dem Sinne nach anderen Werken entnommen sind, habe ich in jedem Fall unter Angabe der Quelle deutlich als Entlehnung kenntlich gemacht.“

Datum Unterschrift

„Ich versichere, dass ich die schriftliche Hausarbeit - einschließlich beigefügter Zeichnungen, Kartenskizzen und Darstellungen – selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel genutzt habe. Alle Stellen der Arbeit, die dem Wortlaut oder dem Sinne nach anderen Werken entnommen sind, habe ich in jedem Fall unter Angabe der Quelle deutlich als Entlehnung kenntlich gemacht.“

Datum Unterschrift