Universidad Nacional
de Mar del Plata

Departamento de Ingeniería Eléctrica

Área Electrotecnia

FACULTAD
DE INGENIERIA

Electrotecnia

(para la Carrera Ingeniería Mecánica)

La Teoría general de los Cuadripolos o Redes de dos puertos

Profesor Adjunto: Ingeniero Electricista y Laboral Gustavo L. Ferro
Mail: gferro@fi.mdp.edu.ar
EDICION 2016

INDICE

Capítulo 9

La Teoría general de los Cuadripolos o Redes de dos puertos.

9.1. Introducción

9.2. Definición de cuadripolo

9.3. Configuraciones típicas

9.4. Clasificación de los cuadripolos

9.5. Tipos de problemas

9.6. Ecuaciones y parámetros característicos:

9.6.1. Parámetros de admitancia en cortocircuito
9.6.2. Parámetros de impedancia en circuito abierto
9.6.3. Parámetros de Transmisión

9.7. Asociación de cuadripolos

9.8. Ejemplos de aplicación

- **BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA:**

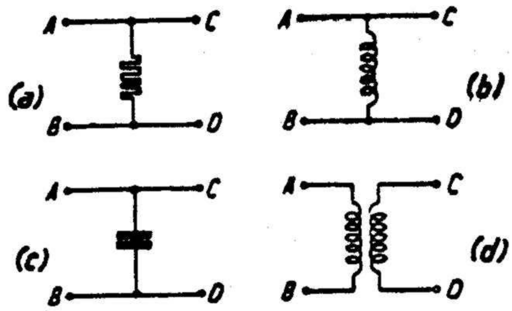
- Ingeniería de energía eléctrica. Libro 1. Circuitos.
- Autor: Marcelo Sobrevila.
- Capítulo 1.5

- Circuitos Eléctricos y Magnéticos
- Autor: Marcelo Sobrevila.
- Capítulo 7

9.1. Introducción

En gran parte de los circuitos técnicos, el generador y el consumo (carga) se encuentran vinculados por medio de un **“circuito de acoplamiento”** que normalmente tiene **cuatro terminales** y se llama **cuadripolo.**

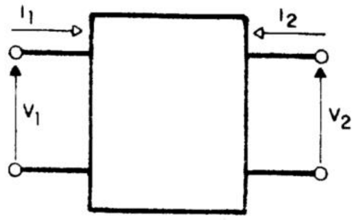
La figura nos sirve para apreciar como está ubicado un cuadripolo en una red.
La relación entre la tensión de entrada U_1 y la salida U_2 se llama **relación de transformación o también función de transferencia:** $\mathbf{k} = \dfrac{\mathbf{U_1}}{\mathbf{U_2}}$



En la figura podemos ver cuatro tipos de circuitos de acoplamiento a saber:
a) Acoplamiento a resistencia.
b) Acoplamiento a inductancia.
c) Acoplamiento a capacidad.
d) Acoplamiento a inducción, también denominado transformador.

9.2. Definición de cuadripolo

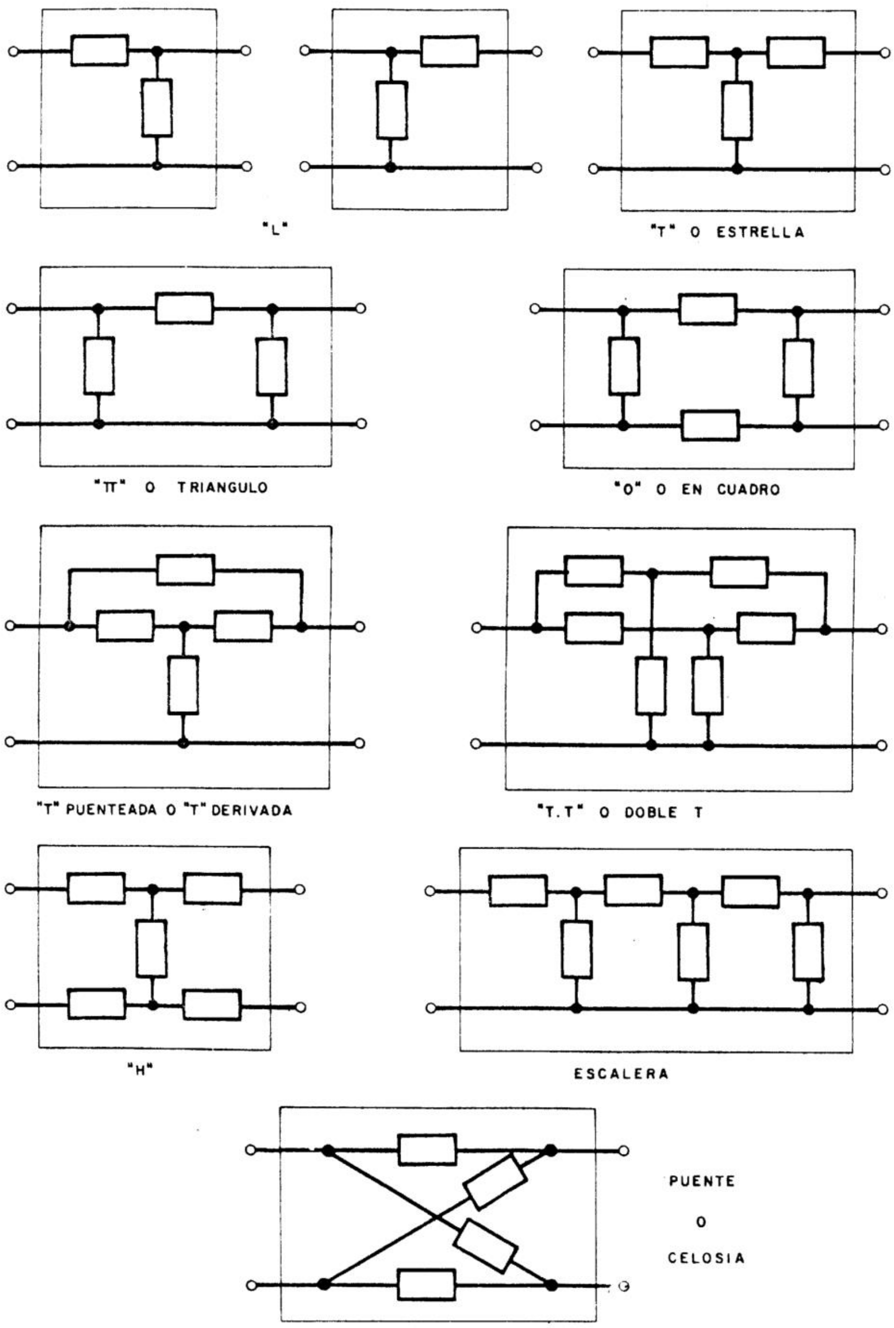
Un cuadripolo es una configuración arbitraria de elementos de circuito, que tiene dos pares de terminales para su conexión con el resto del esquema eléctrico, debiendo cumplirse como condición adicional que los terminales de entrada estén vinculados con los de salida sólo a través del interior del cuadripolo.



En la figura que sigue se representa su símbolo y los correspondientes sentidos de referencia para las variables eléctricas.
En virtud de la definición es evidente que las corrientes de cada par de terminales son iguales y opuestas.
Debido a que no se imponen restricciones sobre el tipo de circuito incluido dentro del cuadripolo, la amplitud de la teoría en cuestión queda en evidencia, por lo cual los conceptos podrán aplicarse, por ejemplo, a circuitos amplificadores, a máquinas eléctricas, a sistemas de transmisión de energía, etc.
La representación de un cuadripolo está dada por un rectángulo y cuatro terminales: dos de entrada (una tensión U_1 y una corriente I_1) y dos de salida (una tensión U_2 y una corriente I_2)

9.3. Configuraciones típicas

Si bien la definición de cuadripolo no impone restricción sobre la complejidad de la geometría circuital interna, ciertos tipos de configuraciones se presentan frecuentemente en la práctica, por lo cual se les ha dado un nombre, y que se presentan en la figura que sigue.



9.4. Clasificación de los cuadripolos

Los cuadripolos pueden clasificarse según distintos criterios, a saber:

Según el tipo de elementos que incluyan:

- **Activos:** son aquellos que incluyen fuentes de energía (generadores) como los estudiados hasta aquí.
- **Pasivos:** son aquellos que no incluyen fuentes de energía.

Según las características de los elementos incluidos:

- **Lineales:** resultan aquellos en los que todos sus elementos son lineales.
- **Alineales:** resultan aquellos que tienen uno o más elementos alineales.

Es de hacer notar que el análisis a realizar en este trabajo se referirá exclusivamente a los **cuadripolos lineales y pasivos.**

Según el sentido de transferencia de la energía:

- **Bilaterales:** son los que permiten la transferencia de energía en ambos sentidos con igual facilidad.
- **Unilaterales:** son los que permiten la transferencia de energía con mayor facilidad en un sentido que en el opuesto.

Según en tipo de configuración:

- **Balanceados:** son aquéllos que poseen un eje de simetría longitudinal. Por ejemplo, en la configuración “H” mostrada en la figura anterior, si las impedancias en serie superiores o inferiores son iguales, el cuadripolo se encuentra eléctricamente balanceado a tierra. En otras palabras, pueden permutarse entre sí, por un lado los terminales de entrada y por el otro, los de salida, y dicho cambio no será advertido desde los terminales mencionados.
- **Simétricos:** son aquéllos que poseen un eje de simetría transversal. Por ejemplo, si en la configuración “T” o estrella, posee los brazos horizontales idénticos, es simétrica.
- **Asimétricos**: son aquellos que no poseen ningún eje de simetría. Por ejemplo la configuración “T” con brazos desiguales.

9.5. Tipos de problemas.

Los problemas que más comúnmente se presentan en los cuadripolos pueden agruparse en tres clasificaciones mayores:

a) **El problema de transferencia:** trata de la determinación de la tensión o la corriente en los terminales de salida en función de la tensión o la corriente en los terminales de entrada. Este problema que aparece corrientemente en Electrónica, presenta dos casos particulares de gran importancia y es cuando los terminales de salida del cuadripolo se encuentran a circuito abierto o bien cortocircuitados. Como se verá, este problema puede ser eficazmente resuelto en base a ciertos parámetros del cuadripolo, denominados de transferencia, y que precisamente se definen para las condiciones antes especificadas.

b) **El problema de transmisión:** trata de la determinación de la potencia en un par de terminales en función de la potencia en el otro par. Este problema se presenta comúnmente en las líneas de transmisión de energía, y un juego particular de parámetros llamados de transmisión permite resolver el problema en forma sencilla, como se verá más adelante.

c) **El problema de inserción:** Insertando un cuadripolo (por ejemplo un filtro) en un circuito o sistema, se requiere estudiar el efecto (ya sea de corriente, tensión o potencia) que produce dicha inserción.

9.6. Ecuaciones y parámetros característicos.

De acuerdo a lo establecido al dar la definición de cuadripolo resulta que solo dos de las cuatro variables son independientes y la especificación de cualquier par de ellas determina el par restante.
La dependencia de un par determinado con respecto al otro par se describe de varias maneras, depende de las variables independientes seleccionadas.

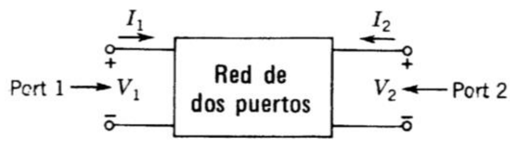
Las combinaciones entre V_1 e I_1 y V_2 e I_2 serán (6) en total, de las cuales nos detendremos en (3) a saber:

PARAMETROS	VARIABLES		ECUACION
	Independientes	**Dependientes**	
Impedancia [Z] (o de circuito abierto)	V_1 ; V_2	I_1 ; I_2	$V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2$ $V_1 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2$
Admitancia [Y] (o de cortocircuito)	I_1 ; I_2	V_1 ; V_2	$I_1 = Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2$ $I_2 = Y_{21} V_2 + Y_{22} V_2$
Transmisión [T] (o constantes generales de circuito)	V_1 ; I_1	V_2 ; I_2	$V_1 = A V_2 - B I_2$ $I_1 = C V_2 - D I_2$

Las otras tres combinaciones de parámetros dan origen a los denominados parámetros de **transmisión inversa, híbridos e híbridos inversos.**
Los parámetros equivalentes de dos puertas de una red se pueden calcular con mediciones de corriente y tensión en los terminales de entrada y salida **sin conocer realmente los elementos específicos que constituyen la red.** Consideremos las distintas familias de parámetros:

9.6.1. Parámetros de admitancia en cortocircuito.

Consideremos el esquema general de una red de dos puertos, la cual se supone que no contiene fuentes dependientes.



Una red de dos puertos con sentidos de referencia estándar para los voltajes y las corrientes que se indican.

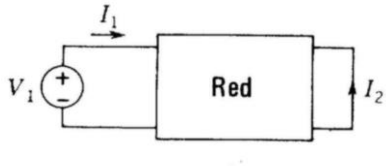
Establezcamos dos ecuaciones que relacionen las corrientes de entrada y salida en función de las tensiones de entrada y salida, es decir:

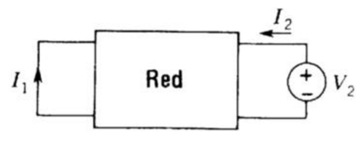
$$\mathbf{I_1 = y_{11} V_1 + y_{12} V_2} \qquad \mathbf{(I)}$$
$$\mathbf{I_2 = y_{21} V_1 + y_{22} V_2}$$

Los coeficientes son dimensionalmente admitancias, se puede observar que si cualquiera de V_1 ó V_2 es cero, los cuatro parámetros se pueden definir en función de un voltaje y una corriente por tanto:

$$y_{11} = \frac{I_1}{V_1}\bigg|_{V_2=0} \qquad y_{21} = \frac{I_2}{V_1}\bigg|_{V_2=0} \qquad \mathbf{(II)}$$
$$y_{12} = \frac{I_1}{V_2}\bigg|_{V_1=0} \qquad y_{22} = \frac{I_2}{V_2}\bigg|_{V_1=0}$$

La condición V_1= 0 ó V_2= 0 se logra poniendo en cortocircuito el puerto 1 o el puerto 2. Por tanto, los cálculos o las mediciones de los cuatro parámetros se efectúan utilizando una de las conexiones que se muestra en la figura que sigue.

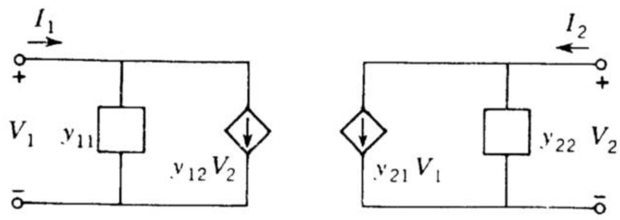




Puesto que se especifica una condición de cortocircuito para cada una de las funciones de las ecuaciones (II), los parámetros se conocen como parámetros de **"admitancia en cortocircuito".**

Si la red que se estudia es recíproca entonces se cumple que: $\mathbf{y_{12} = y_{21}}$ y se observa que tres parámetros son suficientes para especificar la relación entre I_1, I_2 , V_1 y V_2.

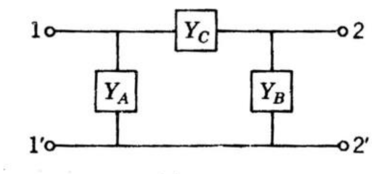
Podemos establecer partiendo de las ecuaciones características de los parámetros Y (sistema I) el denominado **equivalente de dos generadores** que se muestra en la figura que sigue.



Red equivalente de dos generadores.

- **Ejemplo 1.**

Veamos la red de la figura, que corresponde a un cuadripolo Π, en la que Y_A , Y_B y Y_C son las admitancias, ella nos permitirá definir los parámetros Y.
Si aplicamos el método de los nodos resulta:



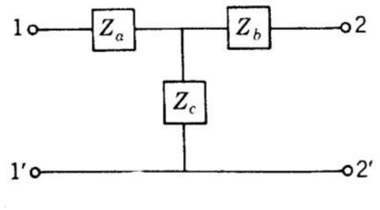
$$\mathbf{I_1 = (Y_A + Y_C)\,V_1 \;-\; Y_C\,V_2} \qquad \mathbf{(III)}$$
$$\mathbf{I_2 = -\,Y_C\,V_1 \;+\; (Y_B + Y_C)\,V_2}$$

Si efectuados una comparación del sistema de ecuaciones (I) y el sistema (III) resulta que:

$$\mathbf{y_{11} = Y_A + Y_C \;;\quad y_{21} = -\,Y_C \quad;\quad y_{12} = -\,Y_C \quad;\quad y_{22} = Y_B + Y_C}$$

9.6.2. Parámetros de impedancia en circuito abierto.

Consideremos la red de la figura que corresponde a un cuadripolo T y planteemos el método de las mallas:



$$\mathbf{V_1 = (Z_a + Z_c)\,I_1 \;+ Z_C\,I_2} \qquad \mathbf{(IV)}$$
$$\mathbf{V_2 = Z_C\,I_1 \;+\; (Z_b + Z_C)\,I_2}$$

Al igual que como se estableció al considerar los parámetros Y, definimos los **parámetros impedancia "Z"** estableciendo la relación entre las tensiones de entrada y salida en función de las corrientes de entrada y salida, es decir:

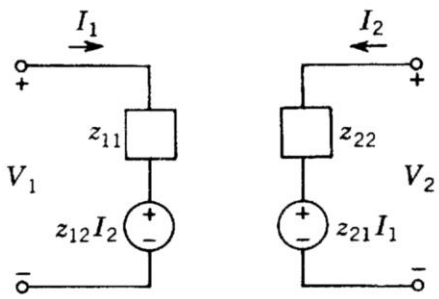
$$\mathbf{V_1 = z_{11}\,I_1 \;+\; z_{12}\,I_2} \qquad \mathbf{(V)}$$
$$\mathbf{V_2 = z_{21}\,I_1 \;+\; z_{22}\,I_2}$$

Los coeficientes son dimensionalmente impedancias, se puede observar que si cualquiera de I_1 ó I_2 es cero, los cuatro parámetros se pueden definir en función de un voltaje y una corriente por tanto:

$$\mathbf{z_{11} = \frac{V_1}{I_1}\Big|_{I_2=0} \qquad z_{21} = \frac{V_2}{I_1}\Big|_{I_2=0}} \qquad \mathbf{(VI)}$$
$$\mathbf{z_{12} = \frac{V_1}{I_2}\Big|_{I_1=0} \qquad z_{22} = \frac{V_2}{I_2}\Big|_{I_1=0}}$$

La condición $I_1=0$ ó $I_2=0$ se logra poniendo en circuito abierto el puerto 1 o el puerto 2. Por tanto, los cálculos o las mediciones de los cuatro parámetros se efectúan utilizando una de las conexiones que se muestra en la figura que sigue.

Podemos establecer partiendo de las ecuaciones características de los parámetros Z (sistema V) el denominado **equivalente de dos generadores** que se muestra en la figura que sigue.



Red equivalente de dos generadores.

9.6.3. Parámetros de Transmisión.

Los parámetros de transmisión sirven para relacionar el voltaje y la corriente de un puerto con el voltaje y la corriente del otro.
En forma de ecuación, esto se expresa como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{V_1} &= \mathbf{A\,V_2 - B\,I_2} \qquad \mathbf{(VII)} \\ \mathbf{I_1} &= \mathbf{C\,V_2 - D\,I_2} \end{aligned}$$

donde A, B , C y D son los **parámetros de transmisión.**
Estos parámetros se conocen con varios nombres, entre los que se encuentran los de cadena y por supuesto los parámetros ABCD.
Su primera aplicación se hizo en el análisis de líneas de transmisión de potencia, en donde se conocen también como parámetros de circuito general.
El signo negativo del segundo término de las ecuaciones (VII) se origina de dos convenciones diferentes para asignar un sentido positivo a I_2. En los problemas de transmisión de potencia se acostumbra a asignar a la corriente un sentido de referencia opuesto al que se muestra en la figura cuando se estableció la definición de cuadripolo. Por tanto, los signos menos de las ecuaciones del sistema (VII) son para I_2 y no para B y D.
A continuación se da la interpretación de A, B, C y D en función de las relaciones de circuito abierto y cortocircuito.
A partir del sistema de ecuaciones (VII) se pueden hacer las siguientes identificaciones:

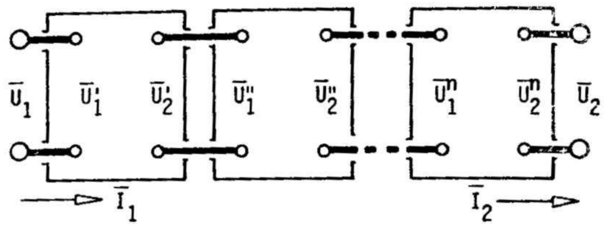
$$\mathbf{A} = \left.\frac{\mathbf{V_1}}{\mathbf{V_2}}\right|_{\mathbf{I_2=0}} \quad \mathbf{B} = \left.\frac{\mathbf{V_1}}{\mathbf{I_2}}\right|_{\mathbf{V_2=0}} \qquad \mathbf{(VIII)}$$

$$\mathbf{C} = \left.\frac{\mathbf{I_1}}{\mathbf{V_2}}\right|_{\mathbf{I_2=0}} \quad \mathbf{D} = \left.\frac{\mathbf{I_1}}{\mathbf{I_2}}\right|_{\mathbf{V_2=0}}$$

Los parámetros de transmisión son útiles para describir redes de dos puertos que estén conectadas en cascada, como veremos más adelante.

9.7. Asociación de cuadripolos

Los cuadripolos se pueden asociar entre si de diversas formas, una de las más frecuentes es la ilustrada en la figura que se denomina **“asociación en cadena o asociación en cascada”**



Observando la figura deducimos fácilmente lo que sigue:

$$\mathbf{U_1 = U_1' \quad y \quad I_1 = I_1'}$$
$$\mathbf{U_2' = U_2'' \quad y \quad I_2' = I_2''}$$

$$\mathbf{U_2'' = U_2 \quad y \quad I_2'' = I_2}$$

Esta serie de igualdades expresa que las condiciones de salida de un cuadripolo son las condiciones de entrada del siguiente. Las ecuaciones que representan los parámetros de transmisión son:

$$\mathbf{V_1 = A\, V_2 - B\, I_2}$$
$$\mathbf{I_1 = C\, V_2 - D\, I_2}$$

Expresando estas ecuaciones en forma matricial:

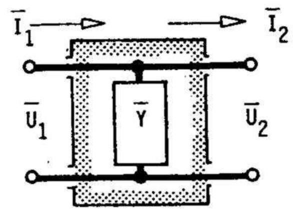
$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \|E\| = \|T\| \, \|S\|$$

Esta última expresión deja establecido que las **condiciones de entrada** se obtienen multiplicando las **condiciones de salida** por la **matriz característica del cuadripolo**. Por lo tanto para la asociación en cascada que estamos considerando podemos escribir:

$$\|\mathbf{T}\| = \|\mathbf{T_1}\| \cdot \|\mathbf{T_2}\| \ldots \|\mathbf{T_n}\|$$

Esta ecuación nos dice que la matriz característica de un cuadripolo formado por la asociación en cadena de varios cuadripolos parciales es el producto de las matrices de cada uno de ellos. Apliquemos este concepto a la asociación de cuadripolos simples que son de aplicación en la resolución de circuitos complejos.

<u>**Ejemplo 2**</u>.- Consideremos el caso de una impedancia en paralelo y escribamos las ecuaciones de entrada y de salida en la forma que sigue:



$$\mathbf{U_1 = A\, U_2 - B\, I_2}$$
$$\mathbf{I_1 = C\, U_2 - D\, I_2}$$

Para determinar el parámetro A, tenemos que utilizar la primera ecuación y haciendo $I_2 = 0$, resulta: $A = U_1 / U_2 = 1$, dado que $U_1 = U_2$.

Para determinar el parámetro B, tenemos que utilizar la primer ecuación y haciendo $U_2 = 0$, resulta: $B = U_1 / I_2 = 0$, dado que al hacer $U_2 = 0$ resulta $U_1 = 0$.

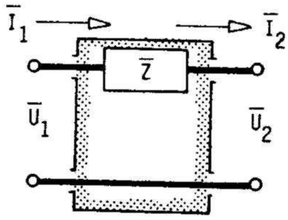
Para determinar el parámetro C, tenemos que utilizar la segunda ecuación y haciendo $I_2 = 0$, resulta: $C = I_1 / U_2 = Y$, dado que $I_1 = Y\ U_2$.

Para determinar el parámetro D, tenemos que utilizar la primer ecuación y haciendo $U_2 = 0$, resulta: $D = I_1 / I_2 = 1$, dado que al hacer $U_2 = 0$ resulta $I_1 = I_2$.

Resumiendo, resulta:

$$\mathbf{U_1 = 1\ U_2 + 0\ I_2}$$

$$\mathbf{I_1 = Y\ U_2 + 1\ I_2} \qquad \textbf{donde:} \quad \|\mathbf{T}\| = \begin{Vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Y} & \mathbf{1} \end{Vmatrix}$$



Ejemplo 3.- Consideremos el caso de una impedancia en serie y escribamos las ecuaciones de entrada y de salida en la forma que sigue:

$$\mathbf{U_1 = A\ U_2 - B\ I_2}$$

$$\mathbf{I_1 = C\ U_2 - D\ I_2}$$

Para determinar el parámetro A, tenemos que utilizar la primera ecuación y haciendo $I_2 = 0$, resulta: $A = U_1 / U_2 = 1$, dado que $U_1 = U_2$ al no tener caída en Z.

Para determinar el parámetro B, tenemos que utilizar la primer ecuación y haciendo $U_2 = 0$, resulta: $B = U_1/I_2 = Z$, dado que al hacer $U_2 = 0$ resulta $U_1 = I_1\ Z = I_2\ Z$

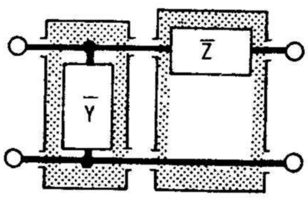
Para determinar el parámetro C, tenemos que utilizar la segunda ecuación y haciendo $I_2 = 0$, resulta: $C = I_1 / U_2 = 0$, dado que $I_1 = I_2 = 0$

Para determinar el parámetro D, tenemos que utilizar la primer ecuación y haciendo $U_2 = 0$, resulta: $D = I_1 / I_2 = 1$, dado que al hacer $U_2 = 0$ resulta $I_1 = I_2$.
Resumiendo, resulta:

$$\mathbf{U_1 = 1\ U_2 + Z\ I_2}$$

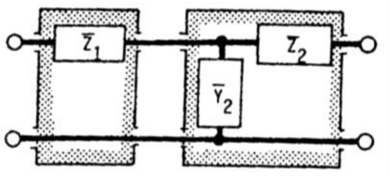
$$\mathbf{I_1 = 0\ U_2 + 1\ I_2} \qquad \textbf{donde:} \quad \|\mathbf{T}\| = \begin{Vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{Z} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{Vmatrix}$$

Ejemplo 4.- Si combinamos los resultados obtenidos en los ejemplos 2 y 3 podemos obtener la matriz característica correspondiente al cuadripolo de la figura anterior.



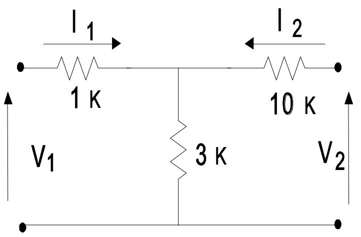
$$\begin{Vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Y} & \mathbf{1} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{Z} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{Z} \\ \mathbf{Y} & \mathbf{1 + Y\,Z} \end{Vmatrix}$$

Ejemplo 5.- Si combinamos los resultados obtenidos en los ejemplos 3 y 4 podemos obtener la matriz característica correspondiente al cuadripolo de la figura anterior.



$$\begin{Vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{Z_1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{Z} \\ \mathbf{Y} & \mathbf{1 + Y\,Z_2} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathbf{1 + Z_1\,Y} & \mathbf{Z_2 + Z_1\,Y\,Z_2 + Z_1} \\ \mathbf{Y} & \mathbf{1 + Y\,Z_2} \end{Vmatrix}$$

9.8. Ejemplos de aplicación



9.8.1. Ejemplo 1.- Determine los parámetros Z equivalentes para la red de dos puertas de la figura.

$$V_1 = (1000 + 3000) * I_1 + 3000 * I_2 = 4000 * I_1 + 3000 * I_2 = Z_{11} * I_1 + Z_{12} * I_2$$

$$V_2 = 3000 * I_1 + (10000 + 3000) * I_2 = 3000 * I_1 + 13000 * I_2 = Z_{21} * I_1 + Z_{22} * I_2$$

$$Z_{11} = 4000\Omega \quad ; \quad Z_{12} = 3000\Omega \quad ; \quad Z_{21} = 3000\Omega \quad ; \quad Z_{22} = 13000\Omega$$

9.8.2. Ejemplo 2.- Las siguientes corrientes y tensiones de circuito abierto se determinaron experimentalmente para una red desconocida de dos puertas. Las mediciones fueron hechas a 300 Hertz.

$I_1 = 10 \angle 0º$	**$I_2 = 4 \angle 0º$**
$V_1 = 208.1 \angle 54.8º$	**$V_1 = 53.24 \angle -133º$**
$V_2 = 133.1 \angle -133º$	**$V_2 = 79.8 \angle 25.54º$**
$I_2 = 0$	**$I_1 = 0$**

Determine:

a) Los parámetros equivalentes de la red de dos puertas.

b) La corriente de salida si se conectan a un generador de **20 V, 300 Hz** en la puerta de entrada y una resistencia de **10 Ω** en la puerta de salida.

a) Determinamos los parámetros impedancia, conforme los datos del problema:

$$V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2$$
$$V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2$$

$$para \quad I_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{208,1 \angle 54,8°}{10 \angle 0°} = 20,81 \angle 54,8° = 12 + j\,17$$

$$Z_{21} = \frac{133,1 \angle -133°}{10 \angle 0°} = 13,31 \angle -133° = -9,1 - j\,9,73$$

$$para \quad I_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_{12} = \frac{V_1}{I_2} = \frac{53,24 \angle -133°}{4 \angle 0°} = 13,31 \angle -133° = -9,1 - j\,9,73$$

$$Z_{22} = \frac{V_2}{I_2} = \frac{79,8 \angle 25,54°}{4 \angle 0°} = 19,95 \angle 25,54° = 18 + j\,8,6$$

Conectamos la fuente, la carga y planteamos dos mallas

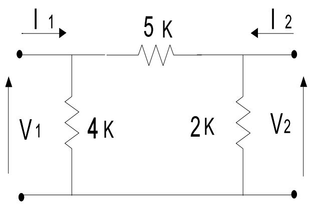
$$20 - Z_{12} * I_2 = I_1 * Z_{11} \Rightarrow I_1 = \frac{20 - Z_{12} * I_2}{Z_{11}}$$

$$I_2 * (Z_{22} + 10) = -Z_{21} * I_1 = -Z_{21}\frac{20 - Z_{12} * I_2}{Z_{11}} \Rightarrow I_2 * \left(Z_{22} + 10 - \frac{Z_{21} * Z_{12}}{Z_{11}} \right) = -20 * \frac{Z_{21}}{Z_{11}}$$

$$I_2 = \frac{-20 * \dfrac{13,31\angle -133°}{20,81\angle 54,8°}}{18 + j\,8,6 + 10 - \dfrac{13,31\angle -133° * 13,31\angle -133°}{20,81\angle 54,8°}} = 0,59\angle -16,3°$$

$$I_{SALIDA} = -I_2 = 0.59\angle 163.7^o$$

9.8.3. Ejemplo 3.- Determine los parámetros Y equivalentes para la red de dos puertas de la figura.



$$I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \quad ; \quad I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2$$

$$Y_A = \frac{1}{4000\Omega} = 250\mu S \quad ; \quad Y_B = \frac{1}{5000\Omega} = 200\mu S \quad ; \quad Y_C = \frac{1}{2000\Omega} = 500\mu S$$

$$Y_{11} = Y_A + Y_B = 250\mu S + 200\mu S = 450\mu S \quad ; \quad Y_{12} = -Y_B = -200\mu S$$

$$Y_{21} = -Y_B = -200\mu S \quad ; \quad Y_{22} = Y_C + Y_B = 500\mu S + 200\mu S = 700\,\mu S$$

9.8.4. Ejemplo 4.-Los parámetros “Y” de cierta red de dos puertas son: **Y_{11} = 14 mS, Y_{22} = 12 mS, Y_{12} = Y_{21} = - 10 mS.** Suponiendo que una fuente de 50 V de c.c. está conectada en la puerta de entrada y una resistencia de **100 Ω** está conectada en la puerta de salida. Determine:

a) La corriente y la potencia demandadas por la carga;

b) La corriente de la batería.

a) Planteamos dos nodos, uno a la entrada y otro a la salida

$$Y_{CARGA} = \frac{1}{100\Omega} = 10\,mS \quad ; \quad V_1 = 50\,Volt$$

$$\textit{La ecuacion del nodo de salida es:} \quad -Y_{21}V_1 = (Y_{22} + Y_{CARGA})V_2 \quad ; \quad -(-10)V_1 = (12 + 10)V_2$$

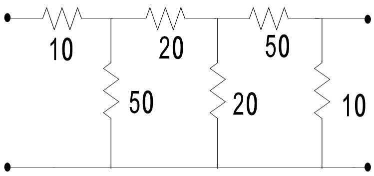
$$\textit{sustituyendo y despejando:} \quad 10 * 50 = 22 * V_2 \Rightarrow V_2 = 22,73 Volt$$

$$I_{CARGA} = V_2 Y_{CARGA} = 22,73 * 10 * 10^{-3} \Rightarrow I_{CARGA} = 227,3 mA$$

$$P_{CARGA} = (I_{CARGA})^2 * R_{CARGA} = (227,3 10^{-3})^2 .100 = 5,17\,watt$$

$$I_1 = Y_{11} * V_1 + Y_{12} * V_2 = 14 * 10^{-3} * 50 + (-10 * 10^{-3}) * 22,73 = 472,7\,mA$$

9.8.5. Ejemplo 5.- Para la asociación de cuadripolos de la figura, hallar los parámetros de transmisión ABCD considerando configuración en cascada.



Para el cuadripolo T de la izquierda determinamos los parámetros A_1; B_1; C_1 y D_1.

$$A_1 = \frac{V_1}{V_{2\ (I_2=0)}} \quad ; \quad V_1 = I_1 * 60 \;\Rightarrow\; I_1 = \frac{V_1}{60} \qquad V_2 = I_1 * 50 = \frac{V_1}{60} * 50 = \frac{5}{6} * V_1$$

$$A_1 = \frac{V_1}{\frac{5 * V_1}{6}} = \frac{6}{5}$$

$$B_1 = \frac{V_1}{-I_{2\ (V_2=0)}} \quad ; \quad R_{EQUIV} = 10 + \frac{50 * 20}{50 + 20} = 10 + \frac{100}{7} = \frac{170}{7} \quad ; \quad I_1 = \frac{V_1}{R_{EQUIV}} = \frac{7}{170} * V_1$$

$$V_2 = I_1 * \frac{100}{7} = \frac{7}{170} * V_1 * \frac{100}{7} = \frac{100}{170} * V_1 \quad ; \quad -I_2 = \frac{V_2}{20} = \frac{1}{20} * \frac{100}{170} * V_1 = \frac{V_1}{34}$$

$$B_1 = \frac{V_1}{\frac{V_1}{34}} = 34$$

$$C_1 = \frac{I_1}{V_{2\ (I_2=0)}} \quad ; \quad V_2 = I_1 * 50$$

$$C_1 = \frac{I_1}{I_1 * 50} = \frac{1}{50}$$

$$D_1 = \frac{I_1}{-I_{2\ (V_2=0)}} \quad ; \quad I_1 = \frac{V_1}{R_{EQUIV}} = \frac{7}{240} * V_1 \;\Rightarrow\; V_2 = I_1 * \frac{100}{7} \;\Rightarrow$$

$$-I_2 = \frac{V_2}{20} = \frac{I_1 * 100}{7 * 20} = \frac{5}{7} * I_1$$

$$D_1 = \frac{I_1}{\frac{5}{7} * I_1} = \frac{7}{5}$$

Para el cuadripolo pi de la derecha repetimos los cálculos:

$$A_2 = \frac{V_1}{V_{2\ (I_2=0)}} \quad ; \quad I' = \frac{V_1}{60} \quad ; \quad V_2 = 10 * I' = 10 * \frac{V_1}{60} = \frac{V_1}{6}$$

$$A_2 = \frac{V_1}{\frac{V_1}{6}} = 6$$

$$B_2 = \frac{V_1}{-I_{2\ (V_2=0)}} \quad ; \quad -I_2 = \frac{V_1}{50}$$

$$B_2 = \frac{V_1}{\frac{V_1}{50}} = 50$$

$$C_2 = \frac{I_1}{V_2 \ (I_2(0))} \quad ; \quad V_1 = I_1 * R_{EQUIV} = I_1 * \frac{60*20}{60+20} = I_1 * 15 \quad ; \quad I' = \frac{V_1}{60} = \frac{I_1 * 15}{60} = \frac{I_1}{4}$$

$$V_2 = I' * 10 = \frac{I_1}{4} * 10$$

$$C_2 = \frac{I_1}{\frac{I_1}{4} * 10} = \frac{4}{10}$$

$$D_2 = \frac{I_1}{-I_2 \ (V_2 = 0)} \quad ; \quad V_1 = I_1 * R_{EQUIV} = I_1 * \frac{50*20}{50+20} = I_1 * \frac{100}{7}$$

$$-I_2 = \frac{V_1}{50} = \frac{I_1 * \frac{100}{7}}{50} = \frac{2}{7} * I_1$$

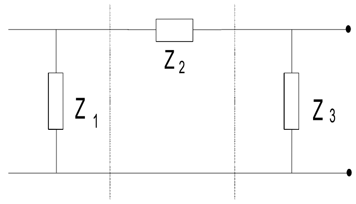
$$D_2 = \frac{I_1}{\frac{2}{7} * I_1} = \frac{7}{2}$$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{6}{5} & 34 \\ \frac{1}{50} & \frac{7}{5} \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} \frac{36}{6} & \frac{250}{50} \\ \frac{4}{10} & \frac{7}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{208}{10} & 179 \\ \frac{17}{25} & \frac{59}{10} \end{vmatrix}$$

$$A = \frac{208}{10} \qquad B = 179 \qquad C = \frac{17}{25} \qquad D = \frac{59}{10}$$

9.8.6. Ejemplo 6.-

Encontrar la matriz de transmisión del cuadripolo de la figura, por asociación de los mismos.



Para el cuadripolo izquierdo

$$A_1 = \frac{V_1}{V_2 \ (I_2 = 0)} \quad ; \quad V_1 = V_2 \qquad A_1 = \frac{V_1}{V_1} = 1$$

$$B_1 = \frac{V_1}{-I_2 \ (V_2 = 0)} \quad ; \quad si \ \ V_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_1 = 0$$

$$B_1 = 0$$

$$C_1 = \frac{I_1}{V_2 \ (I_2 = 0)} \quad ; \quad V_2 = V_1 = I_1 * Z_1$$

$$C_1 = \frac{I_1}{I_1 * Z_1} = \frac{1}{Z_1}$$

$$D_1 = \frac{I_1}{-I_2}_{(V_2=0)} \qquad ; \qquad -I_2 = I_1$$

$$D_1 = \frac{I_1}{I_1} = 1$$

Para el cuadripolo central

$$A_2 = \frac{V_1}{V_2}_{(I_2=0)} \qquad ; \qquad V_1 = V_2$$

$$A_2 = \frac{V_1}{V_1} = 1$$

$$B_2 = \frac{V_1}{-I_2}_{(V_2=0)} \qquad ; \qquad -I_2 = \frac{V_1}{Z_2}$$

$$B_2 = \frac{V_1}{\frac{V_1}{Z_2}} = Z_2$$

$$C_2 = \frac{I_1}{V_2}_{(I_2(0))} \qquad ; \qquad I_2 = I_1 = 0$$

$$C_2 = \frac{0}{V_2} = 0$$

$$D_2 = \frac{I_1}{-I_2}_{(V_2=0)} \qquad ; \qquad -I_2 = I_1$$

$$D_2 = \frac{I_1}{I_1} = 1$$

Para el cuadripolo derecho:

$$A_3 = \frac{V_1}{V_2}_{(I_2=0)} \qquad ; \qquad V_1 = V_2 \qquad A_3 = \frac{V_1}{V_1} = 1$$

$$B_3 = \frac{V_1}{-I_2}_{(V_2=0)} \qquad ; \qquad si \;\; V_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad V_1 = 0$$

$$B_3 = 0$$

$$C_3 = \frac{I_1}{V_2}_{(I_2=0)} \qquad ; \qquad V_2 = V_1 = I_1 * Z_3$$

$$C_3 = \frac{I_1}{I_1 * Z_3} = \frac{1}{Z_3}$$

$$D_3 = \frac{I_1}{-I_2}\Big|_{(V_2=0)} \qquad ; \qquad -I_2 = I_1$$

$$D_3 = \frac{I_1}{I_1} = 1$$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ C_3 & D_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z_1 & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 1 & Z_2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{Z_2 + Z_3}{Z_3} & Z_2 \\ \dfrac{Z_1 + Z_2 + Z_3}{Z_1 * Z_3} & \dfrac{Z_1 + Z_2}{Z_1} \end{vmatrix}$$

$$A = \frac{Z_2 + Z_3}{Z_3} \qquad B = Z_2 \qquad C = \frac{Z_1 + Z_2 + Z_3}{Z_1 * Z_3} \qquad D = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1}$$

Glf/2015