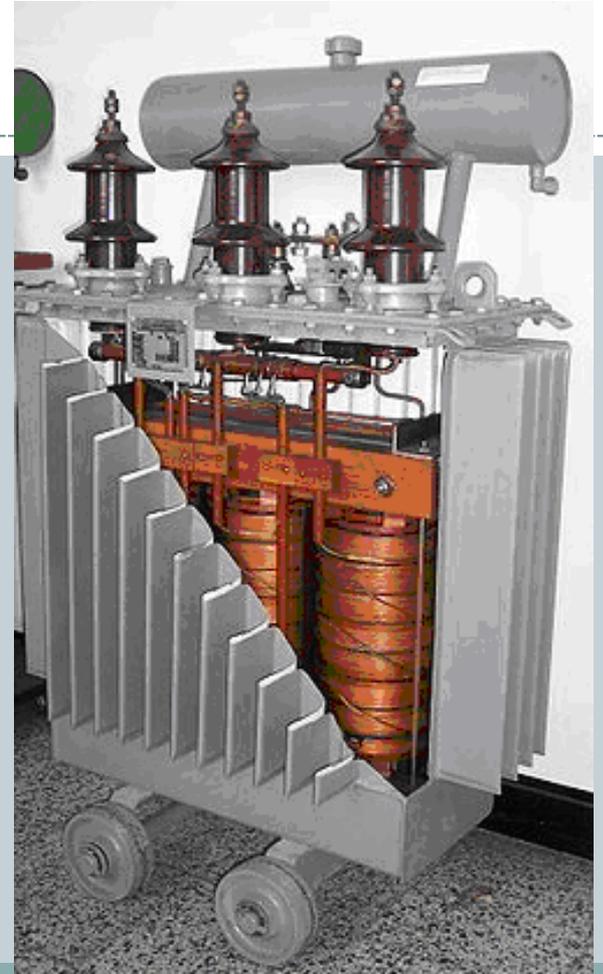


# Electrotecnia (IM)

Prof. Ing. G. Belliski



- **CIRCUITOS TRIFÁSICOS**
- **GENERACIÓN TRIFÁSICA**
- **SISTEMAS BALANCEADOS**
- **SISTEMAS DESBALANCEADOS**



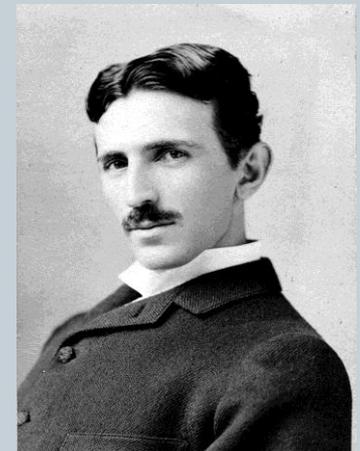
# Sistema Trifásico



- Patentado por John Hopkinson en 1882 (quien también demostró que era posible poner en paralelo dos alternadores y propuso la ley que hoy lleva su nombre sobre un equivalente de la ley de Ohm en términos magnéticos)
- Tesla, durante la “guerra de las corrientes” (en particular, en 1891), demostró que ciertos sistemas polifásicos tenían la posibilidad de no requerir un cable de retorno, como el que se necesitaba para transmitir la corriente monofásica o la continua. El sistema polifásico de menor cantidad de fases que posee esa cualidad es, justamente, el trifásico.
- Los sistemas trifásicos permiten :
  - Usar menor sección de cable para transportar la misma potencia que un sistema monofásico
  - Usar menor estructura de soporte y ampliar la distancia entre apoyos del cable (consecuencia del anterior)
  - Hacer más fácil el funcionamiento de motores de mejor rendimiento, en especial en potencias grandes



DR. JOHN HOPKINSON

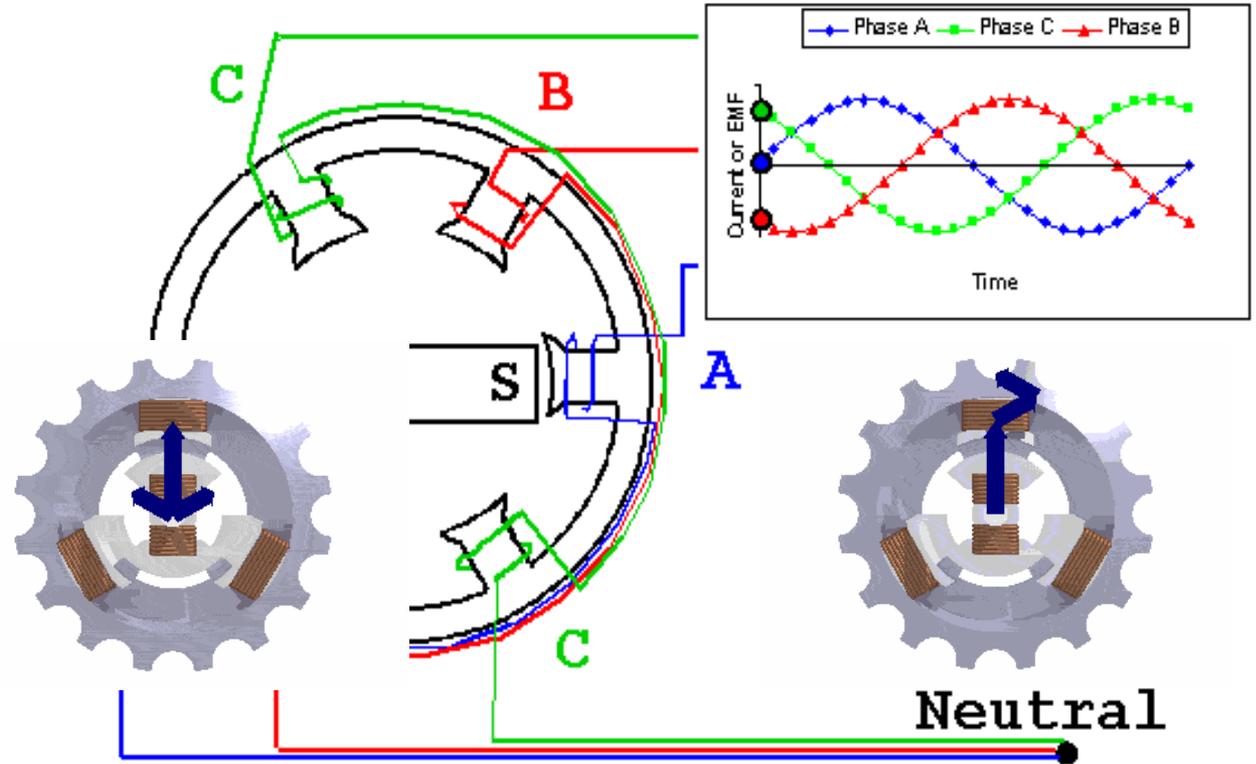


# El generador trifásico



## El Generador

## Ondas de Salida

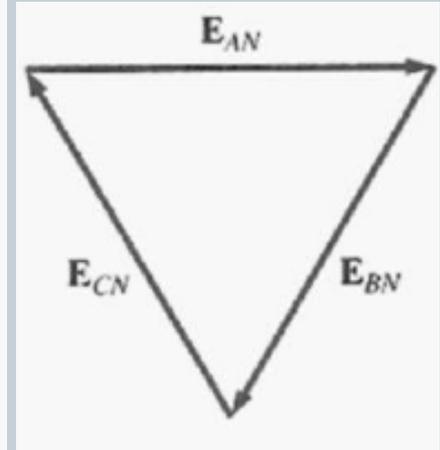
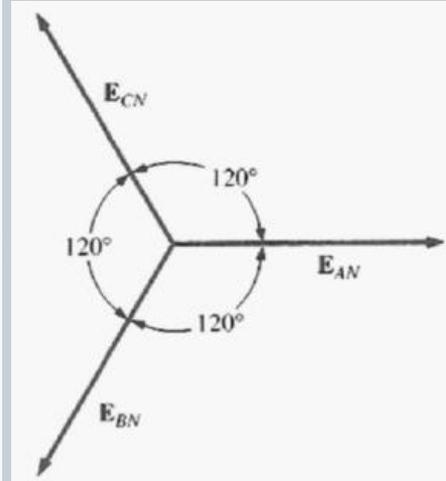
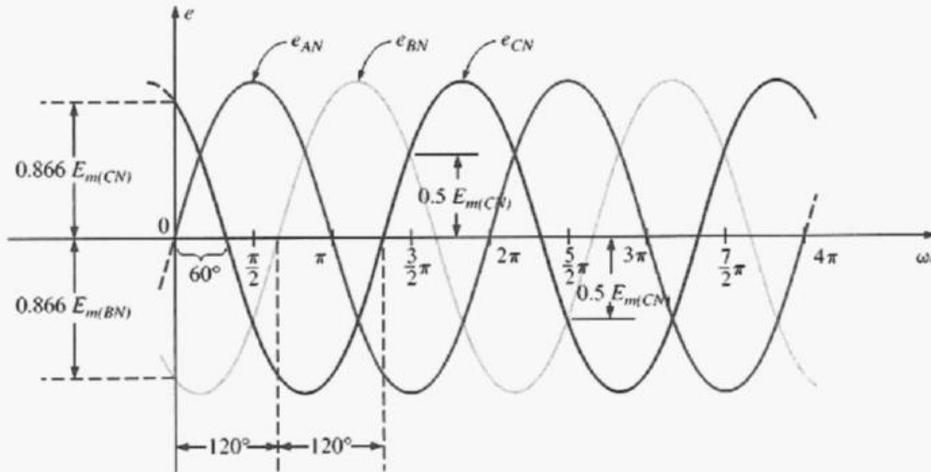


T. Davies 2002

# El generador en detalle



## Detalle de las tensiones:



$$e_{AN} = E_{m(AN)} \text{ sen } \omega t$$

$$e_{BN} = E_{m(BN)} \text{ sen } (\omega t - 120^\circ)$$

$$e_{CN} = E_{m(CN)} \text{ sen } (\omega t - 240^\circ) = E_{m(CN)} \text{ sen } (\omega t + 120^\circ)$$

$$E_{XN} = E_{m(XN)} / \sqrt{2}$$

$$E_{AN} = E_{AN} \angle 0^\circ$$

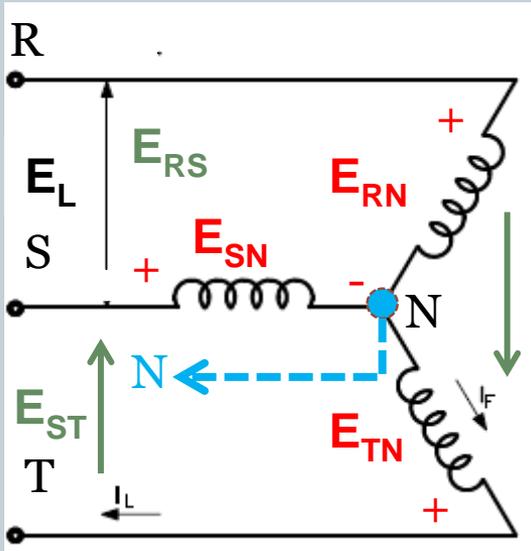
$$E_{BN} = E_{BN} \angle -120^\circ$$

$$E_{CN} = E_{CN} \angle +120^\circ$$

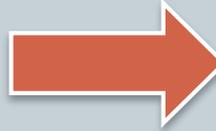
**!!! La suma de las tensiones en todo momento es CERO!!!**

$$E_{AN} + E_{BN} + E_{CN} = 0$$

# El generador conectado en estrella (Y)



L: Línea  
F: Fase  
N: Neutro



$$I_L = I_F$$

$$E_L = E_F + E_F$$

**Fasores!!!**

Puede verse que se cumple que:

$$E_{RS} - E_{RN} + E_{SN} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_{RS} = E_{RN} - E_{SN}$$

Y esto permite definir sucesivamente:

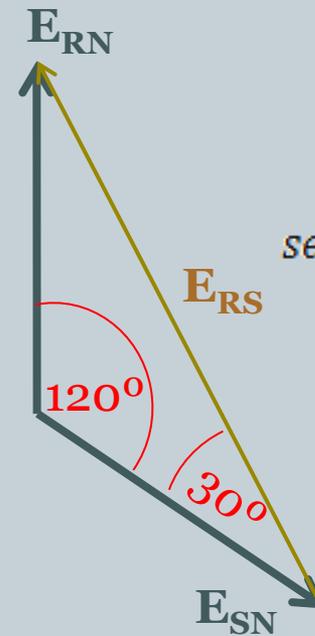
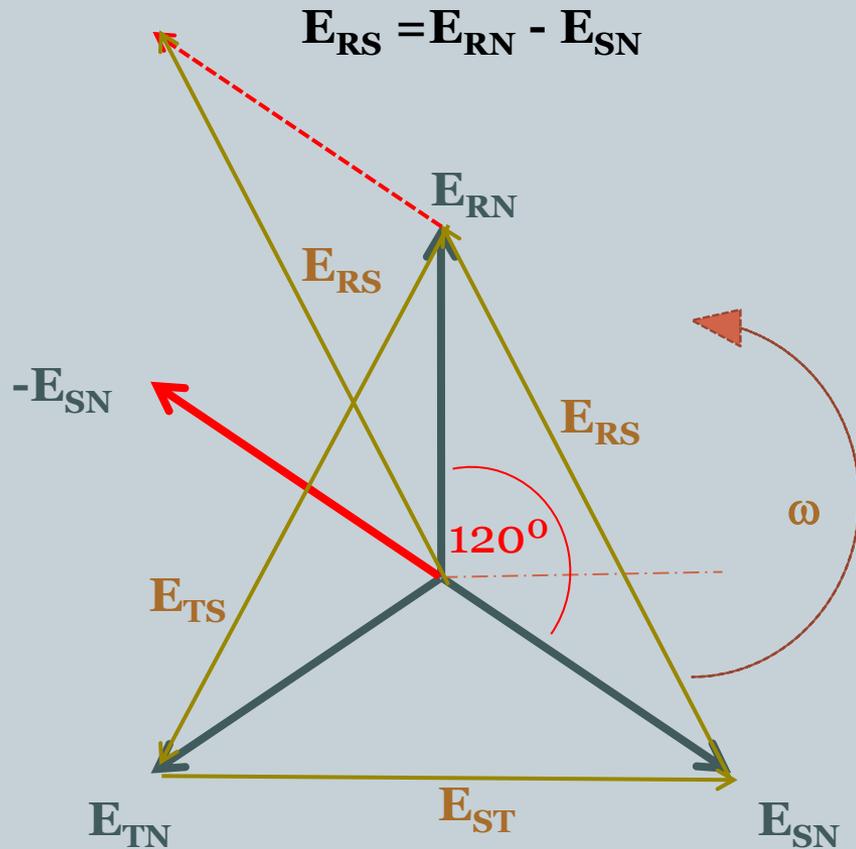
$$E_{ST} = E_{SN} - E_{TN}$$

$$E_{TR} = E_{TN} - E_{RN}$$

Estas ecuaciones nos ayudan a dibujar el diagrama fasorial de las tensiones de línea y fase, y a determinar las relaciones entre sí para las convenciones que adoptamos en la figura anterior:

# Diagrama fasorial de tensiones de línea y fase

## Relaciones entre ellas



Teorema del seno:

$$\frac{E_{RS}}{\text{sen } 120^\circ} = \frac{E_{RN}}{\text{sen } 30^\circ}$$

$$\text{sen } 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$E_{RS} = \sqrt{3} E_{RN}$$

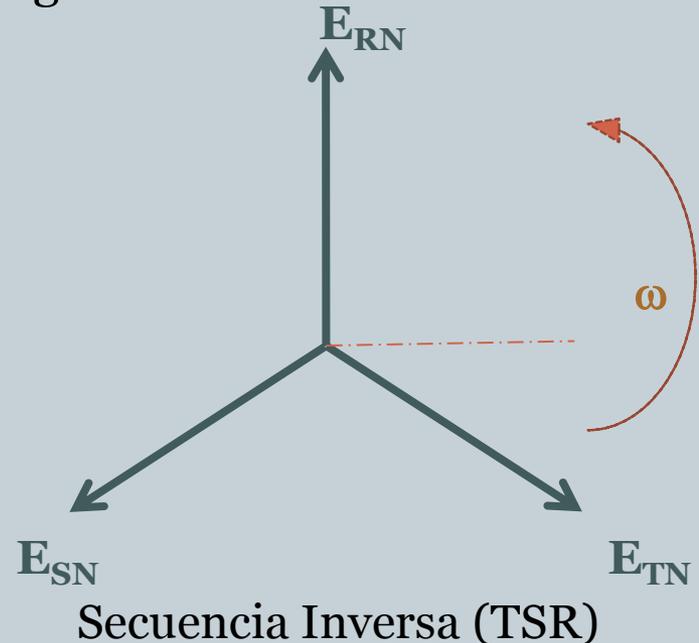
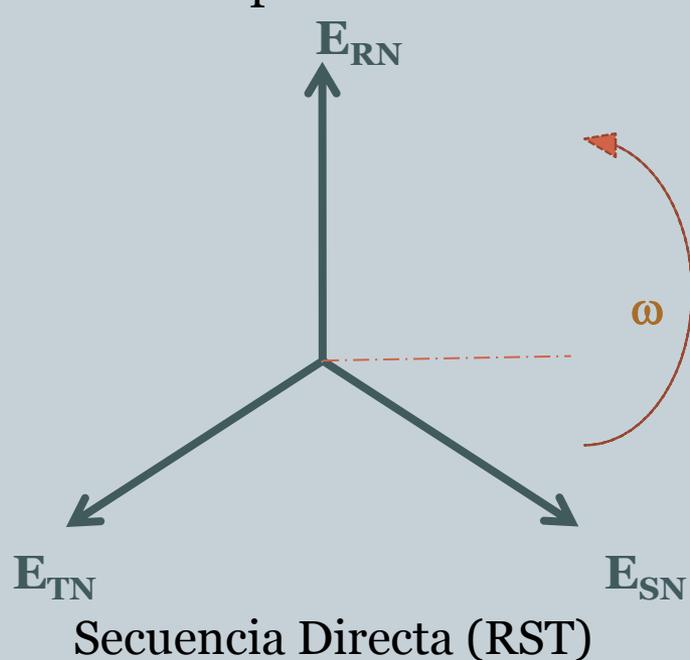
Estos resultados valen para todas las tensiones de línea:

- La tensión de línea es 1,73 veces mayor que la de fase y está  $30^\circ$  adelantada a la de fase más cercana
- La suma de todas las tensiones de línea es cero. También la suma de las tensiones de fase (en un sist. **equilibrado**)

# La secuencia de fases



Un sistema de fases puede tener secuencia *directa* (RST) o *inversa* (TSR). La secuencia puede verse directamente del diagrama fasorial de tensiones:



Nótese que intercambiando dos tensiones entre sí (en el caso del ejemplo, S con T), pasamos de una a otra secuencia. Como regla *mnemotécnica*, puede verse que, al cambiar dos letras en RST pasamos a la otra secuencia. Por ejemplo, RTS produce una secuencia de fases: ~~RTSR~~ ~~TSR~~ TS

# La secuencia de fases (II)



Eligiendo una tensión de referencia, y la secuencia que se desea para el sistema, debe tenerse cuidado en la escritura de las ecuaciones de tensiones:

## Voltajes de fase:

$$E_{RN} = E_{RN} \angle 0^\circ \text{ (referencia, a modo de ejemplo, puede ser cualquiera)}$$

$$E_{TN} = E_{TN} \angle -120^\circ$$

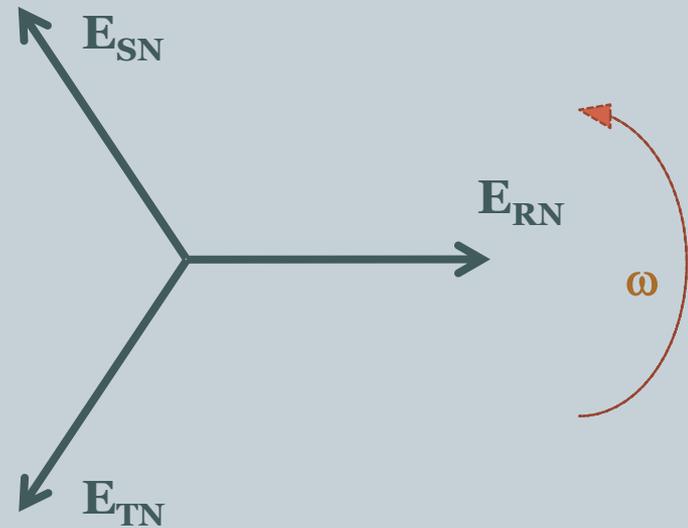
$$E_{SN} = E_{SN} \angle +120^\circ$$

## Voltajes de línea:

$$E_{RT} = \sqrt{3} E_{RN} \angle 30^\circ$$

$$E_{TS} = \sqrt{3} E_{TN} \angle -90^\circ$$

$$E_{SR} = \sqrt{3} E_{SN} \angle +150^\circ$$



# Corrientes



Al conectar un sistema trifásico a cargas se producirán corrientes cuyos valores podrán determinarse con facilidad si son **balanceadas** (iguales en módulo y ángulo) y con mayor dificultad algebraica si no lo son. Ejemplos de cargas equilibradas son los motores trifásicos, que por fabricación tienen sus bobinados iguales para cada fase; y algunos casos especiales de hornos, calentadores, y otras máquinas de uso habitual en la industria. Las cargas desequilibradas suelen ser, usualmente, las de iluminación (por ser monofásica), calefacción en pequeña escala (por la misma razón) y en general, motores y transformadores monofásicos.



# Las mediciones en Electricidad



Las mediciones eléctricas son casi siempre indirectas y con interferencia en la mayoría de los casos. Estas condiciones no suelen ser las usuales en otras partes de la Física básica, y deben ser tenidas en cuenta al considerar la precisión y exactitud de las medidas obtenidas. Incluso en algunos casos, la naturaleza peligrosa de grandes tensiones y corrientes obliga a utilizar, para medirlas, aparatos intermediadores (*transformadores* en su mayor parte, o procesos inductivos) que introducen mayor error en la medida obtenida.

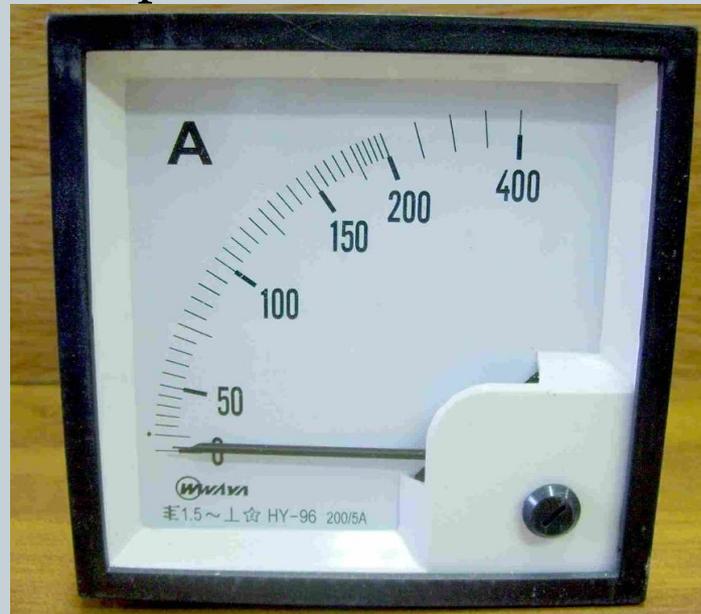
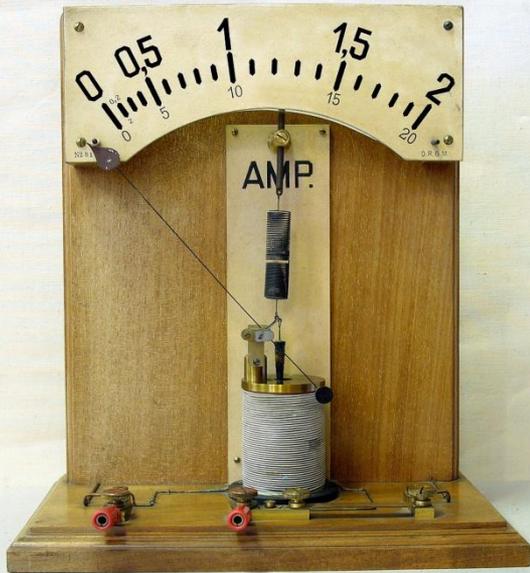
Dicho esto, repasaremos las características de los aparatos de medición usuales en Electricidad, su forma de conexión y el error conocido como *error de inserción* que afecta fundamentalmente a los aparatos eléctricos y cómo evaluarlo apropiadamente.



# Instrumentos de Medición



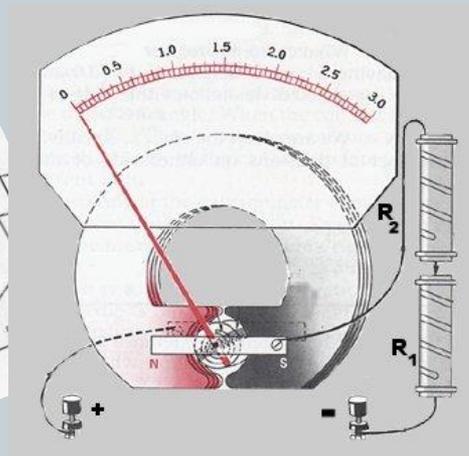
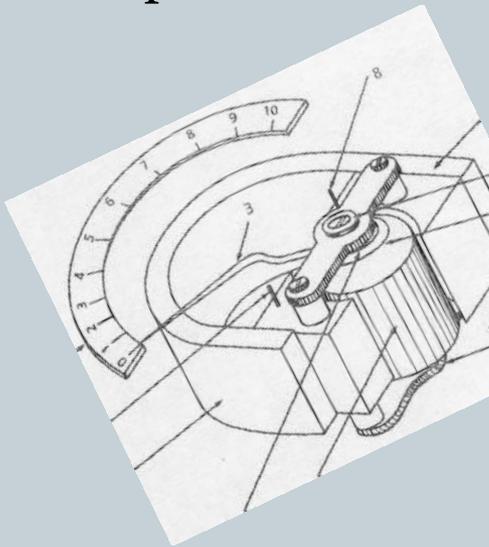
- **Amperímetros:** Se insertan en serie en el circuito. Existen los de inducción y Efecto Hall, que no requieren inserción pero son mucho menos precisos. Su característica es presentar una resistencia bajísima, del orden de décimas de ohm. Los antiguos eran galvanómetros que deflectaban oponiéndose a un resorte espiral y se detenían en una posición de equilibrio que marcaba la corriente. Los actuales (digitales) son en esencia voltímetros que miden la caída en una resistencia muy baja y deducen el valor de corriente sabiendo el valor de dicha resistencia interpuesta.



# Instrumentos de Medición (ii)



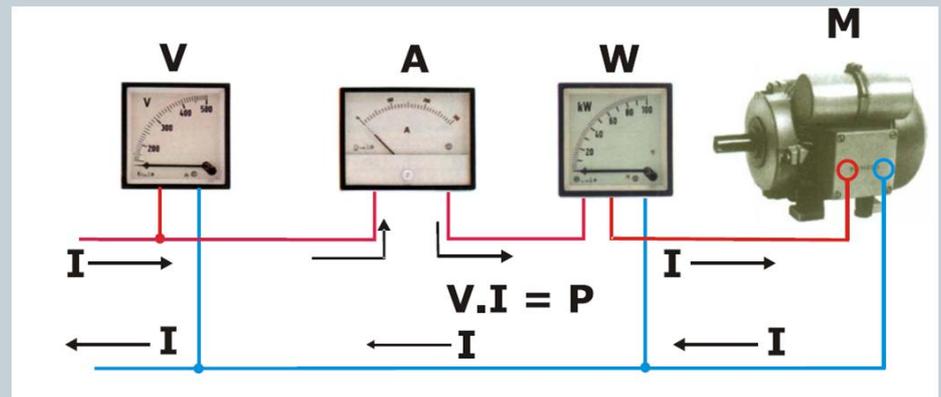
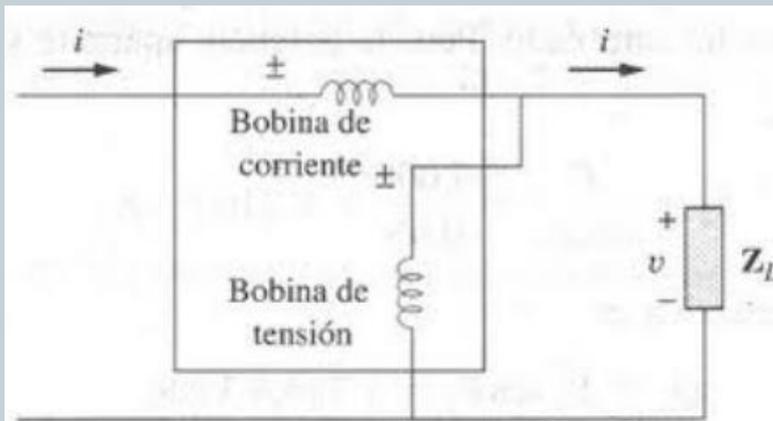
- **Voltímetros:** Se insertan en paralelo a la tensión que se quiere medir. Tienen como característica presentar una enorme resistencia, de forma de consumir la menor corriente posible al circuito al cual es conectado. En los voltímetros actuales dicha resistencia es del orden de los Giga ohms. Los antiguos voltímetros eran amperímetros modificados con resistencias enormes en serie. Los actuales usan la técnica de cargar un condensador y descargarlo sobre una resistencia conocida contando el tiempo que demora el proceso.



# Instrumentos de Medición (iii)



- **Wattímetros:** Son instrumentos que miden corriente y tensión al mismo tiempo, determinando además el coseno del ángulo y haciendo el producto para determinar la potencia activa. Pueden ser de tres o cuatro terminales de conexión, dependiendo de si se usan dos terminales para cada medición en forma independiente o si se usa uno en común para conectarlos.

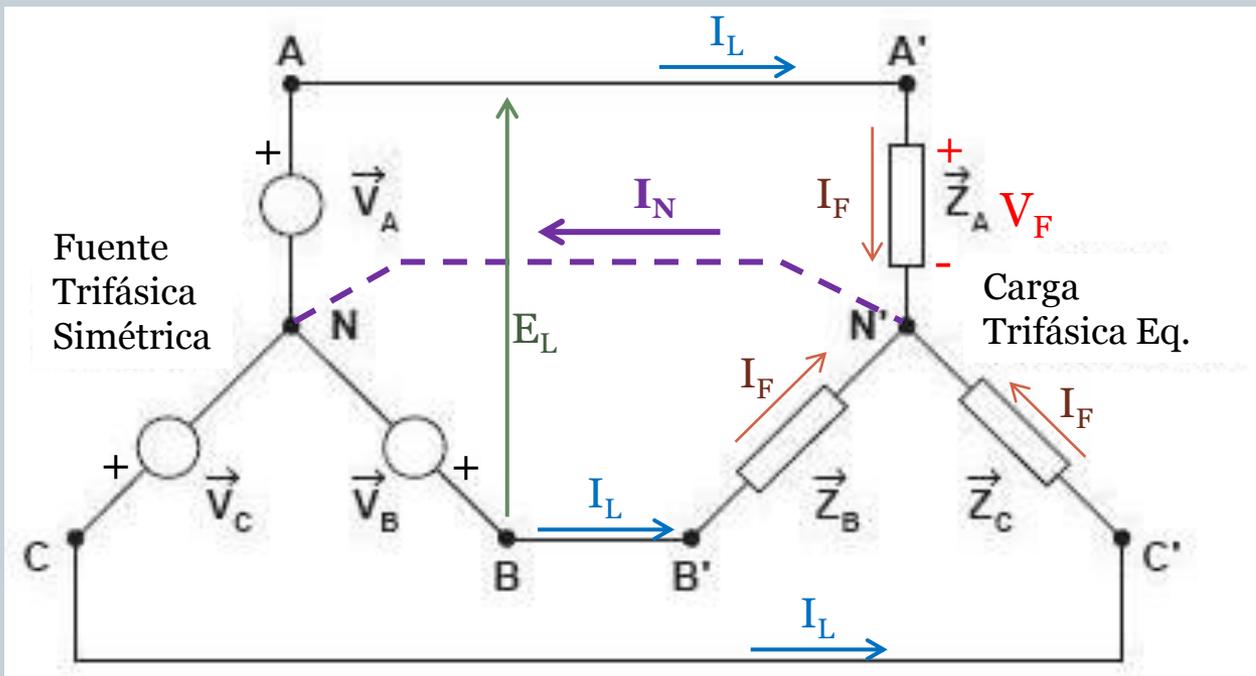


# Corrientes (ii) y cargas



Las cargas de un sistema trifásico equilibrado pueden conectarse en *estrella (Y)* o *triángulo (D ó  $\Delta$ )*. Cada conexión produce efectos diferentes sobre la corriente en la línea y la distribución en el interior de las cargas. Veamos:

## Generador en estrella con carga en estrella



Con carga balanceada se cumple:

$I_L = I_F$  (se cumple siempre con la conexión Y-Y)

$I_N = 0$  (sólo balanceado)

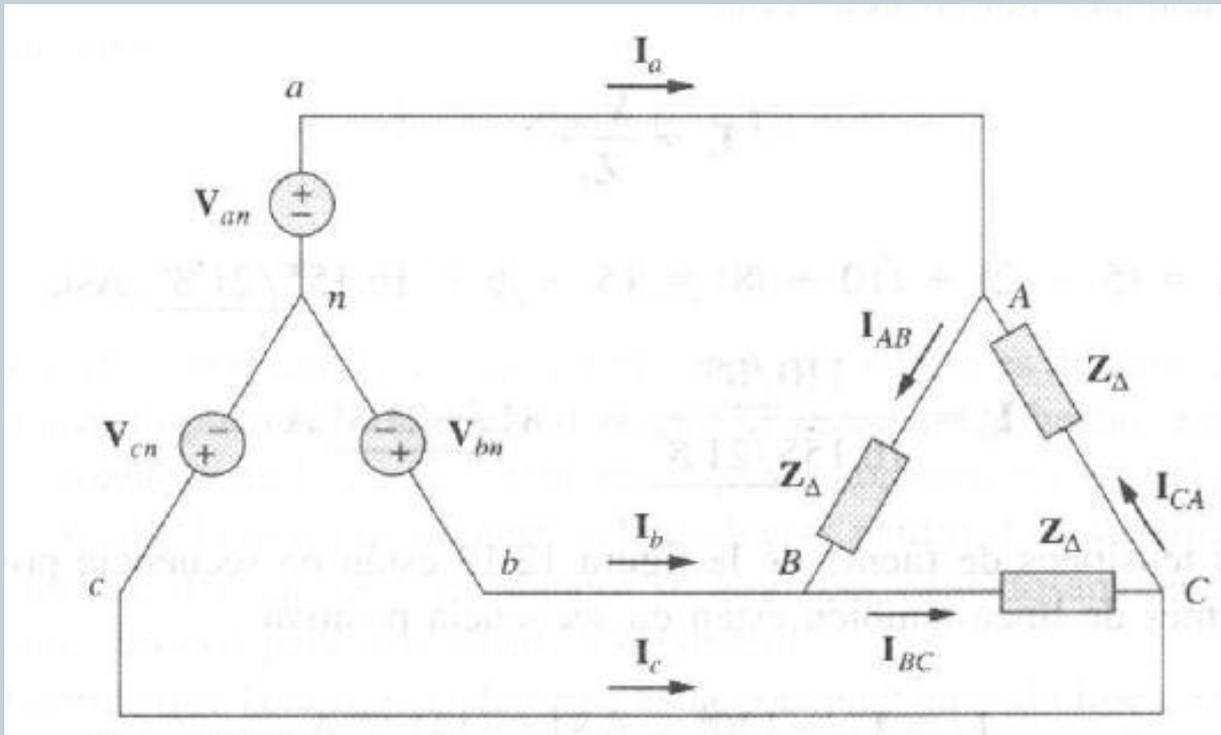
$$I_F = \frac{V_A}{Z_A} = \frac{V_B}{Z_B} = \frac{V_C}{Z_C}$$

$$E_L = \sqrt{3} V_F \angle 30^\circ + \phi f$$

# Corrientes (iii) y cargas



## Generador en estrella con carga en triángulo



Con carga balanceada se cumple:

$$I_{AB} = \frac{V_{AB}}{Z_D} \quad I_{BC} = \frac{V_{BC}}{Z_D}$$

$$I_{CA} = \frac{V_{CA}}{Z_D}$$

$$I_a = I_{AB} - I_{CA}$$

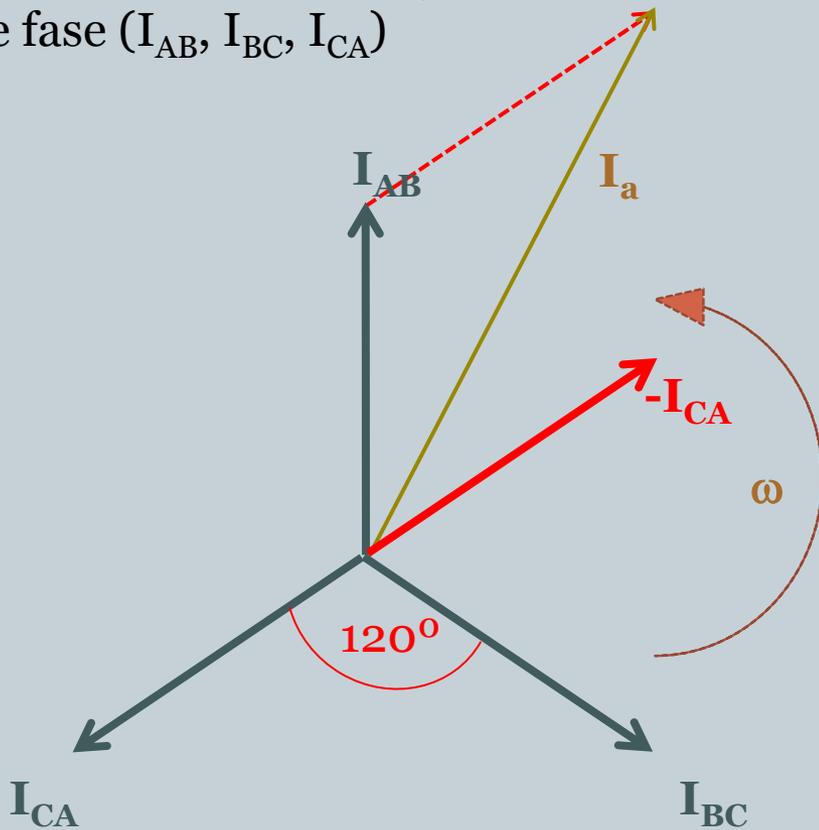
$$I_b = I_{BC} - I_{AB}$$

$$I_c = I_{CA} - I_{BC}$$

# Corrientes (iv) y cargas



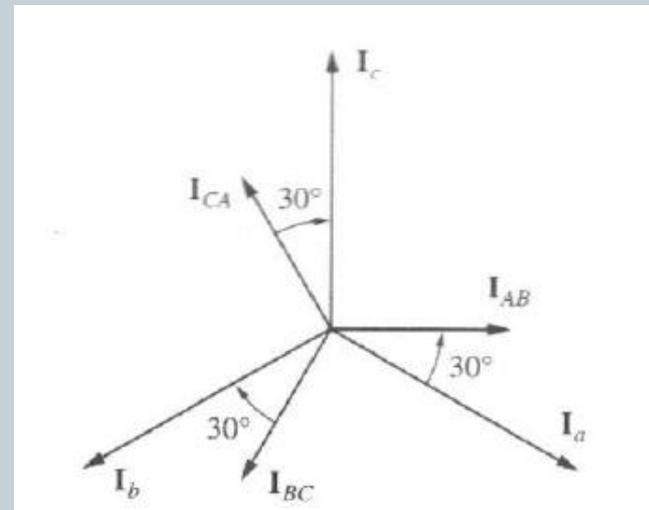
Luego, como ya hicimos con las tensiones en estrella, podemos dibujar el diagrama fasorial de corrientes y ver la relación entre corrientes de línea ( $I_a$ ,  $I_b$ ,  $I_c$ ) y corrientes de fase ( $I_{AB}$ ,  $I_{BC}$ ,  $I_{CA}$ )



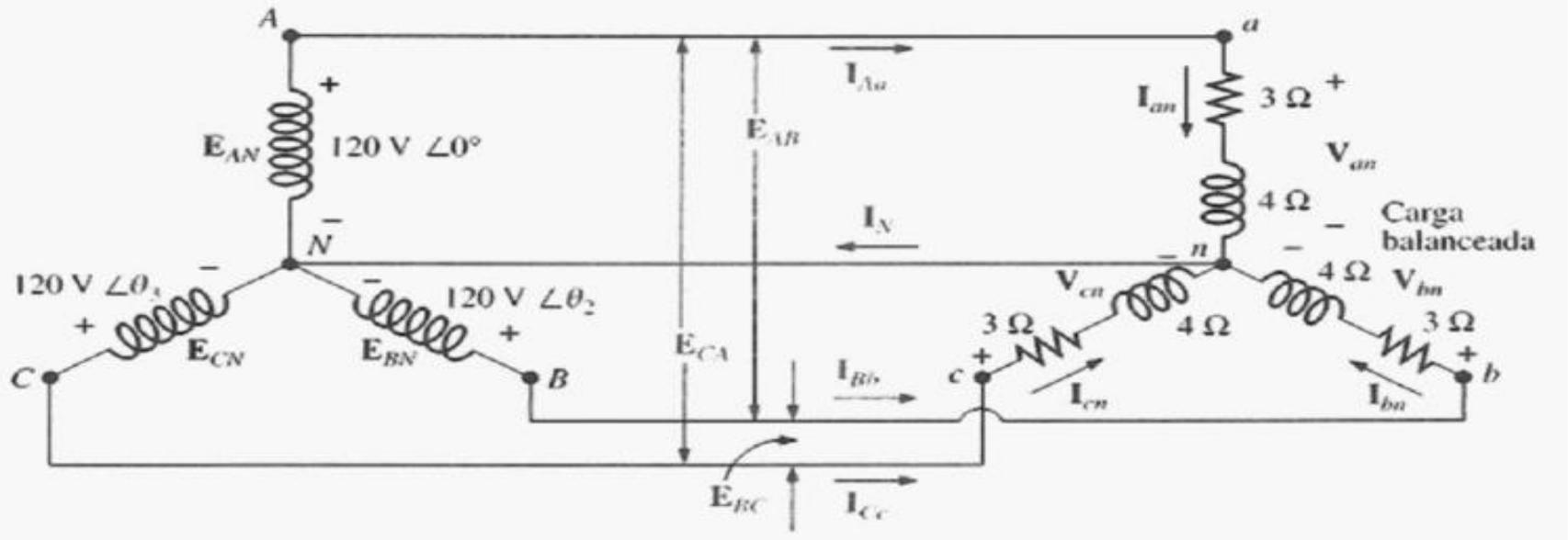
Con razonamientos análogos a lo hecho con las tensiones, puede verse que:

$$I_L = \sqrt{3} I_F$$

Además, la corriente de línea *atrás* a la de fase más cercana en  $30^\circ$ .



# Un ejemplo de cálculo



**Ejemplo 1.-** La secuencia de fase del generador conectado en Y de la figura 13 es ABC.

Encuentre los ángulos de fase  $\theta_2$  y  $\theta_3$ .

Encuentre la magnitud de los voltajes de línea.

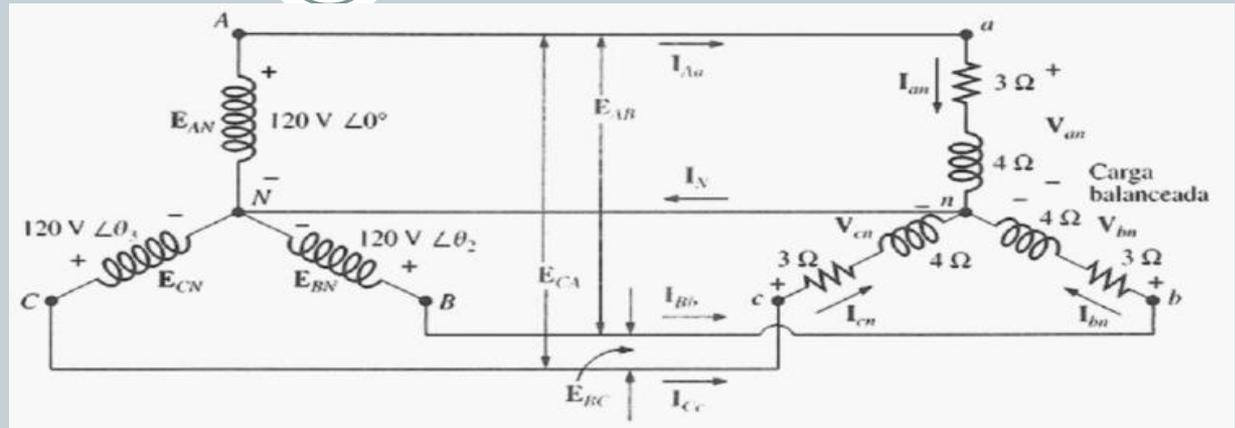
Encuentre las corrientes de línea.

Verifique si, dado que la carga está balanceada,  $I_N = 0$ .

# Continuación ejemplo de cálculo

Para la secuencia de fase ABC, resulta:  $\theta_2 = -120^\circ$  y  $\theta_3 = 120^\circ$

$E_L = \sqrt{3} E_\phi = 1,73 \cdot 120 \text{ V} = 208 \text{ V}$ .  
Por tanto:  $E_{AB} = E_{BC} = E_{CA} = 208 \text{ V}$



$V_\phi = E_\phi$ . Por tanto:  $V_{an} = E_{AN}$ ;  $V_{bn} = E_{BN}$ ;  $V_{cn} = E_{CN}$

$$I_{\phi L} = I_{an} = V_{an} / Z_{an} = 120 \angle 0^\circ / 5 \angle 53,13^\circ = 24 \angle -53,13^\circ$$

$$I_{bn} = V_{bn} / Z_{an} = 120 \angle -120^\circ / 5 \angle 53,13^\circ = 24 \angle -173,13^\circ$$

$$I_{cn} = V_{cn} / Z_{an} = 120 \angle 120^\circ / 5 \angle 53,13^\circ = 24 \angle 66,87^\circ$$

y, como  $I_L = I_{\phi L}$  resulta:

$$I_{Aa} = I_{an} = 24 \angle -53,13^\circ$$

$$I_{Bb} = I_{bn} = 24 \angle -173,13^\circ$$

$$I_{Cc} = I_{cn} = 24 \angle 66,87^\circ$$

Aplicando la 1ª Ley de Kirchhoff tenemos:  $I_N = I_{Aa} + I_{Bb} + I_{Cc}$

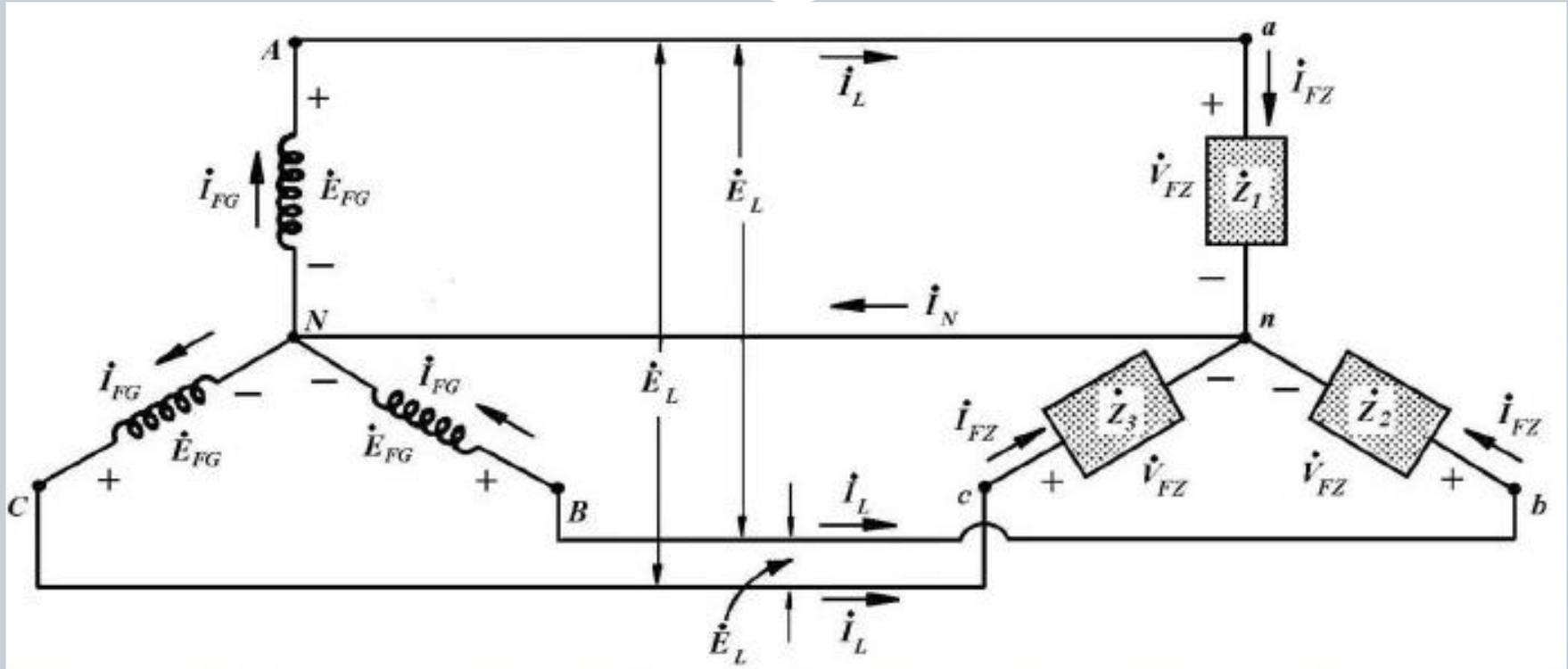
Realizando las operaciones resulta:

$$I_{Aa} = 24 \angle -53,13^\circ = 14,40 - j 19,20$$

$$I_{Bb} = 24 \angle -173,13^\circ = -23,83 - j 2,87$$

$$I_{Cc} = 24 \angle 66,87^\circ = 9,43 + j 22,07$$

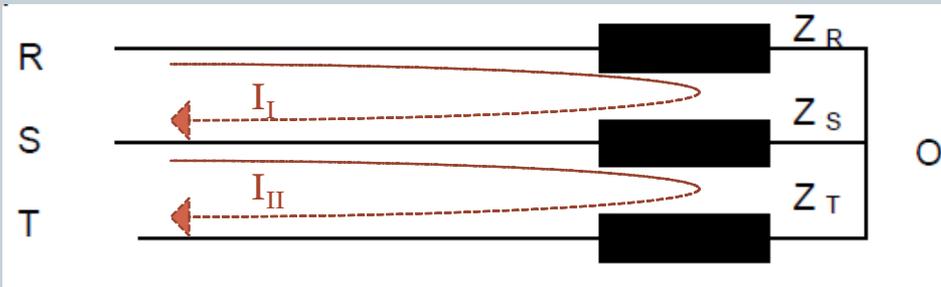
# Carga desequilibrada en estrella con neutro



Como N y n están conectados con un corto circuito, se cumple que  $E_{FG} = V_{FZ}$ , con lo que podemos decir que:

$$I_{FZ1} = \frac{E_{FG1}}{Z_1} \quad I_{FZ2} = \frac{E_{FG2}}{Z_2} \quad I_{FZ3} = \frac{E_{FG3}}{Z_3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_N = I_{FZ1} + I_{FZ2} + I_{FZ3}}$$

# Carga desequilibrada en estrella sin neutro



$$\begin{aligned} Z_{11} &= Z_R + Z_S \\ Z_{22} &= Z_S + Z_T \\ Z_{21} &= Z_{12} = -Z_S \end{aligned}$$

$$E_{11} = E_R - E_S = E_{RS}$$

$$E_{22} = E_S - E_T = E_{ST}$$

$$\Sigma I_{\text{línea}} = I_R + I_S + I_T = 0$$

Aplicando corrientes de malla, resulta:

$$\begin{vmatrix} Z_R + Z_S & -Z_S \\ -Z_S & Z_S + Z_T \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_I \\ I_{II} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_{RS} \\ E_{ST} \end{vmatrix}$$

Esto permite calcular las corrientes, dado que  $I_R = I_I$ ,  $I_S = I_{II} - I_I$  e  $I_T = -I_{II}$

Analizando el circuito, tenemos que:

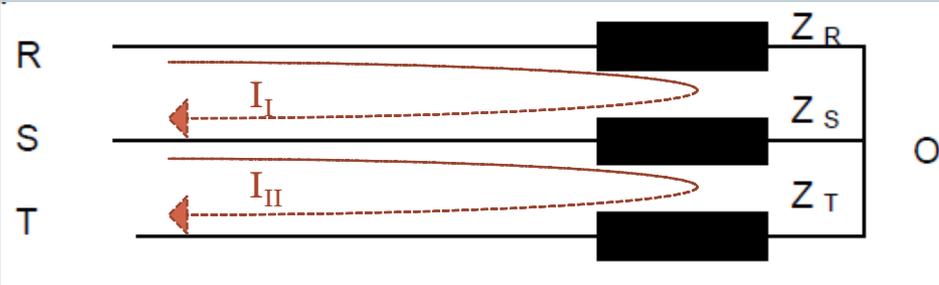
Estas últimas dos expresiones genéricas variarán para secuencia 1 y para secuencia 2, es decir *para secuencia directa*:

$$E_{11} = E_{RS} = E_L \angle \alpha \quad E_{22} = E_{ST} = E_L \angle 240^\circ + \alpha$$

En cambio para *secuencia inversa*:

$$E_{11} = E_{RS} = E_L \angle \alpha \quad E_{22} = E_{ST} = E_L \angle 120^\circ + \alpha$$

# Carga desequilibrada en estrella sin neutro



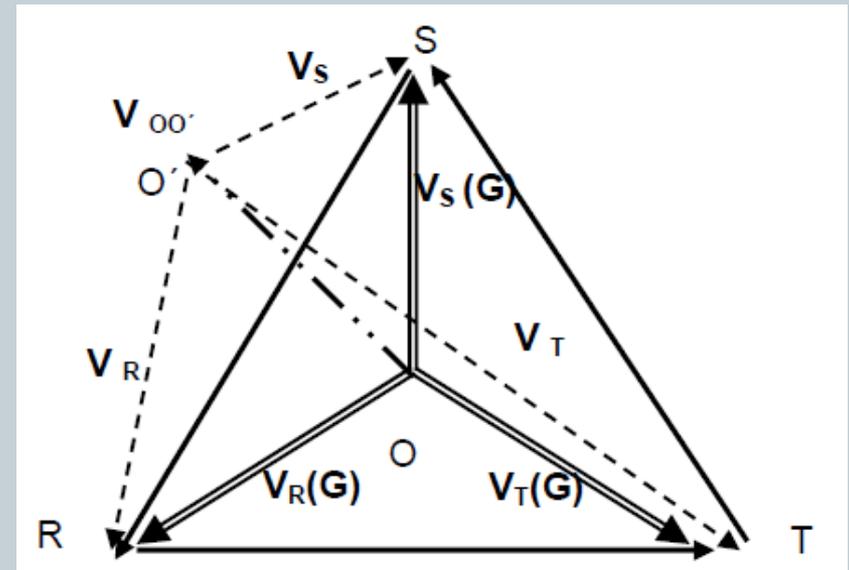
Por otro lado, podemos dibujar un diagrama fasorial con corrimiento de neutro cualquiera (más adelante veremos cómo se obtiene el valor de la *tensión de desplazamiento*):

Además, puede verse que debe existir una diferencia de tensión entre el neutro de generación (N) y el centro de estrella de carga (O)

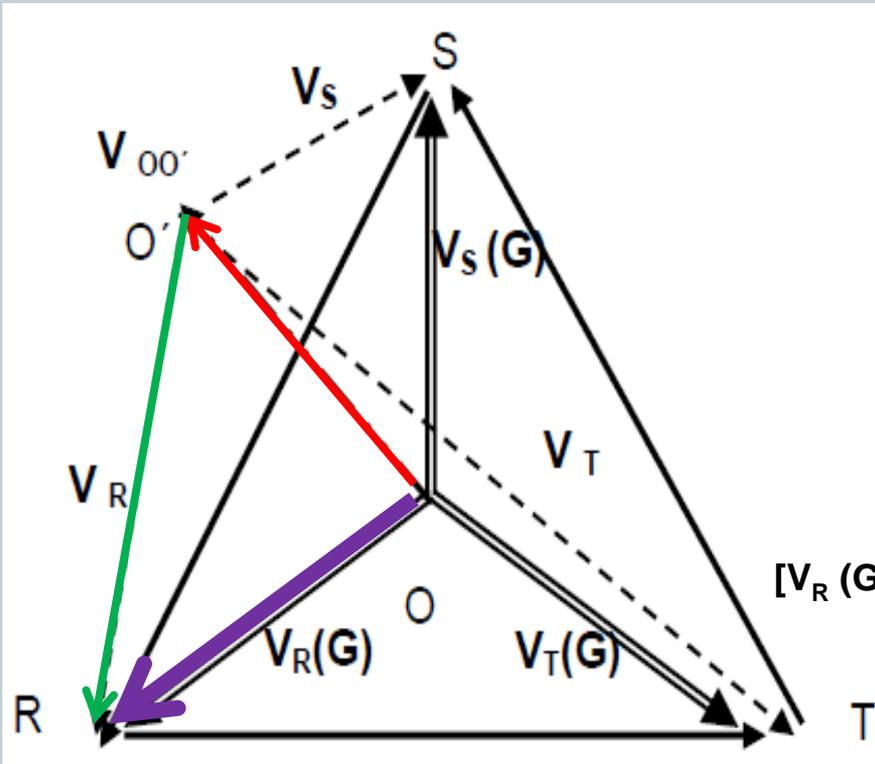
Esta diferencia de tensión puede calcularse a partir de las siguientes consideraciones: por un lado,

$$I_R = V_R Y_R \quad I_S = V_S Y_S$$

$$I_T = V_T Y_T$$



# Desplazamiento de neutro



$$I_R = V_R Y_R \quad I_S = V_S Y_S \quad I_T = V_T Y_T$$

Se verifica que:

$$V_{OO'} + V_R = V_R (G)$$

$$V_R = V_R (G) - V_{OO'}$$

$$V_S = V_S (G) - V_{OO'}$$

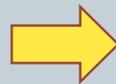
$$V_T = V_T (G) - V_{OO'}$$

Reemplazando en las expresiones de las corrientes:

$$[V_R (G) - V_{OO'}] Y_R + [V_S (G) - V_{OO'}] Y_S + [V_T (G) - V_{OO'}] Y_T = 0$$

Operando y despejando  $V_{OO'}$  se obtiene:

**Tensión de desplazamiento de neutro**



$$V_{OO'} = \frac{V_R (G) Y_R + V_S (G) Y_S + V_T (G) Y_T}{Y_R + Y_S + Y_T}$$

# Potencia en Alterna



En un sistema trifásico se dan los siguientes valores de tensiones y corrientes:

## Tensiones de fase

$$e_{f1}(t) = \sqrt{2} E_f \cos wt$$

$$e_{f2}(t) = \sqrt{2} E_f \cos (wt - 2\pi/3)$$

$$e_{f3}(t) = \sqrt{2} E_f \cos (wt - 4\pi/3)$$

## Corrientes de fase

$$i_{f1}(t) = \sqrt{2} I_f \cos (wt - \varphi)$$

$$i_{f2}(t) = \sqrt{2} I_f \cos (wt - 2\pi/3 - \varphi)$$

$$i_{f3}(t) = \sqrt{2} I_f \cos (wt - 4\pi/3 - \varphi)$$

Luego, las potencias por fase serán:

$$\cos(x) + \cos(y) = 2 \cdot \cos \frac{(x+y)}{2} \cdot \cos \frac{(x-y)}{2}$$

$$p_{f1} = 2 E_f I_f \cos wt \cos (wt - \varphi) = E_f I_f [\cos (2wt - \varphi) + \cos \varphi]$$

$$p_{f2} = 2 E_f I_f \cos (wt - 2\pi/3) \cos (wt - 2\pi/3 - \varphi) = E_f I_f [\cos (2wt - 4\pi/3 - \varphi) + \cos \varphi]$$

$$p_{f3} = 2 E_f I_f \cos (wt - 4\pi/3) \cos (wt - 4\pi/3 - \varphi) = E_f I_f [\cos (2wt - 8\pi/3 - \varphi) + \cos \varphi]$$

Si observamos las expresiones de las potencias se ve que:

$$p = p_{f1} + p_{f2} + p_{f3} = 3 E_f I_f \cos \varphi = P$$

# Potencia en alterna (ii)



La potencia total consumida por la carga trifásica se puede calcular como:

$$P_T = 3P_\phi \quad (\text{W})$$

O como valen las siguientes relaciones:

$$V_\phi = \frac{E_L}{\sqrt{3}} \quad \text{e} \quad I_\phi = I_L$$

Resulta que la potencia puede expresarse:

$$P_T = 3 \frac{E_L}{\sqrt{3}} I_L \cos \theta_{I_\phi}^{V_\phi}$$

Pero:  $\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)(1) = \left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$

Luego resulta:

$$P_T = \sqrt{3} E_L I_L \cos \theta_{I_\phi}^{V_\phi} = 3 I_L^2 R_\phi \quad (\text{W})$$

# Potencia en alterna (iii)



## Potencia Reactiva “Q”

La potencia reactiva por fase vale, según lo desarrollado al estudiar las distintas potencias involucradas en los circuitos eléctricos excitados con corriente alterna:

$$Q_{\phi} = V_{\phi} I_{\phi} \sin \theta_{I_{\phi}}^{V_{\phi}} = I_{\phi}^2 X_{\phi} = \frac{V_X^2}{X_{\phi}} \quad (\text{VAR})$$

La potencia total consumida por la carga trifásica vale:

$$Q_T = 3Q_{\phi} \quad (\text{VAR})$$

O procediendo como antes para la potencia activa será:

$$Q_T = \sqrt{3} E_L I_L \sin \theta_{I_{\phi}}^{V_{\phi}} = 3 I_L^2 X_{\phi} \quad (\text{VAR})$$

# Potencia en alterna (iv)



## Potencia aparente “S”

La potencia aparente de cada fase vale:

$$S_{\phi} = V_{\phi} I_{\phi} \quad (\text{VA})$$

La potencia aparente total de la carga trifásica será:

$$S_T = 3S_{\phi} \quad (\text{VA})$$

O, como antes:

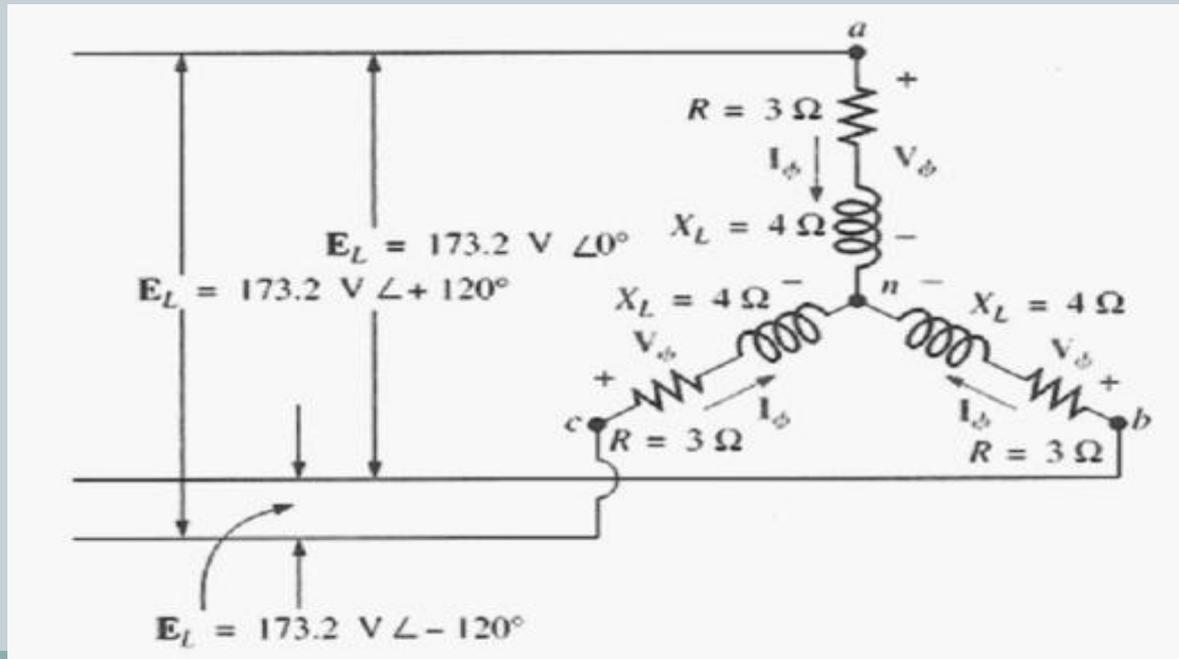
$$S_T = \sqrt{3} E_L I_L \quad (\text{VA})$$

# Potencia en alterna (v)



**Ejemplo :** Para la carga balanceada conectada en Y de la figura que sigue encontrar:

- Encuentre la potencia activa para cada fase y la carga total;
- Encuentre la potencia reactiva para cada fase y la carga total;
- Encuentre la potencia aparente para cada fase y la carga total;
- Encuentre el factor de potencia de la carga trifásica.



# Potencia en alterna (vi)



**Solución:** La corriente de línea vale:  $I_L = V_{\text{fase}} / Z_{\text{fase}} = (V_{\text{Linea}}/\sqrt{3}) / Z_{\text{fase}} = 100/5 = 20 \text{ A}$

a. La potencia promedio es:

$$P_{\phi} = V_{\phi} I_{\phi} \cos \theta_{I_{\phi}}^V = (100 \text{ V})(20 \text{ A}) \cos 53.13^{\circ} = (2000)(0.6) = \mathbf{1200 \text{ W}}$$

$$P_{\phi} = I_{\phi}^2 R_{\phi} = (20 \text{ A})^2 (3 \Omega) = (400)(3) = \mathbf{1200 \text{ W}}$$

$$P_{\phi} = \frac{V_R^2}{R_{\phi}} = \frac{(60 \text{ V})^2}{3 \Omega} = \frac{3600}{3} = \mathbf{1200 \text{ W}}$$

$$P_T = 3P_{\phi} = (3)(1200 \text{ W}) = \mathbf{3600 \text{ W}}$$

**Nota:** ver que la tensión aplicada en la R no es la tensión de fase.

$$P_T = \sqrt{3} E_L I_L \cos \theta_{I_L}^V = (1.732)(173.2 \text{ V})(20 \text{ A})(0.6) = \mathbf{3600 \text{ W}}$$

b. La potencia reactiva es:

$$Q_{\phi} = V_{\phi} I_{\phi} \sin \theta_{I_{\phi}}^V = (100 \text{ V})(20 \text{ A}) \sin 53.13^{\circ} = (2000)(0.8) = \mathbf{1600 \text{ VAR}}$$

o bien:  $Q_{\phi} = I_{\phi}^2 X_{\phi} = (20 \text{ A})^2 (4 \Omega) = (400)(4) = \mathbf{1600 \text{ VAR}}$

$$Q_T = 3Q_{\phi} = (3)(1600 \text{ VAR}) = \mathbf{4800 \text{ VAR}}$$

$$Q_T = \sqrt{3} E_L I_L \sin \theta_{I_L}^V = (1.732)(173.2 \text{ V})(20 \text{ A})(0.8) = \mathbf{4800 \text{ VAR}}$$

# Potencia en alterna (vii)



c. La *potencia aparente* es:

$$S_{\phi} = V_{\phi} I_{\phi} = (100 \text{ V})(20 \text{ A}) = \mathbf{2000 \text{ VA}}$$

$$S_T = 3S_{\phi} = (3)(2000 \text{ VA}) = \mathbf{6000 \text{ VA}}$$

o bien:  $S_T = \sqrt{3}E_L I_L = (1.732)(173.2 \text{ V})(20 \text{ A}) = \mathbf{6000 \text{ VA}}$

d. El *factor de potencia* es:

$$F_p = \frac{P_T}{S_T} = \frac{3600 \text{ W}}{6000 \text{ VA}} = \mathbf{0.6 \text{ atrasado}}$$