Electrotecnia I

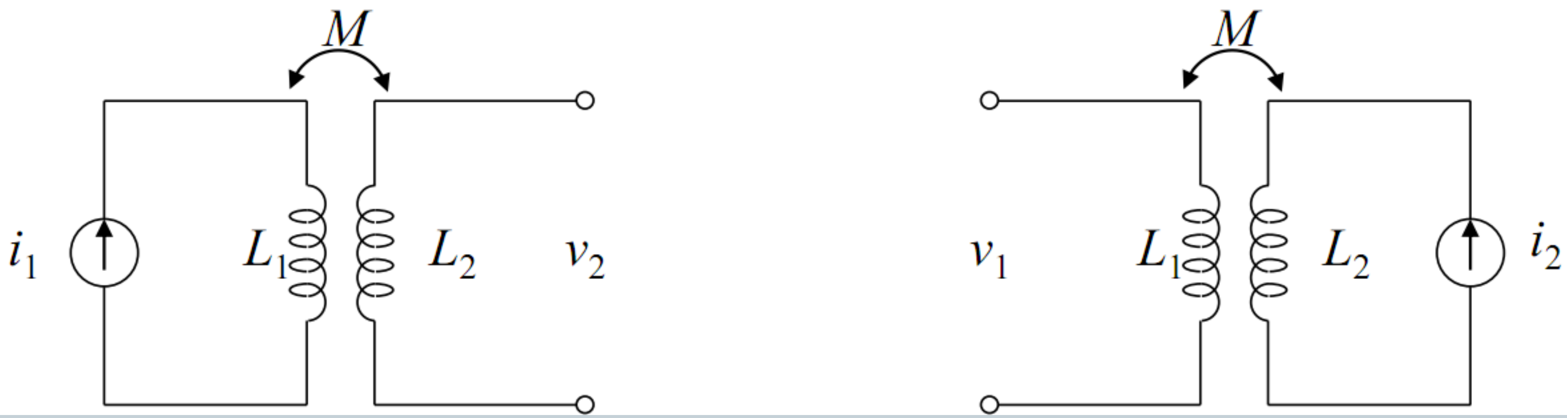
Prof. Ing. G. Belliski

- INDUCTANCIA MUTUA
- FLUJOS ADITIVOS Y SUSTRACTIVOS
- CONSIDERACIONES DE ENERGÍA
- CONEXIONES SERIE Y PARALELO
- CALCULO DE CIRCUITOS CON INDUCTANCIA MUTUA
- CIRCUITOS EQUIVALENTES

Inductancia Mutua

Faraday

Autoinductancia $\Rightarrow v = N\dfrac{d\emptyset}{dt} \Rightarrow v = N\dfrac{d\emptyset}{di}.\dfrac{di}{dt} = L\dfrac{di}{dt}$



La corriente i_1 en L_1 produce el voltaje de circuito abierto v_2 en L_2.

La corriente i_2 en L_2 produce el voltaje de circuito abierto v_1 en L_1.

$$v_2(t) = M_{21}\frac{di_1(t)}{dt} \qquad v_1(t) = M_{12}\frac{di_2(t)}{dt}$$

El coeficiente de acoplamiento Magnético

El valor de la inductancia mutua entre dos circuitos depende de la geometría de los mismos, así como de la autoinductancia de cada uno: L_1 y L_2.

El límite superior para el valor de M es:

$$M \leq \sqrt{L_1 L_2}$$

El coeficiente de acoplamiento magnético se define como:

$$k_M = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \qquad 0 \leq k_M \leq 1$$

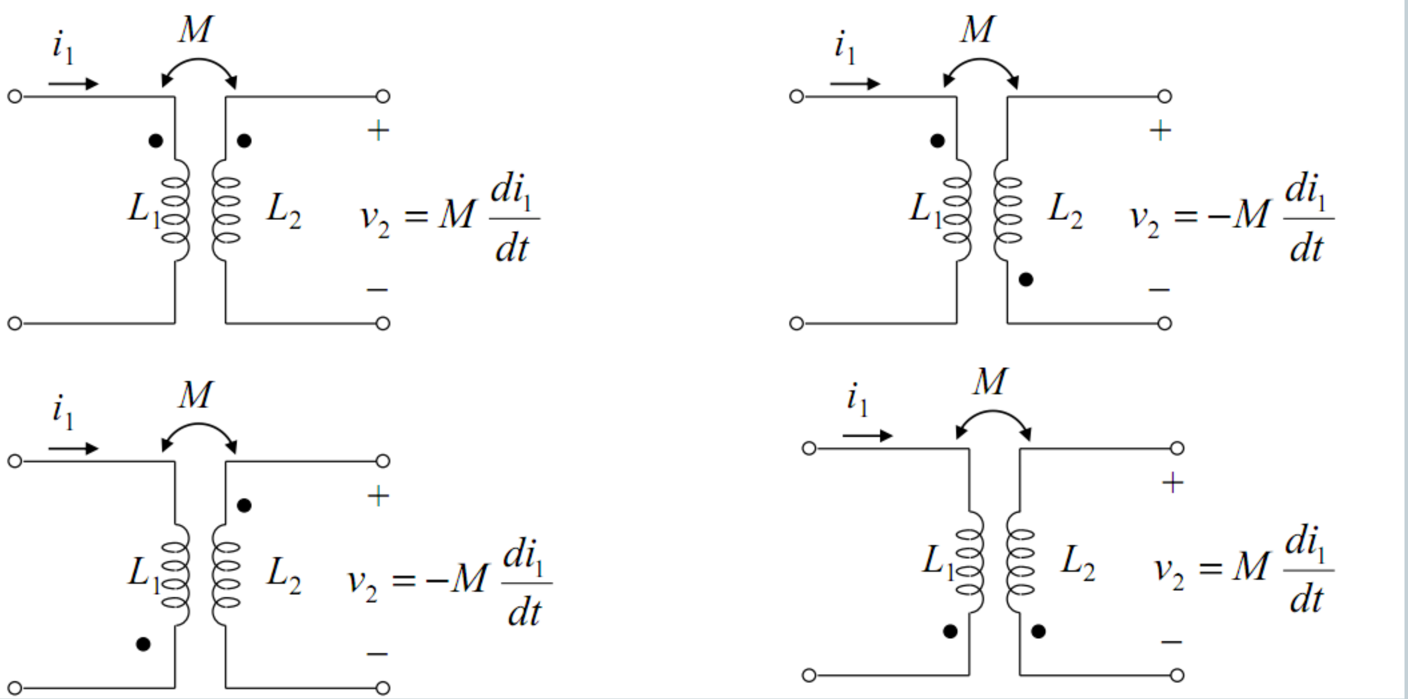
o sea:

$$M = k_M \sqrt{L_1 L_2}$$

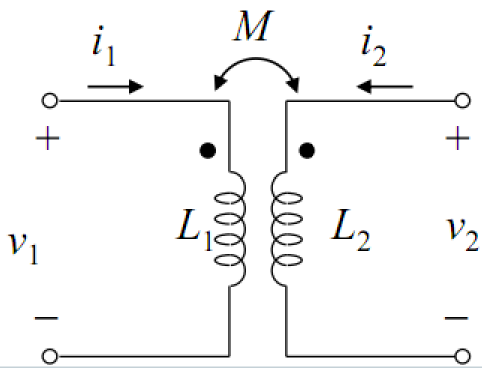
En la que k_M es una magnitud adimensional

Convención de los signos

Una corriente que entra por la terminal punteada de una bobina produce un voltaje de circuito abierto entre las terminales de la segunda bobina, cuyo sentido es el de la dirección indicada por una referencia de voltaje positiva en la terminal punteada en esta segunda bobina.



Voltaje mutuo



$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

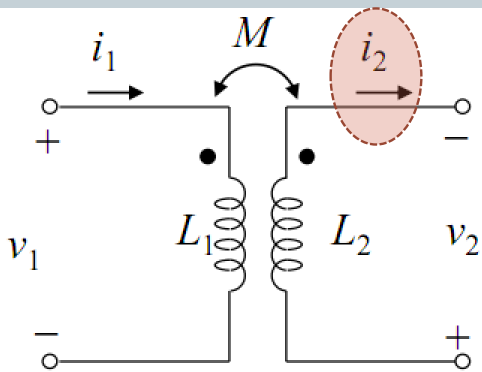
$$v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

Para estado senoidal (forma fasorial)

$$\mathbf{V}_1 = j\omega L_1 \mathbf{I}_1 + j\omega M \mathbf{I}_2$$

$$\mathbf{V}_2 = j\omega L_2 \mathbf{I}_2 + j\omega M \mathbf{I}_1$$

Reactancia Mutua X_M $\quad X_M = j\omega M = \omega M \,/\, 90°$



$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$$

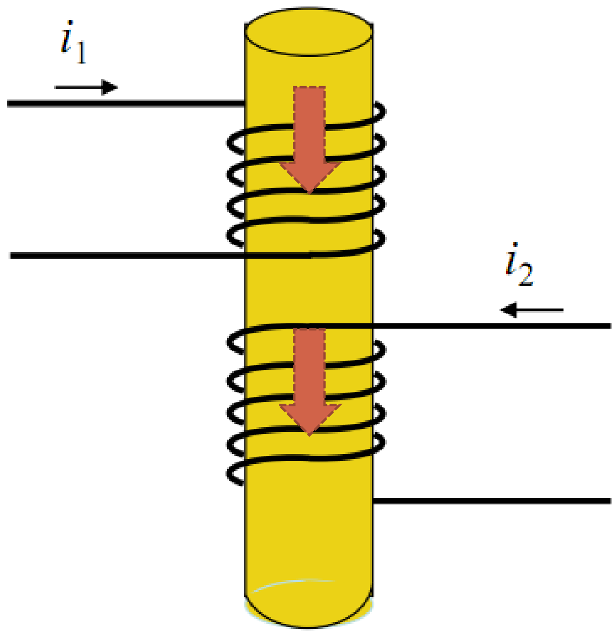
Para estado senoidal (forma fasorial)

$$\mathbf{V}_1 = j\omega L_1 \mathbf{I}_1 - j\omega M \mathbf{I}_2$$

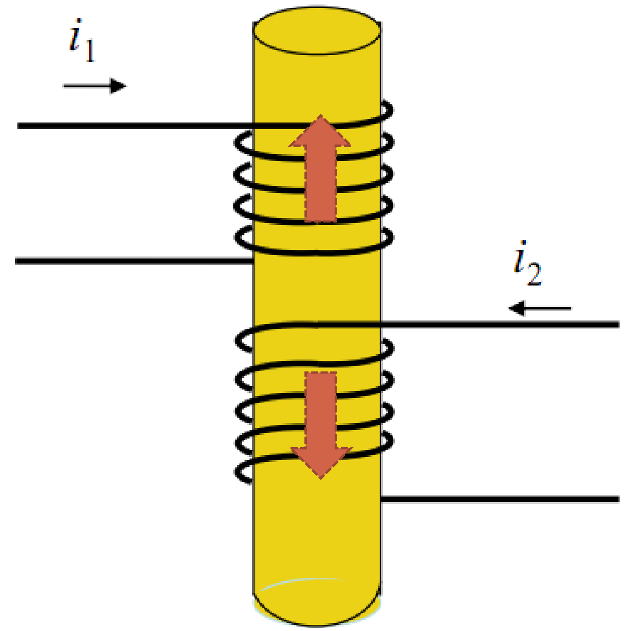
$$\mathbf{V}_2 = j\omega L_2 \mathbf{I}_2 - j\omega M \mathbf{I}_1$$

Bobinas Acopladas y su flujo

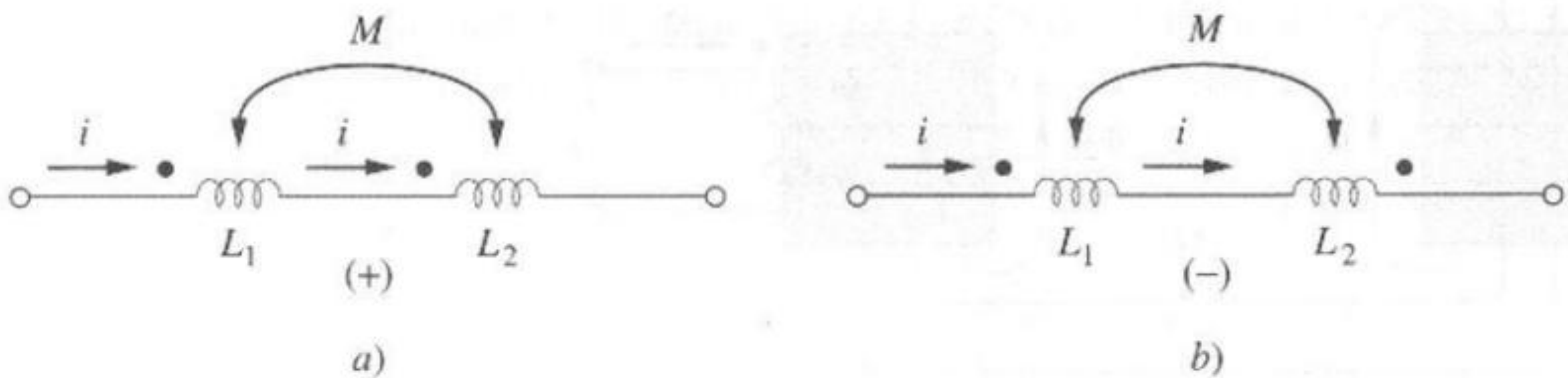
Flujos magnéticos aditivos



Flujos magnéticos sustractivos



Bobinas en serie



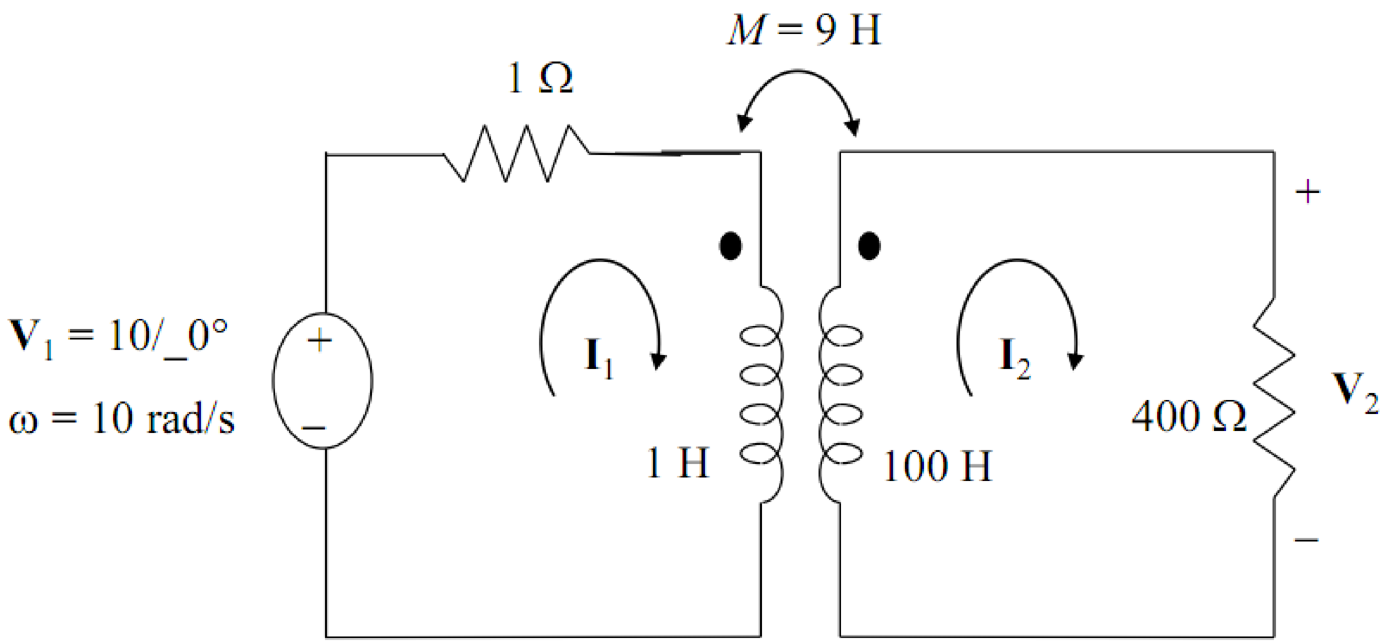
Convención de las marcas para bobinas en serie; el signo indica la polaridad de la tensión mutua: *a*) conexión en serie aditiva, *b*) conexión en serie opositiva.

$$\boxed{L = L_1 + L_2 + 2M \qquad \text{(Conexión en serie aditiva)}}$$

$$\boxed{L = L_1 + L_2 - 2M \qquad \text{(Conexión en serie opositiva)}}$$

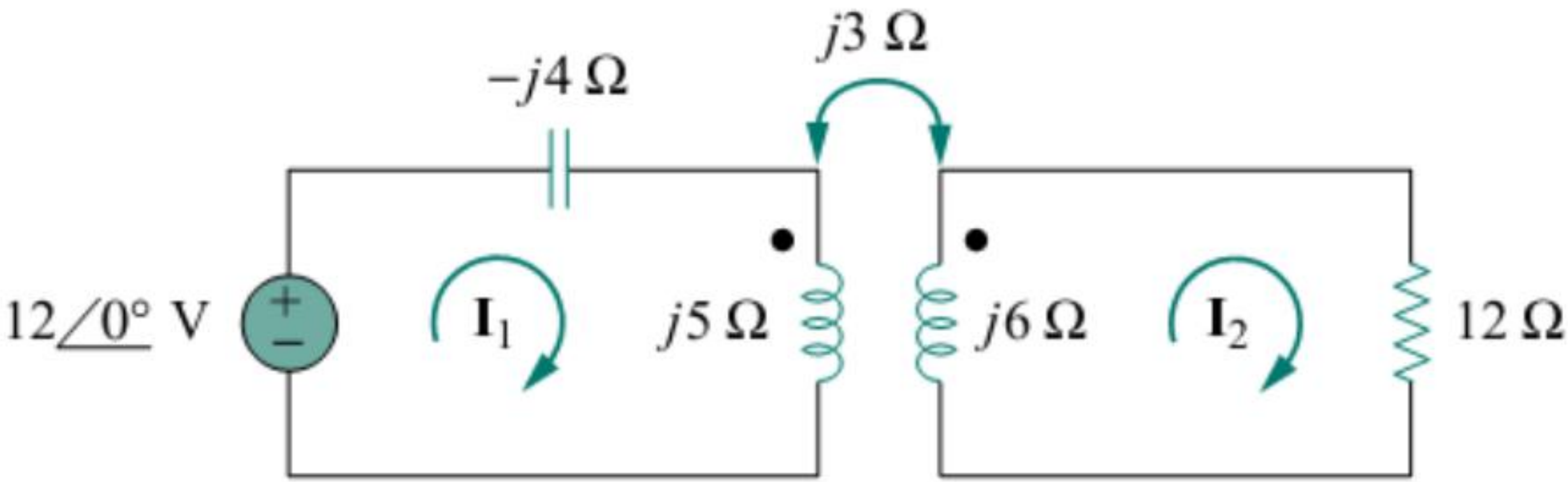
Ejemplo 1

Para el circuito mostrado en la figura expresar las ecuaciones de malla y la relación de la tensión de salida a la tensión de entrada.

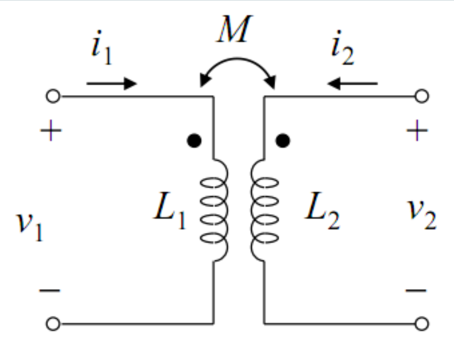


Ejemplo 2

Para el circuito mostrado en la figura calcular las expresiones fasoriales de las corrientes de malla .



Consideraciones de Energía



Energía almacenada por un inductor $\Rightarrow$ $w = \frac{1}{2} L i^2$

Suponiendo i1 e i2 inicialmente cero, y considerando que i1 aumenta desde 0 a I1, mientras mantengo i2=0, obtengo:

$$p_1(t) = v_1 . i_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} . i_1 \Rightarrow w = \int p_1(t) dt = L_1 \int_0^{I_1} i_1 \, di_1 = \frac{1}{2} L I_1^2$$

Si ahora hago aumentar i2 manteniendo i1=I1 (constante), la tensión inducida en la bobina 1 crece en M12 di2/dt, pero no hay inducida en la 2. La potencia inducida en las bobinas es:

$$p_2(t) = i_1 M_{12} \frac{di_2}{dt} + i_2 v_2 = I_1 M_{12} \frac{di_2}{dt} + i_2 L_2 \frac{di_2}{dt}$$

Y la energía almacenada en el circuito es:

$$w_2 = \int p_2 \, dt = M_{12} I_1 \int_0^{I_2} di_2 = L_2 \int_0^{I_2} i_2 di_2$$

$$= M_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

Consideraciones de Energía

La energía almacenada total por el circuito cuando tanto i1 como i2 han alcanzado valores estables es:

$$w = w_1 + w_2 = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + M_{12}I_1I_2$$

Si se invierte el orden de crecimiento de las corrientes, se llega a:

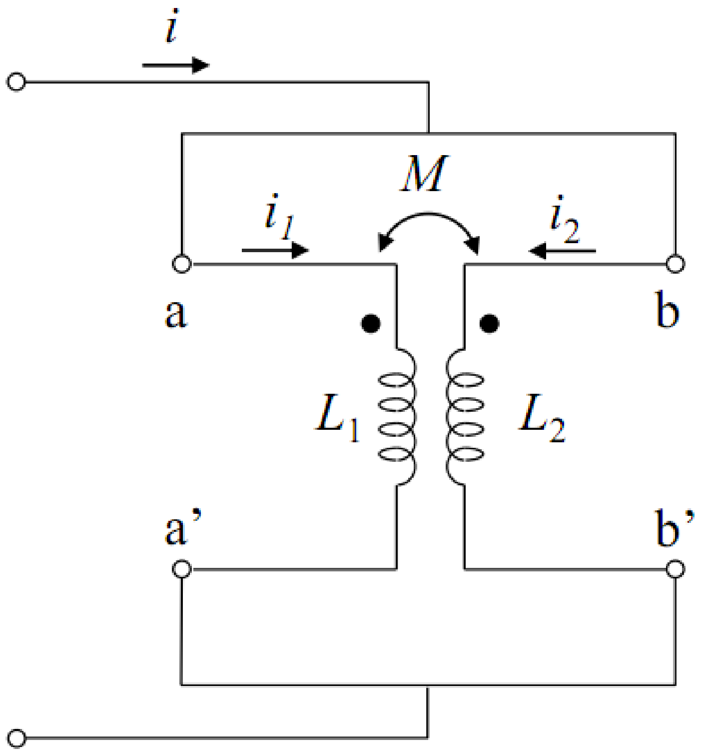
$$w = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + M_{21}I_1I_2$$

Como la energía a la que se llega debe ser independiente del camino elegido, se dan:

$$\boxed{M_{12} = M_{21} = M}$$

$$\boxed{w = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + MI_1I_2}$$

Conexión en paralelo de bobinas (i)



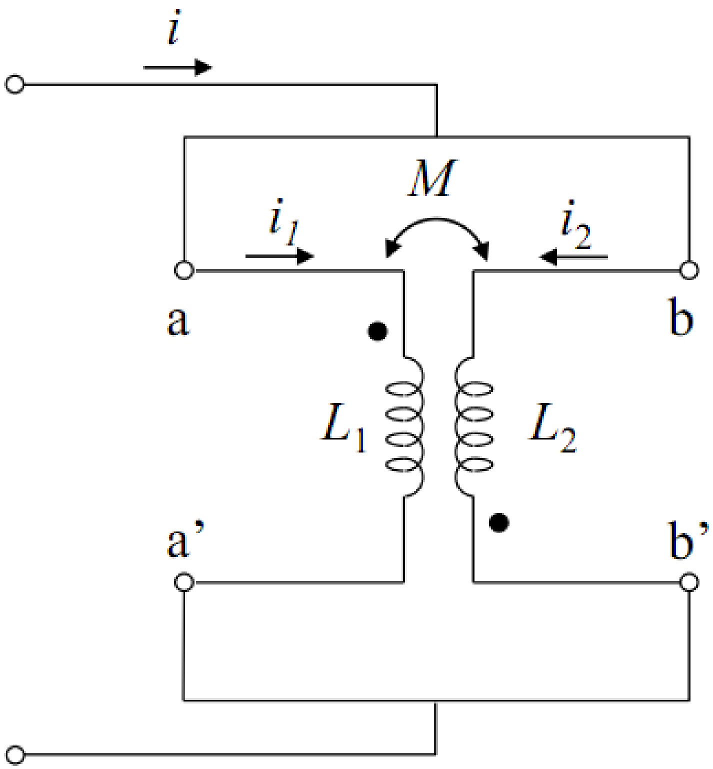
$$v_{aa'} = j\omega L_1\, i_1 + j\omega M\, i_2$$

$$v_{bb'} = j\omega L_2\, i_2 + j\omega M\, i_1$$

Y la expresión para la inductancia equivalente del circuito de la figura, es:

$$L_{//}^{+} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

Conexión en paralelo de bobinas (ii)



$$v_{aa'} = j\omega L_1\, i_1 - j\,\omega M\, i_2$$
$$v_{bb'} = j\omega L_2\, i_2 - j\,\omega M\, i_1$$

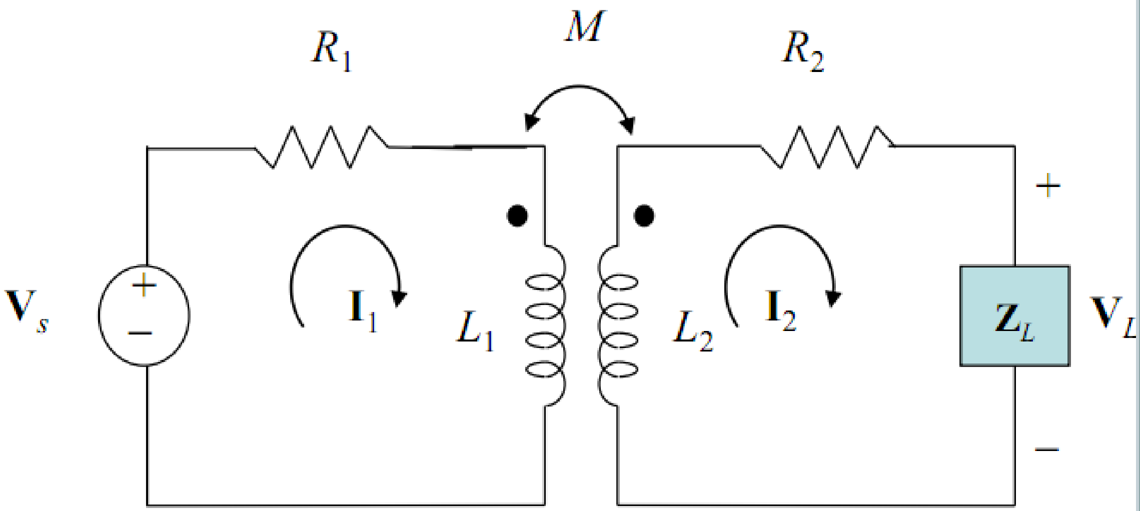
Y la expresión para la inductancia equivalente del circuito de la figura, es:

$$L_{//} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}$$

Transformador Lineal

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{I}_1\mathbf{Z}_{11} - \mathbf{I}_2 j\omega M$$

$$0 = -\mathbf{I}_1 j\omega M + \mathbf{I}_2\mathbf{Z}_{22} = 0$$



donde

$$\mathbf{Z}_{11} = R_1 + j\omega L_1$$

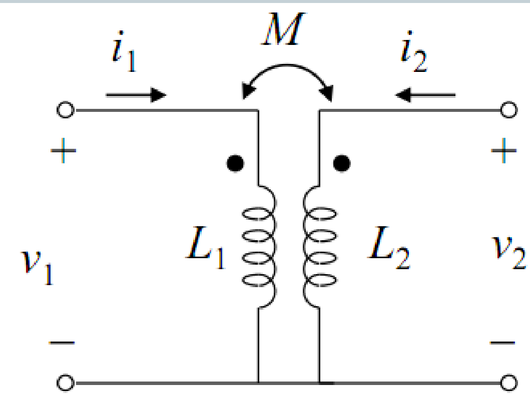
$$\mathbf{Z}_{22} = R_2 + j\omega L_2 + \mathbf{Z}_L$$

$$\mathbf{Z}_{ent} = \frac{\mathbf{V}_S}{I_1} = \mathbf{Z}_{11} - \frac{(j\omega)^2 M^2}{\mathbf{Z}_{22}}$$

Impedancia reflejada: $-\dfrac{(j\omega)^2 M^2}{\mathbf{Z}_{22}} = \dfrac{\omega^2 M^2}{\mathbf{Z}_{22}}$

Red Equivalente en T

Ecuaciones de malla para el transformador lineal



$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

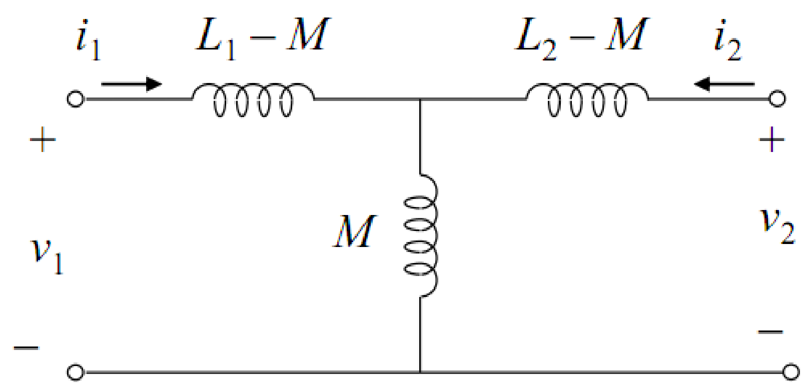
$$v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

Pueden reescribirse como

$$v_1 = (L_1 - M)\frac{di_1}{dt} + M \frac{d(i_1 + i_2)}{dt}$$

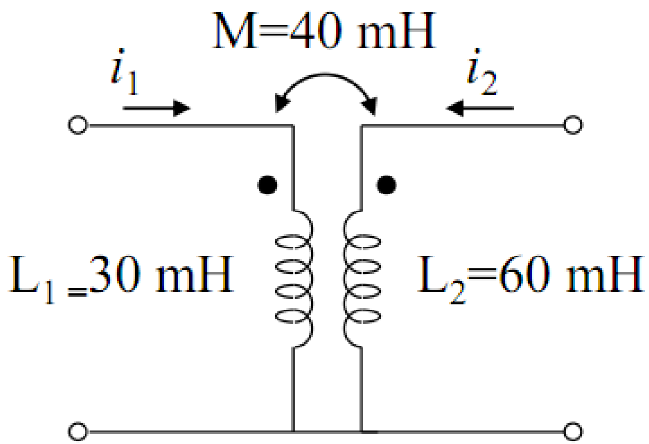
$$v_2 = M \frac{d(i_1 + i_2)}{dt} + (L_2 - M)\frac{di_2}{dt}$$

Las cuales corresponden a la red



Ejemplo de conversión

Determine el equivalente T del transformador de la figura



$$L_1 - M = -10\ \text{mH}$$

$$L_2 - M = 20\ \text{mH}$$