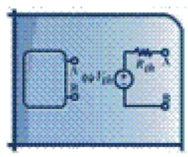
6. THÉVENIN, NORTON Y MÁXIMA TRANSFERENCIA DE POTENCIA



6.1. INTRODUCCIÓN

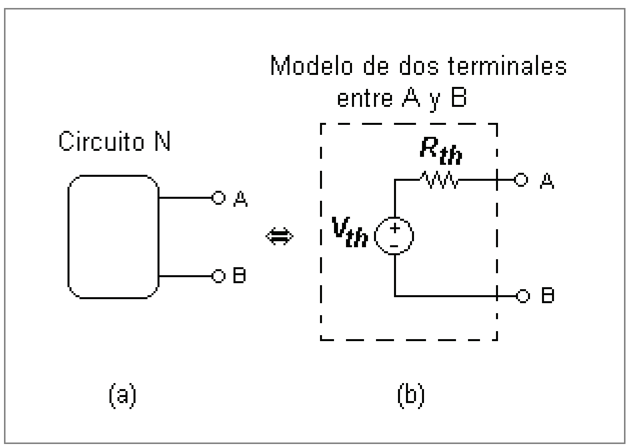


Figura 6-1

La Figura 6-1 esquematiza el concepto básico del Teorema de Thévenin: “Dado un circuito lineal cualquiera N, para un par de terminales A y B de dicho circuito, es posible encontrar un circuito equivalente formado por una fuente de voltaje ideal en serie con una resistencia, de manera tal que ese circuito de dos terminales produzca los mismos valores de voltaje y corriente en esos terminales (conectados o no a otro circuito) que el circuito original”. La fuente de voltaje tendrá un valor conocido como *Voltaje de Thévenin* V_{TH} y la resistencia tendrá un valor conocido como *Resistencia de Thévenin* R_{TH}.

Este teorema nos permite introducir un método de análisis de circuitos adicional: dividir el circuito original en componentes de dos puertos, que son equivalentes de Thévenin de una parte del circuito, los cuales se interconecten entre sí. Esto permite realizar cálculos más sencillos que con el circuito completo. Como se verá en los circuitos con inductancias o capacitancias, el análisis del comportamiento de corrientes y voltajes en circuitos de primer y segundo orden, mediante ecuaciones diferenciales, también se simplifica utilizando el equivalente de Thévenin entre los terminales de las capacitancias o inductancias, de las cuales se quieren analizar los fenómenos transitorios, al utilizar las fórmulas encontradas para circuitos *RC* o RL, que están formados por una capacitancia o una inductancia en serie con una resistencia y una fuente de voltaje.

Otra utilidad, probablemente la más importante de este concepto, es que teniendo este modelo es sencillo encontrar la máxima transferencia de potencia del circuito N a otro circuito conectado a los terminales A y B.

Por lo estudiado en el capítulo de transformación de fuentes es evidente que el circuito equivalente de Thévenin se puede convertir también en circuito de dos terminales formado por una fuente de corriente en paralelo con una resistencia como se muestra en la Figura 6-2. A este modelo se le conoce como equivalente de Norton, el cual se puede calcular transformando el equivalente de Thévenin o haciendo los cálculos directos como se hace para el equivalente de Norton.

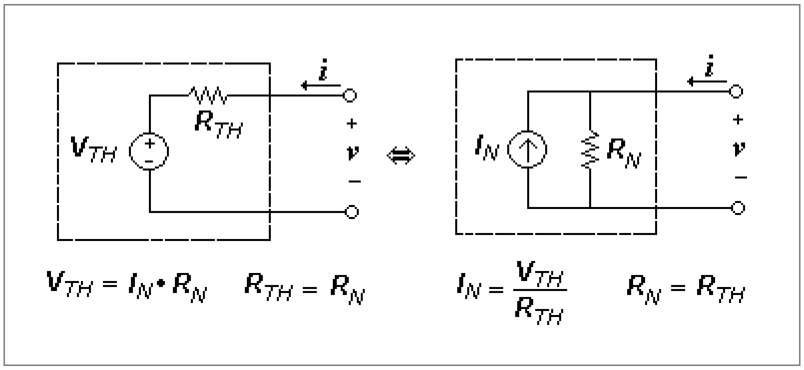


Figura 6-2

6.2. CÁLCULO DEL EQUIVALENTE DE THÉVENIN

Existen varios métodos para calcular el equivalente de Thévenin. Un método se basa en el uso de una fuente de prueba conectada entre los terminales A y B entre los cuales se desea obtener el equivalente, el cual permite obtener simultáneamente V_{TH} y R_{TH}. Otro método consiste en calcular por separado V_{TH} y R_{TH} aplicando varias técnicas. El cálculo del equivalente en estos casos implica la modificación del circuito original y el cálculo de corrientes, voltajes o resistencias equivalentes de los nuevos circuitos resultantes aplicando las técnicas tradicionales, como nodos, mallas, etc.

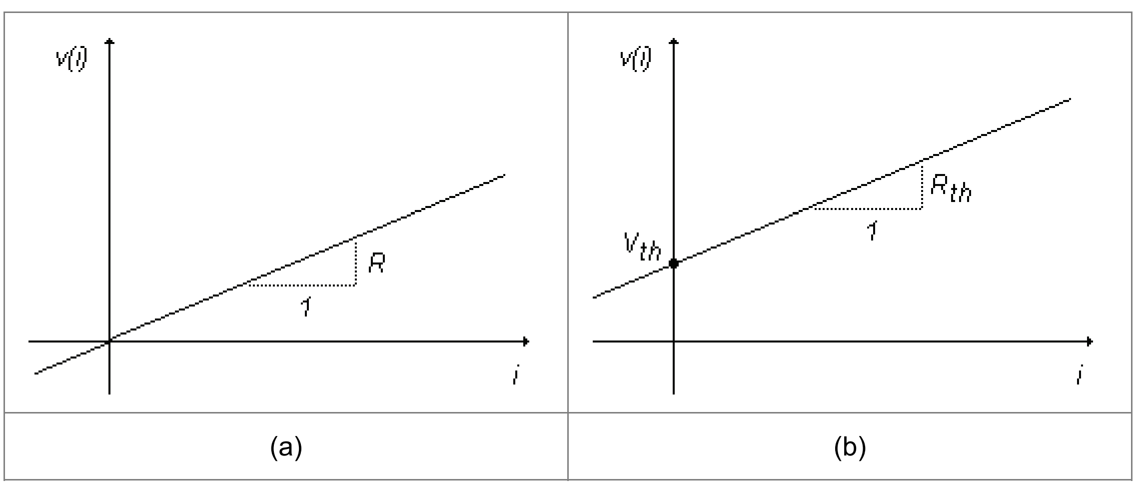


Figura 6-3

Adicionalmente a estos métodos basados en cálculos sobre los modelos de los circuitos, existe un método gráfico, de origen experimental. Hemos insistido en el hecho de que en un circuito de dos terminales nos interesa conocer la relación entre voltaje y corriente. En el caso de una resistencia, que es un elemento pasivo, por la ley de Ohm la relación entre voltaje y corriente es la resistencia R como se muestra en la Figura 6-5(a), en donde la pendiente de la recta es la resistencia. Esta recta tiene la forma y = ax + b. Siendo y el voltaje, x la corriente, a la resistencia R y b el cruce por el eje y (con i=0), que en el caso de una resistencia es cero. En el caso de un equivalente de Thévenin, formado por una fuente de voltaje y una resistencia en serie la relación entre voltaje y corriente se muestra en la Figura 6-5(b). Como el elemento es lineal la relación entre voltaje y corriente es una recta de la forma y = ax + b, pero en este caso por ser un elemento activo, el valor de b ya no es cero, sino que vale Vth. De manera que teniendo datos experimentales de voltaje contra corriente entre los dos terminales se puede encontrar el equivalente de Thévenin encontrando el cruce por el eje y para encontrar el voltaje de Thévenin V_{TH}, y la pendiente de la recta, para conocer la resistencia de Thévenin R_{TH}. Dependiendo del circuito, el valor del voltaje de Thévenin V_{TH} puede ser positivo o negativo.

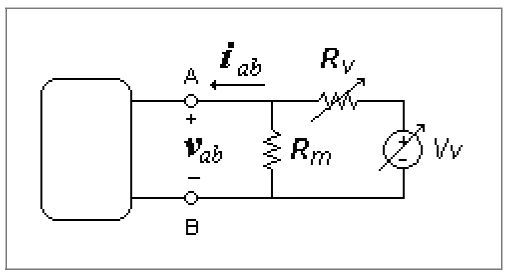


Figura 6-4

Una vez tenemos la curva V-I el método gráfico es fácil de aplicar. ¿Pero como obtener estos datos experimentalmente si no nos dan la tabla? Existen distintas formas de hacer esto. Si sabemos que el circuito tiene elementos activos podemos poner distintas resistencias (o una resistencia variable, o una década de resistencias) entre los terminales a y b y medir los valores resultantes de voltaje y corriente. Si el circuito no tiene elementos activos debemos poner una fuente de voltaje que podamos variar para obtener distintas mediciones de voltaje y corriente. Como puede ocurrir que no sepamos lo que existe al interior de un circuito dado, podemos hacer un montaje experimental que contenga una fuente de voltaje en serie con la resistencia variable. Para mejorar los cálculos es bueno tener en cuanta la resistencia interna de la fuente de voltaje, así como la resistencia interna de los equipos de medición del voltaje. Este montaje se puede apreciar en la Figura 6-6. en donde *Rm* representa la resistencia interna del voltímetro, *Rv* la resistencia variable y *Vv* la fuente de voltaje variable.

6.3. MÉTODO DE FUENTE DE PRUEBA VAB

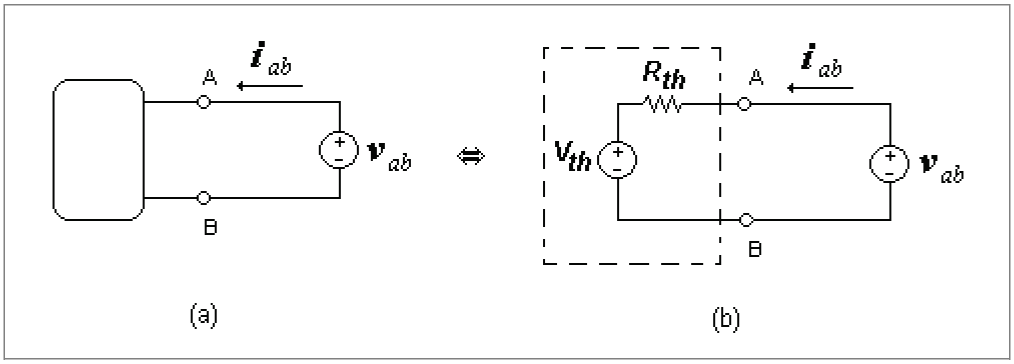


Figura 6-5

La Figura 6-5 muestra el método de la fuente de prueba en la cual al conectar la fuente de voltaje v_{ab} entre los terminales A y B de cualquiera de los dos circuitos (a) y (b) se debe producir la misma corriente i_{ab}, dado que los dos circuitos son equivalentes. De la Figura 6-5.b tenemos:

$$v_{ab} = V_{TH} + R_{TH} \cdot i_{ab}$$

Por tanto para encontrar el equivalente debemos calcular sobre el circuito original (Figura 6-5.a) v_{ab} en función de $i_{ab,}$ de manera que nos de una expresión de la forma:

$$v_{ab} = V_x + R_x \times i_{ab}$$

y por comparación se tiene que:

$$V_{TH} = V_x$$
$$R_{TH} = R_x$$

Por supuesto que el cálculo de V_x y R_x requiere la aplicación de técnicas de análisis de circuitos para encontrar la expresión deseada.

6.4. CONSECUENCIAS DEL MÉTODO DE FUENTE DE PRUEBA

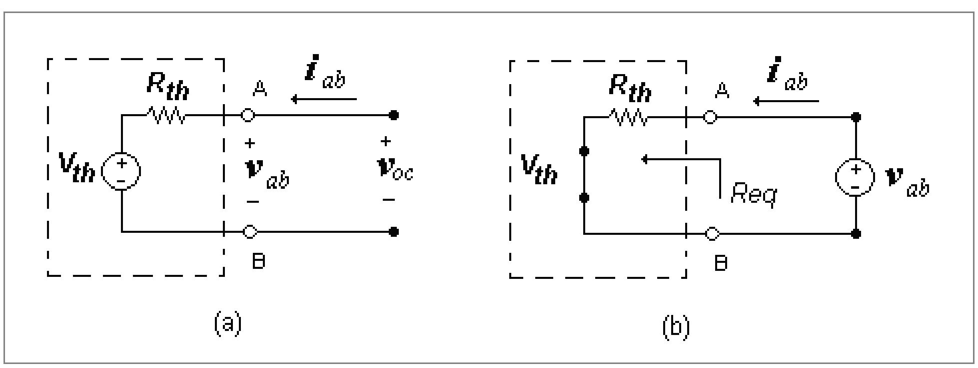


Figura 6-6

Si en la Figura 6-6.b dejamos el circuito abierto se tiene que la corriente i_{ab} es cero y por tanto la ecuación $v_{ab} = V_{TH} + R_{TH} * i_{ab}$ se transforma en:

$$v_{ab}(i_{ab} = 0) = V_{TH} = v_{oc}$$

en donde v_{oc} es el voltaje de circuito abierto, como se muestra en la Figura 6-6.a.

Por otra parte, si en la figura 3.b quitamos la fuente de voltaje de Thévenin (haciendo $V_{TH} = 0$), se tiene que la ecuación $v_{ab} = V_{TH} + R_{TH} * i_{ab}$ se transforma en:

$$v_{ab}(V_{TH} = 0) = R_{TH} \cdot i_{ab}$$
$$R_{TH} = \frac{v_{ab}(V_{TH} = 0)}{i_{ab}} = R_{eq}$$

de manera que la resistencia equivalente R_{eq} vista desde los terminales A y B es igual a la resistencia de Thévenin R_{TH}. Si no hay fuentes dependientes la resistencia de Thévenin es tan solo la resistencia entre A y B calculada al quitar las fuentes del circuito resistencia equivalente como se muestra en la figura 4.b:

$$R_{TH} = R_{eq} = \frac{v_{ab}}{i_{ab}}$$

6.5. MÉTODO DE VOLTAJE DE CIRCUITO ABIERTO Y RESISTENCIA EQUIVALENTE

De lo anterior se deduce el otro método para calcular el equivalente de Thévenin: calcular el voltaje de circuito abierto v_{oc} que será igual al voltaje de Thévenin y luego calcular la resistencia equivalente R_{eq} entre A y B, que será la resistencia de Thévenin R_{TH}.

Para calcular el voltaje de circuito abierto v_{oc} se dejan todas las fuentes, (independientes e dependientes) del circuito original de la figura 3.a y se calcula la caída de voltaje entre los nodos A y B en circuito abierto.

Para calcular la resistencia equivalente R_{eq} entre A y B **se apagan todas las fuentes independientes** y se analiza una de estas dos posibilidades:

Si **no hay** fuentes dependientes la resistencia equivalente R_{eq} entre A y B es el equivalente resistivo entre los terminales A y B calculada por medio de transformaciones de resistencias serie, paralelo o delta-estrella.

Si **hay** fuentes dependientes se dejan tales fuentes, se pone una fuente de prueba entre A y B, como se muestra en la figura 4.b y se calcula la resistencia equivalente como $R_{eq} = \frac{v_{ab}}{i_{ab}}$.

6.6. CÁLCULO DEL EQUIVALENTE DE NORTON

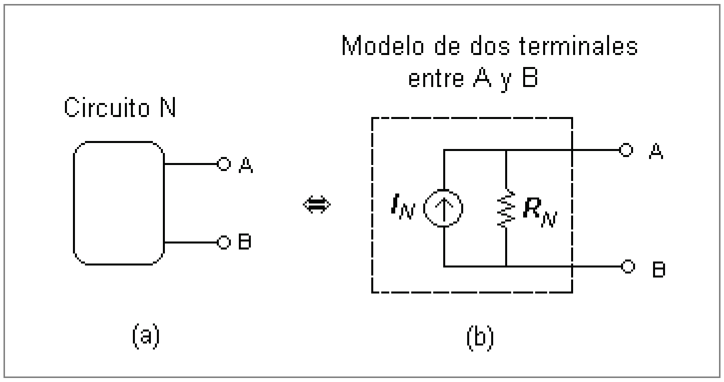


Figura 6-7

Como se explicó en la introducción el equivalente de Norton mostrado en la Figura 6-7.b se puede obtener a partir del equivalente de Thévenin aplicando transformación de fuentes Figura 6-8**.** Sin embargo, existen métodos similares a los del equivalente de Thévenin para encontrar el equivalente de Norton sin pasar por el equivalente de Thévenin.

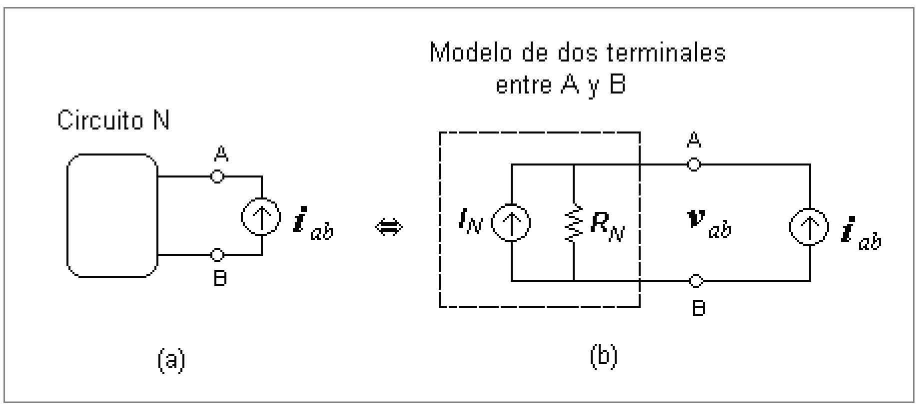


Figura 6-8

La principal manera de calcular el equivalente de Norton se muestra en la Figura 6-8**.**a, en la cual vemos que para la Figura 6-8.b se tiene:

$$i_{ab} = \frac{v_{ab}}{R_N} - I_N$$

de manera que como se hizo para el caso de Thévenin, al calcular en el circuito de la Figura 6-8.a i_{ab} en función de v_{ab} nos de una expresión de la forma:

$$i_{ab} = \frac{v_{ab}}{R_x} - I_x$$

y por comparación se tiene que:

$$I_N = I_x$$

$$R_N = R_x$$

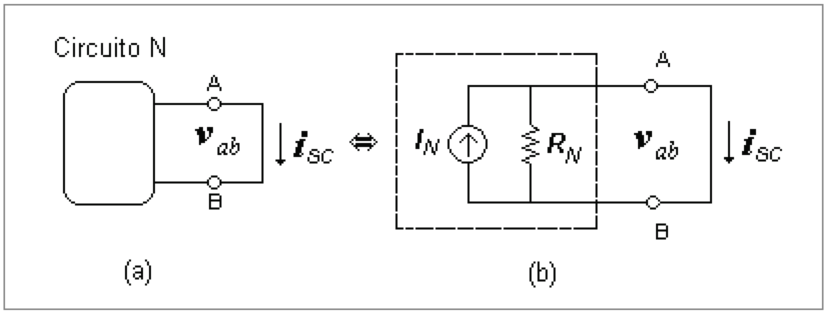


Figura 6-9

Si en el circuito original N se hace un corto circuito entre los terminales A y B como se muestra en la Figura 6-9.a, se tiene que $v_{ab} = 0$, y por lo tanto la ecuación para i_{ab} para la Figura 6-9.b se convierte en:

$$i_{ab} = -I_N$$

y la ecuación para i_{ab} para la Figura 6-8.a se convierte en:

$$i_{ab} = -I_x$$

Como $\boldsymbol{I_x}$ es la corriente entre A y B al hacer el corto circuito (Figura 6-9.a) esta corriente se denomina la corriente de corto circuito i_{sc}.

De manera que:

$$I_X = I_N = i_{sc}$$

Esto significa que para calcular el valor de la fuente de corriente del equivalente de Norton (Figura 6-9.b) se calcula la corriente de corto circuito i_{sc} , haciendo un corto entre los terminales A y B del circuito original N (Figura 6-9.a). Luego se calcula la resistencia de Norton de la misma manera que se calculó la de Thévenin: se apagan las fuentes independientes y se calcula la resistencia equivalente.

$$i_{ab} = \frac{v_{ab}}{R_N} - I_N$$

con $I_N = 0$, de manera que

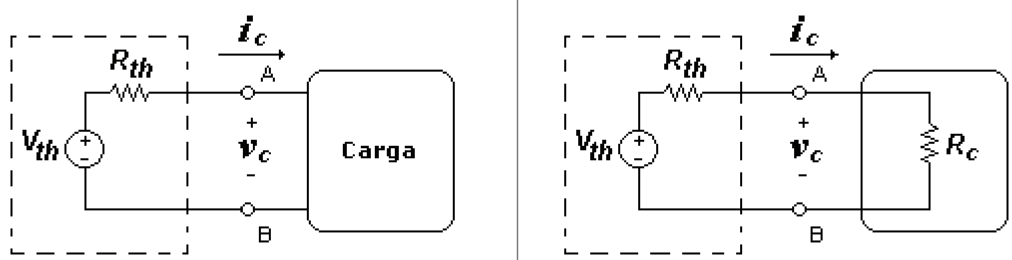
$$iab = vab / RN$$

$$R_{eq} = \frac{v_{ab}}{i_{ab}} = R_N$$

Otra relación importante que se desprende de todo lo anterior es:

$$R_{TH} = R_N = \frac{v_{oc}}{i_{sc}}$$

6.7. MÁXIMA TRANSFERENCIA DE POTENCIA



(a)	(b)

Figura 6-10

Cuando una fuente o un circuito se conectan a una carga cualquiera es deseable que tal fuente o circuito pueda transmitir la mayor cantidad de potencia a la carga que la recibe. La Figura 6-10

.a muestra un equivalente de Thévenin de un circuito cualquiera (a la izquierda de AB) conectado a una carga cualquiera. Al conectar esta carga aparece un voltaje *Vc* y una corriente *Ic* entre los nodos A y B. Para determinar las condiciones en las cuales se presenta máxima transferencia de potencia de un circuito a otro vamos a considerar dos casos: el primero en el cual solo hay una carga resistiva, y el segundo en el cual la carga puede tener elementos pasivos y activos.

6.8. MÁXIMA TRANSFERENCIA DE POTENCIA CON CARGA RESISTIVA

En el caso particular de que la carga sea una resistencia *Rc* (Figura 6-10

.b) tendremos:

$$V_C = V_{th} \frac{R_C}{R_{th} + R_C}$$

$$P_C(R_C) = \frac{V_C^{\;2}}{R_C} = V_{th}^{\;2} \frac{R_C}{(R_{th} + R_C)^2}$$

La Figura 6-13 muestra la variación de la potencia absorbida por la carga *Pc* en función de *Rc*.

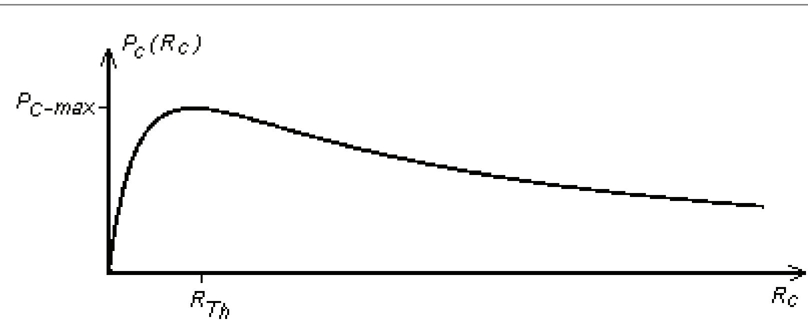


Figura 6-11

Como se puede apreciar en la gráfica la potencia absorbida –que es una función cuadrática- alcanza un máximo. Este valor máximo se calcula derivando la potencia e igualando a cero, con lo cual se encuentra que la potencia tendrá un máximo cuando:

$$\boxed{R_{th} = R_C}$$

de manera que para que haya máxima transferencia de potencia desde el circuito a la izquierda de AB (representado por su equivalente de Thévenin) se debe tener que la resistencia de la carga sea igual a la resistencia de Thévenin.

Adicionalmente, dado que estás dos resistencia son iguales, por divisor de voltaje se tiene que el voltaje máximo en *Vc* es Vc_{max} es la mitad de *Vth*:

$$V_C = V_{th}\frac{R_C}{R_{th}+R_C} = V_{th}\frac{R_{th}}{R_{th}+R_{th}} = \frac{1}{2}V_{th}$$

$$\boxed{V_C = \frac{1}{2}V_{th}}$$

En este caso la potencia máxima transferida será:

$$P_{C-\max} = \frac{V_{C-\max}{}^2}{R_C} = \frac{\left(\frac{1}{2}V_{th}\right)^2}{R_{th}} = \frac{V_{th}{}^2}{4R_{th}}$$

$$\boxed{P_{C-\max} = \frac{V_{th}{}^2}{4R_{th}}}$$

6.9. MÁXIMA TRANSFERENCIA DE POTENCIA CON CARGA ARBITRARIA

Si el circuito de carga conectado es una carga arbitraria, que no es necesariamente una resistencia, la condición para máxima transferencia sigue siendo que Vc_{max} = *Vth/2*, aunque la resistencia de carga sea diferente de Rth. Para ver que esto es así veamos las ecuaciones del circuito de la Figura 6-10.a:

$$I_C = \frac{V_{th} - V_C}{R_{th}}$$

$$P_C = V_C I_C = V_C\left(\frac{V_{th} - V_C}{R_{th}}\right)$$

$$P_C = \frac{V_{th}\cdot V_C}{R_{th}} - \frac{V_C{}^2}{R_{th}}$$

$$\frac{dP_C}{dV_C} = \frac{V_{th}}{R_{th}} - 2\frac{V_C}{R_{th}} = 0$$

De donde se tiene que:

$$\boxed{V_{C-\max} = V_{th}/2}$$

De manera que si queremos que haya máxima transferencia de un circuito representado por su equivalente de thévenin a otro circuito se debe tener que el voltaje en la unión de los dos circuitos sea la mitad del voltaje de thévenin, lo cual se debe logra variando los parámetros internos del circuito arbitrario conectado (variar, los valores de las fuentes o de las resistencias por ejemplo).

La potencia máxima transferida por el circuito será:

$$I_{C-\max} = \frac{V_{th} - V_{C-\max}}{R_{th}}$$

$$P_{C-\max} = V_{C-\max} I_{C-\max} = V_{C-\max}\left(\frac{V_{th} - V_{C-\max}}{R_{th}}\right) = (V_{th}/2)\left(\frac{V_{th} - V_{th}/2}{R_{th}}\right)$$

$$P_{C-\max} = \frac{V_{th}^{\ 2}}{4R_{th}}$$

Como se ve es el mismo valor encontrado en el caso puramente resistivo. De manera que sin importar el circuito de carga conectado, la máxima transferencia de potencia está dada exclusivamente por el equivalente de thévenin:

$$\boxed{P_{C-\max} = \frac{V_{th}^{\ 2}}{4R_{th}}}$$

Ejemplo 6-1. Calculo del Equivalente de Thévenin por tres métodos.

Para el circuito de la Figura 6-12 calcular el equivalente de thévenin entre los nodos a y b por los siguientes métodos:

a. Con fuente de prueba.
b. Encontrando Voc y Rt por separado.
c. Encontrando Voc, Isc y Rt por separado (no hay que volver Voc pues ya lo hizo en la parte (b).

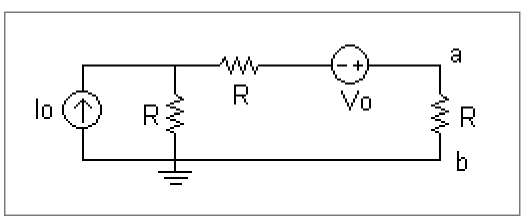
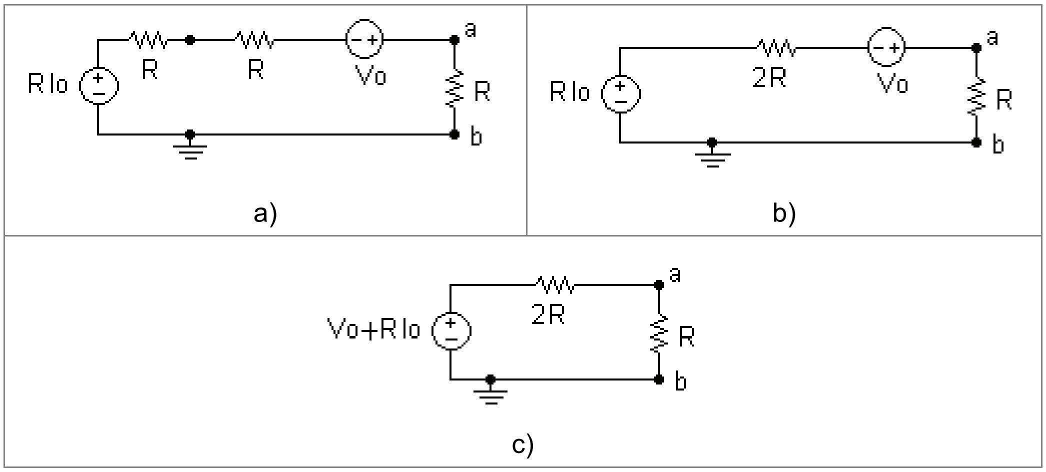


Figura 6-12

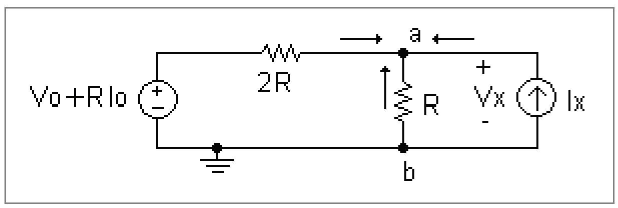
Solución

Para simplificar el circuito usamos transformación de fuentes:



Parte a)

Primero ponemos una fuente de prueba Ix y calculamos Vx en función de Ix.



Hacemos KCL en el nodo a:

$$\frac{(RIo+Vo)-Vx}{2R}+Ix-\frac{Vx}{R}=0$$

$$(RIo+Vo)+2RIx-3Vx=0$$

$$Vx=\left[\frac{RIo+Vo}{3}\right]+Ix\left[\frac{2R}{3}\right]=0$$

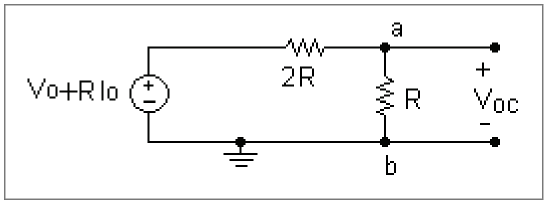
Así que

$$Vt=\left[\frac{RIo+Vo}{3}\right]$$

$$Rt=\left[\frac{2R}{3}\right]$$

Parte b)

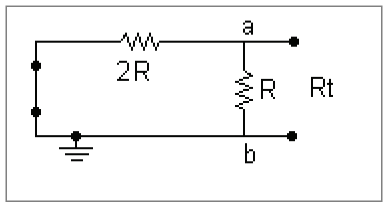
Primero calculamos el voltaje de circuito abierto Voc.



Hacemos divisor de voltaje:

$$Voc = \left(\frac{R}{R+2R} \right)(RIo + Vo) = \frac{RIo + Vo}{3}$$

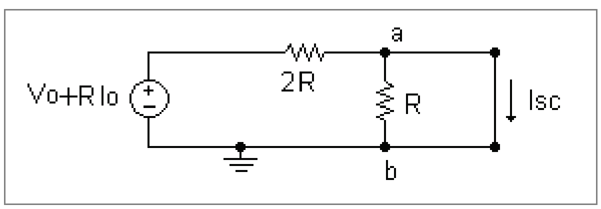
Ahora calculamos Rt apagando fuentes (por lo que no hay fuentes controladas):



$$Rt = \left[\frac{2R \cdot R}{2R + R} \right] = \frac{2R}{3}$$

Parte c)

Primero calculamos la corriente de corto circuito Isc:



$$Isc = \frac{RIo + Vo}{2R}$$

Ahora calculamos Rt a partir de Voc (que ya se calculó) y de Isc:

$$Rt = \frac{Voc}{Isc} = \frac{\left(\frac{RIo + Vo}{3} \right)}{\left(\frac{RIo + Vo}{2R} \right)} = \frac{2R}{3}$$

Ejemplo 6-2. Equivalente de Thévenin de circuito con fuente controlada.

Para el circuito de la Figura 6-13:

a. Calcular el equivalente de Thévenin a la izquierda de los nodos a y b.

b. Si $R_L = R$, conectar entre los terminales a y b y R_L un circuito para que haya máxima transferencia de potencia por parte del circuito a la izquierda de a y b.

c. Calcular el equivalente de Norton.

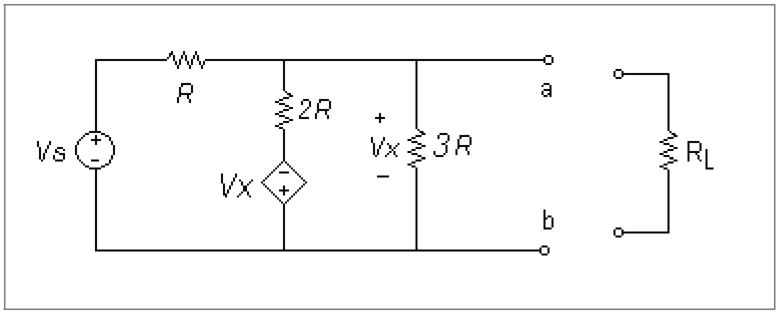


Figura 6-13

Solución

Parte a)

Colocamos una fuente de prueba para hallar el equivalente Thévenin, en el nodo a notamos que el voltaje es $V_{ab} = V_x$

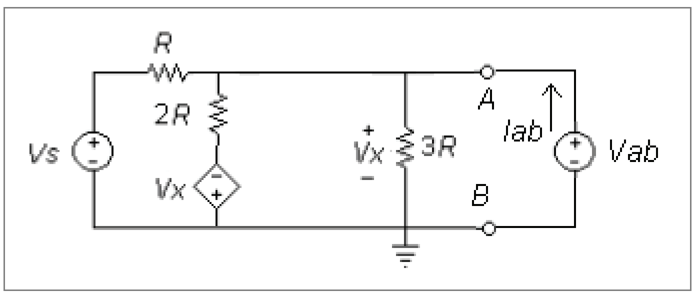


Figura 6-14

$$\left(\frac{Vs - Vx}{R}\right) + \left(\frac{-Vx - Vx}{2R}\right) + \left(\frac{0 - Vx}{3R}\right) + Iab = 0$$

$$\frac{Vs}{R} - \frac{Vx}{R} * \left(1 + 1 + \frac{1}{3}\right) + Iab = 0$$

$$-\frac{7Vx}{3R} = -Iab - \frac{Vs}{R} \quad \Rightarrow \quad Vx = Vab = \frac{3}{7}Vs + \frac{3}{7}R \cdot Iab$$

El equivalente queda

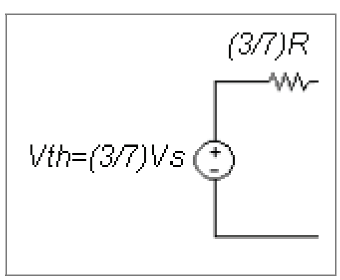


Figura 6-15

Parte b)

Para la condición de Máxima Transferencia de Potencia la resistencia de carga debe ser igual a R Thévenin por lo tanto lo que se hace es poner una resistencia en paralelo a la que ya tenemos de forma que se cumpla la condición.

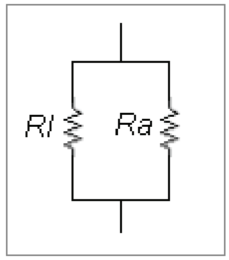


Figura 6-16

$$Rl \,||\, Ra = \frac{3}{7}R \quad \Rightarrow \quad \frac{Rl * Ra}{Rl + Ra} = \frac{3}{7}R \quad \Rightarrow \quad \frac{R * Ra}{R + Ra} = \frac{3}{7}R \quad \Rightarrow \quad 7Ra = 3R + 3Ra$$

$$Ra = \frac{3}{4}R$$

Parte c)

$$In = \frac{Vt}{Rt} = \frac{\frac{3}{7}Vs}{\frac{3}{7}R} = \frac{Vs}{R} \qquad\qquad Rt = Rn = \frac{3}{7}R$$

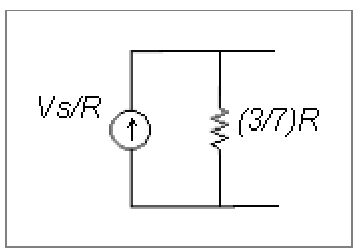


Figura 6-17

Ejemplo 6-3. Equivalente de Thévenin de circuito con amplificadores.

Para el circuito de la Figura 6-18:

a. Calcular el equivalente de Thévenin a la derecha de los nodos cd.
b. Conectar el circuito a la derecha de cd al de la izquierda de ab de la Figura 6-17 y calcular el valor de *Vk* requerido para que haya máxima transferencia de potencia al circuito de la derecha.

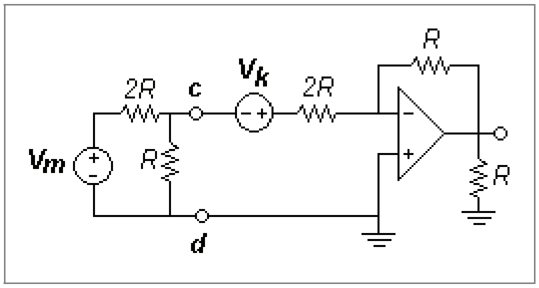


Figura 6-18

Solución

Parte a)

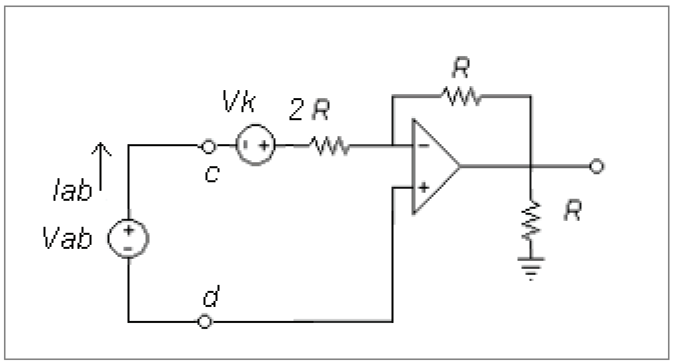


Figura 6-19

$$Iab = \frac{(Vab + Vk)}{2R}$$

$$Vab = -Vk + 2RIab$$

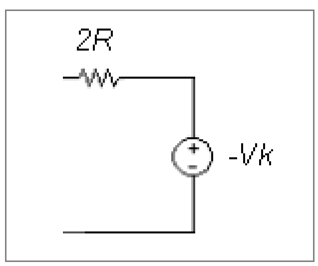


Figura 6-20

Parte b)

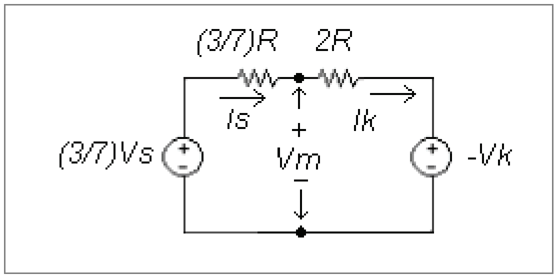


Figura 6-21

Para que halla Máxima Transferencia de Potencia, por parte del circuito de la izquierda se requiere que:

$$Vm = \frac{Voc}{2} = \frac{\frac{3}{7}Vs}{2} = \frac{3}{14}Vs$$

$$Ik = \frac{Vm-(-Vk)}{2R} = \frac{Vm+Vk}{2R} = \frac{\frac{3}{14}Vs+Vk}{2R} = \frac{3Vs}{28R} + \frac{Vk}{2R}$$

$$Is = \frac{\frac{3}{7}Vs - Vm}{\frac{3}{7}R} = \frac{\frac{3}{7}Vs - \frac{3}{14}Vs}{\frac{3}{7}R} = \frac{Vs}{R} - \frac{Vs}{2R} = \frac{Vs}{2R}$$

$$Is = Ik$$

$$\frac{3Vs}{28R} + \frac{Vk}{2R} = \frac{Vs}{2R}$$

$$3Vs + 14Vk = 14Vs$$

$$Vk = \frac{14Vs - 3Vs}{14} = \frac{11}{14}Vs$$

Ejemplo 6-4. Thévenin con fuente controlada.

Para el circuito de la siguiente figura calcular el equivalente de Thévenin a la izquierda de los nodos a y b:

a. Por el método de fuente de prueba $V_{ab}(I_{ab}) = V_{th} + R_{th} \cdot I_{ab}$.

b. Por el método de V_{oc}/i_{sc} .

c. Por el método de fuente de prueba V_{oc} y R_{th} (sin calcular Isc -cálculo directo de Rth).

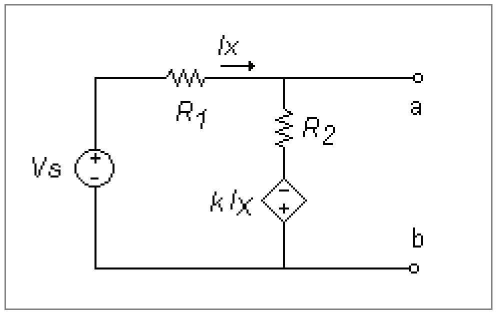


Figura 6-22

Solución

Parte a)

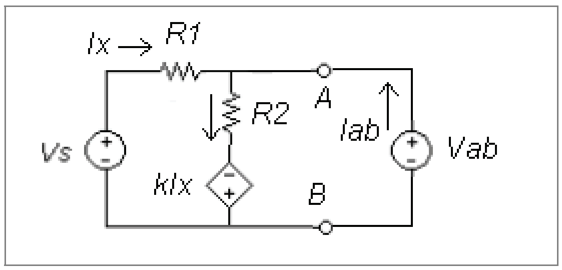


Figura 6-23

$$Ix = \frac{Vs - Vab}{R1}$$

$$Ix + Iab = I_{R2} = \frac{Vab + kIx}{R2} \quad \Rightarrow \quad R2Ix + R2Iab = Vab + kIx$$

$$Vab = (R2 - k)Ix + R2Iab \quad \Rightarrow \quad Vab = (R2 - k) * \left(\frac{Vs - Vab}{R1}\right) + R2Iab$$

$$\left(1 + \frac{R2 - k}{R1}\right)Vab = \left(\frac{R2 - k}{R1}\right)Vs + R2Iab$$

$$Vab = \left(\frac{R2 - k}{R1 + R2 - k}\right)Vs + \frac{R1 * R2}{R1 + R2 - k} Iab$$

El equivalente queda

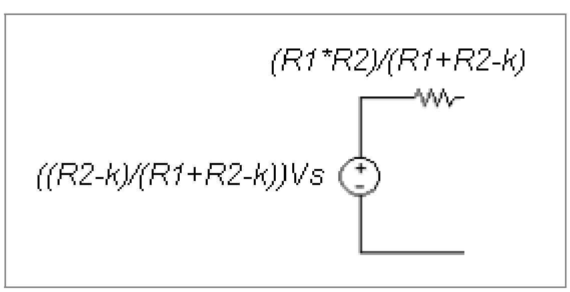


Figura 6-24

Parte b)

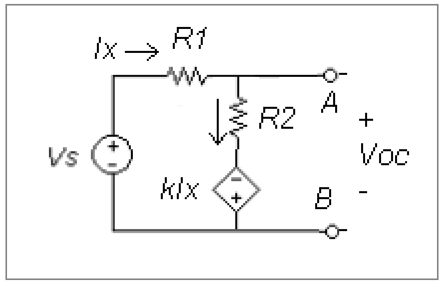


Figura 6-25

$$-Vs + IxR1 + IxR2 - kIx = 0$$

$$Ix = \frac{Vs}{R1 + R2 - k} \quad \Rightarrow \quad Voc = IxR2 - kIx = \left(\frac{Vs}{R1 + R2 - k}\right)R2 - k\left(\frac{Vs}{R1 + R2 - k}\right) = (R2 - k)\left(\frac{Vs}{R1 + R2 - k}\right)$$

$$Voc = \left(\frac{R2 - k}{R1 + R2 - k}\right)Vs$$

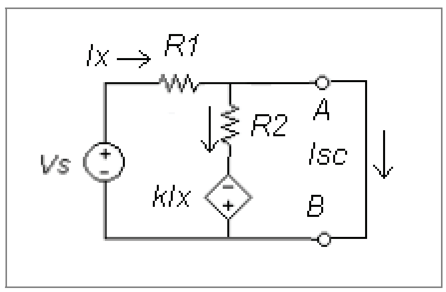


Figura 6-26

$$Ix = \frac{Vs}{R1} \qquad Ir2 = \frac{0 + kIx}{R2}$$

$$Ix = Ir2 + Isc \quad \Rightarrow \quad Isc = Ix - Ir2 = \frac{Vs}{R1} - \left(k\frac{Ix}{R2}\right) = \frac{Vs}{R1} - \frac{kVs}{R1R2}$$

$$Isc = \left(\frac{R2 - k}{R1R2}\right)Vs$$

$$Rth = \frac{Voc}{Isc} = \frac{\left(\frac{R2 - k}{R1 + R2 - k}\right)Vs}{\left(\frac{R2 - k}{R1R2}\right)Vs} = \frac{R1R2}{R1 + R2 - k}$$

Parte c)

En el anterior punto se hallo Voc el cual también se usa en este punto. ahora lo que hacemos es poner otra fuente de prueba y apagar la fuente Vs

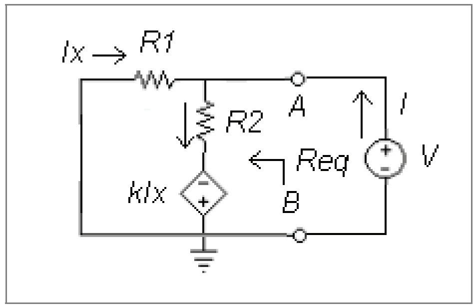


Figura 6-27

$$Rth = \mathrm{Re}q = \frac{V}{I} \qquad Ix = \frac{0-V}{R1} \qquad Ix + I = Ir2 = \frac{V+kIx}{R2} = \frac{V}{R2} + \left(\frac{k}{R2}\left(\frac{-V}{R1}\right)\right)$$

$$I = \left(\frac{1}{R2} - \frac{k}{R1R2}\right)V - Ix = \left(\frac{1}{R2} - \frac{k}{R1R2}\right)V - \left(-\frac{V}{R1}\right)V = \left(\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} - \frac{k}{R1R2}\right)V$$

$$Rth = \frac{V}{I} = \frac{V}{\left(\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} - \frac{k}{R1R2}\right)V} = \frac{R1R2}{R1+R2-k}$$

Ejemplo 6-5. Equivalente de Thévenin con transformador ideal.

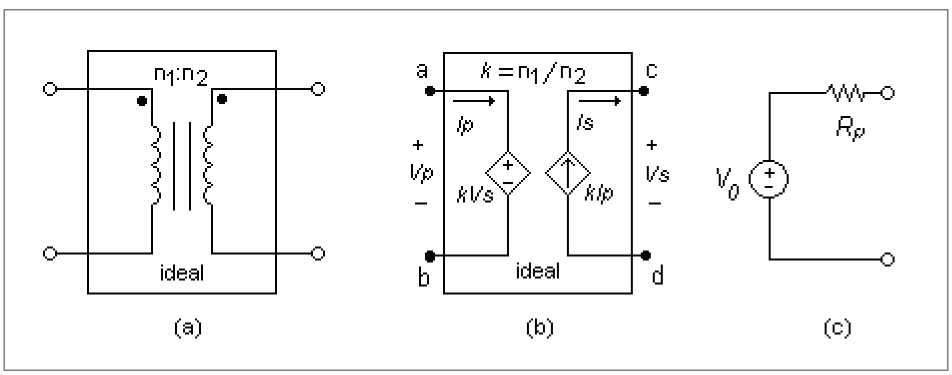


Figura 6-28

El circuito de la (a) es el símbolo del transformador ideal con un número de vueltas n_1 en la bobina primaria (izquierda) y n_2 en la secundaria (derecha).

La Figura 6-28(b) representa un modelo del mismo transformador ideal por medio de fuentes controladas, las cuales relacionan voltaje y corriente entre el lado primario y el lado secundario. Se quiere calcular el equivalente de Thévenin a la salida del secundario al conectar en el primario el circuito de la (c).

Solución

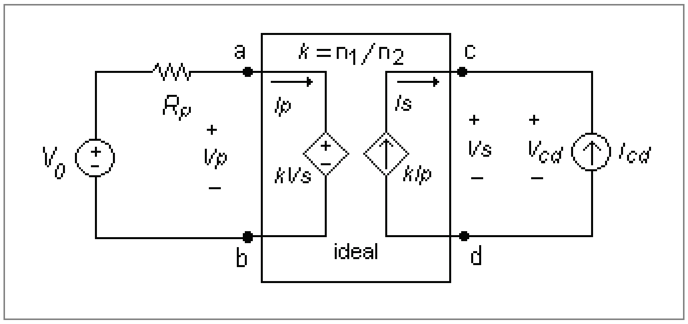


Figura 6-29

Para encontrar el equivalente de Thévenin del circuito desde el secundario (cd) ponemos una fuente de prueba de corriente Icd y calculamos el voltaje Vcd en función de dicha corriente:

$$V_{cd}(I_{cd}) = V_{TH} + R_{TH} \cdot I_{cd}$$

KVL en cada malla primaria	Relaciones de I y V en secundario
$-V_0 + R_p I_p + V_p = 0$ $-V_0 + R_p\left(-\frac{I_{cd}}{k}\right) + kV_s = 0$ $-V_0 - \frac{R_p I_{cd}}{k} + kV_{cd} = 0$ $V_{cd} = \frac{V_0}{k} + \frac{R_p}{k^2} I_{cd}$	$-V_s + V_{cd} = 0$ $V_{cd} = V_s$ $I_{cd} = -I_s$

De lo anterior por comparación con $V_{cd}(I_{cd}) = V_{TH} + R_{TH} \cdot I_{cd}$ se tiene que:

$$V_{Th} = \frac{V_0}{k}$$

$$R_{Th} = \frac{R_p}{k^2}$$

Como se muestra en la Figura 6-30 la resistencia que se ve en la salida del transformador (resistencia vista en el secundario) es igual a la resistencia del lado primario sobre el cuadrado de la relación de vueltas del transformador. Igualmente el voltaje visto desde el secundario es el voltaje aplicado al primario sobre la relación de vueltas.

Este equivalente nos permite realizar cálculos desde el lado secundario olvidándonos de lo que está pasando en el primario, además de que simplifica el circuito pues se reduce la malla del lado primario.

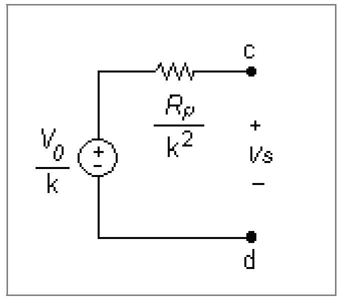


Figura 6-30

Ejemplo 6-6. Equivalente de Thévenin y Máxima transferencia de potencia.

Para el circuito de la Figura 6-31, que tiene el equivalente de Thévenin (Vt, Rt) de algún circuito, calcular el valor de Ro para que exista máxima transferencia de potencia a la carga formada por Ro y Vo.

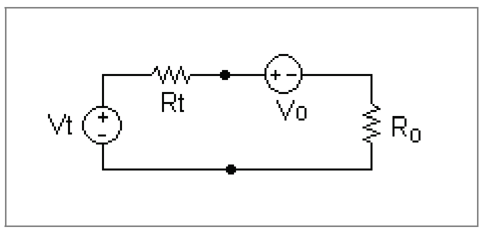
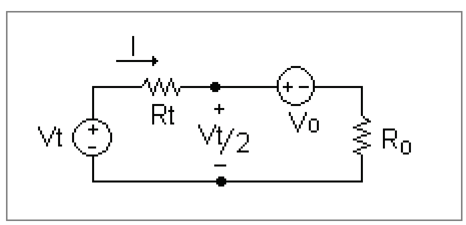


Figura 6-31

Para que exista máxima transferencia de potencia a la carga se requiere que el voltaje sobre ella sea la mitad del voltaje de Thévenin.



$$I = \frac{Vt - Vo}{Rt + Ro}$$

$$\frac{Vt}{2} = Vt - Rt \cdot I = Vt - Rt \cdot \frac{Vt - Vo}{Rt + Ro}$$

$$Ro = Rt\left(1 - \frac{2Vo}{Vt}\right)$$

Ejemplo 6-7. Norton y Máxima transferencia de potencia.

Para el circuito de la Figura 6-32 encontrar:

a. Equivalente de Norton.

b. R_L y la potencia respectiva para que exista máxima transferencia de potencia en R_L.

c. Cambiar por el circuito de la derecha y encontrar el valor de V_A para máxima transferencia de potencia a dicho circuito. Ayuda: recordar que se debe cumplir que $V_A = \frac{Voc}{2}$.

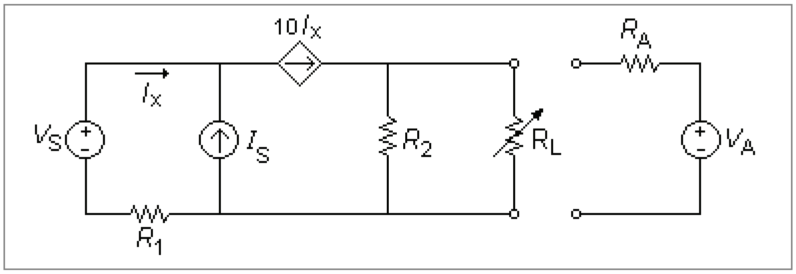


Figura 6-32

Solución

Parte a)

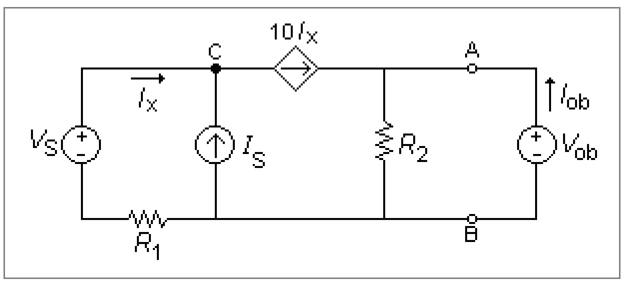


Figura 6-33

Ecuaciones de nodos:

Nodo C:	$I_X + I_S = 10I_X$ $I_S = 9I_X$ $I_X = \frac{I_S}{9}$
Nodo A:	$10I_X + I_{0b} = \frac{V_{0b}}{R_2}$ $V_{0b} = 10R_2I_X + R_2I_{0b}$ $V_{0b} = \underbrace{10R_2\left(\frac{I_S}{9}\right)}_{V_{0C}} + \underbrace{R_2}_{R_T}I_{0b}$

Nodo B:	*Tierra*

$$V_{0C} = \frac{10}{9} R_2 I_S$$

$$R_T = R_2$$

$$I_{SC} = \frac{V_{0b}}{R_T} = \frac{10}{9}\frac{R_2 I_S}{R_2} = \frac{10}{9} I_S$$

$$\boxed{\begin{array}{l} R_T = R_2 \\ I_{SC} = \frac{10}{9} I_S \end{array}}$$

El equivalente Norton obtenido se presenta en la Figura 6-34.

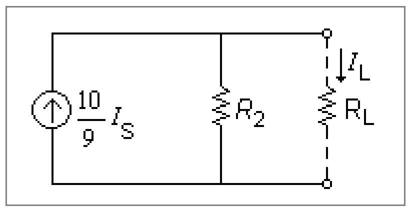


Figura 6-34

Parte b)

Para $P_{\max} \quad \rightarrow \quad R_T = R_L \Rightarrow \boxed{R_L = R_2}$

Si $R_L = R_2 \quad \Rightarrow \quad I_L = \frac{I_{SC}}{2} = \frac{5}{9} I_S$

$$P_{\max} = R_L I_L^2 = R_L I_{SC}^2 = R_L \left(\frac{5}{9} I_S\right)^2 = \boxed{\frac{25}{81} R_L I_S^2}$$

Parte c)

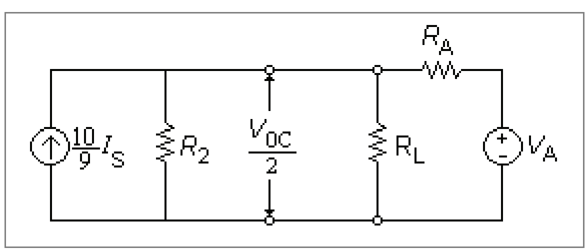


Figura 6-35

$$\frac{10}{9}I_S = \frac{V_{0C}}{2}\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_L}\right)+\frac{1}{R_A}\left(\frac{V_{0C}}{2}-V_A\right)$$

$$\frac{10}{9}I_S = \frac{V_{0C}}{2}\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_L}+\frac{1}{R_A}\right)-\frac{1}{R_A}V_A$$

$$V_A = R_A\left[\frac{V_{0C}}{2}\left(\frac{R_AR_L+R_AR_2+R_2R_L}{R_AR_LR_2}\right)-\frac{10}{9}I_S\right]$$

$$= \frac{V_{0C}}{2}\left(\frac{R_AR_L+R_AR_2+R_2R_L}{R_LR_2}\right)-\frac{10}{9}R_AI_S$$

Reemplazando el valor de V_{0C}:

$$V_A = \frac{\frac{10}{9}R_2I_S}{2}\left(\frac{R_AR_L+R_AR_2+R_2R_L}{R_LR_2}\right)-\frac{10}{9}R_AI_S$$

$$= \frac{5I_S}{9}\left(\frac{R_AR_L+R_AR_2+R_2R_L}{R_L}\right)-\frac{10}{9}R_AI_S$$

$$= \frac{5I_S}{9}\left(\frac{R_AR_L+R_AR_2+R_2R_L}{R_L}-2R_A\right)$$

6.10. SIMULACIONES

6.10.1. THÉVENIN, NORTON Y MÁXIMA TRANSFERENCIA DE POTENCIA

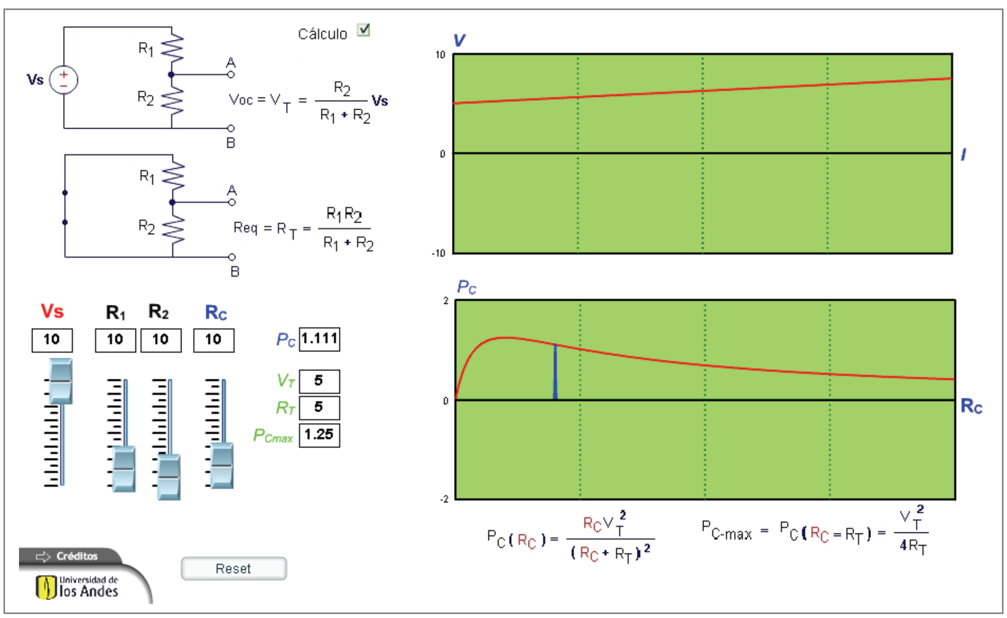


Figura 6-36

Descripción

Esta simulación permite mostrar el método de cálculo del equivalente de Thévenin para un circuito dado y ver cómo se afecta la potencia suministrada a la resistencia de carga al variar esta última. Así es posible ver cómo la máxima transferencia de potencia ocurre cuando la resistencia de carga es igual a la resistencia de Thévenin.

Uso educativo

Esta simulación se presenta como un complemento a la clase presencial, para estudiantes de primeros semestres de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Mecánica. Una vez los estudiantes manejan los conceptos de potencia absorbida, resistencia equivalente, linealidad y voltaje de circuito abierto, es posible interactuar con la simulación cambiando los valores de las resistencias del circuito y la fuente para obtener su equivalente de Thévenin. Con este equivalente luego se cambia la resistencia de carga R_C para ver sus efectos en la potencia de la carga y encontrar en dónde se produce la máxima transferencia de potencia.