215/89

УДК 517.5

З.А. ЧАНТУРИЯ

ОБ УСЛОВИЯХ НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИЙ ОБОБЩЕННОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

(Представлено академиком С.М. Никольским 25 III 1988)

Хорошо известен критерий Винера [1], см. также [2, с. 205] для непрерывности функций ограниченной вариации: пусть 2π-периодическая функция f имеет ограниченную вариацию на периоде, удовлетворяет условию

$$(1) \qquad \min\{f(x-0),\ f(x+0)\} \leqslant f(x) \leqslant \max\{f(x-0),\ f(x+0)\}$$

в каждой точке $x \in [0, 2\pi]$, a_k, b_k — коэффициенты Фурье функции f и $\rho_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$. Тогда для непрерывности функции f необходимо и достаточно каждое из следующих условий:

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 \rho_k^2 = o(n), \quad n \to \infty;$$

$$(3) \qquad \sum_{k=1}^{n} k \rho_k = o(n), \quad n \to \infty.$$

Достаточность условия (3) для непрерывности функции $f \in V$ вытекает также из одного результата Фейера [3], а необходимость этого условия доказана также Сидоном [4]. В дальнейшем мы предполагаем, что условие (1) выполнено.

С.М. Лозинский [5] показал, что для непрерывности функции $f \in V$ необходимо и достаточно каждое из следующих условий:

$$(4) \qquad \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 = o\left(\frac{1}{n}\right);$$

$$(5) \qquad \sum_{k=1}^{n} \rho_k = o(\ln n).$$

Для дальнейшего нам понадобится определение классов V_Φ.

Пусть функция Φ определена на $[0, \infty)$, строго возрастает, непрерывна и $\Phi(0) = 0$. Класс таких функций обозначим Φ.

О п р е д е л е н и е [6]. Пусть $\varphi \in \Phi$. Скажем, что 2π-п е р и о д и ч е с к а я ф у н к ц и я f и м е е т к о н е ч н у ю φ-в а р и а ц и ю, если

$$\sup_{\Pi} \sum_{k=1}^{n} \varphi(|f(x_k) - f(x_{k-1})|) < \infty,$$

где $\Pi = \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 2\pi\}$ – произвольное разбиение периода.

Обозначим через V_φ класс всех тех 2π-периодических функций f, для которых существует такое число $c > 0$, что cf имеет конечную φ-вариацию. При $\varphi(u) = u^p$, $p > 1$, получаются классы Винера V_p [1], а при $\varphi(u) = u$ – класс Жордана V.

Б.И. Голубов [7], установил, что условия (2)–(5) необходимы и достаточны для непрерывности функций классов V_p при $1 < p < 2$, а Э. Коэн [8], см. также [9], заметила, что если $\varphi \in \Phi$ и

$$(6) \qquad \lim_{u \to 0} \frac{u^2}{\varphi(u)} = 0,$$

то условия (2)–(5) остаются необходимыми и достаточными для непрерывности функций из классов V_φ.

Нами [10] доказано, что условие (6) окончательно, точнее, если $\varphi \in \Phi$, $\frac{1}{u}\varphi(u)$ почти возрастает на $(0, \delta)$, $\delta > 0$ (т.е. существует такое $c \geqslant 1$, что для любых x и $u > x$ из $(0, \delta)$ имеем $c\,\frac{1}{u}\varphi(u) \geqslant \frac{1}{x}\varphi(x)$) и (6) не выполняется, то в классе $C \cap V_\varphi$ существует функция, для которой условия (2)–(4) не имеют места. В частности, этот результат справедлив для выпуклых φ.

В той же работе мы показали, что если от φ не требовать регулярности, то V_φ может обладать некоторыми патологическими свойствами, а именно, существует $\varphi \in \Phi$ такое, что нарушено (6), а $C \cap V_\varphi$ состоит только из констант (см. также [11]).

Теперь мы утверждаем, что справедлива

Т е о р е м а 1. *Пусть* $\varphi \in \Phi$, $\frac{1}{u}\varphi(u)$ *почти возрастает на* $(0, \delta)$, $\delta > 0$, *и* (6) *не выполняется. Тогда в классе* $C \cap V_\varphi$ *существует функция, для которой условие* (5) *не имеет места.*

Заметим теперь, что для произвольной последовательности неотрицательных чисел $\{\rho_n\}$ (2) $\leftrightarrow$ (4) $\leftrightarrow$ (3) $\rightarrow$ (5).

В то же время из цитированных выше теорем следует, что условия (2)–(5) эквивалентны, если $\{\rho_n\}$ – модули коэффициентов Фурье функций класса V_φ, где φ удовлетворяет условию (6).

А как же обстоит дело, если φ не удовлетворяет условию (6)? В этом случае оказываются справедливыми следующие теоремы.

Теорема 2. *Пусть* $\varphi \in \Phi$, $\frac{1}{u}\varphi(u)$ *почти возрастает и*

$$\overline{\lim_{u\to 0}}\ \frac{u^2}{\varphi(u)} > 0.$$

Тогда в классе $C \cap V_\varphi$ *существует функция, которая удовлетворяет условию* (5) *и не удовлетворяет условию* (3) *(тем самым условиям* (2) *и* (4)*).*

Теорема 3. *Если для функции* φ *выполнены все условия теоремы* 2, *то в классе* $C \cap V_\varphi$ *существует функция, которая удовлетворяет условию* (3) *и не удовлетворяет условию* (2).

Как мы отметили выше, если отказаться от условия "$\frac{1}{u}\varphi(u)$ почти возрастает", то теоремы 1–3 перестают быть справедливыми.

Институт прикладной математики им. И.Н. Векуа
Тбилисского государственного университета

Поступило
26 IV 1988

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wiener N.* – Mass. J. Math., 1924, 3, p. 72–94. 2. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961. 936 с. 3. *Fejer L.* – J. reinen angew. math., 1913, vol. 142, p. 165–188. 4. *Sidon S.* – Acta sci. math. Szeged, 1924, vol. 2, p. 43–46. 5. *Лозинский С.М.* – ДАН, 1945, т. 49, № 8, с. 562–565. 6. *Young L.* – Acta math., 1936, 67, p. 251–282. 7. *Голубов Б.И.* – Матем. заметки, 1967, т. 1, № 3, с. 305–312. 8. *Cohen E.* – Rochy Mountain J. Math., 1979, vol. 9, p. 227–237. 9. *Waterman D.* – Real Analysis Exchange, 1977–1978, vol. 3, № 2, p. 61–85. 10. *Чантурия З.А.* – Матем. заметки, 1987, т. 41, № 2, с. 194–201. 11. *Чантурия З.А.* – Сообщ. АН ГССР, 1979, т. 93, № 3, с. 557–560.