

BÖLÜM 9

NORMAL DAĞILIM

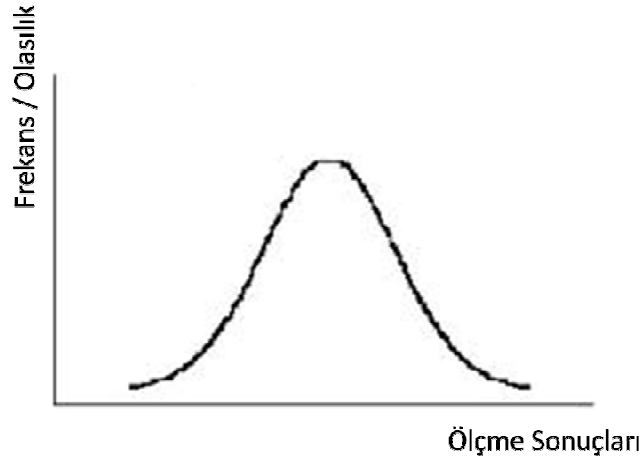
Normal dağılım; 'normal dağılım eğrisi (normaly distribution curve)' ile kavramlaştırılan hipotetik bir evren dağılımıdır. 'Gauss dağılımı' ya da 'Gauss eğrisi' olarak da bilinen normal dağılım eğrisi, sürekli ve olasılıklı bir fonksiyon eğrisidir.

Normal dağılım eğrisinin fonksiyonu aşağıdaki şekildedir:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma}$$

Formülden de anlaşılacağı üzere normal dağılımı tanımlayan parametreler evren ortalaması (μ) ve evren standart sapması (σ)'dır.

Normal dağılım eğrisi, bir fonksiyon olarak kartezyen düzlemde aşağıdaki gibi çizilir:



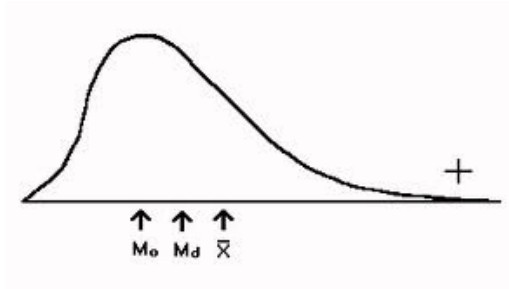
Normal dağılım eğrisi, ölçme sonuçlarının orta noktalarda yoğunlaştığı, uç noktalarda seyrekleştiği bir dağılımın şeklini ifade etmektedir.

Normal dağılımın karakteristik özellikleri şu şekildedir:

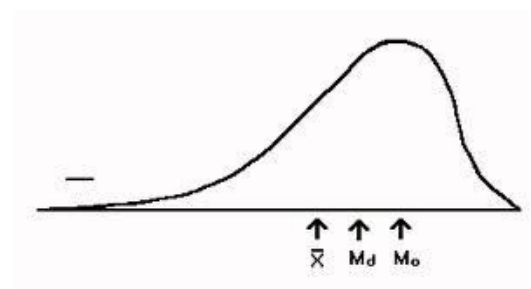
1. Simetriktir.
2. Asimptotiktir.
3. $(-\infty, +\infty)$ aralığında değerler alır.
4. Eğri altındaki toplam alanın olasılığı 1'dir. [$P(-\infty < X < +\infty) = 1$]
5. Ortalama, mod ve medyan değerleri çakışır. [$\mu = \text{Medyan} = \text{Mod}$]

9.1. ÇARPIK VE BASIK DAĞILIMLAR

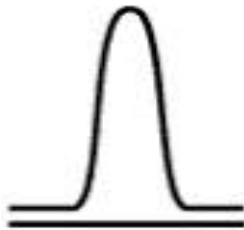
Aşağıda normal dağılımdan farklılaşan dağılımlar, dağılımın şekilleri ile gösterilmiştir.



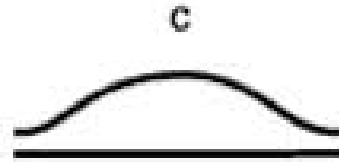
Şekil 1. Sağa Çarpık Dağılım



Şekil 2. Sola Çarpık Dağılım



Şekil 3. Sivri Dağılım



Şekil 4. Basık Dağılım

9.2. DAĞILIM NORMALLİĞİNİN İNCELENMESİ

a) Verilerin normal dağılım gösterip göstermediğini belirlemenin yollarından biri dağılımın grafiğini çizmek ve bu grafiği yorumlamaktır.

b) Verilerin dağılımının normal dağılım gösterip göstermediğini belirlemenin bir diğer yolu ortalama, mod ve medyan değerlerine bakmaktır. Normal dağılımda bu değerler çakışıkır. Bu istatistikler birbirine yaklaştığı ölçüde dağılım normal dağılıma yaklaşır. Birbirinden uzaklaştığı ölçüde dağılım çarpıklaşır. Fakat bu yakınlığın düzeyi ile ilgili belirli bir standart yoktur. Bu nedenle burada verilen diğer yöntemlerle birlikte değerlendirilmesi önerilir.

c) Normal dağılımı test etmenin bir diğer yolu da basıklık ve çarpıklık katsayılarına bakmaktır. Çarpıklık (skewness) katsayısı normal dağılımda 0'dır. Negatif çarpıklık katsayısı sağa çarpık dağılıma, pozitif çarpıklık katsayısı sola çarpık dağılıma işaret eder. Basıklık (kurtosis) katsayısı da normal dağılımda 0'dır. Pozitif basıklık katsayısı sivri dağılıma, negatif basıklık katsayısı ise basık bir dağılıma işaret eder. Dağılımın normal dağılımdan manidar düzeyde farklılaşmıyor olması için bu değerlerin (-1, +1) aralığında kalması beklenir.

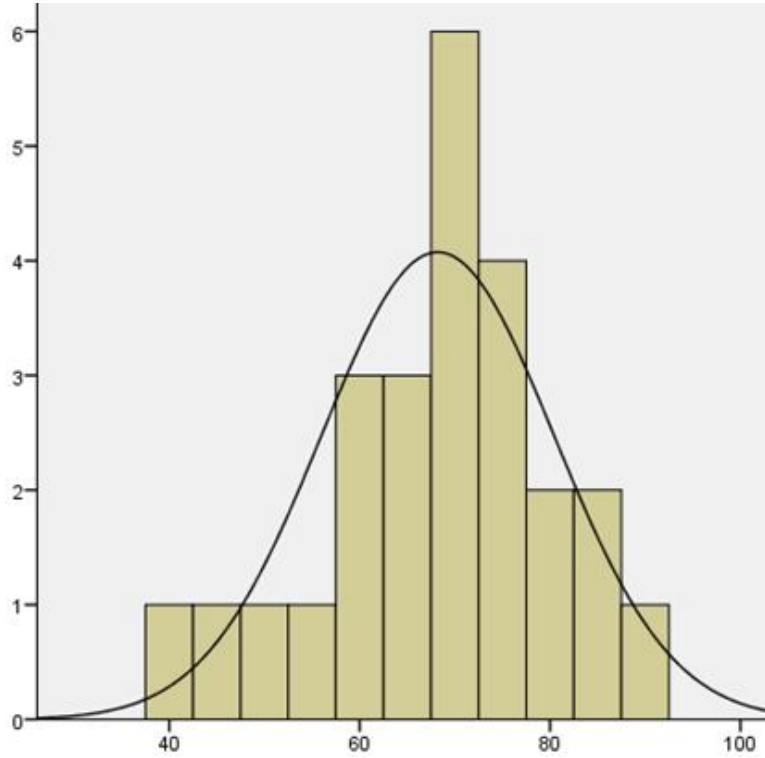
ÖRNEK 1.

Bir sınıftaki 25 öğrencinin yazılı sınav notları aşağıda verilmektedir.

NOT: 55; 60; 65; 75; 90; 95; 90; 80; 75; 75; 70; 65; 60; 50; 45; 40; 70; 65; 70; 70; 60; 70; 80; 75; 70

Yazılı sınav notlarının normal dağılım gösterip göstermediğini belirlemeye çalışalım.

a) Verilen notların dağılımını betimleyen histogram aşağıdaki gibidir.



Şekil 1. Öğrencilerin Yazılı Sınav Notlarının Dağılımı

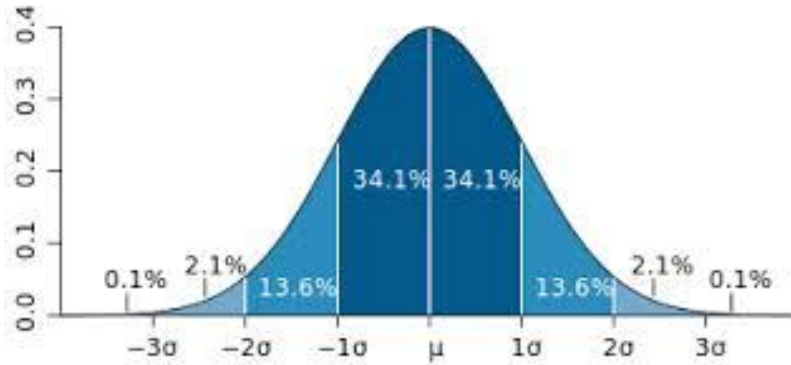
Histogramda görüldüğü gibi verilerin dağılımı normal dağılıma göre daha sivridir.

b) Örnekteki veriler için ortalama 68,2, medyan ve mod 70 olarak hesaplanır. Bu değerler birbirine oldukça yakındır. Buna göre dağılımın yatay ekseninde normal olduğu yani sağa ya da sola çarpık olmadığı söylenebilir.

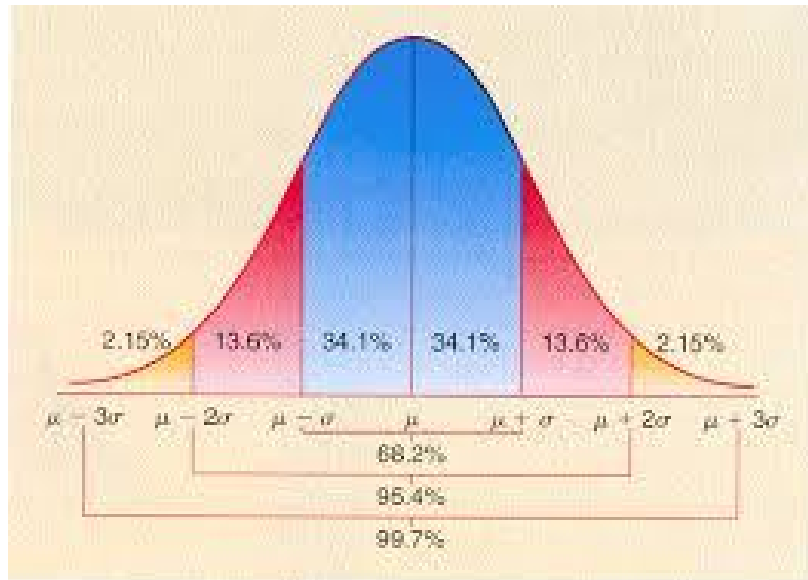
c) Örnekteki veriler için çarpıklık katsayısı -0,508 ve basıklık katsayısı 0,186'dır. Buna göre dağılım hafifçe sağa çarpık ve sivridir. Fakat bu sapmalar (-1, +1) aralığında kaldığı için dağılımın normal olduğu söylenebilir.

9.3. NORMAL DAĞILIM EĞRİSİ ALTINDAKİ ALANLAR VE OLASILIK

Normal dağılım eğrisi iyi tanımlı bir eğridir. Bu nedenle standart sapma aralıklarına göre eğri altında kalan alanlar hesaplanabilmektedir:



Yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi ortalamanın 1 standart sapma sağında ve solunda kalan alanlar eğri altındaki toplam alanın %34,1'ini oluşturmaktadır. -1 ve +1 standart sapma arasında kalan alan toplam alanın %68,2'sidir. Ortalamanın 2 standart sapma sağı ile 2 standart sapma solu yani -2 standart sapma ile +2 standart sapma arasında kalan alan, eğri altında kalan toplam alanın yaklaşık %95'ini oluşturmaktadır. -3 ve +3 standart sapma aralığı ise eğri altındaki toplam alanın yaklaşık %99'unu oluşturmaktadır.

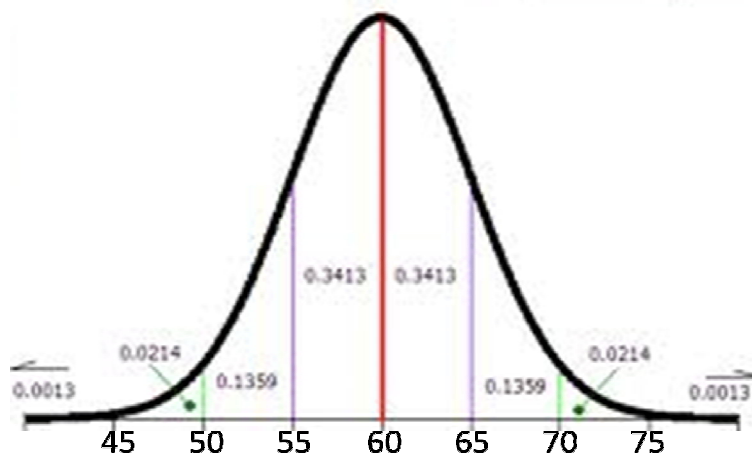


Normal dağılım eğrisinin iyi tanımlı olması, normal dağılım gösteren ölçme sonuçlarının belli aralıklarda görülme olasılığının belirlenebilmesini sağlamaktadır. Diğer bir deyişle bir değişkenin gözlenen değerleri normal dağılım gösteriyorsa, herhangi bir gözlem değerinin ya da belli bir aralıktaki gözlem değerlerinin görülme olasılığı belirlenebilir.

Normal dağılımın davranış bilimleri, eğitim bilimleri, psikoloji gibi odağında insan ve birey bulunan alanlarda önemli bir karşılığı vardır. Birey özelliklerinin önemli bir kısmı evrende normal dağılım göstermektedir. Örneğin zeka, evrende normal dağılım gösteren bir birey özelliğidir. Yani orta düzeyde zekaya sahip olan bireyler çoğunluğu, yüksek düzeyde zekaya ya da düşük düzeyde zekaya sahip olan bireyler azınlığı oluşturur. Başarı, ilgi, tutum, kişilik gibi özelliklerin önemli bir kısmı için de benzer durum söz konusudur. İlgilenilen özelliğin normal dağılım göstermesi, bu özelliğe yönelik ölçme sonuçlarının görülme olasılığı hakkında önemli çıkarımlar ve kestirimler yapılabilmesini de olanaklı hale getirmektedir.

ÖRNEK 2.

Bir sınıfta yazılı yoklama notlarının ortalaması $\mu=60$ ve standart sapması $\sigma=5$ olarak hesaplanmıştır. Yazılı notları normal dağılım göstermektedir. Bu durumda notların dağılımı aşağıdaki gibi olacaktır:



Buna göre aşağıdaki soruları yanıtlayalım.

a) Bu sınıfta bir öğrencinin 50'nin altında not alma olasılığı kaçtır?

Bu sorunun yanıtı, eğride 50 değerinde yer alan dikey çizginin solunda kalan alandır. Bu alan 0,0227'dir. Buna göre bu sınıfta bir öğrencinin 0'nin altında not almış olma olasılığı %2,27'dir.

b) Bu sınıfta bir öğrencinin 55 ile 65 arasında not alma olasılığı kaçtır?

Bu sorunun yanıtı, eğride 55 ve 65 değerlerinde yer alan dikey çizgiler ile eğri arasında kalan toplam alandır. Bu alan 0,6826'dır. Buna göre bu sınıfta bir öğrencinin 55 ile 65 arasında not almış olma olasılığı %68,26'dır.

c) Bu sınıfta bir öğrencinin 55'in üzerinde not almış olma olasılığı kaçtır?

Bu sorunun yanıtı, 55 değerindeki dikey çizginin solunda eğrinin altında kalan toplam alandır. Bu alan $0,3413 + 0,50 = 0,8413$ 'tür. Buna göre bu sınıfta bir öğrencinin 55'in üzerinde not almış olma olasılığı %84,13'tür.

d) Bu sınıfta bir öğrencinin 65 ile 75 arasında not almış olma olasılığı kaçtır?

Bu sorunun yanıtı, 65 ve 75 değerlerindeki dikey çizgiler ile eğri arasında kalan toplam alandır. Bu alan $0,1359 + 0,0214 = 0,1573$ 'tür. Buna göre bu sınıfta bir öğrencinin 65 ile 75 arasında not almış olma olasılığı %15,73'tür.