વર્તુળ 11

A mathematician like a painter or poet is a maker of patterns. If his patterns are more permanent than theirs, it is because they are made with ideas.

- G. H. Hardy

11.1 પ્રાસ્તાવિક

ધોરણ IXમાં આપણે વર્તુળનો અભ્યાસ કર્યો. આપણે વર્તુળની વ્યાખ્યા આપી અને વર્તુળ સાથે સંકળાયેલાં કેટલાંક પદો જેવાં કે વર્તુળની ત્રિજ્યા, જીવા, ચાપ, વૃત્તખંડ, વૃત્તાંશ વગેરે વ્યાખ્યાયિત કર્યાં. આપણે વર્તુળના કેટલાક ગુણધર્મોનો પણ અભ્યાસ કર્યો. આપણે આ બધાનું ટૂંકમાં પુનરાવર્તન કરી લઈએ. અહીં માત્ર અગત્યના મુદ્દાઓનો જ ઉલ્લેખ કરીશું.

(i) **વર્તુળ** એક સમતલીય બિંદુઓનો ગણ છે. **સમતલના એક નિશ્ચિત બિંદુથી સમાન અંતરે આવેલા તે જ સમતલના બિંદુઓના ગણને વર્તુળ કહેવામાં આવે છે.** આ નિશ્ચિત બિંદુને આપણે વર્તુળનું **કેન્દ્ર** કહીએ છીએ અને કેન્દ્ર અને વર્તુળ પરના બિંદુને જોડતા રેખાખંડને આપણે વર્તુળની **ત્રિજ્યા** કહીએ છીએ. ત્રિજ્યા શબ્દ આપણે રેખાખંડ તેમજ તે રેખાખંડની લંબાઈ એમ બંને અર્થમાં ઉપયોગમાં લઈએ છીએ.

(ii) એક વર્તુળની (અથવા એકરૂપ વર્તુળોની) એકરૂપ જીવાઓ (તેમના અનુરૂપ) કેન્દ્ર આગળ એકરૂપ ખૂણાઓ આંતરે છે.

(iii) જો કોઈ વર્તુળમાં (કે એકરૂપ વર્તુળોમાં) બે જીવાઓ વર્તુળના કેન્દ્ર (કે તેમના અનુરૂપ વર્તુળોનાં કેન્દ્રો) આગળ એકરૂપ ખૂણાઓ આંતરે તો તે જીવાઓ એકરૂપ હોય.

(iv) વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી અને વર્તુળની કોઈ જીવાને લંબરેખા તે જીવાને દુભાગે છે. વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી રેખા વ્યાસ સિવાયની જીવાને દુભાગે તો તે જીવાને લંબ હોય છે.

(v) ત્રણ ભિન્ન અસમરેખ બિંદુઓમાંથી પસાર થતું અનન્ય વર્તુળ મળે.

(vi) વર્તુળની (કે એકરૂપ વર્તુળોની) એકરૂપ જીવાઓ વર્તુળના કેન્દ્રથી (કે અનુરૂપ વર્તુળોનાં કેન્દ્રથી) સમાન અંતરે આવેલી હોય. ઉપરોક્ત વિધાનનું પ્રતિપ્રમેય પણ સત્ય છે.

(vii) જો વર્તુળ (કે એકરૂપ વર્તુળો)નાં બે ચાપ એકરૂપ હોય, તો તેમની અનુરૂપ જીવાઓ પણ એકરૂપ હોય. આ વિધાનનું પ્રતિવિધાન પણ સત્ય છે.

(viii) વર્તુળમાં (કે એકરૂપ વર્તુળોમાં) એકરૂપ ચાપ વર્તુળનાં (કે અનુરૂપ વર્તુળોનાં) કેન્દ્ર આગળ એકરૂપ ખૂણાઓ આંતરે.

(ix) વર્તુળની લઘુચાપે વર્તુળના કેન્દ્ર આગળ આંતરેલા ખૂણાનું માપ એ તે જ ચાપે સંગત ગુરુચાપ પરના કોઈ બિંદુએ આંતરેલા ખૂણાના માપ કરતાં બમણું હોય છે.

(x) વર્તુળના એક જ વૃત્તખંડમાં સંગત જીવા વડે અંતરાયેલા ખૂણાઓ એકરૂપ હોય છે.

(xi) અર્ધવર્તુળમાં અંતર્ગત ખૂણો કાટખૂણો હોય છે.

(xii) જો કોઈ રેખાખંડ તે રેખાખંડને સમાવતી રેખાનાં કોઈ એક અર્ધતલમાં આવેલાં બે ભિન્ન બિંદુ આગળ સમાન માપના ખૂણા આંતરે અને આ રેખાખંડ અને બે ભિન્ન બિંદુઓ એક જ સમતલમાં હોય, તો રેખાખંડના બે અંત્યબિંદુઓ અને આપેલા બે ભિન્ન બિંદુઓ એક જ વર્તુળ પર હોય. આપણે આ ચાર બિંદુઓને ચક્રીય બિંદુ કહીએ છીએ અને તે ચાર બિંદુથી રચાતા ચતુષ્કોણને ચક્રીય ચતુષ્કોણ કહેવામાં આવે છે. ચક્રીય ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણાઓ પૂરકકોણની જોડ રચે છે.

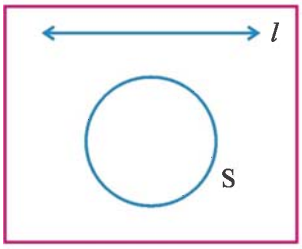
(xiii) જો કોઈ ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણાઓની એક જોડના ખૂણાનાં માપનો સરવાળો 180 હોય, તો તે ચતુષ્કોણ ચક્રીય ચતુષ્કોણ હોય.

એક જ સમતલમાં આવેલ વર્તુળ તથા રેખાનો છેદ :

હવે આપણે વર્તુળ અને વર્તુળના સમતલમાં આવેલી રેખાના છેદ વિશે વિચારીએ. વર્તુળના બિંદુઓના ગણને S વડે અને રેખા પર બિંદુઓના ગણને l વડે દર્શાવીએ. આપણને નીચેની ત્રણ શક્યતાઓ મળે છે :

(1) $l \cap S = \emptyset$

આ વિકલ્પમાં રેખા વર્તુળને છેદતી નથી. આકૃતિ 11.1 જુઓ.



આકૃતિ 11.1

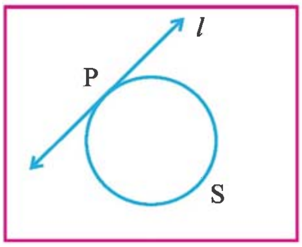
(2) $l \cap S$ એકાકીગણ હોય.

આ વિકલ્પમાં રેખા અને વર્તુળ વચ્ચે એક બિંદુ સામાન્ય હોય.

આકૃતિ 11.2માં રેખા l વર્તુળને એક બિંદુ P માં છેદે છે.

$\therefore \quad S \cap l = \{P\}$

આ વિકલ્પમાં આપણે કહીએ છીએ કે રેખા l વર્તુળ S ને બિંદુ P આગળ સ્પર્શે છે. બિંદુ P ને **સ્પર્શબિંદુ (Point of contact)** કહે છે.

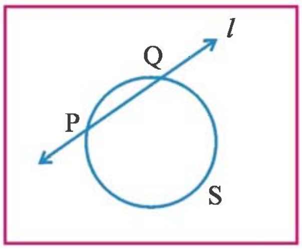


આકૃતિ 11.2

(3) $S \cap l$ = બે બિંદુ ધરાવતો ગણ.

આકૃતિ 11.3માં રેખા l વર્તુળ S ને બે ભિન્ન બિંદુઓ P અને Q માં છેદે છે. તેથી $S \cap l = \{P, Q\}$. જે રેખા વર્તુળને બે બિંદુમાં છેદે તે રેખાને વર્તુળની **છેદિકા (Secant)** કહેવામાં આવે છે.

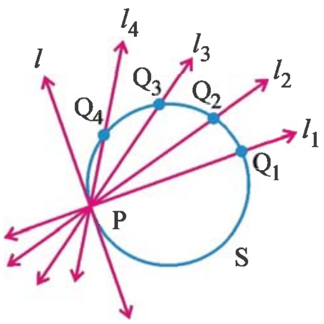
આ પ્રકરણમાં વિકલ્પ (2) વિશે આપણે વિગતવાર વિચારીશું.



આકૃતિ 11.3

11.2 વર્તુળનો સ્પર્શક

વર્તુળના સમતલમાં દોરેલી કોઈ રેખા વર્તુળને એક જ બિંદુમાં છેદે તો તે રેખાને વર્તુળનો સ્પર્શક (Tangent) કહેવામાં આવે છે અને સ્પર્શક વર્તુળને જે બિંદુમાં છેદે તે બિંદુને સ્પર્શકનું વર્તુળ સાથેનું સ્પર્શબિંદુ કહેવામાં આવે છે.



આકૃતિ 11.4

સ્પર્શકની સંકલ્પના એક બીજા દૃષ્ટિબિંદુથી વિચારીએ.

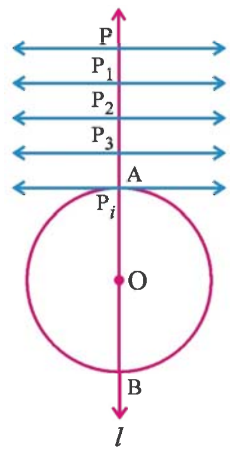
આકૃતિ 11.4માં રેખા l_1 વર્તુળ Sને P અને Q_1 એમ બે ભિન્ન બિંદુમાં છેદે છે. તેથી l_1 વર્તુળ Sની છેદિકા છે. રેખાઓ $l_2, l_3, l_4,$... એ તે જ સમતલમાં એવી રીતે દોરી છે કે જેથી દરેક P માંથી પસાર થાય જ પણ વર્તુળને બીજા એક બિંદુ અનુક્રમે $Q_2, Q_3, Q_4,$.... માં પણ છેદે. આપણે બીજી રીતે એમ પણ કહી શકીએ કે P માંથી પસાર થતી રેખા l વર્તુળના સમતલમાં રહીને P આસપાસ પરિભ્રમણ કરે છે અને બિંદુઓની શ્રેણી $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4,$.... એ P તરફ આગળ વધે છે. જ્યારે P અને Q એકાકાર થાય ત્યારે રેખા l વર્તુળની છેદિકા ન રહેતા તે વર્તુળનો સ્પર્શક બને છે.

તેથી આપણે કહી શકીએ કે વર્તુળનો સ્પર્શક એ વર્તુળની છેદિકાની એક વિશિષ્ટ સ્થિતિ છે, જેમાં છેદિકા સાથે સંગત જીવાના બે અંત્યબિંદુઓ એકાકાર હોય.

વર્તુળના અને વ્યાપક રીતે કોઈ પણ સમતલીય વક્રના સ્પર્શકને વ્યાખ્યાયિત કરવાનો આ અભિગમ મહાન ભૂમિતિવિદ્ **રૅને દ' કાર્તે** સૌપ્રથમ આપ્યો. પાછળથી આ અભિગમ **ન્યૂટન** અને **લાઇબ્નિત્ઝ** જેવા કલનશાસ્ત્રના સ્થાપકોએ અપનાવ્યો. અલબત્ત અહીં જે રીત આપવામાં આવી છે તે એક સમજૂતી છે, સ્પર્શકની શાસ્ત્રીય વ્યાખ્યા નથી.

વર્તુળના પ્રત્યેક બિંદુએ વર્તુળને સ્પર્શક દોરી શકાય ? વર્તુળ પરના એક નિશ્ચિત બિંદુમાંથી પસાર થતા હોય તેવા કેટલા સ્પર્શકો હોય ? આ પ્રશ્નોના ઉત્તર સમજવા માટે ફરી એક પ્રવૃત્તિ કરીએ :

પ્રવૃત્તિ : એક વર્તુળ દોરીએ અને તેના કેન્દ્ર Oમાંથી પસાર થતી રેખા l દોરીએ. રેખા l ના વર્તુળ સાથેનાં છેદબિંદુઓને A અને B વડે દર્શાવીએ. (તમે જાણો જ છો કે $\overline{AB}$ વર્તુળનો વ્યાસ છે). આપણે જાણીએ છીએ કે l પરના પ્રત્યેક બિંદુ P માંથી વર્તુળના સમતલમાં l ને લંબ હોય તેવી અનન્ય રેખા દોરી શકાય. રેખા l પર આકૃતિ 11.5 માં દર્શાવ્યા છે તે ક્રમમાં $P_1, P_2, P_3, ...$ એવાં બિંદુઓ લઈએ કે જેથી પ્રત્યેક P_i માટે $O\text{-}A\text{-}P_i$, $i = 1, 2, 3, ...$ હોય.



આકૃતિ 11.5

હવે વર્તુળના સમતલમાં $P_1, P_2, P_3, ...$ માંથી પસાર થતી અને રેખા l ને લંબ હોય તેવી રેખાઓ દોરીએ. $P_1, P_2, P_3, ...$ એ બધાં જ બિંદુઓ વર્તુળની બહારના ભાગમાં છે. આકૃતિ 11.5માં દર્શાવ્યા મુજબ અંતરો OP_1, OP_2, OP_3 એ વર્તુળની ત્રિજ્યા r કરતાં મોટાં છે. બિંદુઓ $P_1, P_2, P_3, ...$ એ Aની નજીક જાય છે. તેથી $OP_1, OP_2, OP_3, ...$ અંતરો નાનાં થતાં જાય છે. કોઈક i માટે જ્યારે P_i એ A સાથે એકાકાર થાય ત્યારે P માંથી પસાર થતી, વર્તુળના સમતલમાં l ને લંબ દોરેલી રેખા એ વર્તુળનો સ્પર્શક બની જશે.

આમ, O કેન્દ્રિત વર્તુળ પરના દરેક બિંદુ A માટે $l = \overleftrightarrow{OA}$ લઈએ તો A માંથી પસાર થતી અને વર્તુળના સમતલમાં આવેલી $\overleftrightarrow{OA}$ ને લંબ હોય તેવી અનન્ય રેખા હંમેશા મળે જ. તેથી કહી શકાય કે વર્તુળ પરના પ્રત્યેક બિંદુએ વર્તુળને અનન્ય સ્પર્શક દોરી શકાય.

ઉપરોક્ત પ્રવૃત્તિ દ્વારા વર્તુળ પરના પ્રત્યેક બિંદુએ અનન્ય સ્પર્શકનું અસ્તિત્વ જ માત્ર પ્રતિપાદિત નથી થતું, આ સ્પર્શકનો એક મહત્ત્વનો ગુણધર્મ કે, "વર્તુળના કોઈ પણ બિંદુએ વર્તુળને દોરેલો સ્પર્શક એ તે બિંદુમાંથી પસાર થતી વર્તુળની ત્રિજ્યાને લંબ હોય છે." તે પણ જોઈ શકાય છે.

આ ગુણધર્મ આપણે પ્રમેય 11.1 તરીકે સાબિત કરીશું પણ તે પહેલાં વર્તુળનો એક બીજો ગુણધર્મ યાદ કરી લઈએ.

જો $\odot(O, r)$ના સમતલમાં આવેલું બિંદુ P એ વર્તુળના બહારના ભાગમાં હોય, તો $OP > r$ છે. અને જો P એ $\odot(O, r)$ના સમતલમાં આવેલું એવું બિંદુ હોય કે જેથી $OP > r$ હોય, તો P વર્તુળના બહારના ભાગમાં આવેલું હોય. અલબત્ત, આ તો "વર્તુળના બહારના ભાગ"ની વ્યાખ્યા છે !

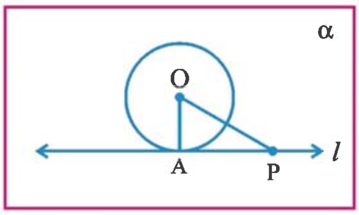
હવે પ્રમેય 11.1 સાબિત કરીએ :

પ્રમેય 11.1 : વર્તુળનો સ્પર્શક એ સ્પર્શબિંદુમાંથી પસાર થતી ત્રિજ્યાને તે જ સમતલમાં લંબ હોય છે.

પક્ષ : રેખા l એ $\odot(O, r)$ ને A બિંદુએ સ્પર્શે છે.

સાધ્ય : $\overline{OA} \perp l$.

સાબિતી : ધારો કે $P \in l$ અને $P \neq A$.



આકૃતિ 11.6

જો P બિંદુ એ $\odot(O, r)$ ના અંદરના ભાગમાં હોય તો રેખા l એ વર્તુળની છેદિકા હોય, સ્પર્શક ન હોય. પરંતુ l વર્તુળનો સ્પર્શક છે.

તેથી બિંદુ P વર્તુળના અંદરના ભાગમાં નથી. ઉપરાંત $P \neq A$.

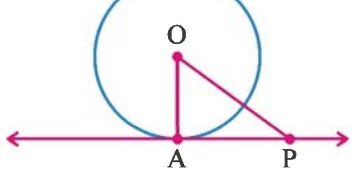
∴ બિંદુ P વર્તુળના બહારના ભાગમાં છે.

∴ OP > OA. (OA વર્તુળની ત્રિજ્યા છે.)

તેથી A સિવાયના દરેક $P \in l$ માટે બિંદુ P, અસમતા OP > OAનું સમાધાન કરે છે.

OA એ વર્તુળના કેન્દ્રથી રેખા l નું લઘુતમ અંતર છે.

∴ $\overline{OA} \perp l$.



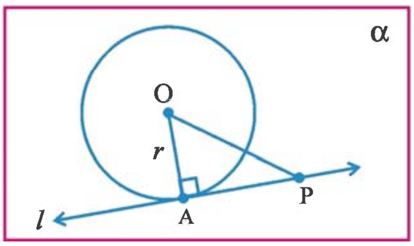
આકૃતિ 11.7

આ પ્રમેયના પ્રતિપ્રમેય વિશે શું કહી શકાય ? પ્રમેય 11.1નું પ્રતિપ્રમેય નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

વર્તુળની ત્રિજ્યાના વર્તુળ પરના અંત્યબિંદુએ વર્તુળના સમતલમાં ત્રિજ્યાને દોરેલી લંબરેખા વર્તુળનો સ્પર્શક છે.

આ વિધાન સત્ય છે ? હા, જો આ લંબરેખા વર્તુળના સમતલમાં આવેલી રેખા હોય તો વિધાન સત્ય છે. આપણે આ પરિણામને પ્રમેય 11.2 તરીકે સાબિતી આપ્યા વિના સ્વીકારીશું.

પ્રમેય 11.2 : જો વર્તુળના સમતલમાં આવેલી કોઈ રેખા વર્તુળની કોઈ ત્રિજ્યાને તેના વર્તુળ પરના અંત્યબિંદુએ લંબ હોય, તો આ રેખા વર્તુળનો સ્પર્શક છે.



આકૃતિ 11.8

આકૃતિ 11.8 માં રેખા l અને ⊙(O, r) સમતલ α માં છે. A એ ત્રિજ્યાનું વર્તુળ પરનું અંત્યબિંદુ છે. l એ વર્તુળની ત્રિજ્યા $\overline{OA}$ને લંબ છે. રેખા l પર P એ A સિવાયનું કોઈ પણ બિંદુ હોય, તો

$\overline{OA} \perp l$ હોવાથી OA < OP

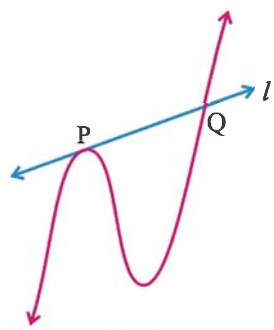
∴ OP > OA એટલે કે OP > r

તેથી રેખા l પરના A સિવાયના તમામ બિંદુ P એ ⊙(O, r) ના બહારના ભાગમાં છે.

∴ રેખા l એ ⊙(O, r) ને એક જ બિંદુ Aમાં છેદે છે. l એ ⊙(O, r) નો A બિંદુ આગળનો સ્પર્શક છે.

નોંધ : (1) આ ચર્ચા પરથી એવું પણ ફલિત થાય છે કે વર્તુળ પરના કોઈ પણ બિંદુએ વર્તુળને એક જ સ્પર્શક દોરી શકાય.

(2) જો કોઈ રેખા વર્તુળનો સ્પર્શક હોય, તો તે રેખા વર્તુળને એક અને માત્ર એક બિંદુએ છેદે છે. સ્પર્શકનો આ ગુણધર્મ વર્તુળ માટે સાચો છે. પણ ઘણા બધા સમતલીય વક્રો માટે સાચો નથી. પ્રકરણ 2માં તમે આવા વક્રોનો જુદા સંદર્ભમાં અભ્યાસ કર્યો છે. ત્રિઘાત વક્ર તરીકે જાણીતા વક્રનો આલેખ આકૃતિ 11.9માં આપેલો છે. આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે વક્રને P બિંદુએ દોરેલો સ્પર્શક ફરી વક્રને Q બિંદુએ છેદે છે.



આકૃતિ 11.9

(3) વક્ર પરના P બિંદુએ દોરેલા સ્પર્શકને P બિંદુએ વક્રના સમતલમાં દોરેલી લંબ રેખાને વક્રનો P બિંદુએ અભિલંબ કહેવામાં આવે છે. વર્તુળ પરના પ્રત્યેક બિંદુએ વર્તુળનો અભિલંબ વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી પસાર થાય છે. આ ગુણધર્મ પરથી વર્તુળની એવી વ્યાખ્યા પણ આપી શકાય કે જે સમતલીય વક્રના પ્રત્યેક બિંદુએ દોરેલા અભિલંબો વક્રના સમતલના કોઈ નિશ્ચિત બિંદુએ સંગામી હોય તે વક્રને વર્તુળ કહેવામાં આવે છે અને જે બિંદુએ અભિલંબો સંગામી થતા હોય તે બિંદુને વર્તુળનું કેન્દ્ર કહેવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ 1 : વર્તુળના કેન્દ્ર O માંથી પસાર થતી એક રેખા વર્તુળના એક સ્પર્શકને Q બિંદુમાં છેદે છે. સ્પર્શકનું સ્પર્શબિંદુ P છે. વર્તુળની ત્રિજ્યા 5 હોય અને OQ = 13 હોય, તો PQ શોધો.

ઉકેલ : O વર્તુળનું કેન્દ્ર છે અને સ્પર્શકનું સ્પર્શબિંદુ P છે.

$\therefore$ OP = વર્તુળની ત્રિજ્યા

$\therefore$ OP = 5, OQ = 13

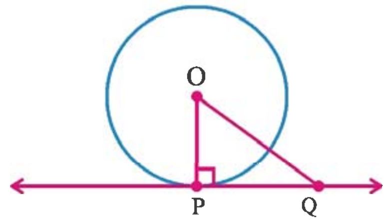
અને $\angle OPQ$ કાટખૂણો છે કારણ કે સ્પર્શકના સ્પર્શબિંદુએ દોરેલી ત્રિજ્યા સ્પર્શકને લંબ હોય.

$\therefore$ ΔOPQ માં $OP^2 + PQ^2 = OQ^2$

$\therefore$ $5^2 + PQ^2 = 13^2$

$\therefore$ $PQ^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$

$\therefore$ PQ = 12



આકૃતિ 11.10

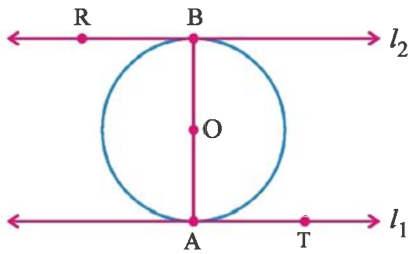
ઉદાહરણ 2 : $\overline{AB}$ એક વર્તુળનો વ્યાસ છે. સાબિત કરો કે A અને B બિંદુએ વર્તુળને દોરેલા સ્પર્શકો પરસ્પર સમાંતર છે.

ઉકેલ : ધારો કે $\overline{AB}$ એ O કેન્દ્રિત વર્તુળનો વ્યાસ છે. l_1 અને l_2 આ વર્તુળના અનુક્રમે A અને B બિંદુએ દોરેલા સ્પર્શકો છે. તેથી l_1 અને l_2 એ વર્તુળના સમતલમાં દોરેલી રેખાઓ છે.

l_1 અને l_2 એ વર્તુળના સમતલમાં દોરેલી રેખાઓ છે અને $\overleftrightarrow{AB}$ આ રેખાઓની છેદિકા છે.

ધારો કે l_1 પર T કોઈ બિંદુ છે $T \neq A$.

ધારો કે l_2 પર R એ B સિવાયનું કોઈ બિંદુ છે જેથી T અને R એ $\overleftrightarrow{AB}$ના ભિન્ન અર્ધતલોમાં હોય. l_1 અને l_2 એ O કેન્દ્રિત વર્તુળનાં સ્પર્શકો છે અને તેમના સ્પર્શબિંદુઓ અનુક્રમે A અને B છે. તેથી, $l_1 \perp \overline{OA}$ અને $l_2 \perp \overline{OB}$



આકૃતિ 11.11

પરંતુ $\overline{AB}$ વર્તુળનો વ્યાસ છે.

$\therefore$ A–O–B

$l_1 \perp \overline{AB}$ અને $l_2 \perp \overline{AB}$ (બંને કાટખૂણા છે.)

$\therefore$ $\angle TAB \cong \angle RBA$

પરંતુ આ તો l_1 અને l_2ની છેદિકા $\overleftrightarrow{AB}$ દ્વારા બનતા યુગ્મકોણો છે.

$\therefore$ $l_1 \parallel l_2$

ઉદાહરણ 3 : $\odot(O, r_1)$ અને $\odot(O, r_2)$ બે સમકેન્દ્રી વર્તુળો છે, જેમાં $r_1 > r_2$. $\odot(O, r_1)$ની જીવા $\overline{AB}$ એ $\odot(O, r_2)$ને P બિંદુએ સ્પર્શે છે. સાબિત કરો કે P એ $\overline{AB}$નું મધ્યબિંદુ છે.

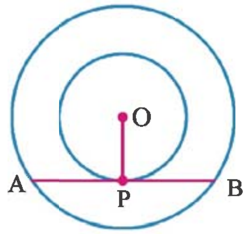
ઉકેલ : $\odot(O, r_1)$ની જીવા $\overline{AB}$ છે.

$\overline{AB}$ એ $\odot(O, r_2)$ ને P બિંદુએ સ્પર્શે છે.

$\therefore$ $\overline{OP} \perp \overline{AB}$

$\odot(O, r_1)$ ના કેન્દ્ર O માંથી જીવા $\overline{AB}$ પરના લંબનો લંબપાદ P છે.

$\therefore$ P જીવા $\overline{AB}$નું મધ્યબિંદુ છે.



આકૃતિ 11.12

ઉદાહરણ 4 : બે સમકેન્દ્રી વર્તુળોની ત્રિજ્યાઓ 26 અને 24 છે. મોટી ત્રિજ્યાવાળાં વર્તુળની જીવા નાની ત્રિજ્યાવાળાં વર્તુળને સ્પર્શે છે. આ જીવાની લંબાઈ શોધો.

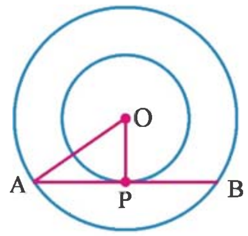
ઉકેલ : ધારો કે આપેલા સમકેન્દ્રી વર્તુળોનું કેન્દ્ર O છે. ધારો કે મોટી ત્રિજ્યાવાળાં વર્તુળની જીવા $\overline{AB}$ એ નાની ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળને P બિંદુએ સ્પર્શે છે.

$\therefore$ OP = નાના વર્તુળની ત્રિજ્યા = 24

$\therefore$ OA = મોટા વર્તુળની ત્રિજ્યા = 26

$\overline{AB}$ એ $\odot$(O, 24)ને P આગળ સ્પર્શે છે. તેથી $\overline{AB} \perp \overline{OP}$.

ΔOPA કાટકોણ ત્રિકોણ છે, જેમાં $m\angle OPA = 90$



આકૃતિ 11.13

$\therefore$ $OP^2 + AP^2 = OA^2$

$\therefore$ $24^2 + AP^2 = 26^2$

$\therefore$ $AP^2 = 26^2 - 24^2$

$= 676 - 576 = 100$

$\therefore$ AP = 10

$\therefore$ વર્તુળના કેન્દ્ર O માંથી $\overline{OP} \perp \overline{AB}$ છે અને $\overline{AB}$ એ $\odot$(O, 26)ની જીવા છે.

$\therefore$ P એ $\overline{AB}$નું મધ્યબિંદુ છે.

$\therefore$ AB = 2AP = 20

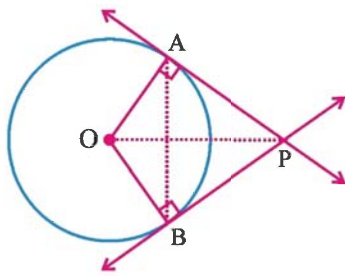
ઉદાહરણ 5 : A અને B એક વર્તુળ પરનાં બે ભિન્ન બિંદુઓ છે, જેથી $\overline{AB}$ વ્યાસ નથી. A અને B બિંદુએ વર્તુળને દોરેલા સ્પર્શકો P બિંદુમાં છેદે છે. સાબિત કરો કે $\angle AOB$ અને $\angle APB$ એકબીજાના પૂરકકોણો છે. ઉપરાંત સાબિત કરો કે PA = PB.

ઉકેલ : $\overline{AB}$ વર્તુળનો વ્યાસ નથી.

$\therefore$ વર્તુળ પરના બિંદુ A અને B આગળ દોરેલા સ્પર્શકો સમાંતર નથી.

$\therefore$ આ સ્પર્શકો કોઈક બિંદુ P માં છેદે છે.

ઉપરાંત, $\overline{OA} \perp \overline{AP}$, $\overline{OB} \perp \overline{BP}$



આકૃતિ 11.14

$\therefore$ $\square$ OAPBમાં $m\angle A + m\angle B = 90 + 90 = 180$

ચતુષ્કોણના ચારે ખૂણાનાં માપનો સરવાળો 360 થાય.

$\therefore$ $m\angle AOB + m\angle APB = 180$

$\therefore$ $\angle AOB$ અને $\angle APB$ એકબીજાના પૂરકખૂણાઓ છે.

ΔOAP અને ΔOBPમાં સંગતતા OAP $\leftrightarrow$ OBP માટે,

$\overline{OP} \cong \overline{OP}$

$\overline{OA} \cong \overline{OB}$ (વર્તુળની ત્રિજ્યાઓ)

$\angle OAP \cong \angle OBP$ (બંને કાટખૂણા છે.)

$\therefore$ $\Delta OAP \cong \Delta OBP$ (કાકબા)

$\therefore$ $\overline{PA} \cong \overline{PB}$

$\therefore$ PA = PB

નોંધ : (1) $\square$ OAPB ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે. (કેમ ?)

(2) $\overline{OP}$ ને વ્યાસ લઈને દોરેલું વર્તુળ A અને Bમાંથી પસાર થાય છે. (કેમ ?)

સ્વાધ્યાય 11.1

1. A અને B એ $\odot(O, r)$ પરનાં ભિન્ન બિંદુઓ છે. $\overline{AB}$ વર્તુળનો વ્યાસ નથી. સાબિત કરો કે A અને B બિંદુએ વર્તુળને દોરેલા સ્પર્શકો સમાંતર નથી.

2. $\odot(O, r)$ પર A અને B એવાં ભિન્ન બિંદુઓ છે કે જેથી A અને B બિંદુએ વર્તુળને દોરેલા સ્પર્શકો P બિંદુએ છેદે છે. સાબિત કરો કે $\overrightarrow{OP}$ એ $\angle AOB$નો અને $\overrightarrow{PO}$ એ $\angle APB$નો દ્વિભાજક છે.

3. $\odot(O, r)$ પરનાં બિંદુઓ A અને B આગળ વર્તુળને દોરેલા સ્પર્શકો Pમાં છેદે છે. સાબિત કરો કે $\overline{OP}$ જેનો વ્યાસ છે તેવું વર્તુળ A અને Bમાંથી પસાર થાય છે.

4. $\odot(O, r_1)$ અને $\odot(O, r_2)$ માં $r_1 > r_2$. $\odot(O, r_1)$ ની જીવા $\overline{AB}$ એ $\odot(O, r_2)$ ને સ્પર્શે છે. ABને r_1 અને r_2નાં સ્વરૂપમાં મેળવો.

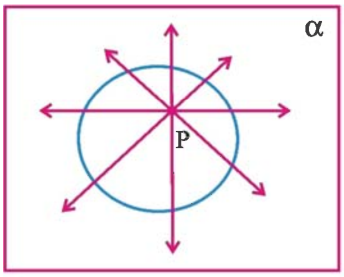
5. દાખલા 4 માં જો $r_1 = 41$ અને $r_2 = 9$ હોય, તો AB શોધો.

*

11.3 વર્તુળના સમતલ પરના બિંદુમાંથી વર્તુળને દોરેલા સ્પર્શકોની સંખ્યા

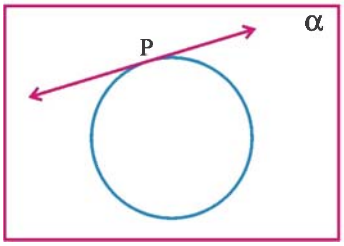
ધારો કે બિંદુ P એ વર્તુળના સમતલમાં આવેલું કોઈ બિંદુ છે. બિંદુ Pના સ્થાન માટે ત્રણ વિકલ્પો છે : (1) P વર્તુળના અંદરના ભાગમાં હોય, (ii) P વર્તુળ પરનું બિંદુ હોય, (iii) P વર્તુળના બહારના ભાગમાં હોય.

(1) જો બિંદુ P વર્તુળના અંદરના ભાગમાં હોય તો P માંથી પસાર થાય તેવી કોઈ રેખા દોરી શકાય કે જે વર્તુળનો સ્પર્શક હોય ? જવાબ છે 'ના', કારણ કે Pમાંથી પસાર થતી કાઈ પણ રેખા વર્તુળને બે ભિન્ન બિંદુઓમાં છેદે છે. આવી રેખાઓ વર્તુળની છેદિકાઓ છે, સ્પર્શક નથી.



આકૃતિ 11.15

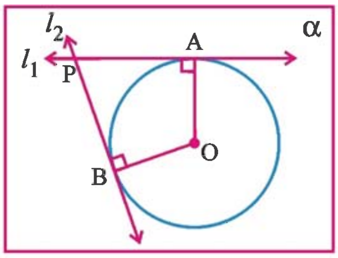
(2) વર્તુળ પર આપેલા બિંદુમાંથી પસાર થતા સ્પર્શકની વાત આપણે આગળ વિગતવાર કરી ગયા છીએ. વર્તુળ પરના બિંદુમાંથી પસાર થતી એક અને માત્ર એક રેખા એવી મળે કે જે વર્તુળનો સ્પર્શક હોય.



આકૃતિ 11.16

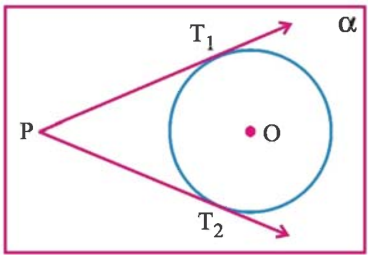
(3) **પ્રવૃત્તિ :** ધારો કે આપણે O કેન્દ્રિત એક વર્તુળની બે ત્રિજ્યાઓ $\overline{OA}$ અને $\overline{OB}$ દોરીએ કે જેથી $\overline{AB}$ વર્તુળનો વ્યાસ ન હોય.

A માંથી પસાર થતી રેખા l_1 દોરીએ કે જે વર્તુળને સ્પર્શતી હોય. આ રચના શક્ય છે. વર્તુળના સમતલમાં A બિંદુમાંથી $\overline{OA}$ને લંબરેખા l_1 રચી શકાય. આગળ જોયું તે પ્રમાણે l_1 વર્તુળનો સ્પર્શક થશે. તે જ પ્રમાણે વર્તુળ પરના B બિંદુએ વર્તુળને સ્પર્શતી રેખા l_2 દોરો.



આકૃતિ 11.17

હવે l_1 અને l_2 સમતલીય રેખાઓ છે અને $\overline{AB}$ વર્તુળનો વ્યાસ નથી. તેથી l_1 અને l_2 પરસ્પર છેદશે. ધારો કે l_1 અને l_2 નું છેદબિંદુ P છે. P બિંદુ વર્તુળના બહારના ભાગમાં છે, કારણ કે સ્પર્શકના સ્પર્શબિંદુ સિવાયનાં તમામ બિંદુઓ વર્તુળના બહારના ભાગમાં હોય. આમ, સમતલ પર એવું બિંદુ P મળ્યું કે જેમાંથી વર્તુળને બે સ્પર્શકો દોરી શકાય. વર્તુળના બહારના ભાગમાં આવેલા પ્રત્યેક બિંદુમાંથી વર્તુળને બે ભિન્ન સ્પર્શકો દોરી શકાય ? પ્રશ્નનો જવાબ 'હા' છે. હવે પછીના પ્રકરણમાં વર્તુળના બહારના બિંદુમાંથી વર્તુળને બે સ્પર્શકો દોરવાની રચના શીખવાના છીએ.



આકૃતિ 11.18

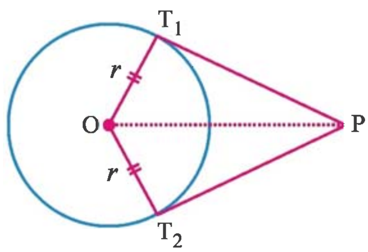
આમ, જો બિંદુ P વર્તુળના બહારના ભાગમાં હોય, તો વર્તુળને $\overleftrightarrow{PT_1}$ અને $\overleftrightarrow{PT_2}$ એમ બે સ્પર્શકો દોરી શકાય. જ્યાં, T_1 અને T_2 આ સ્પર્શકોના વર્તુળ સાથેના સ્પર્શબિંદુઓ છે. આકૃતિ 11.18 જુઓ.

$\overline{PT_1}$ અને $\overline{PT_2}$ ના માપને આ સ્પર્શકોની લંબાઈ કહેવામાં આવે છે.

જો વર્તુળના બહારના ભાગમાં આવેલા કોઈ બિંદુમાંથી વર્તુળનો સ્પર્શક દોરવામાં આવે તો આ બહારનાં બિંદુથી સ્પર્શબિંદુ સુધીના અંતરને એ વર્તુળના સ્પર્શકની લંબાઈ કહેવામાં આવે છે.

આપણે નીચે આપેલું વિધાન સાબિતી આપ્યા વિના સ્વીકારીશું.

પ્રમેય 11.3 : વર્તુળના બહારના ભાગમાં આવેલા બિંદુમાંથી વર્તુળને દોરેલા સ્પર્શકોની લંબાઈ સમાન હોય છે.



આકૃતિ 11.19

આકૃતિ 11.19માં $\odot(O, r)$ ના બહારના ભાગમાં આવેલા બિંદુ P માંથી વર્તુળને દોરેલા સ્પર્શકોના સ્પર્શબિંદુ T_1 અને T_2 છે. તેથી ઉપર્યુક્ત પ્રમેય અનુસાર $PT_1 = PT_2$ થવું જોઈએ.

$\overline{OP}$ રચો.

ΔOPT_1 અને ΔOPT_2માં

સંગતતા $OPT_1 \leftrightarrow OPT_2$ માટે

$\angle OT_1P \cong \angle OT_2P$ (બંને કાટખૂણાઓ છે.)

$\overline{OP} \cong \overline{OP}$

$\overline{OT_1} \cong \overline{OT_2}$ (વર્તુળની ત્રિજ્યાઓ)

$\therefore \Delta OPT_1 \cong \Delta OPT_2$. (કાકબા)

તેથી $\overline{PT_1} \cong \overline{PT_2}$

$\therefore PT_1 = PT_2$

ઉદાહરણ 6 : $\square$ ABCDની ચારેય બાજુઓને એક વર્તુળ સ્પર્શે છે.

સાબિત કરો કે $AB + CD = AD + BC$.

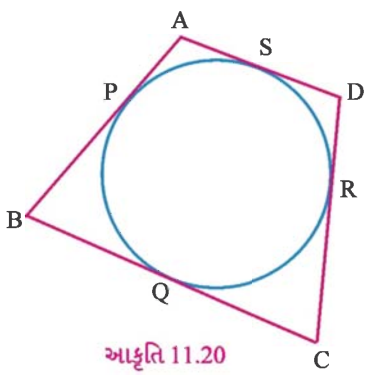
ઉકેલ : ધારો કે વર્તુળ $\square$ ABCD ની બાજુઓ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ને અનુક્રમે P, Q, R, Sમાં સ્પર્શે છે.

$\therefore AP = AS, DS = DR, CR = CQ, BQ = BP$ **(i)**

અને A–P–B, B–Q–C, C–R–D, A–S–D **(ii)**

હવે, $AB + CD = AP + PB + CR + RD$

(A–P–B અને C–R–D)



આકૃતિ 11.20

$= AS + BQ + CQ + DS$

$= AS + DS + BQ + CQ$

$= AD + BC$ **(A–S–D અને B–Q–C)**

આમ, $AB + CD = AD + BC$.

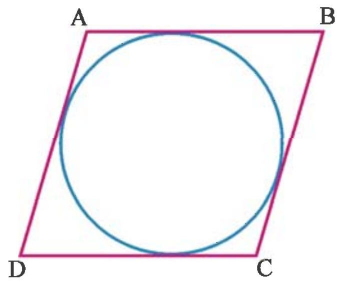
નોંધ : (1) આપેલા ચતુષ્કોણની ચારેય બાજુઓને સ્પર્શતું વર્તુળ એ ચતુષ્કોણમાં અંતર્ગત વર્તુળ કે ચતુષ્કોણના અંતઃવર્તુળ તરીકે ઓળખાય છે.

(2) જે ચતુષ્કોણનું અંતઃવર્તુળ મળે તે ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજુઓની બંને જોડની બાજુઓની લંબાઈનો સરવાળો સમાન હોય.

આ પરિણામનું પ્રતિવિધાન પણ સત્ય છે. જો □ ABCDમાં $AB + CD = AD + BC$ હોય, તો □ ABCDમાં અંતર્ગત વર્તુળ ચોક્કસ મળે જ. આ પરિણામ પરથી કહી શકાય કે પ્રત્યેક ચતુષ્કોણ માટે અંતઃવર્તુળ મળે જ તે જરૂરી નથી.

(3) ત્રિકોણ માટે તેની ત્રણે બાજુઓને સ્પર્શતું વર્તુળ દોરવું હંમેશાં શક્ય છે. આ વર્તુળને એ ત્રિકોણનું અંતઃવર્તુળ કહેવામાં આવે છે. આ વર્તુળની ત્રિજ્યા એ ત્રિકોણની અંતઃત્રિજ્યા છે.

ઉદાહરણ 7 : જો એક વર્તુળ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની ચારેય બાજુઓને સ્પર્શે, તો તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ સમબાજુ ચતુષ્કોણ હોય.



આકૃતિ 11.21

ઉકેલ : □ ABCDની ચારેય બાજુઓને સ્પર્શતું વર્તુળ મળે તો $AB + CD = AD + BC$.

વળી, □ ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

તેથી, $AB + CD = AD + BC$ અને $AB = CD$, $AD = BC$.

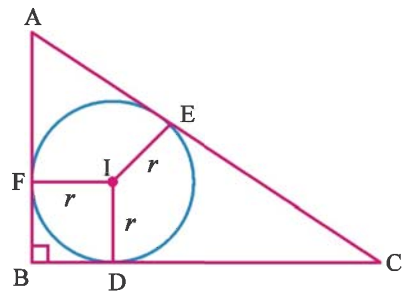
$\therefore$ $2CD = 2BC$

$\therefore$ $BC = CD$ ઉપરાંત $BC = AD$ અને $CD = AB$

$\therefore$ $AB = BC = CD = AD$

$\therefore$ □ ^{m}ABCD સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

ઉદાહરણ 8 : ΔABCમાં $m\angle B = 90$. એક વર્તુળ ΔABCની બધી જ બાજુઓને સ્પર્શે છે. જો $AB = 5$, $BC = 12$, હોય, તો વર્તુળની ત્રિજ્યા શોધો.



આકૃતિ 11.22

ઉકેલ : ત્રિકોણની ત્રણે બાજુઓને સ્પર્શતું વર્તુળ હંમેશાં મળે જ.

જો આ વર્તુળનું કેન્દ્ર I હોય અને વર્તુળની ત્રિજ્યા r હોય, તો આકૃતિ 11.22માં બતાવ્યા પ્રમાણે,

$ID = IE = IF = r$

આપેલો ΔABC કાટકોણ ત્રિકોણ છે જેમાં $\angle B$ કાટખૂણો છે.

ઉપરાંત $\overline{ID} \perp \overline{BC}$ અને $\overline{AB} \perp \overline{BC}$

$\therefore$ $\overline{ID} \parallel \overline{AB}$

$\therefore$ $\overline{ID} \parallel \overline{FB}$ **($F \in \overline{AB}$)**

તે જ પ્રમાણે, $\overline{IF} \parallel \overline{BD}$

$\therefore$ □ IFBD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

$\therefore$ $ID = FB = r$ અને $BD = IF = r$

$\therefore$ □ ^{m}IFBD સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

ઉપરાંત, $\angle B$ કાટખૂણો છે.

$\therefore$ $\square$IFBD ચોરસ છે.

હવે, $AB^2 + BC^2 = AC^2$ **($\angle B$ કાટખૂણો છે.)**

$\therefore$ $AC^2 = 5^2 + 12^2 = 13^2$

$\therefore$ $AC = 13$

$\therefore$ $AB + BC + AC = 5 + 12 + 13$

$\therefore$ $AF + FB + BD + DC + AC = 30$

$\therefore$ $AE + r + r + CE + AC = 30$ **($AF = AE$, $DC = CE$)**

$\therefore$ $2r + (AE + CE) + AC = 30$

$\therefore$ $2r + 2AC = 30$

$\therefore$ $2r + 2(13) = 30$

$\therefore$ $r + 13 = 15$

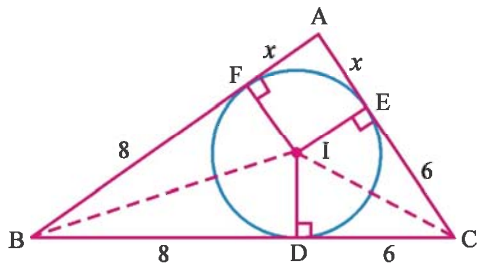
$\therefore$ $r = 2$

$\therefore$ વર્તુળની ત્રિજ્યા 2 છે.

નોંધ : ΔABCમાં જો $\angle B$ કાટખૂણો હોય, તો ત્રિકોણની ત્રણે બાજુઓને સ્પર્શતા વર્તુળની ત્રિજ્યા $\frac{AB + BC - AC}{2}$ થાય.

ઉદાહરણ 9 : એક વર્તુળ ΔABCની બાજુઓ $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ને અનુક્રમે D, E, Fમાં સ્પર્શે છે. વર્તુળની ત્રિજ્યા 4 એકમ છે. જો $BD = 8$, $DC = 6$ હોય, તો AB અને AC શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે ΔABCની ત્રણે બાજુઓ $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ને અનુક્રમે D, E, F માં સ્પર્શતા વર્તુળનું કેન્દ્ર I છે.



આકૃતિ 11.23

$\therefore$ $\overline{ID} \perp \overline{BC}$, $\overline{IE} \perp \overline{AC}$, $\overline{IF} \perp \overline{AB}$ અને

$ID = IE = IF =$ વર્તુળની ત્રિજ્યા $= 4$ **(આપેલ છે.)**

ઉપરાંત આપેલ છે કે $BD = 8$ અને $DC = 6$

$\therefore$ $BF = BD = 8$, $CE = CD = 6$

ધારો કે $AF = AE = x$ અને $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$

$\therefore$ $c = AB = x + 8$, $b = AC = x + 6$, $a = BC = 14$

$\therefore$ ΔABCની પરિમિતિ $= AB + BC + AC = 2x + 28$

$\therefore$ ΔABCની અર્ધ-પરિમિતિ $= s = x + 14$

$\therefore$ $s - a = x + 14 - 14 = x$, $s - b = x + 14 - (x + 6) = 8$

$s - c = x + 14 - (x + 8) = 6$

ΔABCનું ક્ષેત્રફળ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{(x+14)\cdot x\cdot 8\cdot 6}$

$= \sqrt{48x(x+14)}$

ΔAIBનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}AB \cdot IF = \frac{1}{2}(x + 8) \cdot 4 = 2(x + 8)$

ΔBICનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}BC \cdot ID = \frac{1}{2}(14) \cdot 4 = 28$

ΔCIAનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}AC \cdot IE = \frac{1}{2}(x + 6) \cdot 4 = 2(x + 6)$

ID = IF

$\therefore$ $\overrightarrow{BI}$ એ $\angle$Bનો દ્વિભાજક છે.

તે જ પ્રમાણે $\overrightarrow{AI}$ એ $\angle$Aનો દ્વિભાજક છે.

અને $\overrightarrow{CI}$ એ $\angle$Cનો દ્વિભાજક છે.

$\therefore$ બિંદુ I એ ΔABCના અંદરના ભાગમાં છે.

$\therefore$ ΔAIBનું ક્ષેત્રફળ + ΔBICનું ક્ષેત્રફળ + ΔCIAનું ક્ષેત્રફળ = ΔABCનું ક્ષેત્રફળ

$\therefore$ $2(x + 8) + 28 + 2(x + 6) = \sqrt{48x\,(x+14)}$

$\therefore$ $x + 14 = 3x$ **$(x + 14 \neq 0, x > 0)$**

$\therefore$ $x = 7$

$\therefore$ AB $= x + 8 = 15$, AC $= x + 6 = 13$

સ્વાધ્યાય 11.2

1. બિંદુ P એ $\odot$(O, r) ની બહારનું બિંદુ છે. P માંથી વર્તુળને દોરેલા સ્પર્શકો વર્તુળને X અને Y બિંદુએ સ્પર્શે છે.

(1) જો $r = 12$, XP $= 5$ હોય, તો OP શોધો.

(2) $m\angle$XOY $= 110$ હોય, તો $m\angle$XPO શોધો.

(3) જો OP $= 25$ અને PY $= 24$ હોય, તો r શોધો.

(4) જો $m\angle$XPO $= 80$ હોય, તો $m\angle$XOP શોધો.

2. જેની ત્રિજ્યા 73 અને 55 હોય તેવા બે સમકેન્દ્રી વર્તુળો આપેલ છે. મોટી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળની એક જીવા નાના વર્તુળને સ્પર્શે છે. આ જીવાની લંબાઈ શોધો.

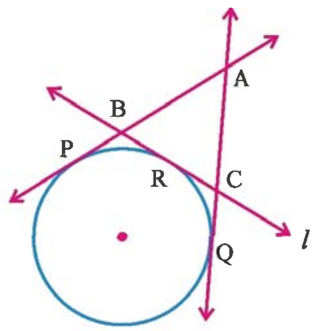
3. $\overline{AB}$ એ $\odot$(O, 10) નો વ્યાસ છે. B માંથી $\odot$(O, 8)ને દોરેલી સ્પર્શરેખા $\odot$(O, 8) ને D બિંદુએ સ્પર્શે છે. $\overrightarrow{BD}$ એ $\odot$(O, 10) ને C માં છેદે છે. AC શોધો.

4. O કેન્દ્રિત વર્તુળના બહારના ભાગમાં કેન્દ્રથી 34 અંતરે બિંદુ P આવેલ છે. P માંથી વર્તુળને દોરેલો સ્પર્શક વર્તુળને Qમાં સ્પર્શે છે. જો PQ $= 16$ હોય, તો વર્તુળનો વ્યાસ શોધો.

5. આકૃતિ 11.24 માં વર્તુળની બહારના બિંદુ A માંથી વર્તુળને બે સ્પર્શકો દોરવામાં આવ્યા છે, જેમના સ્પર્શબિંદુઓ P અને Q છે. રેખા l વર્તુળને R બિંદુએ સ્પર્શે છે. રેખા l એ $\overline{AP}$ અને $\overline{AQ}$ને આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે અનુક્રમે B અને C માં છેદે છે. જો AB $= c$, BC $= a$, CA $= b$ હોય, તો સાબિત કરો કે,

(1) AP + AQ $= a + b + c$

(2) AB + BR = AC + CR = AP = AQ $= \frac{a+b+c}{2}$



આકૃતિ 11.24

6. સાબિત કરો કે વર્તુળના સ્પર્શકને સ્પર્શબિંદુએ દોરેલી લંબરેખા વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી પસાર થાય છે.

7. $\odot$(O, r)ની બહારના ભાગમાં આવેલા બિંદુ P માંથી વર્તુળને દોરેલા સ્પર્શકો વર્તુળને A અને Bમાં સ્પર્શે છે. સાબિત કરો કે $\overline{OP} \perp \overline{AB}$ અને $\overline{OP}$ એ $\overline{AB}$ને દુભાગે છે.

8. $\odot(O, r)$ના બહારના ભાગમાં આવેલ બિંદુ P માંથી વર્તુળને સ્પર્શકો $\overleftrightarrow{PT}$ અને $\overleftrightarrow{PR}$ દોરેલા છે, જેમનાં સ્પર્શબિંદુઓ T અને R છે. સાબિત કરો કે $m\angle TPR = 2m\angle OTR$.

9. $\overline{AB}$, $\odot(O, 5)$ની જીવા છે. AB = 8. વર્તુળને A અને B બિંદુએ દોરેલા સ્પર્શકો P બિંદુએ છેદે છે. PA શોધો.

10. P એ $\odot(O, 5)$ ના સમતલનું એવું બિંદુ છે કે જેથી OP = 13. P માંથી વર્તુળને બે સ્પર્શકો દોરેલા છે, જે વર્તુળને A અને B માં સ્પર્શે છે. AB શોધો.

સ્વાધ્યાય 11

1. એક વર્તુળ ΔABCની બાજુઓ $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ને અનુક્રમે D, E, Fમાં સ્પર્શે છે. BD = x, CE = y અને AF = z છે. સાબિત કરો કે ΔABC નું ક્ષેત્રફળ = $\sqrt{xyz\ (x+y+z)}$.

2. ΔABC સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે, જેમાં $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. ત્રિકોણની ત્રણે બાજુઓને સ્પર્શનું વર્તુળ $\overline{BC}$ ને D માં સ્પર્શે છે. સાબિત કરો કે D એ $\overline{BC}$નું મધ્યબિંદુ છે.

3. ΔABCમાં $\angle B$ કાટખૂણો છે. જો AB = 24, BC = 7, તો ΔABC ની ત્રણે બાજુઓને સ્પર્શતા વર્તુળની ત્રિજ્યા શોધો.

4. જેમાં $\angle B$ કાટખૂણો હોય તેવા ΔABCની ત્રણે બાજુઓને એક વર્તુળ સ્પર્શે છે. સાબિત કરો કે વર્તુળની ત્રિજ્યા $\frac{AB + BC - AC}{2}$ છે.

5. $\square$ ABCDમાં $m\angle D = 90$. O કેન્દ્ર અને r ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ ચતુષ્કોણની બાજુઓ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ અને $\overline{DA}$ને અનુક્રમે બિંદુઓ P, Q, R અને S માં સ્પર્શે છે. જો BC = 40, CD = 30 અને BP = 25, તો વર્તુળની ત્રિજ્યા શોધો.

6. બે સમકેન્દ્રી વર્તુળો આપેલાં છે. સાબિત કરો કે મોટી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળોની જીવાઓ હોય અને નાની ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળને સ્પર્શતા હોય તેવા તમામ રેખાખંડો એકરૂપ હોય.

7. એક વર્તુળ $\square$ ABCD ની બધી બાજુઓને સ્પર્શે છે. જો AB = 5, BC = 8, CD = 6 હોય, તો AD શોધો.

8. એક વર્તુળ ચતુષ્કોણની ચારે બાજુઓને સ્પર્શે છે. જો ચતુષ્કોણની સૌથી મોટી લંબાઈની બાજુ AB હોય, તો સાબિત કરો કે સૌથી નાની લંબાઈની બાજુ CD છે.

9. O કેન્દ્રિત વર્તુળના બહારના ભાગમાં આવેલું બિંદુ P છે. વર્તુળની ત્રિજ્યા 24 છે. P માંથી વર્તુળને દોરેલો સ્પર્શક વર્તુળને Qમાં સ્પર્શે છે. જો OP = 25 હોય, તો PQ શોધો.

10. **નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d) માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને $\square$ માં લખો :**

(1) P એ $\odot(O, 15)$ ના બહારના ભાગમાં આવેલું બિંદુ છે. P માંથી વર્તુળને દોરેલો સ્પર્શક વર્તુળને T માં સ્પર્શે છે. જો PT = 8 હોય, તો OP = ... $\square$

(a) 17 (b) 13 (c) 23 (d) 7

(2) $\overleftrightarrow{PA}$, $\overleftrightarrow{PB}$ એ $\odot(O, r)$ ને A અને B માં સ્પર્શે છે. જો $m\angle AOB = 80$ હોય, તો $m\angle OPB$ = ... $\square$

(a) 80 (b) 50 (c) 10 (d) 100

(3) O કેન્દ્રિત વર્તુળના બહારના ભાગમાં આવેલા બિંદુ,P માંથી વર્તુળને દોરેલો સ્પર્શક વર્તુળને Q માં સ્પર્શે છે. જો OP = 13, PQ = 5 હોય, તો વર્તુળનો વ્યાસ ...... છે.

(a) 576 (b) 15 (c) 8 (d) 24

(4) ΔABC માં AB = 3, BC = 4, AC = 5 હોય, તો ત્રિકોણની ત્રણે બાજુઓને સ્પર્શતા વર્તુળની ત્રિજ્યા ...... છે.

(a) 2 (b) 1 (c) 4 (d) 3

(5) O કેન્દ્રવાળા વર્તુળને $\overleftrightarrow{PQ}$ અને $\overleftrightarrow{PR}$ અનુક્રમે A અને B બિંદુએ સ્પર્શે છે. જો $m\angle$OPB = 30 અને OP = 10 હોય, તો વર્તુળની ત્રિજ્યા ...... હોય.

(a) 5 (b) 20 (c) 60 (d) 10

(6) O કેન્દ્રવાળા વર્તુળની બહારના બિંદુ P માંથી વર્તુળને દોરેલા સ્પર્શકોના સ્પર્શબિંદુઓ A અને B છે. જો $m\angle$OPB = 30 હોય, તો $m\angle$AOB = ...

(a) 30 (b) 60 (c) 90 (d) 120

(7) $\odot$(O, 5) ની એક જીવા $\odot$(O, 3) ને સ્પર્શે છે. જીવાની લંબાઈ ...... હશે.

(a) 8 (b) 10 (c) 7 (d) 6

*

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચે આપેલા મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. વર્તુળના સ્પર્શકની સંકલ્પના
2. વર્તુળનો સ્પર્શક એ સ્પર્શબિંદુમાંથી પસાર થતી ત્રિજ્યાને તે જ સમતલમાં લંબ હોય.
3. વર્તુળની ત્રિજ્યાને તેના વર્તુળ પરના બિંદુએ તે જ સમતલમાં દોરેલી લંબરેખા તે વર્તુળનો સ્પર્શક છે.
4. વર્તુળ પરના દરેક બિંદુએ વર્તુળને અનન્ય સ્પર્શક દોરી શકાય.
5. વર્તુળના સમતલના કોઈ બિંદુમાંથી વર્તુળને દોરેલ સ્પર્શકોની સંખ્યા
6. વર્તુળના સમતલમાં આવેલા વર્તુળની બહારના બિંદુમાંથી વર્તુળને દોરેલા સ્પર્શકની લંબાઈની વ્યાખ્યા.
7. વર્તુળની બહારના બિંદુમાંથી વર્તુળને દોરેલા બે સ્પર્શકોની લંબાઈ સમાન હોય.