UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

Facoltà di Lettere e Filosofia

Dottorato di ricerca in Filosofia

Scuola di Dottorato in *Humanae Litterae*

Settore Disciplinare M-FIL/02

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

LE MOLTE VERSIONI DELLA CONSEGUENZA LOGICA

Coordinatore del Corso di Dottorato: Chiar.mo Prof. Renato Pettoello

Tutor: Chiar.mo Prof. Silvio Bozzi

Tesi di Dottorato di:

Matteo Bianchetti

Matr. R07533

XXIII Ciclo

Anno Accademico 2009/2010

LE MOLTE VERSIONI DELLA CONSEGUENZA LOGICA

MATTEO BIANCHETTI

Indice

Preface

Vi sono varie persone che, in modi diversi, hanno permesso la realizzazione di questo lavoro. Desidero, sinceramente e profondamente, ringraziarle tutte, perché hanno contribuito a farmi vivere un'esperienza straordinaria e istruttiva.

La mia famiglia mi ha garantito sostegno e indispensabile affetto e questo lavoro è il frutto anche del loro importante aiuto.

Chen si è preoccupata di me e ha migliorato tante cose, il che ha influito non poco sul mio lavoro.

Devo ringraziare, infine, nel modo più caloroso e riconoscere il mio enorme debito, sia umano sia scientifico, nei confronti del prof. Bozzi. Senza di lui non sarei mai riuscito a sviluppare, approfondire e concretizzare i miei interessi nel campo della logica e della filosofia. Con la sua cortesia, la sua pazienza e la sua eccellente e straordinariamente profonda conoscenza della logica e dei temi che la riguardano mi ha insegnato praticamente tutto quello che so in questo campo, mi ha spronato a non accontentarmi di visioni ristrette e di comodo e mi ha condotto a scoprire, apprezzare e valorizzare, con rispetto e curiosità, la diversità e la ricchezza di ciò che è la logica. Il suo insegnamento è andato ben oltre il pur ricco, continuo ed ottimo supporto che mi ha sempre garantito per compiere la mia ricerca.

In conclusione, devo aggiungere una breve spiegazione su alcune caratteristiche tecniche di questo libro. Il testo, a parte la bibliografia, è stato compilato in Scientific WorkPlace. Questo programma si occupa in automatico della formattazione del testo. Trattandosi di un programma americano, purtroppo, ha inserito alcune scritte (come il titolo di questa prefazione) in lingua inglese e non mi è stato possibile modificarle. Per quanto ciò sia sgradevole, purtroppo non sono riuscito a trovare un'alternativa praticabile. Un'altro difetto, legato al medesimo problema linguistico, è che, purtroppo, anche la divisione in sillabe delle parole, per andare a capo alla fine di una riga, è stabilita automaticamente dal programma e non sempre è corretta.

Chiedo scusa al lettore per questi difetti.

Introduction

In questa introduzione intendo fornire solo un breve accenno alla struttura e ai contenuti di questo libro, rimandando allle introduzioni di ognuna delle sue parti per trovare indicazioni più specifiche.

Questo lavoro intende occuparsi della nozione di conseguenza logica. Il mio obiettivo principale è quello di mostrare, in parte con numerosi analisi di esempi storici e in parte con l'analisi di nozioni tecniche e formali usate nella ricerca contemporanea, come questa nozione possa essere caratterizzata in molti modi e da diversi punti di vista. I motivi di questa diversità sono moltepici e spesso esterni alla logica (di natura metafisica, pragmatica o epistemica, per esempio). Con questo lavoro intendo mostrare i vari aspetti di questa molteplicità e mettere in luce le ragioni che, di volta in volta, hanno spinto certi autori a preferire una certa caratterizzazione della nozione di conseguenza logica piuttosto che un'altra e l'intreccio che si stabilisce fra ricerca logica, nozioni logiche, convinzioni metafisiche e considerazioni circa l'uso a cui destinare la logica.

Il lavoro si suddivide in due grandi sezioni. Nella prima mi dedico a ricerche di carattere storico, considerando, senza pretese di completezza, alcuni momenti particolarmente significativi ed interessanti. Il confronto con diverse riflessioni sulla natura della logica e sulla caratterizzazione della conseguenza logica, ci permetteranno di sviluppare un robusto senso della complessità di questa nozione e di evitare facili e semplicistiche prese di posizione unilaterali che, invece, come vedremo, si possono trovare in alcuni lavori contemporanei.

Nella seconda sezione mi occupo di ricerche dal carattere più tecnico e formale. Prendendo le mosse da un'idea elaborata Tarski al principio degli anni '30, mostro come è possibile studiare la nozione di conseguenza logica in generale come una relazione definita su un insieme di formule di un linguaggio formale e a prescindere da una sua particolare presentazione, sintattica o semantica. Da qui si sviluppano delle riflessioni su alcune proprietà che possono essere attribuite a questa relazione, al modo con cui questa relazione può essere specificata come un calcolo o come una semantica e, infine mi soffermo a considerare alcune questioni relativa alle semantiche basate sulle matrici.

In entrambe le parti, cerco di sviluppare il più possibile le riflessioni che mostrano il senso delle scelte che si compiono, del perché si intende descrivere la conseguenza logica proprio in un certo modo, che cosa ciò comporta, a quali problemi si intende rispondere e quali nuove questioni sono stimolate da queste scelte. Questi diversi modi di caratterizzare la nozione di conseguenza logica si legano a diversi modi di intenderla e a diversi modi di valorizzare i suoi molteplici aspetti ed intendo portare il più possibile alla luce questi collegamenti e questi presupposti.

Come ho detto, informazioni più specifiche sul contenuto delle singole parti e, poi, anche delle singole sezioni, sono state inserite nelle premesse alle parti e alle sezioni. In esse e, poi, nella conclusione, oltre che spesso inserite anche nei capitoli, è possibile ritrovare anche considerazioni circa l'obiettivo generale della mia ricerca e il senso del compiere queste riflessioni.

Parte I

ASPETTI STORICI DELLA CONSEGUENZA LOGICA

Capitolo 1

PREMESSA

Il concetto di *conseguenza logica* è stato specificato, nella storia del pensiero, in molti modi diversi. Non è possible parlare, semplicemente, di conseguenza logica come se fosse stata sempre intesa in modo univoco. Cercherò di mostrare, infatti, come a questa nozione siano state attribuite proprietà differenti tra loro e come ciò sia avvenuto sulla base di determinate scelte metafisiche ed epistemologico. Diversi modi di concepire che cosa sia la realtà, che cosa significhi essere vero, che cosa significhi validità universale, che cosa significhi formalità, cosa si debba intendere per ragionamento corretto e così via determineranno diverse modi di intendere la nozione di conseguenza logica.

Con questa sezione, vorrei mostrare dei concreti importanti esempi di quanto diverse siano state le nozioni di conseguenza e spiegare perché siano state diverse. In questo modo, si avrà l'occasione di porre in luce i diversi singoli aspetti che riguardano tale nozione. In tal modo, propongo un percorso che si focalizza su come una certa idea metafisica, per esempio, si riflessa sulla nozione di conseguenza logica, magari combinandosi con una data concezione dell'ambito e dei fini della logica, che hanno fatto sì che l'interessa della ricerca logica si focalizzasse su certi aspetti che, invece, in un'altra ottica, o non sono stati considerati o sono stati ritenuti secondari.

Ritengo che sia fondamentale comprendere queste strette relazioni tra le nozioni logiche, e la nozione di conseguenza logica in particolare, e nozioni che, per ora, in mancanza di un'espressione migliore, indico come extra-logiche (soprattutto metafisiche ed epistemologiche). Vedremo come un autore quale Etchemendy, nei suoi due lavori Etchemendy [1990] e Etchemendy [2008], usi in continuazione espressioni come *il concetto intuitivo* di conseguenza logica e *il concetto proprio* di conseguenza logica[1]. Etchemendy [2008], p. 295 parla tranquillamente *del concetto genuino* di conseguenza logica. Etchemendy è

[1] Si considerino, per esempio, i seguenti passi. Etchemendy [1990], p. 2:The intuitive notion of consequence cannot be captured by any *single* deductive system . Etchemendy [2008], p.265:Surrounding the intuitive concepts of logical consequence and logical truth are a host of vague and philosophically difficult notions. *Ivi*, p. 270:None of the central characteristic of the consequence relation are captured by Tarski's analysis. *Ivi*, p. 271:The reductive analysis omits the single most important characteristic of the consequence relation. *Ivi*, p. 295:The

preoccupato di mostrare che la caratterizzazione della nozione di conseguenza logica fornita da Tarski [1936c], che analizzeremo a suo tempo, è del tutto sbagliata, ma non si sofferma a considerare la possibiltà che parlare, come fa lui, del concetto intuitivo, proprio e genuino di conseguenza logica sia altamente problematico e che, forse, tale nozione non è così immediatamente chiara da potersi tranquillamente riferire ad essa.

Questa è precisamente la posizione che intendo sostenere con le ricerche storiche che presento in questa sezione. La nozione di conseguenza logica è stata caratterizzata in modi alternativi ed assai differenti. Richiamarsi alle intuizioni a proposito di tale nozione non permette di risolvere facilmente il problema, a differenza di quel che pensa Etchemendy, perché il concetto di conseguenza logica è strettamente intrecciato, in modo non evidente, ad una lunga serie di altre nozioni, a loro volta bisognose di studio attento, quali le nozioni di verità, possibilità, formalità, universalità, nozioni logiche e nozioni

extra-logiche, obiettivi della logica, metodo scientifico, proprietà ontologiche, ...

Individuare un concetto genuino di conseguenza logica, può significare due cose: o si intende definire il concetto appropriato di conseguenza logica, date certe assunzioni sulle rilevante nozioni extra-logiche che devono essere considerate per fornire tale definizione, o si intende definire il concetto di conseguenza logica che si accompagna alle *giuste* nozioni extra-logiche che sono rilevanti per definire tale concetto. Nel primo caso, la questione appare privo di senso chiamare genuino tale concetto di conseguenza logica, nel senso che è semplicemente quello definito all'interno di un ceto orientamento filosofico e non lo si propone come superiore a quello definibile di altri orientamenti. Nel secondo caso, l'impresa, per quanto possa non essere infondata, è titanica e va ben oltre quello che offrono le riflessioni di Etchemendy. In tal caso, infatti, occorrerebbe fornire un sistema filosofico che chiarisca il senso delle molte nozioni legate al concetto di conseguenza logica e solo se ognuno di queste nozioni è stata definita correttamente (ossia solo se è stata definita la genuina nozione di verità, ...) è possibile dire che è stata definita la genuina nozione di conseguenza logica.

La scelta tra una nozione di conseguenza logica e un'altra non è una questione che si riduce al campo della logica in senso stretto. Si tratta, al contario, di una questione che, per essere affrontata in modo compiuto, costringe a considerare anche le questioni fondamentali su cosa intendiamo per reale, mondo, possibilità, scienza, ... Lo scopo di questa sezione è proprio quello di evitare un approccio banale e riduttivo a tale questione, ossia un approccio che non valorizzi queste connessioni essenziali e ritenga di poter trattare questo concetto con una semplicità che è solo la manifestazione di un approccio che non apprezza la complessità del proprio oggetto di indagine.

In questa sezione, per mostrare esempi concreti di questo intreccio tra nozioni logiche, *in primis* la nozione di conseguenza logica, e altre nozioni, presenterò le riflessioni in proposito di autori che hanno dato un contributo importante a far

identified features are not what underlie logical consequence, but merely symptomatic of *the genuine relation* (corsivi aggiunti).

emergere concezioni diverse della nozione di conseguenza logica e che, di volta in volta, hanno posto l'accento su un aspetto do tale nozione (la formalità, la razionalità, la conservazione della verità, ...) a discapito di altri, considerati, per ragioni che diremo, meno importanti. La selezione dei temi e dei momenti storici non ha pretese di completezza e neppure si propone di fornire un'analisi esaustiva di tutte le nozioni citate ed elaborate dai vari pensatori. Lo scopo che mi propongo è rendere evidente la complessità della nozione di conseguenza e la fitta rete di rapporti che stringe con altri concetti e con determinate prese di posizione nel campo della filosofia. La presentazione delle posizioni che seguon, dunque, farà rierimneto anche a concetti usualmente considerati extra-logici e considerati appartenere, piuttosto, alla metafisica (qual è natura della realtà, come si definisce la nozione di necessario), alla semiotica (quali sono le unità di un discorso significativo, ...), all'epistemologia (qual è l'obiettivo della scienza, in che modo la scienza può giungere ad esso, in che modo la logica può aiutare la scienza a raggiungere il suo obiettivo, ...), ...

Come vedremo nella seconda parte della tesi, questa moltelpicità di punti di vista perdura anche nel dibattito contemporaneo: autori diversi contestano questa o quella nozione di conseguenza logica e la sua caratterizzazione formale e ne propongono altre come alternative. L'aver previamente compreso e storicamente verificato quanto siano profonde le ragioni di tali dissensi ci permetterà di comprendere meglio anche il senso dei dibattiti contemporanei e di evitare prese di posizione semplicistiche e determinate più dall'angustia del proprio angolo visuale che da una reale capacità di proporre una soluzione ai problemi in discussione.

L'elenco dei temi trattati in questa sezione va dalle riflessioni di Aristotele fino ad autori contemporanei, come Tarski, Brouwer e comprende anche pensatori tutt'ora attivi in questo campo, come Prawitz ed Etchemendy, e che sono stati capaci di suscitare un ampio dibattito che è ancora vivo nel momento in cui scrivo.

Più precisamente, in questa sezione prenderò in considerazione, nell'ordine, le riflessioni di Aristotele, di Kant, di Bolzano, di Frege, degli algebristi della logica, degli assiomatici, di Tarski, di Etchemendy, dei costruttivisti (in particolare: Brouwer, Heyting e Prawitz). Intendo sottolineare ancora una volta che il mio scopo non è quello di trattare in modo esaustivo nè la storia del concetto di conseguenza logica nè le riflessioni, neppure solo quelle limitate al campo strettamente logico, di tali autori. Il mio unico scopo è quello di fornire esempi che mostrino la complessità concettuale che si accompagna allo studio della nozione di conseguenza logica e che indichino quanta attenzione e cautela, che va ben oltre il semplice ricorso ad intuizioni non meglio specificate, occorra usare per potersi accingere a definirla e a descriverne le caratteristiche. Le analisi che seguono, pertanto, non vanno lette come saggi uno sttacato dall'altro e con pretese di esaustività. Vanno, piuttosto, considerati parti del discorso generale che ho tratteggiato sopra, ossia parti di un discorso volto a mostrare la complessità della nozione di conseguenza logica. Queste parti sono esemplificazioni che servono a mostrare, appunto, quanto tale nozione non si sia sempre configurata come una nozione in cui confluiscono rilfessioni varie e da campi diversi del sapere e vanno, pertanto, lette inserendole in tale discorso più generale. In questo modo, è possibile anche comprendere perché, in più punti, si suggeriscono confronti tra autori di epoche diverse e che operavano all'interno di quadri concettuali ben differenti. Non si tratta di voler misconoscere la distanza teorica tra diverse posizioni e che ciò rende delicato il confronto (ma non impossibile). Si tratta, piuttosto, di voler rimarcare come, all'interno di un certo ambito concettuale, caratterizzato dalle proprie nozioni, dai propri problemi, dai propri campi di ricerca e dai propri obiettivi, non si presentano certe idee o si presentano in forma diversa. Laddove un aspetto della nozione di conseguenza logica appare problemitico in un certa prospettiva, può darsi che una caratterizzazione analoga non era problematica è stata presentata in un ambito diverso, con concetti, metodologie, ambiti e problemi differenti. Non intendo suggerire un acritico relativismo ed ammettere che tutte le posizioni, dunque, si equivalgono in quanto ognuna è giustificabile dal proprio punto di vista e non è possibile individuare un punto di vista privilegiato dal quale giudicare tutti gli altri. Questa può anche essere una tesi rispettabile ed è, a mio parere, degna della massima attenzione, ma non la sua discussione non rientra nella mia ricerca. Quel che intendo mostrare è solo che non si può parlare di conseguenza logica senza parlare, anche, di molteplici nozioni che, solitamente, non sono considerate logiche in senso stretto. Quel che mi sembra risultare dal mio lavoro, inoltre, è anche la fecondità che un approccio che riconosca la complessità di tale nozione comporta. In tal modo, infatti, si possono apprezzare le diverse nozioni di conseguenza logica che sono state e si può metterne in luce il valore come tentativi di cogliere degli aspetti, di volta in volta, differenti, privilegiando, per esempio, la nozione di ragionamento corretto o quella di conservazione della verità o quella di conservazione della verità ma escludendo casi ritenuti degenerati (come l'ammettere che da una contraddizione segua qualsiasi cosa) o altro ancora. Se non si escludono tali caratterizzazioni alternative come palesemente sbagliate, diventa allora interessante cercare di comprendere i legami che esistono tra di esse, come il legame tra una caratterizzazione (per esempio, per mezzo di un calcolo formale) della conseguenza logica che privilegia il suo legame con le forme di ragionamento corretto ed una caratterizzazione (per esempio, per mezzo di una semantica) della conseguenza logica che privilegia il suo legame con la nozione di conservazione della verità. É possibile, inoltre, studiare come la medesima proprietà, per esempio la proprietà della formalità, è stata caratterizzata in modi diversi a seconda che sia scelta una visione della conseguenza logica più legata alle forme di ragionamento corretto o pià legata alla nozione di conservazione della verità. Tutti questi problemi sono trattabili all'interno della mia prospettiva e sono stati effettivamente trattati in questo lavoro. In questo senso, intendo ribadire ancora una volta, che le indagini storiche che seguono sono esempi di come queste questioni si siano poste nella storia del pensiero e di come abbiamo ricevuto risposte differenti e per quale motivo, in modo da poter, affrontare, sulla base di questa consapevolezza, uno studio non ingenuo della nozione di conseguenza logica.

Capitolo 2

LA CONSEGUENZA SILLOGISTICA IN ARISTOTELE

2.1 PREMESSA

Come abbiamo visto, non è possibile parlare semplicemente di logica come se il modo di intenderla sia sempre stato univoco e come se gli obiettivi che hanno guidato le diverse ricerche siano sempre stati sostanzialmente i medesimi. Dal momento che l'obiettivo della mia ricerca è limitato allo studio di alcuni modi di concepire la nozione di conseguenza logica, mi limiterò a richiamare, brevemente, alcuni episodi fondamentali che mostrano come questa nozione sia stata diversamente intesa nel corso della storia e di come siano stati diversi gli intenti, gli aspetti e i problemi (prima ancora che le soluzioni) che si trovano.

Come prima ed ovvia cosa, prenderò in esame la riflessione di Aristotele, che al riguardo, come vedremo, ha espresso idee notevolmente diverse da quelle abituali ai nostri giorni. Vedremo, in modo particolare, come la sua ricerca logica non si occupi della nozione di conseguenza logica in sè e sulla validità logica degli argomenti in sè, ma ci sia un complesso rapporto tra la sua concezione della metodologia dell'indagine scientifica, la sua teoria della predicazione e la ricerca di una giustificazione per enunciati che esprimono un rapporto predicativo tra due termini.

Aristotele è solitamente considerato il fondatore della logica. Lo stesso stagirita, che inizia abitualmente l'esposizione delle sue altre dottrine con una rassegna delle posizioni dei pensatori che lo hanno preceduto e li cita abbondantemente anche nel proseguo della trattazione, per mostrare quanto sia già stato detto da essi e dove e perché, eventualmente, abbiano sbagliato, si comporta in modo molto diverso nei suoi lavori dedicati alla logica. In tali scritti, infatti, non accenna a dottrine precedenti, anzi, nel capitolo 34 delle Confutazione sofistiche

(CSof 34) sottolinea espressamente la novità del suo lavoro:

> Non deve sfuggirci, d'altro canto, quale avvenimento costituisca questo nostro scritto. (...) Riguardo alla nostra opera non soltanto non si può dire che fosse già compiutamente elaborata, ed in parte no, ma si deve addirittura affermare che non sussisteva affatto nula di simile. (...) sulla deduzione, invece, non avevamo prima d'ora assolutamente null'altro da ricordare [CSof 34 183 b 16 – 184 2].
>
> Mentre riguardo ai discorsi retorici sussistevano già, sin dai tempi antichi, molti studi, sulla deduzione, invece non avevamo prima d'ora assolutamente null'altro da ricordare [CSof 34 184 a 9 - 183 b 2].

In questo passaggio, Aristotele afferma che la ricerca compiuta nelle lezioni contenute nelle *CSof* [*CSof* 34 184 b 7][1] non era stata condotta prima di lui e che i risultati che ha esposto sono solo il frutto delle sue faticose ricerche [*CSof* 34 184 b 3-4][2]. Ciò che Aristotele dice, inoltre, sembra generalizzabile al complesso delle sue ricerche logiche perché quando spiega la differenza tra la sua impostazione e quella dei Sofisti discute del modo di studiare e usare gli argomenti in generale, quindi non si limita al caso di mostrare la fallacie eristiche e sofistiche:

> L'insegnamento impartito dai professionisti, che si dedicavano alle discussioni eristiche, era in certo modo simile a quanto aveva stabilito nella sua arte Gorgia. Tra costoro, invero, alcuni facevano imparare a memoria dei discorsi retorici, altri dei discorsi destinati alle interrogazioni, scegliendo, gli uni e gli altri, degli argomenti su cui ritenevano dovessero ricadere con la massima frequenza le discussioni di due interlocutori. Per tale ragione l'insegnamento impartito ai loro scolari risultava rapido, ma privo di rigore. In realtà essi fornivano non già l'arte, bensì prodotti dell'arte, pensando così di ammaestrare, e comportandosi come un individuo, che sostenesse di trasmettere la scienza di non aver male ai piedi, ed in seguito, senza insegnare né l'arte del calzolaio né come sia possibile procurarsi gli strumenti in vista di tale scopo, fornisse invece una ricca scelta di calzature di ogni tipo. Costui infatti verrebbe incontro ad un bisogno, ma non trasmetterebbe un'arte [*CSof* 34 183 b 34 – 184a 8].

I Sofisti, in altre parole, sono qui descritti come persone che facevano imparare a memoria, ai propri allievi, alcuni discorsi che, sulla base dell'esperienza, si ritenevano efficaci, ma senza comprendere la ragione di tale efficacia, ossia senza possedere l'arte di argomentare, ossia la capacità di comprendere su cosa si fondi la validità degli argomenti. Proprio tale riferimento ad una più generale arte di argomentare rende legittimo pensare che Aristotele, in tale passo, sia riferisca al

[1] "Avete ascoltato queste lezioni".

[2] Ci siamo noi stessi affaticati per lungo tempo, con un'indagine ed un esercizio continuo.

complesso delle sue opere di logica in quanto in tutte esse egli fornisce un'analisi delle leggi e dei principi che regolano il ragionamento corretto.

Un primo aspetto da rilevare, dunque, è che Aristotele si mostra del tutto consapevole della differenza che sussiste tra l'uso *preteorico* e *spontaneo* dei procedimenti logicamente corretti e il loro uso consapevole dal punto di vista teorico. Questa distinzione, unita alla considerazione che il nostro uso preteorico costituisce un punto di riferimento per formulare le nostre concezioni teoriche, indica come sia possibile fornire *diverse* teorie della conseguenza logica se l'uso preteorico a cui ci si riferisce presenta aspetti molteplici e che sono solo parzialmente colti da teorie diverse.

Ad ogni modo, queste considerazioni saranno sviluppate lungo tutta la tesi. Quel che mi interessa rilevare, qui, è che per Aristotele, effettivamente, si dà un uso preteorico legittimo dei procedimenti logici e tale uso non richiede la conoscenza esplicita delle leggi che regolano tali procedimenti. Tale uso, come è ovvio, era presente anche in autori precedenti ad Aristotele, ma è solo con lo stagirita che i procedimenti logici smettono di essere semplicemente usati e divengono un oggetto specifico di studio e che, quindi, si cerca di metterne in luce i molteplici aspetti.

Naturalmente l'impresa aristotelica è stata possibile solo sulla base di una situazione culturale che ha affrontato una serie di questioni in modo tale da rendere possibile e desiderabile, per non dire necessario, il sorgere dello studio esplicito dei procedimenti logici. Non è possibile trattare, qui, questa questione e non sarebbe neppure pertinente al tema della mia ricerca.

Limitando la mia indagine ai casi più significativi, non tratterò della riflessione logica che precede l'opera di Aristotele. Si può, comunque, osservare che tale riflessione è stata estremamente frammentaria e casuale, tanto da risultare giustificata l'affermazione secondo cui Aristotele è il fondatore dell'indagine logica elaborata e tematizzata in modo sistematico.

2.2 OGGETTO DEGLI ANALITICI PRIMI

Al principio degli *APr*, Aristotele dichiara che la ricerca a cui intende dedicarsi verte sull'*apodeixis* (dimostrazione) e sull'*episteme apodeiktiké* (scienza dimostrativa o conoscenza dimostrativa) [*APr* I 1 24 a 10-11][3]. Con *apodeixis* ci si riferisce ad un particolare tipo di sillogismo (termine che deve ancora essere definito) e, precisamente, quello le cui protasi sono vere e prime o consciute da protasi che, in ultima istanza, sono vere e prime [*Top* I 100 a 18 27-30][4]. Con *episteme apodeiktiké*, invece, non è chiaro se Aristotele si riferisca alla *scienza* dimostrativa o alla *conoscenza* dimostrativa. Nel primo caso, si dovrebbe intendere un insieme di verità su di un certo argomento suddivise in verità dimostrate

[3] Bisogna per prima cosa dire su che verte e di che cos'è la ricerca, cioè che verte sulla apodeixis e riguarda l'episteme apodeiktiké".

[4] "Si ha (...) dimostrazione, quando il sillogismo è costituito e deriva da elementi veri e primi, oppure da elementi siffatti che assumano il principio della conoscenza che li riguarda attraverso certi elementi veri e primi".

[*APo* I 28 87 a 38-b 44][5] e *archai*, il punto di partenza per le dimostrazioni [*Met* Δ I 1013 a 14-16][6]. Nel secondo caso, si dovrebbe, invece, intendere un certo modo di possedere la conoscenza di qualcosa: la conoscenza per dimostrazione (*apodeiktiké episteme*) è quella per cui ciò che si ottiene come conclusione di un sillogismo (termine ancora da spiegare) scientifico, un sillogismo, cioè, le cui premesse siano "vere, prime, immediate (*amésos*), più note, anteriori e tali che siano ragioni (*aitìai*) della conclusione" [*APo* I 2 71 b 20-22]. La questione, ai fini del nostro discorso, non è rilevante. All'inizio di *APr*, infatti, qualora *episteme apodeiktiké* sia da tradurre con 'scienza dimostrativa', sicuramente Aristotele non intende riferirsi ad una scienza dimostrativa particolare (l'aritmetica, l'ornitologia, ...), ma a tutte in generale, in quanto condividono un certo modo di procedere per acquisire le conoscenze e questo modo di procedere è, appunto, la conoscenza dimostrativa: la dimostrazione di teoremi a partire da *archai* che possiedono le caratteristiche specificate sopra. Per i nostri obiettivi, è sufficiente aver determinato questo che ci permette di fare riferimento alle caratteristiche della conoscenza dimostrativa per chiarire il senso dell'impresa logica dello stagirita.

2.3 IL SILLOGISMO

Come vedremo, nel secolo scorso, Tarski [1936c] dichiarerà che è naturale che chi si occupa di discipline formali si imbatta nella nozione di conseguenza logica. Aristotele, tuttavia, non sembra dedicare a questo concetto un'attenzione particolare e non lo rende mai oggetto di un'indagine specifica ed approfondita. Se si scorrono le definizioni in *Met* Δ, si trova che è trattata l'espressione "*to ék tinos einai*", "derivare da qualcosa" [*Met* Δ 24 1023 a 26], ma con significati affatto diversi da quelli che i logici contemporanei, e in particolare Tarski, assegnano alla nozione di conseguenza logica: non si fa riferimento alla possibilità di dire che un logos segue da un altro logos o da altri logoi né, tantomeno, si parla di argomenti e preservazione della verità dalle premesse alla conclusione.

In questo caso, ciò potrebbe dipendere dalle circostanze che il libro Δ costituisce un lessico rivolto alla filosofia prima e non a ciò che è oggetto di *APr*. In realtà, neanche in *APr* si trova una definizione del genere. Il passaggio più simile a quella che potrebbe essere una definizione di conseguenza logica è la stessa definizione di sillogismo:

> Il sillogismo è il *logos* in cui, poste alcune cose, per il fatto che queste sono, segue di necessità qualcosa di distinto da esse [*APr* I 1 24 b 18-20].

[5] "È una la scienza che riguarda un genere, ossia quelle cose che sono composte dalle cose prime del genere e sono parti o affezioni di queste per sé. Una scienza è diversa da un'altra scienza quando i loro principi non derivino dagli stessi principi né i principi dell'una derivino da quelle dell'altra. Se ne ha un segno quando si giunga agli indimostrabili, giacché bisogna che essi siano nello stesso genere dei dimostrati. Un altro segno di ciò è che le cose provate grazie ad essi siano nello stesso genere e omogenee".

[6] "Il punto di partenza per la conoscenza di una cosa si dice (...) principio della cosa; le premesse, per esempio, sono principi delle dimostrazioni".

La medesima definizione si trova all'inizio dei *Topici* [*Top* 1 100 a 25-26][7] e all'inizio delle *CSof* [*CSof* 1 164 b 28 – 165 a 1 2][8]. Un'altra definizione, analoga alle precedenti, è:

> Nell'ambito delle cose necessarie rientra anche la dimostrazione perché – se si tratta di una dimostrazione vera e propria – non è possibile che le conclusioni siano diverse da come sono. E la causa (*aitia*) di questa necessità sono le premesse (*ta prota*), se per ciò è impossibile che il sillogismo sia altro" [*Met* Δ 1015 b 6-9, tr. modificata].

La seconda definizione si riferisce solo alle dimostrazioni, che sono comprese tra i sillogismi, a cui si riferisce, invece, la prima definizione. Tuttavia alcuni elementi (ossia: premesse e causa) presenti nella seconda e non nella prima sono chiaramente applicabili, come vedremo, anche alla definizione di sillogismo.

La definizione di *APr*, così come quelle di *Top* e *CSof*, è molto generale. Essa, infatti, completata in alcuni punti dalla definizione, sopra citata, di *Met* Δ, stabilisce solo che il sillogismo è un logos composto da elementi distinguibili in premesse (*ta prota* secondo *Met* Δ) ed una conclusione, che la conclusione deve essere diversa dalle premesse, che le premesse e la conclusione sono legate dalla relazione di *seguire di necessità* e che causa (*aitia* secondo *Met* Δ) del sussistere di questa relazione sono solo le premesse. Le premesse, in altre parole, sono ciò che rende necessaria la conclusione.

Chiarendo il significato della definizione di *APr*, Aristotele aggiunge una specificazione assai importante:

> Non c'è bisogno di alcun termine estraneo per la realizzazione della necessità [*APr* I 1 24 b 22-23].

Dunque nel sillogismo compaiono dei termini. I termini sono ciò in cui si risolve la protasi (il predicato e ciò di cui il predicato si predica, [*APr* I 1 24 b 16-18][9]) e la protasi è il *logos* "affermativo o negativo di una cosa rispetto ad un'altra" [*APr* I 1 24 a 16]. Questo logos riguarda l'inerire (*uparkein*) di un termine ad un altro termine, in quanto o è universale (l'inerire ad ogni o a nessuno) o è particolare (l'inerire a qualche o l'inerire non a qualche o il non inerire ad ogni) o è indefinito (l'inerire o il non inerire senza la determinazione dell'universalità o della particolarità) [*APr* I 1 24 a 17-21][10] . Questa impostazione è ciò che caratterizza l'oggetto di studio degli *APr* e che li differenzia da *APo*.

[7] "Sillogismo è propriamente un discorso in cui, posti alcuni elementi, risulta per necessità, attraverso gli elementi stabiliti, alcunché di differente da essi".

[8] "Il sillogismo deriva ed è costituito da alcuni elementi, posti in modo tale che si debba dire per necessità, attraverso le premesse stabilite, alcunché di diverso da tali premesse".

[9] "Chiamo termine quello in cui si risolve la protasi, cioè il predicato e ciò di cui questo si predica, secondo che viene aggiunto [o separato] 'è' o 'non è"'.

[10] "Dico che è universale l'interire ad ogni o a nessuno, particolare l'inerire a qualche o l'inerire non a qualche o il non inerire ad ogni, indefinito l'inerire o il non inerire senza la determinazione dell'universalità o della particolarità, come per esempio 'contrari sono oggetto della stessa scienza', o 'piacere non è un bene"'.

Le protasi, infatti, possono essere dimostrative (vere e assunte tra i principi della scienza di cui si tratta) o dialettiche (scelte tra alternative contraddittorie) [*APr* I 1 24 a 22-25][11]. La distinzione, tuttavia, è irrilevante per lo studio dei sillogismi, dal momento che questi trattano solo dell'affermazione o negazione di un termine rispetto ad un altro, a prescindere della natura delle particolari affermazioni o negazioni [*APr* I 1, 24 a 25-28][12]. Ciò che dice la conclusione e ciò che dicono le premesse, cioè, prescinde dagli aspetti che non riguardano direttamente la natura affermativa o negativa dell'enunciato e che ciò che conta, per determinare la conseguenza sillogistica, è solo l'affermazione o la negazione di un certo rapporto predicativo tra termini.

Il sillogismo, dunque, è un logos composto da protasi in generale, a prescindere dal fatto che siano dimostrative o dialettiche [*APr* I 1 24 a][13]. Tanto le premesse, quanto la conclusione sono protasi e sono, dunque, legate, solo a causa delle premesse, dalla relazione di *seguire di necessità*.

2.4 UNA PECULIARE NOZIONE DI CONSEGUENZA

Secondo questa caratterizzazione, agli occhi di un logico contemporaneo, restano indeterminate molte cose. Come vedremo, nella ricerca contemporanea, si definiscono con chiarezza le proprietà (quali riflessività, monotonia, transitività e finitarietà, termini che definierò a suo tempo) della relazione di conseguenza . Si pone enfasi anche sul modo preciso in cui si definisce tale nozione che, come vedremo, può essere considerata, in generale dal punto di vista sintattico o dal punto di vista semantico. É sicuro, tuttavia, che impostare la questione in questo modo permetta di comprendere la vera natura dell'indagine aristotelica? Aristotele, in realtà, procede in modo molto diverso e ciò non è sorprendente data la grande distanza, per lo meno temporale, tra le sue ricerche e quelle contemporanee. Vediamo di approfondire, però, qual è l'orizzonte culturale in

[11] "La protasi dimostrativa differisce da quella dialettica, perché quella dimostrativa consiste nell'assunzione dell'uno o dell'altro membro della contraddizione (infatti chi dimostra non domanda, ma assume), mentre quella dialettica consiste in una domanda circa un'alternativa contraddittoria".

Cfr. anche APr I 1 24 a 29 – 24 b 12:"La protasi sarà (. . .) dimostrativa qualora sia vera e assunta tra le presupposizioni iniziali; quella dialettica invece, per chi interroga, sarà la domanda circa un'alternativa contraddittoria, mentre per chi sillogizza, sarà l'assunzione di quel che appare ed è opinabile".

Cfr. anche Top I 1 100 a 26-31: "Si ha così da un lato dimostrazione, quando il sillogismo è costituito e deriva da elementi veri e primi, oppure da elementi siffatti che assumano il principio della conoscenza che li riguarda attraverso certi elementi veri e primi. Dialettico p d'altro lato il sillogismo che conclude da elementi fondati sull'opinione".

[12] "Ciò [la differenza tra protasi dimostrative e protasi dialettiche] non importa differenza per la realizzazione del sillogismo nell'uno e nell'altro caso, giacché tanto chi dimostra quanto chi domanda dialetticamente sillogizza dopo aver assunto che una cosa inerisce o non inerisce ad un'altra cosa".

[13] "La protasi sillogistica sarà l'affermazione o la negazione in generale di una cosa rispetto ad un'altra cosa nel modo detto".

cui si inserisce la ricerca di Aristotele, che non va appiattita sulle categorie di pensiero contemporanee.

La relazione individuata da Aristotele è difficile da precisare perché fa riferimento ad una nozione di necessità la cui natura, ancora una volta, non è facile da chiarire. Vedremo, poco più avanti, che Aristotele fornisce alcuni chiarimenti in *Met* Δ.Alcune cose, però, espresse con chiarezza, come il fatto che la conclusione deve essere distinta (*eteron*) dalle premesse. Questo può significare più cose. Assumiamo che Γ sia l'insieme delle protasi che costituiscono le premesse (si noti che non ho ancora tentato di chiarire la natura di queste protasi: enunciati, proposizioni, fatti, ...) e ϕ la protasi che funge da conclusione. Una prima interpretazione consiste, seguendo Alessandro [*In APr* 8], nel ritenere che ϕ *non appartenga* ad Γ. Un'altra interpretazione (seguendo Kapp [1931], citato in Mignucci [1969], p. 190) consiste nel pensare che possa darsi il caso in cui ϕ appartenga ad Γ eppure ϕ sia considerata distinta da tutte le protasi in Σ perché ϕ in quanto premessa avrebbe una funzione diversa da ϕ in quanto conclusione. In realtà, questa seconda ipotesi mi sembra insostenibile, almeno sul piano generale, perché, come cercherò di spiegare meglio, Aristotele attribuisce alla relazione di "seguire di necessità" anche dei caratteri epistemici e concernenti la rilevanza dei risultati per l'investigazione scientifica che sarebbero contraddetti dall'ammettere che una conclusione possa essere derivata da un insieme di premesse che già la contengono. Inoltre, al fine di determinare se tale relazione aristotelica sia riflessiva o no, questa discussione può essere lasciata cadere perché ci sono passi successivi, in *APr*, in cui lo stagirita afferma con chiarezza che vi sono insiemi di premesse da cui non segue nulla [*APr* I 4 26 a 2-4][14], affermazione che sarebbe impossibile se tale relazione fosse riflessiva.

Non essendo riflessiva, si potrebbe dire che la relazione "seguire di necessità" non è neanche monotona (se da Γ segue ϕ, infatti, basta aggiungere ϕ a Γ per impedire che dal nuovo, più ampio, insieme di premesse, continui a seguire la medesima conclusione), ma tale affermazione, come vedremo, sarà da modulare sulle specificità dell'argomentazione sillogistica (presenza di due premesse e di un termine medio).

Davvero, però, questa caratterizzazione della nozione di conseguenza rende giustizia all'impresa aristotelica? Come ho anticipato sopra, l'analisi dei testi aristotelici mostra che lo stagirita non si sta occupando di studiare una nozione di consegunza logica in generale e la validità logica degli argomenti come accade nella logica contemporanea. Il legame tra la nozione di necessità, definita in *Met* Δ e la relazione di conseguenza che studia in *APr* mostra, per esempio, come sia diversa tale nozione di conseguenza da quella di conseguenza logica in generale e come non si debba ritenere che i problemi dello stagirita, a questo riguardo, fossero gli stessi dei logici contemporanei. Il modo di procedere di Aristotele ed i suoi obiettivi erano molto diversi da quelli propri della ricerca dei nostri giorni. Vediamo, dunque, il caso della necessità. Se uno stato di cose α si verifica necessariamente solo a causa del verificarsi dello stato di cose β,

[14] "Se il primo termine segue alla totalità dl termine medio e il termine medio non inerisce ad alcunché dell'ultimo, non si avrà sillogismo degli estremi, perché, dal fatto che queste protasi sono, non segue alcunché di necessario".

allora, per la definizione di necessità contenuta in *Met* Δ 1015 a 34 – 1015 b 7[15] (non può darsi β senza che si dia α), comunque, si arricchisca β, continuerà a verificarsi α. Si consideri, infatti, l'esempio riportato in quel passo, in cui si pone α='cose necessarie al bene e alla vita' e β='il bene e la vita':"quando è impossibile che il bene e la vita esistano senza che ci siano determinate cose, queste sono necessarie". Se Aristotele avesse voluto dare una definizione di "seguire di necessità" che avesse fatto riferimento solo alle relazioni tra stati di cose, chiaramente, le avrebbe conferito anche la proprietà della riflessività e della monotonia.

Aristotele, come vedremo, non intendeva studiare la conseguenza logica e le sue ricerche, per quanto ciò possa sembrare strano da un punto di vista moderno, intendono studiare o quelle che chiama conseguenze immediate (relazioni tra un enunciato singolo ed un altro enunciato singolo e che egli distingue con cura dai sillogismi) o conseguenze sillogistiche, le cui nozioni centrali sono la forma categorica degli enunciati, il ruolo del termine medio e la messa in forma degli argomenti. Come vedremo, Aristotele non considera casi in cui le premesse non sono usate per giungere alla conclusione. Nel caso delle inferenze immediate ciò avviene perché i due enunciati coinvolti (che Aristotele non chiama premesse e conclusione perché per lui le conseguenze immediate sono mere trasformazioni linguistiche) condividono gli stessi termini. Nel caso delle inferenze sillogistiche, ciò avviene perché i due termini che compaiono nella conclusione sono avvicinati per mezzo del termine medio, che compare nelle premesse ed è in rapporto con entrambi i termini della conclusione. Laddove le premesse non giocano alcun ruolo di questo tipo, come nell'inferire come conclusione ciò che si è già posto nelle premesse (proprietà analoga alla riflessività), allora gli argomenti diventano non interessanti dal punto di vista scientifico ed epistemico. Con ciò intendo dire sia che non occorre considerarli in quanto il loro contributo ad acquisire nuove conoscenze scientifiche non è importante, sia che una scienza che studi il modo in cui giustificare le conclusioni con le opportune premesse non ha, evidentemente, tra i suoi compiti, occuparsi di argomenti in cui non si ritrova tale giustificazione. Come vedremo meglio nelle sezioni che seguono, il modo in cui Aristotele considera i sillogismi è molto diverso da quello con cui si trattano gli argomenti nella logica contemporanea. La preoccupazione di Aristotele non è, in primo luogo, quella di studiare il nesso di conseguenza o, comunque, di studiare cosa segue da certe premesse. Data una concezione della realtà basata sulla nozione di sostanza e attributi della sostanza e una teoria limguistica che ritiene che il rapporto di inerenza tra termini sia espresso per mezzo della predicazione di un predicato rispetto ad un soggetto, il problema principale di Aristotele è quello di mostrare come si può giustificare un enunciato apofantico che esprime

[15] "Inoltre, ciò che non può essere in modo diverso da come è, diciamo che è necessario che così sia. E da questo significato di necessario derivano, in certo qual modo, anche tutti gli altri significati: infatti, ciò che è costretto diciamo che è necessitato o a fare o a subire, quando non può seguire la sua tendenza per effetto di costrizione; il che significa che la necessità è ciò per effetto di cui una cosa non può essere in altro modo da come è. E lo stesso deve dirsi anche per le cose che sono causa della vita e del bene: quando è impossibile che il bene e la vita esistano senza che ci siano determinate cose, queste sono necessarie e questa causa è una necessità".

un pensiero sulla realtà. Poiché tale enunciato, come spiegherò meglio fra poco, è della forma AxB, dove A e B sono termini e x è una copula, allora le premesse dovranno mostrare esattamente quali sono dei rapporti predicativi da cui segue il rapporto predicativo espresso dalla conclusione. In questo senso, è naturale, per Aristotele, non porsi neppur eil problema di dover esaminare se la relazione di conseguenza logica sia o non sia riflessiva, monotona, transitiva, ... Per lui la questione era profondamente diversa: al centro della sua attenzione non c'era lo studio degli argomenti in generale, ma la necessità di giustificare un rapporto predicativo con altri rapporti predicativi, il che, nella sua impostazione, equivale a dire che egli cercava il modo di giustificare un'enunciato che dice qualcosa di vero o falso sulla realtà per mezzo di altri enunciati che dicono qualcosa di vero o di falso sulla realtà. Per Aristotele, dunque, diventa essenziale comprendere quale sia il modo giusto di *mettere in forma* un argomento per mostrare sotto quali condizioni l'affermazione di un enunciato come AxB è giustificata. Poiché il problema era la ricerca della forma adeguata che indicasse sotto quali rapporti predicativi di certi enunciati (le premesse) si possa affermare il rapporto predicativo espresso dalla conclusione, allora Aristotele si dedica, come vedremo, all'individuazione di schemi argomentativi. La questione è ben diversa dal dedicarsi a studiare argomenti in generale. Aristotele, infatti, individua solo quattordici schemi argomentativi validi. Ciò è un'ulteriore conferma del fatto che il suo interesse era limitato all'individuare le condizioni sotto cui si può giustificare un enunciato della forma AxB è non a studiare, in generale, cosa segue da premesse qualunque. Egli indica come deve avvenire la messa in forma dei termini del linguaggio naturale (eventualmente espanso per l'occasione con i nuovi termini che occorrono creati appositamente per un certo argomento).

Le inferenze immediate che, per lui sono solo trasformazioni linguistiche e di cui gli APr si occupano solo come preliminari alla trattazione del sillogismo e, ad ogni modo, le inferenze immediate non sono in grado di mostrare i modi più interessanti in cui si può fornire una giustificazione di un enunciato apofantico. La forma inferenziale minimale, allora, è composta da tre enunciati: due premesse e una conclusione. Ogni enunciato apofantico che contiene più di due termini può sempre essere ridotto ad un enunciato che contiene esattamente due termini. Possiamo avere, infatti, solo due casi e, ogni volta, è molto semplice comprendere come si deve operare. Nel primo caso possiamo avere un enunciato quale, per esempio, Ogni uomo è animale implume. Ora *animale implume*, benché *animale* e *implume* siano due termini, è già un termine unico. Si tratta, infatti, di un termine composto. In questo caso, allora, non occorre fare nulla: si tratta solo di comprendere che un termine non coincide con un'unità linguistica semplice, ma un unico termine può essere espresso da un'espressione lingusitica complessa. Nel secondo caso possiamo avere un enunciato quale, per esempio Ogni uomo è animale e implume che, chiaramente è equivalente a Ogni uomo è animale implume oppure a Ogni uomo è animale e ogni uomo è implume. Poiché ogni enunciato contiene al meno due termini ed ogni enunciato che contiene più di due termini può sempre essere ridotto ad un enunciato che contiene due termini, sarà proprio un enunciato di questo tipo che è preso in considerazione per studiare le unità inferenziali minimali, ossia un enunciato, appunto, della forma

AxB. Siccome vogliamo avere a che fare con le unità inferenziali minime, allora occorre prendere in considerazione la quantità minima di termini che occorrono per giusticare AxB. A e B devono chiaramente comparire anche nelle premesse. In più deve esserci almeno un altro termine, per evitare semplicemente di affermare il medesimo enunciato che compare come conclusione già tra le premesse. Questo nuovo termine, diciamo M, deve essere tale che è in relazione sia con A sia con B e, proprio perciò, tale termine deve fornire quel collegamento tra A e B che è espresso dalla conclusione.

Vedremo, subito sotto, di trattare più ampiamente queste questioni.

2.5 LA STRUTTURA DELLE PROTASI

Aristotele ritiene che ogni enunciato (*logos*) che debba essere considerato nell'indagine scientifica è della forma AxB, dove A e B sono termini e x è una copula (definiremo questi termini subito sotto), e che ogni enunciato di questa forma sia derivabile per mezzo delle forme sillogistiche che considera. Alla base di questa convinzione di Aristotel, si trova un'idea precisa: in *Cat* 2 1 a 16-17, Aristotele afferma che ciò che è espresso è detto o senza connessione (come: uomo, bue, corre, vince) o con connessione (uomo corre, uomo vince)[16]. Non è possibile avere un'affermazione se non di termini che si dicono secondo connessione perché solo a loro si possono attribuire verità e falsità [*Cat* 4 2 a 4-10][17]. Del resto, verità e falsità non si possono attribuire (uparkein) ad ogni connessione di termini, bensì solo a quelli che costituiscono un discorso dichiarativo (*apophantikòs*), come è detto in *Int* 4 17 a 2-3[18]. In tal modo sono esclusi i discorsi pertinenti alla retorica o alla poetica, come la preghiera [*Int* 4 17 a 3-6][19]. L'oggetto di Int sono solo i discorsi dichiarativi [Int. 17 a 6-7][20], ma questo è vero anche per APr. L'affermazione è il primo discorso dichiarativo (*protos logos apophantikòs*, [*Int* 5 17 a 8][21]) che sia uno (*eis*, [*Int* 5 17 a 8][22]) , ossia unitario e, più precisamente, l'affermazione è il giudizio che attribuisce (*uparkein*, [*Int* 17 a 21][23]) qualcosa a qualcosa, dove per giudizio si intende ogni

[16] "Ciò che viene espresso, in parte si dice secondo una connessione, ed in parte senza connessione. Da un lato, si dice secondo una connessione, ad esempio: uomo corre, uomo vince; d'altro lato, si dice senza connessione, ad esempio: uomo, bue, corre, vince" [*Cat* 2 1 a 16-17].

[17] Ciascuno dei suddetti termini, in sé e per sé, non rientra in alcuna affermazione; un'affermazione si presenta, invece, quando tali termini si connettono tra loro. Pare, infatti, che ogni affermazione debba essere o vera o dalsa; per altro, nessuno dei termini che si dicono senza alcuna connessione, ad esempio uomo, bianco, corre, vince, è vero oppure falso.

[18] "Dichiarativi sono (...) non tutti i discorsi, ma quelli in cui sussiste un'enunciazione vera oppure falsa".

[19] "Tale enunciazione non sussiste certo in tutti: la preghiera, ad esempio, è un discorso, ma non risulta né vera né falsa. Prescindiamo dunque dagli altri discorsi, dal momento che l'indagine al riguardo è più pertinente alla retorica o alla poetica".

[20] "Il discorso dichiarativo spetta invece alla presente considerazione".

[21] "Il primo discorso dichiarativo, che sia unitario, è l'affermazione".

[22] Cfr. nota precedente.

[23] "L'affermazione è il giudizio che attribuisce qualcosa a qualcosa".

discorso dichiarativo che o attribuisce qualcosa a qualcosa o separa qualcosa da qualcosa [*Int* 5 17 a 19-23][24].

Oltre all'affermazione, Aristotele considera, in seconda istanza, anche la negazione, considerata anch'essa un discorso dichiarativo unitario [*Int* 5 17 a 7-8][25]. Laddove, come abbiamo visto, l'affermazione è il giudizio che attribuisce qualcosa a qualcosa, la negazione è il giudizio che separa qualcosa da qualcosa [*Int* 5 17 a 26][26].

È chiaro che la logica di Aristotele e, in particolare, l'indagine di *APr*, si concentra su ciò che si dice secondo connessione. É proprio la connessione tra gli oggetti che compaiono nelle premesse, come vedremo, ad essere causa necessaria della connessione tra gli oggetti della conclusione e a rendere esplicito tale legame necessario. È significativo che Aristotele, nel secondo capitolo di *Cat*, appena dopo aver posto la distinzione tra ciò che si dice secondo connessione e ciò che non si dice in tal modo, passi a considerare quattro tipi di affermazioni, ossia i quattro tipi di giudizi dichiarativi affermativi, che riguardano tutti la possibilità di attribuire un oggetto ad un sostrato (*upokeimenon*, [*Cat* 2, 1a 20]): alcuni oggetti si dicono di qualche sostrato e non sono in alcun sostrato (esempio: Socrate è uomo), alcuni oggetti non si dicono di alcun sostrato e sono in un sostrato (esempio: la meteorologia è nell'anima), alcuni oggetti si dicono di un sostato e sono in un sostrato (esempio: la scienza è nell'anima e si dice della grammatica), alcuni oggetti non si dicono di un sostrato e non sono in un sostrato (esempio: Socrate) [*Cat* 2, 1a 20-6][27]. Quel che importa rilevare è come l'attenzione di Aristotele ai nessi del discorso si concentri sul nesso di attribuzione di qualcosa a qualcos'altro. Alcuni tratti della metafisica dello stagirita permettono sicuramente di comprendere meglio perché tale nesso sia considerato centrale. Occorre, tuttavia, sottolineare anche che la teoria del sillogismo che Aristotele propone ha una portata in parte diversa, in quanto non postula un nesso univoco tra tali tesi metafisiche e i procedimenti sillogistici, come dimostra la centralità della teoria della conversione, che, come vedremo, non avrebbe senso se uno dei due termini fosse sempre *upokeimenon.*

Le lettere scritte sono segni dei suoni della voce e i suoni della voce sono

[24] "I discorsi dichiarativi unitari, d'altro canto, si distinguono in dichiarazioni semplici, giudizi, se ad esempio qualcosa viene attribuito a qualcosa, o qualcosa viene separato da qualcosa, ed in dichiarazioni formate da più dichiarazioni semplici, come nel caso di un discorso già composto".

[25] "Il primo discorso dichiarativo, che sia unitario, è l'affermazione; in seguito viene la negazione".

[26] "La negazione è (...) il giudizio che separata qualcosa da qualcosa".

[27] "Tra gli oggetti che sono, alcuni si dicono di un qualche sostrato, ma non sono in alcun sostrato, ad esempio, uomo si dice di un sostrato, cioè di un certo uomo, ma non è in alcun sostrato; altri sono in un sostrato, ma non si dicono di alcun sostrato (precisamente, con oggetto che è in un sostrato intendo ciò che sussiste, non come una parte, in qualcosa, e che non può esistere separatamente dal qualcosa in cui è), ad esempio, una determinata scienza grammaticale è in un sostrato, ed un determinato bianco è in un sostrato, cioè nel corpo (ogni colore infatti è in un corpo), ma non si dice di alcun sostrato; altri ancora si dicono di un sostrato, e del pari sono in un sostrato, ad esempio, la scienza è in un sostrato, ossia nell'anima, ed inoltra si dice di un sostrato, come della grammatica; altri infine non sono in un sostrato né si dicono di un sostrato, ad esempio un determinato uomo ed un determinato cavallo, dato che nessuno degli oggetti di tale natura è in un sostrato, né si dice di un sostrato".

segni delle affezioni dell'anima, che sono le medesime per tutti e costituiscono le immagini degli oggetti [*Int* 1, 16a 3-8][28]. Come nell'anima può sussistere un noema che non è né vero né falso, perché è semplicemente l'affezione di un oggetto senza connessione con altri oggetti, così anche nel linguaggio si trovano parti corrispondenti a tali noema che non sono, appunto, né vere né false [*Int* 1, 16a 8-18][29]. Abbiamo già notato prima come, per Aristotele, il vero ed il falso si applichino solo ad espressioni che trattano oggetti che si dicono secondo una connessione, in quanto attribuiscono o non attribuiscono qualcosa a qualcosa. Qui lo stagirita parla, in maniera analoga, di vero come sintesi (*sunthesis*) e falso come separazione (*diairesis*) [*Int* 1, 16a 12-13][30].

Senza chiarire se intenda parlare di enti del mondo o di segni del linguaggio, in *Cat* 3 e 4, Aristotele parla di ciò che si dice di qualcosa. In *Cat* 4 spiega che ciò che si dice senza connessione si dice secondo le categorie (sostanza, quantità, qualità, relazione, un luogo, un tempo, l'essere in una situazione, un avere, un agire, un patire) e che l'affermazione sorge proprio quando queste cose sono dette secondo connessione [*Cat* 4, 2a 4-8][31]. Ma è chiaro che connettere cose di questo tipo significa predicare qualcosa di qualcos'altro, cioè di un *upokeimenon* [cfr. *Cat* 3, 1b 10-11][32] e proprio per questo in *Cat* 2 si svolgono considerazioni, come abbiamo visto sopra, a proposito dei rapporti che possono vigere tra un upokeimenon ed un altro oggetto.

Un'ulteriore conferma della centralità del rapporto predicativo in Aristotele si trova nella celebre discussione del principio di non contraddizione in *Met* Γ. Tale principio non è formulato da Aristotele dicendo che non è vero (o che non è possibile) A e non-A, dove A è una proposizione qualsiasi, come spesso si fa nelle presentazioni contemporanee di tale principio (cfr., per esempio, Berto [2006], p. 22). Aristotele, piuttosto, parla esplicitamente e insistentemente di predicazione (*uparkein*)di un termine ad un altro:

> "È impossibile che la stessa cosa, ad un tempo, inerisca (*up-*

[28] "I suoni della voce sono simboli delle affezioni che hanno luogo nell'anima, e le lettere scritte son simboli dei suoni della voce. Allo stesso modo poi che le lettere non sono le medesime per tutti, così neppure i suoni sono i medesimi; tuttavia, suoni e lettere risultano segni, anzitutto, delle affezioni dell'anima, che sono le medesime per tutti e costituiscono le immagini di oggetti, già identici per tutti".

[29] "Come nell'anima talvolta sussiste una nozione, che prescinde dal vero o dal falso, e talvolta invece sussiste qualcosa, cui spetta necessariamente o di essere vero o di essere falso, così avviene pure per quanto si trova nel suono della voce. In effetti, il falso ed il vero consistono nella congiunzione e nella separazione. In sé, i nomi ed i verbi assomigliano dunque alle nozioni, quando queste non siano congiunte a nulla né separate da nulla; essi sono ad esempio i termini: uomo, o: bianco, quando manchi una qualche precisazione, poiché in tal caso non sussiste ancora né falsità né verità. ciò è provato dal fatto, ad esempio, che il termine beccocervo significa bensì qualcosa, ma non indica ancora alcunché di vero o di falso, se non è stato aggiunto l'essere oppure il non essere, con una determinazione assoluta o temporale".

[30] "Il falso ed il vero consistono nella congiunzione e nella separazione".

[31] "Ciascuno dei suddetti termini, in sé e per sé, non rientra in alcuna affermazione; un'affermazione si presenta, invece, quando tali termini si connettono tra loro".

[32] "Quando un termine sia predicato di un altro termine, inteso come sostato, allora tutto ciò che viene detto del predicato sarà detto altresì del sostrato".

> *arkein*) e non inerisca ad una medesima cosa e secondo lo stesso rispetto" [*Met* Γ 3, 1005b 19-20].

Poco più avanti, lo stagirita lo riformula riferendosi alle nozioni di contrario, che appunto rimanda ancora una volta all'uparkein. "Non è possibile che i contrari ineriscano (uparkein) allo stesso" [*Met* Γ 3, 1005b 26-27]. Nel tentativo di dimostrare elencticamente tale principio, poi, lo stagirita esplicita che pensare è sempre pensare qualcosa di determinato e significare è sempre significare qualcosa di determinato [*Met* Γ 4, 1006 b 7-11][33]. Dal momento che i segni del linguaggio sono simboli delle cose [Int 2, 16a 28][34], anche le cose a cui si riferisce un discorso sono determinate e, quindi, i contrari non vi possono inerire insieme [cfr. *Met* Γ 4, 1006b 27-34][35].

In *Int* 1-3, poi, Aristotele spiega che il giudizio dichiarativo (quello che può essere detto vero o falso) è composto da nomi e verbi. Ma anche in questo caso, è evidente la preminenza data al rapporto di inerire. Il verbo esprime ciò che si dice di qualcos'altro [*Int* 3, 16b 6-8][36], ossia di ciò che si dice di un upokeimenon o di ciò che sussiste in un upokeimenon. In ogni giudizio dichiarativo, poi, ciò che è espresso con un verbo diverso dal verbo essere può essere espresso dal verbo essere usato come copula e da un participio: "Non c'è differenza, infatti, fra le proposizioni 'l'uomo è vivente' e 'l'uomo vive' e fra 'l'uomo è camminante o tagliante' e 'l'uomo cammina o taglia' e lo stesso vale per gli altri casi"' [*Met* Δ 7, 1017a 27-30]; "Non vi è alcuna differenza tra il dire 'uomo cammina' ed il dire 'uomo è camminante"' [*Int* 12, 21 b 9].

Tali discorsi dichiarativi, poi, si possono suddividere in affermativi, quando esprimono che qualcosa inerisce a qualcos'altro, e negativi, quando esprimono che qualcosa non inerisce a qualcos'altro [*Int* 6, 17a 25-26][37]. Ogni discorso dichiarativo, allora, consiste nel dichiarare che un oggetto (universale o particolare) inerisce ad un altro oggetto (universale o particolare) [*Int* 7, 17b 2-4][38].

[33] "Il non avere un determinato significato, equivale a non avere alcun significato; e, se le parole non hanno alcun significato, allora non ha luogo neppure la possibilità di discorso e di comunicazione reciproca e, in verità, non ha luogo neppure la possibilità di un discorso con se stessi. Infatti, non si può pensare nulla se non si pensa una determinata cosa; ma se si può pensare, allora si può anche dare un preciso nome a questo determinato oggetto che è pensato".

[34] "Si ha un nome (. . .) quando un suono della voce diventa simbolo".

[35] "Se fossero una cosa unica, l'essenza di uomo e l'essenza di non-uomo significherebbero una cosa unica. Ma si è dimostrato che significano cose diverse. Dunque, è necessario, se c'è qualcosa di cui è vero dire che è uomo, che esso sia animale bipede (questo, infatti, stabilimmo che fosse il significato di uomo); e se ciò è necessario, non è possibile che questa stessa cosa non sia animale bipede (questo, infatti, significa essere necessario: il non poter non essere). Non è dunque possibile che sia vero, ad un tempo, il dire della stessa cosa che è uomo e che non è uomo".

[36] "Verbo (. . .) è il nome che esprime inoltre una determinazione temporale; le sue parti non significano nulla separatamente, ed esso risulta sempre espressione caratteristica di ciò che si dice di qualcos'altro".

[37] "L'affermazione è il giudizio, che attribuisce qualcosa a qualcosa. La negazione è invece il giudizio, che separa qualcosa da qualcosa".

[38] "È così necessario dichiarare che qualcosa appartiene, o non appartiene, ora ad un oggetto universale".

Da quanto si è detto, è chiaro che in Aristotele, il rapporto di inerire, espresso dall'unione di due termini per mezzo del verbo essere, è del tutto centrale. Data la sua visione della realtà, infatti esprimere qualcosa di vero o di falso coincide con l'affermare che qualcosa inerisce o non inerisce a qualcos'altro [*Int* 1 16 a 12-13][39]. In altre parole, in Aristotele non vi è spazio per una teoria della verità che non si riduca ad una teoria della predicazione.

Ricercare oltre i motivi, metafisici e logici, e tracciarne un'eventuale genealogia (in primis il suo rapporto con le dottrine di Platone) va ben oltre gli scopi di questa trattazione.

2.6 ENUNCIATI CATEGORICI E INFERENZE IMMEDIATE

Come abbiamo detto, Aristotele considera, nella sua logica, quattro tipi di proposizioni categoriche, che sono specificazioni, come abbiamo visto, della forma MxN, dove M e N sono *termini* e x il modo, universale o particolare, in cui M appartiene o non appartiene a N, quello che si è soliti chiamare *copula*.

Per quel che è rilevante, ora, non è necessario esaminare tutti i dettagli della posizione aristotelica al riguardo. In particolare, per semplificare il discorso, senza tralasciare nulla di essenziale rispetto alla nozione di conseguenza logica, possiamo limitarci a considerare gli enunciati che, poi, saranno usati per costruire i sillogismi categorici. Consideriamo solo gli enunciati categorici in cui entrambi i termini sono universali, ossia, ciò che per sua natura è predicato di più [*Int* 7 17 a 38 – 17 b 1][40]. Un esempio di enunciato categorico di questo tipo è 'ogni piacere è bene'. Aristotele considera anche enunciati in cui compare un termine singolare in funzione di soggetto, come 'Socrate è bianco' [*Int* 7 17 b 28], ma, di fatto, negli *APr* considera solo enunciati i cui termini sono universali, in modo che sia possibile praticare la conversione tra soggetto e predicato.

Occorre aggiungere che, accanto alla sillogistica categorica, lo stagirita ha considerato anche la sillogistica modale e, quindi, anche enunciati modali, in cui non si considera il semplice inerire o non inerire, ma l'inerire necessariamente o possibilmente e il non inerire necessariamente o possibilmente. Si tratta di una parte molto complessa della logica aristotelica, la cui trattazione, ad ogni modo, non è rilevante ai fini della presente ricerca.

Possiamo, ora, precisare la questione che ci interessa, relativa agli enunciati categorici, in questo modo. Un enunciato categorico consiste di due termini (che, a loro volta, si specificheranno in soggetto e predicato dell'enunciato) uniti da una copula che indica la qualità (affermativa o negativa) di un enunciato. Gli enunciati categorici rilevanti per la sillogistica contengono sempre anche la

[39] In effetti, il vero e il falso consistono nella congiunzione e nella separazione.

[40] "Tra gli oggetti alcuni sono universali, altri invece singolare (chiamo universale ciò che per natura si predica di parecchi oggetti, e per contro singolare ciò che non si predica di parecchi oggetti: uomo, ad esempio, fa parte degli oggetti universali, mentre Callia fa parte di quelli singolari)". Cfr. anche Met Z, 13 1038 b 11-12: " Universale si dice ciò che, per sua natura, appartiene a una molteplicità di cose".

specificazione della quantità (universale o particolare), ossia, rispettivamente, se un termine, il predicato, si predica totalmente o in parte dell'altro termine, il soggetto. Per semplificare la trattazione formale di tali enunciati, stabiliamo che la copula esprima, allo stesso tempo, sia la qualità sia la quantità di un enunciato. Consideriamo, allora, un insieme T di termini $\{M, N, P, S, \ldots\}$ e un insieme C di copule $\{a, e, i, o\}$. Consideriamo l'insieme E^+_T (più semplicemente E^+ ove non ci sia bisogno di specificare la dipendenza da T) degli enunciati ottenuti combinando due termini qualsiasi in T con una copula in C, ossia $E^+ = \{MxN : M, N \in T \text{ e } x \in C\}$.

Gli enunciati in E^+ sono di quattro tipi: MaN, MeN, MiN e MoN. Indichiamo:

1. con a la predicazione universale affermativa ($MaN = M$ totalmente si predica di $N =$ Ogni N è M)
2. con e la predicazione universale negativa ($MeB = M$ totalmente non si predica d $N =$ nessun N è M)
3. con i la predicazione particolare affermativa ($MiN= M$ in parte si predica di $N =$ qualche N è M)
4. con o la predicazione particolare negativa ($MoN= M$ in parte non si predica di $N =$ qualche N non è M).

Supponiamo, ora, che M stia per il termine 'bene' e N per il termine 'piacere' (cfr. *Top* 2 1 108 b 34 – 109 a 1). Allora 'ogni piacere è bene' è un esempio di enunciato universale affermativo, 'nessun piacere è bene è un esempio di enunciato universale negativo, 'qualche piacere è bene è un esempio di enunciato particolare affermativo e 'qualche piacere non è bene è un esempio di enunciato particolare negativo.

Accanto a E^+, consideriamo l'insieme $E^-_T = \{\neg(\phi) : \phi \in E^+_T\}$. E^-_T (più semplicemente E^- ove non ci sia bisogno di specificare la relatività a T) può essere interpretato, come vedremo, come l'insieme degli enunciati che *contraddicono* almeno un enunciato in E^+. La costruzione dei due insiemi E^+ e E^- intende rendere sul piano formale quel che Aristotele dichiara in *Int* 6 17 a 31-32: "Ad ogni affermazione è contrapposta una negazione, e ad ogni negazione un'affermazione".

Definiamo, poi, l'insieme degli enunciati $E_T = E^+_T \cup E^-_T$. Anche in questo caso, scriverò più semplicemente E ove non sia necessario specificare la dipendenza degli enunciati in E da un certo insieme T di termini.

Aristotele fornisce anche uno studio dei rapporti tra enunciati categorici semplici. In questo modo, è possibile chiarire alcuni particolari processi inferenziali (le inferenze immediate, distinte dalle inferenze sillogistiche, che esamineremo dopo).

Se X è un insieme, indichiamo con $\wp_n(X)$ l'insieme dei sottoinsiemi di X con cardinalità n. Sia $\tau : E \rightarrow \wp_2(T)$ una funzione che assegna ad ogni enunciato l'insieme dei termini che lo compongono, come, ad esempio, $\tau(MaN) =$

$\tau(MeN) = \tau(MiN) = \tau(MoN) = \{M, N\} \subseteq T$. Una conseguenza immediata, dunque, è una relazione $\vdash_i \subseteq E^2$ tale che, per ogni $\phi, \psi \in E$, se $\phi \vdash_i \psi$, allora $\tau(\phi) = \tau(\psi)$. La relazione di conseguenza immediata, in altre parole, può vigere solo tra un enunciato ed un altro enunciato i cui termini sono i medesimi.

Diciamo che $\vdash_i$ è la relazione di conseguenza logica immediata [41]. In questo paragrafo, non essendoci pericolo di confusione, scriverò semplicemente $\vdash$ al posto di $\vdash_i$.

Aristotele definisce $\vdash$ sulla base di una serie di rapporti logici tra gli enunciati di E. Tali rapporti sono stati, tradizionalmente, codificati nel cosiddetto quadrato delle opposizioni. Aristotele specifica questi risultati facendo riferimento alle nozioni di verità e falsità, trattate come predicati attribuiti ad enunciati. Nel simbolismo che ho presentato, essi possono essere riformulati semplicemente scrivendo ϕ (per $\phi \in E^+$) laddove Aristotele dice che ϕ è vero e scrivendo $\neg\phi$ (per $\phi \in E^+$) laddove Aristotele dice che ϕ è falso.

Per ogni enunciato $\phi \in E^+$, sia $\neg\phi$ l'enunciato che lo contraddice.

Le relazioni indicate da Aristotele sono le seguenti.

a) Enunciati contraddittori (Ct)

Consideriamo *Int* 7 17 b 16-18:

> Un'affermazione è contrapposta in modo contraddittorio ad una negazione, quando una di esse esprime un oggetto in forma universale, e l'altra esprime lo stesso oggetto in forma non universale, ad esempio: ogni uomo è bianco – qualche uomo non è bianco; nessun uomo è bianco – qualche uomo è bianco.

Consideriamo anche *Int* 6 17 a 31-33:

> Ad ogni affermazione risulta contrapposta una negazione, e ad ogni negazione un'affermazione. E la contraddizione dovrà considerarsi appunto questo, ossia l'affermazione e la negazione contrapposte)[42].

Sulla base di *Int* 6 17 a 31-33, possiamo, quindi, definire una funzione biiettiva $Ct : E^+ \to E^+$ tale che Ct assegna ad ogni enunciato il suo contraddittorio, ossia, per ogni $X, Y \in T$

$$\begin{aligned} Ct(XaY) &= XoY \\ Ct(XeY) &= XiY \\ Ct(XiY) &= XeY \\ Ct(XoY) &= XaY. \end{aligned}$$

[41] L'aggettivo "immediata" non significa che Aristotele non tenti di giustificare tali inferenze sulla base di altre, ritenute più elementari. Nel caso, trattato sotto, delle conversioni degli enunciati categorici, per esempio, lo stagirita fornisce una, seppure problematica, giustificazione di (*Cnv* 2) e (*Cnv* 3) in termini di altre inferenze (*APr* I, 2, 25a 14-26).

[42] Considera anche Int 6 17 a 33-37: "dico d'altronde che un giudizio si contrappone ad un altro, se afferma o nega una medesima determinazione rispetto ad un medesimo oggetto, prescindendo dall'omonimia; dovranno poi essere rispettae tutte le altre precisazioni, che aggiungiamo per prevenire le capziosità sofistiche".

Gli enunciati aventi lo stesso predicato e lo stesso soggetto, in altre parole, si possono raggruppare a due a due, in modo tale che l'uno contraddica l'altro.

Passiamo, ora, a *Int* 7 17 b 26-27:

> In tutte le contraddizioni (...) che si riferiscono ad un oggetto universale, presentato in forma universale, è necessario che uno dei giudizi sia vero e l'altro falso.

Possiamo, dunque, enunciare le seguenti leggi: per ogni X, Y E e per ogni x C

$$\begin{array}{lcl} (Ct1)\ XxY & \vdash & \neg(Ct(XxY)) \\ (Ct2)\ XxY & \vdash & \neg(Ct(XxY)). \end{array}$$

b) Enunciati contrari (Ctr) e subcontrari ($SCtr$)

In *Int* 7 17 b 20-22, Aristotele afferma:

> Dico (...) che un'affermazione è contrapposta in modo contrario ad una negazione, quando sia l'affermazione che la negazione presentano l'oggetto in forma universale, ad esempio: ogni uomo è giusto – nessu uomo è giusto.

Sia E_x, per $x \in C$, l'insieme degli enunciati in E la cui copula è x. Allo stesso modo, sia $E_{x,y}$, per $x, y \in C$, l'insieme degli enunciati in E la cui copula è x o y e $E^+_{x,y}$, per $x, y \in C$, l'insieme degli enunciati in E^+ la cui copula è x o y.

Possiamo definire una funzione biiettiva $Ctr : E^+_{a,e} \to E^+_{a,e}$ tale che, per ogni $X, Y \in T$

$$\begin{array}{lcl} Ctr(XaY) & = & XeY \\ Ctr(XeY) & = & XaY. \end{array}$$

Secondo la tradizione, diciamo che un'affermazione è subcontraria rispetto ad una negazione, quando sia l'affermazione che la negazione presentano l'oggetto in forma particolare, ad esempio: qualche uomo non è bianco – qualche uomo è bianco.

Definiamo, allora, la biiezione $SCtr : E^+_{i,o} \to E^+_{i,o}$ tale che, per ogni $X, Y \in T$

$$\begin{array}{lcl} Ctr(XiY) & = & XoY \\ Ctr(XoY) & = & XiY. \end{array}$$

Consideriamo, ora, *Int* 7 17 b 23-26:

> Non è possibile (...) che tali giudizi contrari siano veri al tempo stesso; può accadere tuttavia che i giudizi rispettivamente contrapposti ad essi risultino al tempo stesso veri, riguardo al medesimo oggetto, ad esempio: qualche uomo non è bianco – qualche uomo è bianco.

Possiamo, dunque, enunciare le seguenti leggi: per ogni $X, Y \in T$

$$
\begin{aligned}
(Ctr) \text{ per ogni } x &\in \{a, e\},\ XxY \vdash \neg Ctr(XxY) \\
(SCtr) \text{ per ogni } x &\in \{i, o\},\ \neg(XxY) \vdash SCtr(XxY)
\end{aligned}
$$

$(SCtr)$ non è espressamente dichiarato da Aristotele, ma è chiaramente inferibile da quello che ha spiegato.

Si noti, in modo particolare, che non valgono

$$
\begin{aligned}
(\alpha) \text{ per ogni } X, Y &\in T \text{ e per ogni } x \in \{a, e\},\ \neg(XxY) \vdash Ctr(XxY) \\
(\beta) \text{ per ogni } X, Y &\in T \text{ e per ogni } x \in \{i, o\},\ XxY \vdash \neg(SCtr(XxY)).
\end{aligned}
$$

Anche in questo caso, Aristotele non afferma esplicitamente che non vale (α), ma coò è chiaramente inferibile dal resto.

c) Enunciati subalterni (Sb)

Passiamo, ora, agli enunciati subalterni e consideriamo *Top* 2 1, 109 a 2-6:

> Se (...) mostreremo che una determinazione appartiene ad ogni oggetto, avremo mostrato altresì che appartiene a qualcuno di essi, e similmente, se mostreremo che appartiene a nessun oggetto, avremo mostrato che non appartiene a tutti.

Possiamo definire la biiezione $Sb : E^+_{a,e} \to E^+_{i,o}$tale che, per ogni $X, Y \in T$

$$
\begin{aligned}
Sb(XaY) &= XiY \\
Sb(XeY) &= XoY.
\end{aligned}
$$

Come nel caso degli enunciati subalterni, anche in questo caso Aristotele non dà un nome alle coppie di enunciati $\{XxY, Sb(XxY)\}$, che sono stati tradizionalmente chiamati subalterni.

Sulla base del passo di *Top* citato sopra possiamo affermare la legge: per ogni $X, Y \in T$

$$(Sba) \text{ per ogni } x \in \{a, e\},\ XxY \vdash Sb(XxY).$$

Ovviamente non vale: per ogni $X, Y \in T$

$$\text{per ogni } x \in \{a, e\},\ Sb(XxY) \vdash XxY.$$

In tal modo, è completata l'esposizione di quello che la tradizione chiamerà il quadrato delle opposizioni.

d) Conversioni degli enunciati categorici (Cnv)

Consideriamo, ora, un caso particolare di inferenze immediate, le consversioni degli enunciati categorici, a cui Aristotele assegna un ruolo centrale nella teoria del sillogismo. Un aspetto importante e degli enunciati categorici costituiti da termini universali è quello che alcuni di essi si possono convertire, ossia, dall'affermazione di un tale enunciato si può inferire un altro enunciato in cui i termini appaiono scambiati di posto (e, in alcuni casi, si modifica anche la copula). Nella conversione i termini dell'enunciato si scambiano i ruoli, il soggetto nel primo enunciato diventa il predicato nel secondo enunciato e il predicato nel primo enunciato diventa il soggetto nel secondo enunciato. Nel secondo capitolo di APr, Aristotele formula le leggi della conversione legittima, ossia stabilisce quali siano i casi in cui si può effettuare senza inficiare la verità degli enunciati. Le conversioni legittime, in altre parole, sono quelle in cui la verità dell'enunciato ottenuto per conversione è un'inferenza legittima dalla verità dell'enunciato originale.

> È necessario che la protasi negativa posta nell'inerire universalmente sia convertibile nei termini, per esempio, se nessun piacere è un bene, nemmeno nessun bene sarà un piacere. La corrispondente protasi affermativa è necessario che sia convertibile, tuttavia non universalmente, bensì particolarmente, come per esempio: se ogni piacere è un bene, è necessario che anche qualche bene sia un piacere. Delle protasi particolari, è necessario che quella affermativa sia convertibile particolarmente (infatti, se qualche piacere è un bene, anche qualche bene sarà un piacere) [APr I, 2 25a 5-12].

Aristotele, dunque, enuncia tre leggi: per ogni $X, Y \in T$

$$\begin{array}{rcl} (Cnv1)\ XaY & \vdash & YiX \\ (Cnv2)\ XeY & \vdash & YeX \\ (Cnv3)\ XiY & \vdash & YiX. \end{array}$$

Si noti che la protasi negativa non dà luogo ad alcuna conversione legittima:

> Non è necessario che sia [convertibile la protasi] negativa (infatti, se un uomo non inerisce a qualche animale, non segue che anche animale non inerisca a qualche uomo) [APr I, 2, 25a 12-14].

Il che significa che non vale l'inferenza seguente: per ogni $X, Y \in T$

$$XoY \vdash YoX.$$

2.7 INFERENZE SILLOGISTICHE

2.7.1 CARATTERI DELLA CONSEGUENZA SILLOGISTICA

Nonostante la presentazione che ho offerto delle inferenze immediate, occorre sottolineare che il modo di procedere di Aristotele è molto diverso da quello dei logici contemporanei. Ricordiamo, in primo luogo, che il suo problema principale è quello di caratterizzare il *seguire di necessità* (*ex anankes sumbainein*), di fatto considerata una nozione primitiva, in termini di rapporti predicativi e non di studiare la nozione di conseguenza logica in generale[*APr* I 23, 40 b 23-24][43]. Aristotele, inoltre, non assume un linguaggio e, dopo aver distinto i suoi elementi in logici e non logici, definisce una nozione di "seguire da" tra le formule di quel linguaggio. Benché non con la sistematicità con cui lo si fa oggi, Aristotele di fatto assume e usa dei simboli non interpretati, i termini A, B, C, ... Tali simboli svolgono il ruolo di variabili che oggi chiameremmo *metalogiche*. Queste variabili stanno per i termini precisi che compaiono nelle protasi e permettono di discutere delle figure sillogistiche in generale (così come, sopra, hanno permesso di discutere delle varie inferenze immediate in generale). In tal modo Aristotele cerca di enunciare delle leggi generali, valide a prescindere dagli enti particolari a cui ci si può riferire. Quel che lo stagirita riesce, dunque, a fare, in tal modo, è parlare di schemi di sillogismi e non solo di sillogismi in particolare e, in tal modo, può esporne proprietà che non dipendono dagli specifici termini, di volta in volta, considerati.

Invece di determinare, come farebbe un logico moderno, il concetto di *seguire di necessità*, lo stagirita presenta le conversioni legittime delle protasi categoriche e modali e passa ad esporre i sillogismi in prima figura. Dal capitolo IV del primo libro di *APr*, dove appunto si espongono i sillogismi in prima figura, il termine *sillogismo* è usato quasi esclusivamente in un nuovo e più ristretto senso rispetto a quello indicato sopra. Per semplicità, come prima, mi concentrerò solo sulla sillogistica categorica e non mi occuperò della sillogistica modale. Ciò è sufficiente per gli scopi della presente trattazione.

Un sillogismo è un *logos* costituito da:

1. esattamente tre enunciati della forma MxN, dove M e N sono termini diversi e x indica il modo, universale o particolare, in cui M appartiene o non appartiene a N,

2. esattamente tre termini, che compaiono in tutto due volte ciascuno e non più di una volta in ogni enunciato. Quello che compare due volte nelle premesse (una volta in ciascuna premessa) è detto *medio* (*mesos*), gli altri due sono uno l'*estremo* (*akron*) *maggiore* e l'altro l'*estremo minore* e compaiono in esattamente una premessa e, insieme, nella conclusione.

[43] É necessario che ogni dimostrazione ed ogni sillogismo provino l'inerire o il non inerire di un termine ad un altro.

> Tradizionalmente, si definiscono estremo maggiore quello che è il predicato nella conclusione ed estremo minore quello che è il soggetto nella conclusione e si definiscono premessa maggiore quella che contiene l'estremo maggiore e premessa minore quella che contiene l'estremo minore.

Nell'esempio seguente

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Tutti gli } S \text{ sono } M\\ \text{Tutti gli } M \text{ sono } P\end{array}}{\text{Tutti gli } S \text{ sono } P}$$

S è il termine minore, P il termine maggiore e M il termine medio. Come si vede, qui, il termine *sillogismo* è usato per indicare un tipo particolare di argomenti ed è proprio agli argomenti che oggi si direbbero validi in tale categoria, piuttosto che agli argomenti validi in generale, che Aristotele dedica la sua attenzione. Vale la pena osservare, comunque, che Aristotele non distingue mai, esplicitamente, la classe degli argomenti in generale e la classe degli argomenti sillogistici ed afferma che la seconda è una sottoclasse propria della prima. Aristotele, semplicemente, non prende mai in considerazione, esplicitamente, la classe degli argomenti validi in generale perché le sue concezioni metafisiche ed epistemologiche, come in parte abbiamo già visto, lo spingevano a considerare solo argomenti composti da enunciati che trattano i rapporti predicativi, senza ammettere premesse superflue e senza ammettere argomenti banali (come quelli in cui la conclusione è identica ad una delle premesse o in cui le premesse sono inconsistenti e, dunque, ogni enunciato segue da esse). Se si deve dedurre sillogisticamente una conclusione come MxN, allora (a) si deve assumere qualcosa di distinto da MxN e (b) si devono assumere almeno due premesse che abbiano un termine in comune (il termine medio) e ciascuna contenga uno dei termini che compaiono nella conclusione. Se non si rispettasse quanto prescritto da (a), allora si commetterebbe una petizione di principio ([*APr* II 16, 64 b 27-28][44]). Se si rispettasse solo quanto prescitto da (a), ma non quanto prescritto da (b), invece, si potrebbero avere i due casi seguenti. Nel primo caso, si assume una sola premessa e tale premessa è diversa da MxN, ma, allora, è chiaro che MxN non segue da tale premessa, in quanto non vi è alcuna connessione necessaria tra le predicazioni espresse da tali enunciati. Nel secondo caso si assumono almeno due premesse, ma o senza che vi compaiano tutti i termini che compaiono nella conclusione o senza che nelle premesse ci sia un termine comune che colleghi gli estremi. Anche in questo caso, è chiaro che la conclusione non segue necessariamente dalle premesse. É chiaro, dunque, che per poter dedurre una relazione predicativa tra M e N si debbano almeno assumere due enunciati che abbiano un termine in comune (il termine medio) e che contengano ciascuno uno dei termini (gli estremi) che compaiono nella conclusione. Nel caso in cui si assumano più di due enunciati, è comunque possibile dire che la conclusione segue necessariamente dalle premesse, purché i vari termini non estremi siano

[44] La postulazione e l'assunzione di quel che è stato domandato all'inizio, dal punto di vista del genere, consiste nel non dimostrare quel che è stato proposto come tesi.

connessi tra loro in modo tale da connettere, alla fine, i due termini estremi. Questo caso, però, non è altro che una sucessione di argomenti con due premesse sillogistiche e, pertanto, non riceve particolare attenzione. L'unità inferenziale minima e che esprime una relazione di conseguenza non immediata, è dunque il sillogismo, che ha due premesse e i termini organizzati come detto sopra per determinare la possibilità di dedurre un certo rapporto rapport predicativo dai due rapporti predicativi espressi dalle premesse ([*APr* I 23, 40 b 30 - 41 a 13][45]). Occorre sottolineare sia la presenza del termine medio a svolgere il ruolo fondamentale di mostrare in che modo si connettono tra loro i termini estremi. É il modo in cui il termine medio si connette, da un lato all'estremo maggiore, e, dall'altro, all'estremo minore che fornisce il motivo per inferire il modo in cui il termine maggiore si predica del termine minore. La presenza del termine medio, poi, per i motivi spiegati poco sopra, è necessaria per fornire una giustificazione non banale del rapporto predicativo espresso dalla conclusione ([*APr* i 23, 41 a 11-13][46]).

É importante notare, anche, che, come vedremo, Aristotele non suddivide la classe dei sillogismi in validi e in invalidi. Un sillogismo, per lo stagirita, è sempre valido. In caso contrario, ossia nel caso in cui dalle premesse non segua sillogisticamente alcuna conclusione , Aristotele dice semplicemente che le premesse non sono adatte a formare un sillogismo. L'espressione *sillogismo invalido* e, quindi, l'espressione *sillogismo valido* non sono adatte ad esprimere la concezione che Aristotele aveva di tali oggetti che compaiono nella sua trattazione della logica. Ciò mostra, ancora una volta, come i suoi interessi, i suoi obiettivi ed i suoi problemi fossero assai distanti da quelli dei logici contemporanei. Allo stesso modo, quando, in *APr* I 2 considerail problema delle conversioni degli enunciati categorici, egli non dice che vi sono alcune conversioni legittime, o valide, ed

[45] Allora, se si deve sillogizzare l'inerire o il non inerire di A a B, è necessario assumere un rapporto predicativo. Allora, se è assuunto che A si predica di B, è stato assunto quel che da principio era in questione. Se viene assunto che A si predica di C, ma non che C si predica di qualcosa o che altro si predica di C o che altro ancora si predica di A, non si avrà alcun sillogismo, giacché dall'assunzione del rapporto predicativo di un solo termine ad un solo termine non segue di necessità alcunché. Di conseguenza deve essere aggiunta anche l'altra protasi. Qualora dunque venga assunto che A si predica di qualcosa, oppure che altro si predica di A, oppure che altro ancora di predica di C, nulla impedisce che si abbia un sillogismo. In forza delle protasi assunte tuttavia non si avrà un sillogismo relativo a B. Infatti abbiamo detto che in generale non si può mai avere alcun sillogismo concludente che un termine si predica di un altro, se non è stato assunto un termine medio, il quale sia con ciascuno dei due in u rapporto di predicazione. Infatti il sillogismo in generale è costituito da protasi e il sillogismo relativo ad un certo termine è costituito da protasi relative a quasto certo termine e il sillogismo concludente al rapporto di questo termine con quest'altro è in forza di protasi relative al rapporto di questo temine con quest'altro. Ora, è impossibile assumere una protasi relativa a B senza affermare o negare alcunché di esso, o ancora assumere una protasi relativa al rapporto di A rispetto a B, senza assumere qualcosa di comune, ma solo affermando o negando qualcosa di proprio a ciascuno dei due termini. Di conseguenza deve essere assunto un qualche termine medio rispetto ad ambedue gli estremi, il quale possa connettere le predicazioni, se è vero che si deve avere un sillogismo concludente al rapprto di questo temrine con quest'altro.

[46] Di conseguenza deve essere assunto un qualche termine medio rispetto ad ambedue gli estremi, il quale possa connettere le predicazioni, se è vero che si deve avere un sillogismo concludente al rapprto di questo temrine con quest'altro.

altre che non lo sono. Come nel caso dei sillogismi, egli parla semplicemente di enunciati che si convertono in modo necessario, universalemente o particolarmente (ossia determinando un nuovo enunciato rispettivamente universale o particolare e i cui termini si sono scambiati il ruolo di soggetto e predicato), e di enunciati che non si convertono in modo necessario (abbiamo visto sopra che gli enunciati particolari negativi sono gli unici che non danno luogo a conversioni necessarie). Pur avendo fatto osservare come le espressioni *sillogismo valido* e *sillogismo invalido* non compaiano nei testi aristotelici, per comodità di esposizione ed essendo facile rimpiazzarle con la formulazione adeguata, le userò, di tanto in tanto. Si tenga, comunque, sempre presente che, a rigore, non esprimono correttamente le idee di Aristotele.

Lo stagirita, né in *APr* né altrove, non ha considerato la nozione di conseguenza logica in generale e non si è posto il problema di cosa fosse un argomento e di distinguere, in generale, quelli validi da quelli non validi. Il suo problema era legato ad una visione della realtà in cui il rapporto predicativo era universale e in cui per mezzo di enunciati che affermarssero o negassero, in forma universale o particolare, che un termine si predica di un altro era possibile ricostruire tutte le affermazioni scientifiche e mostrare la necessità di una data conclusione. Poiché la conclusione era, a sua volta, espressa da un enunciato che affermava o negava, in forma universale o particolare, la predicazione di un termine rispetto ad un altro, allora la sua necessità doveva ricavarsi studiando come si collegano o non si collegano, per mezzo di un altro termine, i due termini della conclusione. Prima di passare alla trattazione di altri temi relativi al sillogismo, occorre rimarcare ancora una volta che il sillogismo non costituisce, per Aristotele una sottoclasse particolarmente interessante di argomenti in generale e neanche di argomenti validi in generale. Questo modo di pensare è legato ad una successiva visione della logica. Vedremo che, seppure con non con piena consapevolezza teorica, è possibile dire che in Kant si trova un quadro concettuale adatto ad esprimere questa visione, che nella logica contemporanea è ormai centrale. In Aristotele, studiare i sillogismi non era una limitazione e non significa trascurare argomenti non interessanti. Per lui, semplicemente, non si poneva il problema di una trattazione della logica che considerasse ciò che non era significativo alla luce della sua metafisica e della sua epistemologia. Lo stagirita, evidentemente, non riteneva indipendenti come si fa oggi, logica e teoria della scienza da un lato, e logica e metafisica dall'altro[47].

2.7.2 FIGURE E METODI DI PROVA

Le due condizioni poste sopra definiscono cosa si intende per sillogismo, ma ancora non dicono nulla della validità degli argomenti.

Aristotele, come è noto, individua quattordici forme valide di sillogismo e le suddivide in tre figure (*schemata*), distinte a seconda della posizione del ter-

[47] Vedremo più avanti, discutendo le critiche di Etchemendy alla caratterizzazione della nozione di conseguenza logica data da Tarski [1936c], come anche in molte concezioni contemporanea il legame tra logica e metafisica sia comunque presente, seppure in forma diversa.

mine medio. Poiché la deduzione sillogistica richiede che il rapporto predicativo espresso dalla conclusione sia giustificato dai due rapporti predicativi espressi dalle premesse e che riguardano il termine medio, allora è possibile distinguere tre figure, ossia tre modi in cui si può dare un sillogismo. Queste tre figure si distinguono per la diversa posizione assunta dal termine medio nelle premesse. Siano A e B i termini estremi e C il termine medio, allora possiamo avere, come premesse, AxC e CxB (A si predica di C e C si predica di B) o CxA e CxB (C si predica di entrambi gli estremi) o AxC e CxB (gli estremi di predicano di C)([*APr* I 23, 41 a 14-18][48]).

I sillogismi, dunque, sono divisi da Aristotele in tre figure, a seconda della posizione del termine medio nelle protasi e, assunta la validità delle forme sillogistiche della prima figura, la validità delle forme sillogistiche della seconda e della terza figura è dimostrata riconducendole a quelle della prima figura mediante le procedure esposte trattando il quadrato delle opposizioni. Aristotele espone, infatti, i sillogismi in prima figura senza giustificarli. Non occorre fornire alcuna giustificazione dei sillogismi in prima figura, perché li ritiene perfetti (*teleios*), ossia non bisognosi di nulla fuorché le premesse, così come sono poste [*APr* I, 1, 24b 23-26][49], per essere riconosciuti validi, salvo poi ricondurre i due con premesse particolari, tradizionalmente chiamati *Darii* e *Ferio*, ai primi due, composti esclusivamente da premesse universali, tradizionalmente chiamati *Barbara* e *Celarent* [*APr* I 7, 29b 1-15][50]. I sillogismi della prima figura sono esplicitamente caratterizzati come perfetti in *APr* 1, 4, 26b 28-30[51]. I sillogismi della seconda e della terza figura, invece, sono detti imperfetti (*atelès*). Un sillogismo è perfetto se non richiede nulla oltre a ciò che è esplicitamente dichiarato dalle premesse e dalla conclusione per rendersi conto che la conclusione segue necessariamente alle premesse ([APr I 1, 24 b 23-24][52]). Un sillogismo è imperfetto se, invece, non è di per sè evidente che la conclusione segua necessariamente alle premesse e occorre esplicitare altre cose che sono implicate di necessità dalle premesse e che, una volta prese in considerazione, mostrano che la conclusione è

[48]Allora, se è necessario assumere qualcosa di comune ad ambedue i termini e ciò è possibile in tre modi (ossia predicando A di C e C di B, oppure predicando C di ambedue, oppure predicando ambedue di C) e se queste sono le figure di cui si è parlato, è manifesto che è necessario che ogni sillogismo risulti mediante una di queste figure. La cosidetta quarta figura, ossia quella in cui le premesse sono CxA e BxC, non è considerata da Aristotele, in quanto, essendo l'ordine delle premesse ininfluente ai fini deduttivi, coincide con la prima figura.

[49]"Chiamo sillogismo perfetto quello che non ha bisogno di nessun'altra cosa oltre a quelle assunte perché sia manifestata la necessità, imperfetto invece quello che ha bisogno di una o più cose, che sono necessariamente implicate dai termini posti, ma che non sono di fatto assunte nelle protasi".

[50]"È anche possibile ridurre tutti i sillogismi a quelli universali in prima figura. È manifesto infatti che con essi sono completati i sillogismi in seconda figura, non tutti allo stesso modo però, ma quelli universali per conversione della protasi negativa e i due particolari per riduzione all'impossibile".

[51]"È anche chiaro che tutti i sillogismi in questa figura sono perfetti, perché sono tutti compiutamente effettuati in forza delle protasi assunte inizialmente".

[52]Chiamo sillogismo perfetto quello che non ha bisogno di nessun'altra cosa oltre a quelle assunte perché sia manifestata la necessità.

effettivamente necessaria se si danno le premesse ([*APr* ! 1, 24 b 24-26][53]). Aristotele, a conferma della loro imperfezione, prova i sillogismi della seconda e della terza figura o riducendoli (*anagein*), per mezzo della conversione, ai sillogismi della prima figura (questo metodo di prova è detto *ostensivo*, *deiktikos*, cfr., per esempio, la dimostrazione della validità di *Camestres* [*APr* I 5, 27 a 9-14[54]]), mediante riduzione all'impossibile (*dia to adunaton*, cfr. la dimostrazione della validità di *Baroco* in [*APr* I 5, 27 a 36 - b 1[55]] e cfr. la dimostrazione della validità di *Bocardo* in [*APr* I 6, 28 b 15-20[56]]) o mediante il metodo dell'esposizione, o *ektesis* (cfr. la dimostrazione della validità di *Darapti* in [*APr* I 6, 28 a 22-26[57]] e cfr. la dimostrazione della validità di *Bocardo* in [*APr* I 6, 28 b 20-21[58]], dove il metodo dell'esposizione è combinato con la riduzione all'impossibile). I sillogismi della seconda e della terza figura sono, quindi, considerati imperfetti perché la loro validità diventa evidente quando sono ricondotti ai sillogismi della prima figura o quando si sono esplicitate alcune cose che seguono di necessità da essi. Tale riduzione, sulla quale non occorre soffermarsi qui, avviene rendendo esplicite certe condizioni che seguono dalle premesse, ma che non sono esplicitamente affermate da esse (tali condizioni sono gli enunciati che si possono ottenere tramite conversione o condizioni che sono rese esplicite tramite la riduzione all'assurdo o il metodo dell'esposizione) [*APr* I 5, 28a 3-8][59] e [*APr* I 6, 29a 14-17][60]. Tra i sillogismi della prima figura, poi, occupano una posizione particolare *Barbara* e *Celarent*, come ho detto, perché Aristotele mostra che *Darii* e *Ferio* possono essere ridotti a sillogismi della seconda figura che, a loro volta, possono essere ridotti *Barbara* e *Celarent*.

---

[53] [Chiamo sillogismo] imperfetto invece quello che ha bisogno di una o più cose, che sono necessariamente implicate dai termini posti, ma che non sono di fatto assunte nelle protasi.

[54] Ancora, se M inerisce ad ogni N e non inerisce ad alcun X, X non inerirà ad alcun N (infatti se M non inerisce ad alcun X, anche X non inerirà ad alcun M; ma M ineriva ad ogni N; dunque X non inerirà ad alcun N: infatti è risultata di nuovo la prima figura); ma poiché il nesso negativo è convertibile, anche N non inerirà ad alcun$X$: di conseguenza si avrà lo stesso sillogismo di prima.

[55] Ancora, se M inerisce ad ogni N e non inerisce a qualche X, è necessario che N non inerisca a qualche X. Infatti, se N inerisce ad ogni X e d'altra parte M si preica di ogni N, è necessario che M inerisca ad ogni X; era stato posto invece che M non inerisse a qualche X.

[56] Qualora uno degli estremi sia in un rapporto affermativo e l'altro in un rapporto negativo con il medio e quello in rapporto affermativo sia in una relazione universale onc esso, quando in rapprto affermativo con il medio sia l'estremo minore, si avrà sillogism, Infatti, se R inerisce ad ogni S e P non inerisce a qualche S, è necessario che P non inerisca a qualche R. Infatti, se P inerisce ad ogni R e R inerisce ad ogni S, anche P inerirà ad ogni S; ma per ipotesi P non inerisce a qualche S.

[57] É anche possibile effettuare la dimostrazione procedendo mediante l'impossibile e con l'esposizione. Infatti se ambedue gli estremi ineriscono ad ogni S, qualora sia assunto uno dei sggetti di S, per esempio N, a questo inerirranno sia P sia R; di conseguenza P inerirà a qualche R.

[58] Ciò viene provato anche senza la riduzione all'impossibile, qualora sia assunto qualcuno degli S al quale P non inerisce.

[59] "È chiaro anche che tutti i sillogismi in questa figura sono imperfetti (infatti essi vengono completati se sono assunte in aggiunta alcune cose, le quali o sono implicate di necessità nei termini dati oppure sono poste come ipotesi, come quando proviamo mediante l'impossibile)".

[60] "È anche manifesto che i sillogismi in questa figura sono tutti imperfetti (tutti infatti si completano con l'aggiunta di alcune cose)".

Riprendiamo l'apparato formale descritto sopra per definire la relazione di conseguenza immediata. Ogni sillogismo è organizzato in modo tale che la relazione di conseguenza sillogistica $\vdash_S$ vale tra due enunciati di E^+ e un enunciato di E^+ (in simboli, $\vdash_S \subseteq (E^+)^2 \times E^+$ quando valgono certe condizioni. In questo paragrafo, scriverò semplicemente $\vdash$ per riferirmi a $\vdash_S$ e scriverò semplicemente $\phi, \psi \vdash \zeta$ invece di $\langle \phi, \psi \rangle \vdash \zeta$, dove $\phi, \psi, \zeta \in E^+$.

Vediamo, ora, di approfondire questi temi.

Un sillogismo è formato da due enunciati, le premesse, che hanno in comune un termine, il termine medio e da un enunciato, la conclusione, che ha gli stessi termini che compaiono nelle premesse ad eccezione del medio.

Chiamiamo M il termine medio, P il termine maggiore e S il termine minore[61]. Allora le tre figure sillogistiche si possono rappresentare così

$$\begin{array}{rcl} \text{I figura } PxM, MxS & \vdash & PxS \\ \text{II figura } MxP, MxS & \vdash & PxS^{62} \\ \text{III figura } PxM, SxM & \vdash & PxS^{63}. \end{array}$$

Limitiamoci a considerare la prima figura e chiamiamo A un enunciato in E_a, E un enunciato in E_e, I un enunciato in E_i e O un enunciato in E_o. Consideriamo A, E, I e O come esempi di enunciati, rispettivamente, universale affermativo, universale negativo, particolare affermativo e particolare negativo. Chiamiamo U l'insieme $\{A, E, I, O\}$. È chiaro che vi sono sedici combinazioni $U \times U$ possibili della quantità e della qualità di due enunciati tra loro. Abbiamo, quindi, le seguenti combinazioni di premesse: AA, AE,AI, AO,EA,EE,EI, EO,IA,IE, II,IO,OA,OE,OI, OO.

É importante sottolineare che, secondo Aristotele, vi sono coppie di enunciati che non determinano alcuna conclusione sillogistica. Da certe coppie, Aristotele dice che non segue nulla in quanto vi sono enunciati contrari, ossia che non possono essere veri insieme, che sono compatibili con le premesse. Vi sono coppie di protasi, in altre parole, che Aristotele definisce non sillogistiche, ossia, in cui non è possibile concludere ad una protasi della forma MxN per mezzo della scomparsa del termine medio. Ciò è un'ulteriore segno di quanto sia peculiare la relazione di conseguenza sillogistica studiata da Aristotele rispetto alla nozione di conseguenza logica in sè, almeno nel suo senso attuale[64].

Si consideri il seguente esempio :

> Se il primo termine segue alla totalità del termine medio e il termine medio non inerisce ad alcunché dell'ultimo, non si avrà sillogismo degli estremi, perché, dal fatto che queste protasi sono, non

[61] "Chiamo medio il termine che è in un altro, mentre in esso è un altro termine ancora, e che inoltre risulta medio anche per posizione. Chiamo estremi sia il termine che è in un altro, sia quello nel quale un altro termine è" (APr I 4, 26a 35-37).

[64] Ciò costituisce un ulteriore esempio di come tale relazione di conseguenza non goda della proprietà riflessiva.

> segue alcunché di necessario. infatti è possibile sia che il primo termine inerisca alla totalità dell'ultimo sia che non inerisca ad alcunché di esso. (*APr* I 4 26 a 2-4).

In questo passo lo stagirita sta considerando due protasi della forma, rispettivamente, XaY e YeZ. Egli mostra che è tanto possibile che tali premesse siano vere e che sia vero XaZ (si ponga, infatti, X =animale, Y =uomo e Z =cavalllo) sia che le premesse siano vere e che sia vero XeZ (si ponga, infatti, X =animale, Y =uomo e Z =pietra).

Le combinazioni di premesse, quindi, possono essere distinte in due gruppi: quelle che permettono di costruire un sillogismo (premesse sillogistiche) e quelle che non lo permettono (premesse non sillogistiche). La differenza tra i due gruppi si basa sul fatto che le premesse sillogistche sono tutte e sole quelle che conducono ad una conclusione necessaria e determinata. Laddove dalle premesse non segue nulla secondo i metodi di deduzione sillogistici, basati sulla scomparsa del termine medio, allora lo stagirita dice, semplicemente, che non segue nulla. Non è possibile, in particolare, dire che dalle premesse segue comunque una delle premesse, in quanto, in tal caso, il termine medio non ha alcun ruolo. Ciò mostra, ancora una volta, l'importanza del ruolo del medio nella costruzione dei sillogismi e nel determinarne le conclusioni, che devono seguire dal fatto, appunto, che il medio connette gli altri due termini in modo appropriato. Il termine medio è sempre il termine per mezzo del quale sono connessi l'estremo maggiore e l'estremo minore e il modo in cui gli altri due termini sono connessi al medio determina il modo in cui sono connessi l'estremo maggiore e l'estremo minore.

Poiché Aristotele afferma che i sillogismi di prima figura sono solo quattro, vi devono essere coppie di premesse che, in questa figura, non conducono, sillogisticamente, ad alcuna conclusione. In particolare, sono considerate sillogistiche le coppie di premesse AA, EA, AI e EI, ossia, per ogni $X, Y, Z \in T$

$$\begin{aligned}
\text{Barbara } XaY, YaZ &\vdash XaZ^{65} \\
\text{Celarent } XeY, YaZ &\vdash XeZ^{66} \\
\text{Darii} XaY, YiZ &\vdash XiZ^{67} \\
\text{Ferio } XeY, YiZ &\vdash XoZ^{68}.
\end{aligned}$$

Sono rigettate, invece, le coppie di premesse:

XaY, YeZ[69]
XeY, YeZ[70]
XiY, YaZ[71]
XoY, YaZ[72]
XiY, YeZ[73]
XoY, YeZ[74]
XaY, YoZ[75]
XeY, YoZ[76].

2.8 SEGUIRE DI NECESSITÀ

Analizzando il testo aristotelico, risulta che Aristotele ammette diversi tipi di *seguire di necessità*, che hanno vari e non sempre chiari rapporti tra loro.

Un primo caso è rappresentato dalle inferenze immediate e, in modo particolare, dalle conversioni, che abbiamo già visto sopra. Si ricorderà, infatti, come il richiamo alla necessità fosse presente in tutti i casi di inferenze immediate. Ricordo, a titolo di esempio, quel che Aristotele dice a proposito degli enunciati contraddittori:

> In tutte le contraddizioni (...) che si riferiscono ad un oggetto universale, presentato in forma universale, è *necessario* che uno dei giudizi sia vero e l'altro falso [*Int* 7 17 b 26-27].

Analogamente, quando parla delle conversioni insiste sul carattere necessario dell'inferenza. Nel caso della conversione di un enunciato universale negativo, infatti, dice:

> È *necessario* che la protasi negativa posta nell'inerire universalmente sia convertibile nei termini [*APr* I 2, 25 a 5-6].

Un secondo caso è rappresentato dai diversi sillogismi. Ecco, a titolo di esempio, come Aristotele presenta i sillogismi in *Barbara*:

> Se A si predica di B e B si predica di ogni C, è *necessario* che A si predichi di ogni C [*APr* I 4, 25 b 38-39].

La differenza fra le premesse sillogistiche e quelle non sillogistiche, inoltre, è data proprio dal fatto che dalle prime segue necessariamente un certo rapporto predicativo, mentre lo stesso non accade con le seconde. Ecco, infatti, come Aristotele motiva il fatto che AaB e BeC non costituiscono una coppia di premesse sillogistiche:

> Se il primo termine segue alla totalità del termine medio e il termine medio non inerisce ad alchnché dell'ultimo, non si avrà sillogismo degli estremi, perché dal fatto che queste protasi sono, non segue *alcunché di necessario* [*APr* I 4, 26 a 2-4].

Accanto a queste forme di *seguire di necessità* ve ne sono altre, anche se il loro riconoscimento è più problematico: si tratta della riduzione ad impossibile e, più in generale ([APr I 23, 40 b 26-27][77]), del sillogismo per ipotesi e del metodo dell'esposizione.

Cercheremo di capire meglio cosa Aristotele intenda con queste altre forme di *seguire di necessità*. Ad ogni modo, possiamo notare che *seguire di necessità* è, di fatto, presa come una nozione primitiva, infatti non si fornisce altra spiegazione delle inferenze immediate e dei sillogismi in prima figura (con la parziale eccezione di *Darii* e *Ferio*, che, benché siano dichiarati perfetti ([*APr* I 4, 26 b 29][78]), sono ricondotti, rispettivamente a *Barbara* e a *Celarent*([*APr* I 7, 29 b 5-19][79])). Al massimo, Aristotele fornisce un esempio (cfr., per esempio, [*APr* I 2, 25 a 5-7][80]), ma è chiaro che ciò non è prova della validità di tali inferenze, in quanto è possibile che un'inferenza valida abbia esemplificazioni in cui la conclusione è vera quando le premesse sono vere.

Le forme di *seguire di necessità* che abbiamo indicato come riduzione all'impossibile e il metodo dell'esposizione possono non sembrare vere e proprie forme di *seguire di necessità* quanto, piuttosto, dei metodi di prova. Si tratta di strategie argomentative che Aristotele usa per mostrare la validità di certi sillogismi imperfetti (*Baroco* e *Bocardo*), quando non è possibile ricondurli a sillogismi in prima figura per mezzo delle conversioni. Se consideriamo da vicino tali procedimenti, ci accorgiamo, infatti, che i passi inferenziali non sono solo quelli già accettati per mezzo delle conversioni e di altre inferenze sillogistiche. In questi casi, Aristotele utilizza un proprio delle nuove forme di *seguire di necessità*.

Prima di proseguire, occorre notare come lo stesso Aristotele dica che non tutte le forme di *seguire di necessità* sono rappresentate dal sillogismo:

[77] Il procedimento mediante l'impossibile è un tipo particolare di quello procedente da un'ipotesi.

[78] É anche chiaro che tutti i sillogismi in questa figura [la prima] sono perfetti.

[79] i sillogismi particolari in prima figura non solo si completano per se stessi, ma è anhce possibile provarli in forza della seconda figura riducendoli all'impossibile. Per eseempio, se A inerisce ad ogni B e B inerisce a qualche C, si conclude che A inerisce a qualche C. Infatti, se A non inerisse ad alcun C e d'altra parte inerisce ad ogni B, B non inerirebbe ad alcun C; questo infatti lo sappiamo per la seconda figura.

La dimostrazione procederà nello stesso modo anche per il sillogismo negativo. Infatti, se A non inerisce ad alcun B e B inerisce a qualche C, A non inerirà a qualche C, giacché, se A inerisse ad ogni C e d'altra parte non inerisce ad alcun B, B non inerirebbe ad alcun C; ma questo procedimento è, come si è visto, la figura di mezzo.

Di conseguenza, poiché i sillogismi nella figura di mezzo si riducono tutti ai sillogismi universali in prima figura e poiché i sillogismi particolari in prima figura si riducono a quelli nella figura di mezzo, è manifesto che anche i sillogismi particolari in prima figura si ridurranno a quelli universali della stessa figura.

[80] É necessario che la protasi negativa posta nell'inerire universalmente sia convertibile nei termini; per esempio, se nessun piacere è un bene, nemmeno nessun bene sarà un piacere.

> 'Necessario' ha un'estensione maggiore di 'sillogismo': infatti ogni sillogismo è un necessario, mentre non ogni necessario è un sillogismo [*APr* I 32, 47 a 33-35].

Aristotele dice esplicitamente che il *seguire di necessità* comprende più argomenti di sillogismo. Ciò non esclude, a dire il vero, la possibilità che Aristotele pensasse che, comunque, le argomentazioni necessarie e non sillogistiche si possano descrivere anche mediante un sillogismo. Da come prosegue il passo citato sopra, potrebbe darsi che questo sia quel che Aristotele intendeva dire. Egli, infatti, continua:

> Di conseguenza se, poste alcune protasi, da esse segue qualcosa, non si deve cercare subito di ridurre tale procedimento ad una delle figure sillogistiche, ma prima devono essere assunte le due protasi, poi devono essere divise nei temrini e dei termini deve essere posto come medio quello nominato in ambedue le protasi, giacché è necessario che in tutte le figure il medio compaia in ambedue le protasi [*APr* I 32, 47 a 35-40].

In altre parole, sembra che, qui, Aristotele dica che, benché via siano forme di *seguire di necessità* che non sono sillogismi, esse possono essere ridotte a sillogismi. Subito dopo aver indicato che esistono tali forme di *seguire di necessità*, infatti egli parla di come formare un sillogismo da protasi da cui segue qualcosa di necessario. Del resto, lo stesso Aristotele, appena prima di tali considerazioni fornisce un esempio di *seguire di necessità* che non è sillogistico e di cui non mostra come possa essere ridotto ad un sillogismo. L'esempio è il seguente.

> Ancora, se, essendovi un uomo, è necessario che vi sia un animale, e se, essendovi un animale, è necessario che vi sia una sostanza, allora, essendovi un uomo, è necessario che vi sia una sostanza; ma ciò non viene sillogizzato, giacché le protasi non stanno nel rapporto che abbiamo detto [*APr* I 32, 47 a 28-31].

Aristotele propone come esempio di *seguire di necessità* una sequenza di enunciati ipotetici che potremmo rappresentare come segue:

$$\begin{array}{c} p \to q \\ q \to r \\ p \\ \hline r \end{array}$$

dove p=c'è un uomo, q=c'è un animale e r=c'è una sostanza.

A complicare ulteriormente la questione c'è il fatto che Aristotele, per mezzo dell'ancora iniziale, collega questo esempio a quello precedente e sembra quindi doversi estendere anche a tale secondo esempio (quello citato poco sopra) l'osservazione che introduce l'altro esempio. Il punto è che tale introduzione diceche gli esempi che segouno mostrano che non è sempre facile comprendere cosa manchi per formare un sillogismo da protasi da cui segue qualcosa di necessario e, perciò, sembra presentare tali esempi come casi che, beché non facilmente, sono ricondicibili a dei sillogismi ([*APr* I 32, 47 a 22-23][81]).

Che ogni forma di *seguire di necessità* sia riducibile ad un sillogismo, comunque, non è certamente vero per le inferenze immediate, che, per definizione, non possono essere trasformate in sillogismi equivalenti, ma questo caso potrebbe essere poco significativo, in quanto riguarda solo forme argomentative molto semplici e non ancora interessanti per la ricerca nelle varie discipline scientifiche. Come abbiamo in parte già visto, però, e come vedremo meglio in quanto segue, tuttavia, Aristotele riconosce anche altri metodi di prova, tra cui è sicuramente significativo quello di riduzione all'impossibile, che egli usa per validare alcune forme sillogistiche. Gli altri metodi di prova che egli considera esplicitamente sono i sillogismi procedenti da un'ipotesi, quel che possiamo avvicinare a quel che sarà detto *modus ponens*, (di cui la riduzione all'impossibile è considerata un caso particolare) e il metodo dell'esposizione. Contrariamente a quel che Aristotele sembra suggerire, come abbiamo detto, in alcuni passi di *APr* I 32, vedremo che, in *APr* I 44, egli dice esplicitamente che non si deve tentare di ridurre i sillogismi procedenti ad ipotesi ad un sillogismo in senso stretto, ossia elaborato in una delle tre figue che abbiamo visto. Tenterò di illustrare meglio questi concetti nei paragrafi che seguono.

2.8.1 Dimostrazione per impossibile

Distinguiamo, prima di tutto, la dimostrazione per impossibile (*sullogismos dia tou adunatou*) dalla riduzione all'impossibile (*apagogè eis to adunaton*), come fa Aristotele in *APr* I 44, 50 a 29-32. La prima corrisponde all'intero processo con cui si mostra che vale una certa tesi perché dalla sua contraddittoria segue qualcosa di falso. La seconda, invece, corrisponde ad una parte della dimostrazione per impossibile e, precisamente, a quella parte che mostra che da una certa tesi segue qualcosa di falso. Determinando una tensione con quanto detto in APr I 32 e riportato sopra, Aristotele dichiara che la dimostrazione per impossibile non è riducibile al sillogismo, mentre, come vedremo lo è la parte che corrisponde alla riduzione all'impossibile ([APr I 44, 50][82]).

Aristotele applica questo metodo di prova per provare che *Baroco* e *Bocardo* sono sillogismi validi. Consideriamo il caso di *Baroco*. Ecco quel dice Aristotele:

> Ancora, se M inerisce ad ogni N e non inerisce a qualche X, è necessario che N non inerisca a qualche X. Infatti, se N inerisse ad ogni X e d'altra parte M si predica di ogni N, è necessario che M inerisca ad ogni X; era stato posto invece che M non inerisse a qualche X [*APr* I 5, 27 a 37 - 27 b 2].

[81] In alcuni argomenti è facile vedere ciò che manca, mentre altri lo tengono celato e sembrano concludere sillogisticamente, perché qualcosa di encessario segue dagli antecedenti posti.

[82] La stessa cosa vale anche per i procedimenti ottenuti per l'impossibile, giacché nemmeno questi è possibile risolverli in una delle figure sillogistiche; è invece possibile risolvere la riduzione all'impossibile (infatti questa si prova con un sillogismo), mentre l'altra parte della prova non è possibile risolverla, poiché è ottenuta da un'ipotesi.

Le premesse di *Baroco* sono MaN e MoX. Dalla seconda premessa non si ricava alcuna conversione, come sappiamo, in quanto è un enunciato particolare negativo. Solo la prima premessa, MaN, dunque, può essere convertita e, in tal modo, otterremmo NiM. Ma NiM e MoX non danno luogo ad alcun sillogismo della prima figura ([*APr* I 4, 26 b 22-26][83]) e neppure, più in generale, ad alcun sillogismo valido, perché non è espresso alcun nesso predicativo universale ([*APr* I 24, 41 b 6-8][84]). Il metodo della conversione, quindi, non è praticabile in questo caso. Aristotele, dunque, decide di procedere nel modo rappresentato nello schema seguente, dove al centro si trovano i passaggi dell'argomento, a sinistra la loro giustificazione e a destra il testo di Aristotele citato sopra.

Premessa:	1	MaN	Se M inerisce ad ogni N
Premessa:	2	MoX	e non inerisce a qualche X
Da provare:	3	NoX	è necessario che N non inerisca a qualche X.
Ipotesi:	4	NaX	Infatti, se N inerisse ad gni X
Ripetizione di 1 :	5	MaN	a d'altra parte M si predica i ogni N
Da 5-4 per *Barbara* :	6	MaX	è necessario che M inerisca ad ogni X.

Come si vede, dunque, il procedimento di Aristotele è molto chiaro. Per mostrare in generale, con la riduzione all'impossibile, che da una coppia di premesse sillogistiche p e q segue un enunciato r, Aristotele assume che le premesse siano vere e, poi, assume, per ipotesi, l'enunciato che contraddice r per mostrare che, insieme ad una delle premesse, ne segue un enunciato di cui si sa in precedenza che è falsa (nel caso considerato sopra l'enunciato che contraddice l'altra premessa). Aristotele dà una formulazione generale di questo procedimento nel passo che segue:

> La dimostrazione che conduce all'impossibile (...) pone ciò che intende escludere e lo riduce ad un falso già ammesso (...). [La dimostrazione per impossibile] assume una di queste [delle protasi ammesse] e come seconda il contraddittorio del conseguente da provare. Non fa alcuna differenza che il conseguente sia un'affermazione o una negazione; in ambedue i casi il procedimento è lo stesso[*APr* II 14, 62 b 29-38].

Supponiamo, come detto sopra, di indicare la coppia di premesse sillogistiche con p e q e la loro conclusione con r. Indichiamo con $\neg r$ l'enunciato che contraddice un enunciato r e con $\perp$ un enunciato falso. La nuova forma di *seguire*

[83] Non si avrà in alcun caso sillogismo anche quando siano particolari ambedue gli intervalli predicativi, (...) qualora uno venga detto affermativamente e l'altro negativamente (...). Termini (...) siano: animale-bianco-cavallo e animale-bianco-pietra.

[84] Inoltre in ogni sillogismo bisogna che uno dei termini sia affermtivo e che vi sia un nesso universale. Infatti, senza il nesso universale, o non si avrà sillogismo, oppure non sarà relativo all'oggetto della prova, oppure verrà postulato ciò che all'inizio era in questione.

di necessità che legittima le inferenze condotte per mezzo della dimostrazione per impossibile è il passaggio

$$\frac{p,\, p \text{ e } \neg r \text{ implicano } \bot}{r}.$$

Di fatto, benché Aristotele enunci questa regola in tutta la sua generalità, essa è usata nella forma meno generale

$$\frac{p,\, q,\, p \text{ e } \neg r \text{ implicano } \neg q}{r}.$$

Questa regola è applicabile quando si conosce previamente che p e $\neg r$ implicano un enunciato falso, che, come abbiamo detto, di fatto è la negazione dell'altra premessa sillogistica ([*APr* II 14, 62 b 37-38][85] e [*APo* II 26, 87 a 15-16][86]).

Da questa forma inferenziale, Aristotele distingue le cosidette prove ostensive, che consistono nel consueto metodo diretto di prova, ossia in una prova della necessità di un conseguente che fa riferimento solo ai sillogismi (è ammesso il ricorso alle conversioni nel caso in cui deve mostrare la validità di un sillogismo imperfetto) ([*APr* II 14, 62 b 29- 35])[87]. La sua struttura è esemplificata dallo schema

$$\frac{p,\, q}{r}.$$

dove p, q e r sono, rispettivamente, le richieste protasi sillogistiche e la conclusione che segue da tali protasi. Nelle prove ostensive non occorre assumere ipotesi fittizie al solo scopo di derivare un enunciato falso e si procede direttamente dalle premesse alla conclusione.

Vorrei concludere questa sezione, accenando, senza approfondirle, ad alcune osservazioni che Aristotele compie confrontando le dimostrazioni ostensive e quelle per impossibile. Aristotele dichiara che tutto ciò che può essere provato ostensivamente, può anche essere provato mediante il metodo della riduzione all'impossibile e viceversa ([APr I 29, 45 a 27-29][88] e [APr II 14, 62 b 39-42][89]). É interessante osservare, tuttavia, che egli pone una differenza epistemologica tra questi due metodi. Egli dichiara che il metodo dimostrativo ostensivo è migliore

[85] [Nella dimostrazione che conduce all'impossibile] è necessario che il conseguente non sia vero.

[86] Quando sia più noto che la conclusione non è, si produce la dimostrazione all'impossibile.

[87] La dimostrazione che conduce all'impossibile differisce da quella ostensiva, perché la prima pone ciò che intende escludere e lo riduce ad un falso già ammesso, mentre la seconda procede da presupposizioni ammesse e vere. Ambedue i tipi di dimostrazione assumono tuttavia due protasi ammesse, ma, mentre quella ostensiva assume quelle da cui procede il conseguente, l'altra assume una di queste e come seconda il contraddittorio del conseguente da provare.

[88] Infatti ciò che è provato ostensivamente può essere sillogizzato anche mediante l'impossibile in forza degli stessi temrini e ciò che è provato mediante l'impossibile può essere sillogizzaato anche ostensivamente.

[89] Tutto ciò che è ottenuto ostensivamente può essere provato anche mediante l'impossibile e ciò che è ottenuto mediante l'impossibile può essere provato ostensivamente con gli stessi termini.

di quello per riduzione all'impossibile, perché quello procede da premesse che indicano la causa della conclusione e, quindi, sono più note e anteriori per natura mentre questo procede da premesse che sono posteriori per natura ([APo I 26, 87 a12-30][90]). Al di là dei problemi che la trattazione di tutti questi concetti, di cui non mi sono occupato qui, solleva, per i nostri scopi occorre solo osservare che, in tal modo, si conferma ancora una volta come l'indagine logica aristotelica non costituisca un'indagine a sé stante, come sarà, invece, concepita più avanti. Diversi aspetti della sua riflessione, provenienti anche da ambiti che noi, oggi, per lo più non giudichiamo attinenti alla ricerca logica.

2.8.2 Dimostrazione ipotetica

Aristotele dichiara che la riduzione all'impossibile è un caso particolare di un altro metodo di prova, detto sillogismo procedente da un'ipotesi ([APr I 23, 40 b 26-27][91]). Vederemo che questa affermazione è più problematica di quel che sembra a prima vista. Ad ogni modo, Aristotele introduce la trattazione anche di quelli che chiama sillogismi procedenti da un'ipotesi (o dimostrazioni ipotetiche) e, poenendo una tensione con quanto abbiamo visto affermato in *APr* I 32, dichiara esplicitamente che non si deve provare a ridurre tali forme di *seguire di necessità* ai sillogismi in senso stretto:

> Inoltre non si deve tentare di ridurre ad una delle figure sillogistiche i sillogismi procedenti da un'ipotesi. Infatti non è possibile effettuare la riduzione procedendo dalle protasi date, perché essi non sono provati mediante un sillogismo, ma sono tutti ammessi per una convenzione [APr I 44, 50 a 16-18].

La struttura logica dei sillogismi ipotetici sembra essere avvicinabile a quello che, più tardi, sarà detto *modus ponens*, ossia ad inferenze della forma

$$\frac{p,\, p \to q}{q}.$$

Il passo principale consiste nell'ammettere l'ipotesi che da un certo enunciato p segua di necessità un altro enunciato q di modo che, un volta dimostrato o,

[90] La proposizione che A non conviene a B è anteriore per natura alla proposizione che mAm non conviene a C. Infatti le proposizioni da cui la conclusione procede sono anteriori alla conclusione e il non convenire di A a C è la conclusione mentre il non convenire di A a B è ciò da cui la conclusione procede. Infatti se segue che sia demolito qualcosa, non è che questo sia una conclusione e quelle le premesse da cui si procede, ma ciò da cui procede il sillogismo è ciò che sta in tale rapporto da essere o come un tutto rispetto ad una parte o come una parte rispetto ad un tutto; le premesse AC e BC non sono in tale rapporto fra loro. Allora se è superiore la dimostrazione che procede da premesse più note e prime, ed entrambe le dimostrazioni sono convincenti a partire dal fatto che qualcosa non è qualcosa, ma una procede da ciò che è anteriore e l'altra da ciò che è posteriore, la dimostrazione privativa dev'essere semplicemente migliore di quella che conduce all'impossibile; di conseguenza è chiaro che la dimsotrazione positiva, essendo migliore della dimostrazione privativa, è migliore anche di quella che conduce all'impossibile.

[91] Il procedimento mediante l'impossibile è un tipo particolare di quello procedente da un'ipotesi.

comunque, ammesso p, si sia legittimati ad ammettere anche q. L'esempio fornito da Aristotele è il seguente. Supponiamo di aver ammesso che, se i contrari non sono realizzati da un'unica capacità, allora non vi è un'unica scienza dei contrari. Può darsi che per dimostrare che, in effetti, non vi è un'unica scienza dei contrari non si intenda procedere dimostrando direttamente tale tesi, ma ci si metta a dimostrare, piuttosto l'antencedente del condizionale ammesso sopra. A questo punto, se si riesce a dimostrare tale antencedente, avendo già accettato il condizionale, si può concludere che non vi è un'unica scienza dei contrari. In questo modo si è giunti, legittimamente, a dimostrare una tesi, seguendo un percorso che non è un sillogismo. La dimostrazione è del tutto legittima, in quanto il conseguente segue di necessità all'antencedente, ma non in virtù di sillogismo, bensì di un'ipotesi, ossia dell'ipotesi che se si verifica l'antecedente, allora si verifica anche il conseguente ([APr I 44, 50 a 19-26][92]). Assai notevole, anche in riferimento alla posizione non chiara di *APr* I 32 circa la possibilità di ridurre tutte le forme di *seguire di necessità* al sillogismo in senso stretto, è la dichiarazione, all'apparenza molto chiara, secondo cui non è possibile ridurre il sillogismo che procede da un'ipotesi ad un sillogismo in senso stretto:

> Non è possibile dunque ridurre questo procedimento. Invece è possibile ridurre quello concludente che non è unica la capacità di realizzarsi per tutti i contrari; quest'ultimo infatti era certamente un sillogismo, mentre l'altro era un'ipotesi ([APr I 44, 50 a 26-28]).
>
> Per il momento questo ci sia manifesto, che cioè non è possibile risolvere nelle figure sillogismi siffatti [le dimostrazioni ipotetiche] ([APr I 44, 50 b 2-4]).

Allo stesso modo, come abbiamo visto nel paragrafo precedente, Aristotele dice che anche le dimostrazioni per impossibile non possono essere ridotte a sillogismi ([APr I 44, 50 a 29-33]).

La differenza che distingue dimostrazioni ipotetiche e dimostrazioni per impossibile, da un lato, e dimostrazioni sillogisiche, dall'altro è che nelle prima occorre aver convenuto che vale una certa ipotesi che, nel caso delle dimostrazioni ipotetiche è un enunciato condizionale e, nel caso delle dimostrazioni per impossibile, è la verità della contraddittoria della tesi che si intende mostrare.

Secondo la descrizione formale che, sebbene solo in maniera illustrativa e come tentativo, ne abbiamo dato, la dimostrazione ipotetica e la dimostrazione per assurdo corrispondono a processi inferenziali diversi, sebbene legato. La dimostrazione per ipotesi è stata avvicinata a quello che, poi, sarà detto *modus ponens* e la dimostrazione per assurdo, di fatto, ad una forma di *modus tollens.* Aristotele, tuttavia, dice, come abbiamo visto, che la dimostrazione per assurdo

---

[92] Per esempio, essendo stato posto che, se non è unica la capacità di realizzare i contrari, non vi è neanche una scienza unica dei contrari, venga argomentato quindi che non in ogni caso è unica la capacità di realizzare i contrari, come per esempio quella di realizzare la sanità e la malattia, perché in tal caso la medesima cosa sarebbe nello stesso tempo sana e malata; allora, che non sia unica la capacità per tutti i contrari è stato manifestato con un argomento, emntre non è stato provato che non è unica la scienza per tutti i contrari. É tuttavia necessario ammettere che è così, ma non procedendo da un sillogismo, bensì da un'ipotesi.

è un caso particolare di dimostrazione per ipotesi. Egli, tuttavia, non sembra indicare con ciò un'affermazione che riguarda la struttura logica di tali schemi inferenziali, che, infatti, abbiamo ricostruito in modi diversi. Egli sembra basare la sua affermazione solo sull'osservazione, di carattere generale, che in entrambi i casi si pone un'ipotesi, per quanto diversa nei due casi, prima di poter giungere alla conclusione desiderata.

2.8.3 Metodo dell'esposizione

Riguardo al metodo dell'esposizione, mi limiterò a fornire alcune parafrasi del testo aristotelico. La precisa determinazione non è chiara e, comunque, non è possibile tentarla qui. Il nostro compito, del resto, non è solo quello di richiamare l'attenzione su come siano stati diversi i concetti e i problemi con cui la logica ha avuto a che fare nel corso della sua storia per evitare di discutere del concetto di conseguenza logica misconoscendone la complessità, i suoi diversi aspetti e i molteplici collegamenti che lo uniscono a diversi altri concetti.

Aristotele utilizza il metodo dell'esposizione, per la prima volta per mostrare la validità di *Darapti* (o, meglio, come sappiamo, che dalla coppia di premesse PaS e RaS si conclude di necessità a PiR). Aristotele, dapprima, prova la validità di *Darapti* in modo ostensivo, infatti, basta convertire RaS in SiR e, con PaS si ottiene un sillogismo in *Darii* che conclude a PiR. Egli, afferma, però, che è anche possibile procedere con il metodo dell'esposizione. Ecco come si esprime:

> É anche possibile effettuare la dimostrazione procedendo mediante l'impossibile e con l'esposizione. Infatti se ambedue gli estremi ineriscono ad ogni S, qualora sia assunto uno dei soggetti di S, per esempio N, a questo ineriranno sia P sia R; di conseguenza P inerirà a qualche R [*APr* I 6, 28 a 22-26].

Indichiamo con $S\alpha$ il fatto che S si predica di un soggetto α. Possiamo rappresentare il ragionamento di Aristotele per mezzo dello schema seguente:

Premessa	: 1	PaS Se ambedue gli estremi inerisono ad ogni S
Premessa	: 2	RaS
Ipotesi	: 3	$S\alpha$ qualora sia assunto uno dei soggetti di S
Da 1,3	: 4	$P\alpha$ a questo ineriranno sia P
Da 2,3	: 5	$R\alpha$ sia R
Conclusione	: 6	PiR di conseguenza P inerirà a qualche R.

Ora, si potrebbe osservare che questo ragionamento non prova che da PaS e RaS segue PiR, ma solo che se vi è un elemento α tale che S si predica di α, allora vale PiR. L'ipotesi del punto 3, però, è sempre verificata per Aristotele, che immagina di lavorare sempre con termini per cui sia sempre possibile trovare un soggetto di cui si predicano. Dunque, possiamo affermare semplicemente che PiR segue da PaS.

La forma di *seguire di necessità* che sembra all'opera in questo caso può essere schematizzata nel modo seguente:

$$\frac{P\alpha,\, R\alpha}{PiR}.$$

Per provare Bocardo, poi, serve un'altra regola, che è l'equivalente di quella precedente per gli enunciati particolari negativi [*APr* I 6, 28 b 20-21]:

$$\frac{P\alpha,\, \neg R\alpha}{PoR}$$

dove indico con $\neg R\alpha$ il fatto che α non è un soggetto di cui si predica R.

Nel caso dei sillogismi categorici *Darapti* e *Bocardo* la dimostrazione della loro valiità per mezzo del metodo dell'esposizione è presentata come un'alternativa alle prove ostensive che Aristotele offre in prima istanza. Si noti che, nel caso in cui, invece, *Baroco* e *Bocardo* sono sillogismi con premesse necessarie (che non abbiamo affrontato qui), il metodo dell'esposizione è indicato come l'unico metodo di prova della loro validità (cfr. [*APr* I 8, 30 a 6-14][93]).

Si tratta di inferenze molte semplici, se non banali[94]. Qui sono state citate perché Aristotele le prende esplicitamente in considerazione in certe dimostrazioni e mostrano, nonostante le cautele di cui ho detto sopra, come il concetto aristotelico di *seguire di necessità* sia più ampio del sillogismo.

2.9 IL RIFERIMENTO AL LINGUAGGIO

Una importante peculiarità della ricerca logica aristotelica è il ruolo svolto da linguaggio. Occorre mettere in luce, seppure brevemente, anche questo aspetto in quanto è notevolemente diverso da quanto accade nella logica contemporanea.

Le attuali presentazioni di un sistema logico fanno riferimento ad un linguaggio formale, che è un sistema artificiale di simboli che si combinano secondo regole precise per formare le formule ben formate. Tali stringhe di simboli non sono dotate di un significato, anche se possono ricevere delle letture intuitive. In sé, però, sono semplici segni. Ancora senza fornire alcuna interpretazione, è possibile definire delle manipolazioni legittime di tali simboli, ossia definire un

[93] Nella figura di mezzo invece, quando il nesso universale sia affermativo e quello particolare negativo, e ancora in ternza figura, quando il nesso unviersale sia affermativo e quello particolare negativo, la dimostrazione non sarà dello stesso tipo di quella per i corrispondenti sillogismi riguardanti l'inerire, ma è necessari esporre ciò a parte di cui in ambedue i casi il predicato non inerisce ed effettuare il sillogismo rispetto a questo termine; con questi termini infatti il sillogismo sarà necessario. Ma il sillogismo, se è necessario rispetto al termine di cui si fa esposizione, giacché il termine esposto è precisamente una parte di esso. E l'uno o l'altro di questi sillogismi si determina nella sua propria figura.

[94] Per una diversa interpretazione del metodo dell'esposizione, cfr. Łukasiewicz [1957], pp. 59-67.

calcolo e dare, quindi, una nozione di derivazione, o prova in un certo sistema formale. Tali enunciati ricevono un'interpretazione, in senso tecnico, solo quando si fornisce una semantica, come vedremo in dettaglio nei prossimi capitoli.

Il linguaggio a cui penso Aristotele, diversamente da tutto ciò, non è costituito da un insieme di simboli fissati all'inizio e una volta per tutte. Le espressioni del linguaggio a cui si riferisce lo stagirita, tantomeno, sono ricavate per mezzo di regole chiare ed esplicite da altri simboli.

Il linguaggio a cui si riferisce Aristotele, è, piuttosto, una realtà mobile e priva di sicuri confini. La sua indeterminatezza, ben lungi dall'essere un difetto per lo stagirita, ciò che gli permette di essere uno strumento utile per studiare la realtà: la sua malleablità gli permette di *riflettere* la struttura della realtà nel modo richiesto dall'indagine scientifica.

Vediamo di spiegare meglio questo punto. Abbiamo già visto come il linguaggio sia in grado di esprimere dei discorsi che possono essere veri o falsi, a seconda che dichiarino unite o separate le cose che sono, rispettivamente, unite o separate nella realtà (cfr., per esempio, [Int 1 16 a 12-18][95]). Per stabilire se il rapporto predicativo espresso con i discorsi, dunque, è vero o falso, occorre confrontarlo con le predicazioni che si danno tra gli enti nella realtà. Tutto ciò è già stato richiamato sopra, a proposito di come si possono costruire enunciati che dichiarano il vero o il falso mostrando le connessioni tra oggetti per mezzo di connessioni tra elementi del linguaggio (cfr. il paragrafo *La struttura delle protasi*). Aristotele ritiene che i nomi che compaiono nel linguaggio siano simboli degli oggetti, sebbene, poiché gli oggetti che ci capita di indicare siano di più dei nomi, di fatto può capitare che usiamo lo stesso nome per riferirci a più oggetti [*CSf* 1 165 a 7-13][96]. In modo più elaborato, al principio di *Int*, dice che i suoni della voce sono simboli delle affezioni dell'anima e che tali affezioni sono le stesse in tutti gli uomini e sono loro, propriamente, ad essere le immagini degli oggetti, pure, sottolinea Aristotele, identici per tutti ([Int 1 16 a 2-7][97]). I segni scritti, poi, sono simboli della voce e, per mezzo dei passaggi appena ricordati, sono anch'essi, a loro volta, simboli degli oggetti nella realtà ([*Int* 1 16 a 3-4][98]). Ciò che rende possibile il discorso scientifico è proprio il fatto che,

[95] In effetti, il falso ed il vero consistono nella congiunzione e nella separazione. In sé, i nomi ed i verbi assomigliano dunque alle nozioni, quando queste non siano congiunte a nulla né separate da nulla; essi sono ad esempio i termini: uomo, o: bianco, quando manchi una qualche precisazione, poiché in tal caso non sussiste ancora nè falsità né verità. Ciò è provato dal fatto, ad esempio, che il termine becco-cervo significa bens^qualcosa, a non indica ancora lacunché di vero o di falso, se non che è stato aggiunto l'essere oppure il non essere, con una determinazione assoluta o temporale.

[96] Dato infatti che non è possibile discutere presentando gli oggetti come tali, e che ci serviamo invece dei nomi, come di simboli che sostituiscano gli oggetti, noi riteniamo che i risultati osservabili a proposito dei nomi si verifichino altresì nel campo degli oggetti, come avviene a colo che fanno calcoli usando dei ciottoli. Eppure le cose non stanno allos tesso modo nei due casi: in ffetti, limitato è il numero dei nomi, come limitata è la quantità dei discorsi, mentre gli oggetti sono numericamente infiniti. É dunque necessario che un medesimo discorso esprima parecchie cose e che un unico nome indichi più oggetti.

[97] Ordunque, i suoni dela voce sono simboli delle affezioni che hanno luogo nell'anima (...). Risultano segni, anzitutto, delle affezioni dell'anima, che sono le medesime per tutti e costituiscono le immagini di oggetti, già identici per tutti.

[98] Le lettere scritte sono simboli dei suoni della voce.

nonostante i segni della voce e i segni scritti possano variare in modo arbitrario, le affezioni dell'anima e gli oggetti, a cui, in ultima analisi, si riferiscono, sono i medesimi per tutti e il linguaggio permette di formare, in tal modo, enunciati che possono dire ciò che si dà nella realtà.

Nell'ambito della sillogistica, il fatto che il linguaggio a cui si riferisce Aristotele non abbia confini precisi, a differenza di quel che accade nelle presentazioni contemporanee dei linguaggi formali, comporta che, quando è opportuno, è possibile creare il termine medio che occorre per ottenere un sillogismo per mezzo di un'espressione complessa, creata appositamente. Può darsi che vi siano oggetti di cui non si dà nome e, per designarli, dunque, si deve ricorrere ad un'espressione complessa ([*APr* I 35, 48 a 29-31][99]). Ciò può rendere più difficile costruire il sillogismo ([*APr* I 35, 48 a 31-32][100]), ma, dal punto di vista concettuale, la forma delle inferenze non cambia. Se non si riconosce questa duttilità del linguaggio, dice Aristotele, si rischia di ritenere indimostrabili enunciati che, invece, non sono primi e possono essere dimostrati.

L'esempio abbozzato da Aristotele è il seguente. Supponiamo di considerare, prima di tutto, il seguente sillogismo. Poniamo A=avere la somma degli angoli interni uguale a due retti, B=triangolo e C=triangolo isoscele. Possiamo dimostrare che in ogni triangolo isoscele la somma degli angoli interni è uguale a due retti per mezzo di un sillogismo in *Barbara*.

Qui il termine medio è un semplice nome, ossia triangolo. Per dimostrare la premessa Avere la somma degli angoli interni uguale a due retti si predica totalmente di triangolo, però, si deve costruire un termine medio apposta e che non risulta essere un semplice nome. Il termine medio, in questo caso, deve piuttosto essere un discorso complesso. Secondo la ricostruzione di Mignucci[101], deve essere Avere la somma degli angoli interni uguale alla somma degli angoli relativi ad un vertici costituiti sul prolungamento di un lato. In tal caso, se poniamo A come sopra, B=avere la somma degli angoli interni uguale alla somma degli angoli relativi ad un vertici costituiti sul prolungamento di un lato e C=triangolo, riusciamo, per mezzo di un sillogismo in *Barbara*, a dimostrare la premessa maggiore del sillogismo precedente([*APr* I 35, 48 a 33-39][102]).

Quel che conta non è tanto l'esempio in sè, ma mostrare come il linguaggio considerato da Aristotele non si a definito in maniera precisa come i linguaggi formali di cui si fa uso oggi e, soprattutto, come ciò comporti che la sua duttilità permette di adattare le dimostrazioni sillogistiche alle diverse situazioni richieste dall'indagine scientifica. Può darsi che il termine medio necessario per costruire

[99] Non bisogna sempre cercare che i termini siano espressi con un solo nome. Infatti spesso vi possono essere locuzioni complesse delle quali non si dà un nome.

[100] Vi possono essere delle locuzioni complesse delle quali non si dà un nome. Perciò è difficile ridurre ad una delle figure sillogismi di questo tipo.

[101] Cfr. Aristotele, *Gli Analitici Primi*, c. M. Mignucci, pp. 478-480, n. 3.

[102] A sia due angoli retti, ciò che è indicato con B triangolo, ciò che è indicato con C isoscele. Allora A inerisce a C in forza di B, ma inerisce a B non in forza di un altro termine denominabile con un solo nome (infatti il triangolo ha per sé gli angoli uguali a due retti); di conseguenza si conclude che non vi è medio della protasi AB, benché essa sia dimostrabile. In effetti è manifesto che il medio non deve essere sempre assunto come un termine unico, ma talvolta come una locuzione complessa, come succede anche nel caso menzionato.

un sillogismo non sia un nome semplice, ma in tal caso si può intervenire sul linguaggio e creare un'espressio apposita che denomini ciò che occorre. Tali interventi sul linguaggio non sono limitati a priori e il linguaggio può, quindi, per Aristotele, essere sempre ampliato per comprendere le espressioni che ci interessano.

2.10 SILLOGISMO E RICERCA SCIENTIFICA

Come è già stato detto sopra, Aristotele non intraprende l'indagine sul sillogismo per studiare la relazione di conseguenza logica in generale. Il suo intento è quello di capire come si possono giustificare gli enunciati che si usano nell'indagine scientifica. Poiché la verità si esprime affermando che è unito ciò è unito nella realtà ed affermando che è separato ciò che è separato nella realtà, allora gli enunciati da prendere in considerazione per la ricerca scientifica sono precisamente quelli in cui si afferma o si nega che qualcosa si predica di qualcosa. Ora, poiché l'indagine scientifica deve essere in grado di spiegare la ragione per cui accadono certe cose, occorre indicare in modo si possono giustificare gli enunciati che la scienza afferma ed è a questo punto che Aristotele ricorre al sillogismo. Tramite il sillogismo, infatti, siamo in grado di trovare una dimostrazione per ogni enunciato che può essere dimostrato e siamo in grado di mostare perché non si può dimostrare ciò di cui non vi è dimostrazione ([*APr* I 30, 46 a 24-28][103]). Ogni enunciato che predica qualcosa di qualcosa d'altro, infatti, deve essere ottenibile per mezzo delle figure sillogistiche una volta individuato il termine medio adeguato. Se ciò non avviene è perché tale enunciato non può essere dimostrato scientificamente, come nel caso degli individui (che non ineriscono a qualcosa) e dei termini che esprimono predicati primi (a cui non inerisce alcunché) ([*APr* I 27, 43 a 33-36][104]).

Ora, che il compito della ricerca sul sillogismo non fosse di natura esclusivamente logica, separata da ogni altro interesse e, in particolare dall'interesse per la ricerca scientifica è confermato dai molti passi in cui Aristotele, in *APr*, considera in che modo si può mettere in forma un argomento per dimostrare una certa tesi e come trovare il termine medio, che sono tematiche che interessano

[103] Infatti, se nello studio descrittivo non è stato tralasciato alcunché di ciò che inerisce con verità agli oggetti della ricerca, per tutto ciò di cui c'è dimostrazione saremo in grado di trovala, metre per tutto ciò di cui per natura non si dà dimsotrazione saremo in grado di rendere manifesto appunto questo.

[104] É chiaro che alcune delle cose che sono non sono atte per natura ad essere dette di qualcosa: infatti qualunque sensibile, per così dire, è tale da non predicarsi di alcunché, se non accidentalmente. Diciamo infatti talvolta che quel bianco è Socrate e che ciò che si avvicina è Callia. Che d'altra parte, anche procedendo verso 'alto, ci si fermi ad un certo punto torneremo a dirlo; per il momento ciò sia dato. Di questi ultimi predicati allora non è possibile dimostrare un altro predicato, se non nell'ambito dell'opinione, mentre è possibile dimostrare che essi si predicano di altri. Non è neanche possibile dimostrare che i singolari si predicano di altre cose, ma soltanto che altre cose si predicano di essi.

soprattuto i campi di applicazione del sillogismo e non la ricerca logica in sé (cfr. i capp. 23-31 di *APr*). Un passo particolarmente esplicito è il seguente:

> Se conosciamo il modo secondo cui i sillogismi risultano e abbiamo la capacità di istituirli, allora, se siamo in grado di risolvere i sillogismi ottenuti nelle predette figure, il proposito iniziale di questa trattazione ha compimento ([*APr* I 32, 47 a 2-6]).

In questo passo, lo stagirita afferma esplicitamente che tra i compiti che lo hanno spinto a scrivere *APr* vi sono anche mostrare, non solo in che modo i sillogismi conducono ad una certa conclusione, ma anche come possiamo formarli. Questo legame con la ricerca scientifica fa sì che Aristotele non si dedica a studiare la nozione di conseguenza logica in generale, ma consideri solo gli argomenti che conducono, in modo non immediato, a giustificare gli enunciati a cui si ricorre per formulare la conoscenza scientifica.

Ad ulteriore conferma di questa condizione, sta il fatto che Aristotele non definisce la conseguenza sillogistica in termini di conservazione della verità. Sicuramente egli, quando parla di seguire di necessità dalle protasi, intende dire che se le protasi sono vere, allora la conclusione è vera, ma l'accento è posto sui rapporti predicativi che intercorrono tra i termini coinvolti. Egli, in altre parole, non si concentra tanto sulla conservazione della verità, condizione che avrebbe richiesto la trattazione estesa di molte altre forme inferenziale non sillogistiche, ma sul nesso predicativo che si instaura tra i termini del sillogismmo. É una certa predicazione tra i termini estremi, cioè, ad essere necessaria sulla base delle predicazioni che si danno, nelle protasi, tra i termini estremi e il termine medio. L'attenzione è posta su questa necessità della predicazione, non sulla necessità della conservazione della verità che, dal punto di vista scientifico, date le premesse di Aristotele, richiamate sopra, non sarebbe abbastanza significativa. Se la definizione di conseguenza considerata da Aristotele fosse basata sulla conservazione della verità, allora, egli avrebbe dovuto concentrarsi anche su forme inferenziali che potrebbero non avere a che fare con la predicazione tra termini e che, quindi, non mostrerebbero dove risiede la necessità di una certa tesi, in quanto non mostrano la connessione che sussiste tra i termini estremi in virtù del medio.

In alcuni passi, poi, egli difende la sua scelta di studiare pressoché solo gli argomenti sillogistici e rivela, ancora una volta, che l'interesse epistemologico è tenuto in grande considerazione. Egli afferma, per esempio, che non si devono scegliere premesse irrilevanti per trarre la conclusione. Non occorre, egli dice, assumere più di tre termini e di due protasi nei modi che si sono detti ([*APr* I 29, 45 b 38 - 46 a 2] [105]). Se si è assunto qualcosa di inutile, infatti, dice Aristotele, va messo senz'altro da parte fino a giungere alla determinazione delle due protasi di cui abbiamo effettivamente bisogno per determinare il sillogismo cercato ([*APr*

[105] Infatti è stato provato che ogni sillogismo risulta mediante una delle predette figure e che queste ultime non possono essere composte da nient'altro che dai termini che conseguono e da quelli a cui consegue ciascuno dei termini posti dal problema. Da questo termini infatti soo costituite le protasi e procede l'assunzione del medio. Di conseguenza non è nemmeno possibile che risulti un sillogismo in forza di termini altri da questi.

I 32, 47 a 18-20][106]). Questo implica che non sono interessanti argomenti in cui la conclusione è già affermata nelle premesse o in cui si assumono premesse che, in effetti, non si usano per determinare la conseguenza. Nel primo caso, si compirebbe una petizione di principio, ossia nel dedurre qualcosa da se stesso, ossia, in pratica, nel non dedurre niente perchè non si mostrano le condizioni anteriori alla conclusione da cui la conclusione risulta ([*APr* II 16, 64 b 28-33][107]). Nel secondo caso, invece, mancherebbe il motivo di accettare protasi che non sono effettivamente usate per dedurre la conclusione, dal momento che lo scopo del sillogismo è quello di mostrare come si giustifica un enunciato e questo è anche ciò che interessa alla ricerca scientifica. Una volta raggiunto il risultato di mostrare su quale base si giustifica un enunciato, non c'è motivo, in logica, di considerare elementi aggiuntivi. Se c'è una ragione, prosegue Aristotele, questa risiede piuttosto nel campo della corroborazione induttiva di una delle protasi assunte o per meri scopi retorici, come confondere colui con cui si sta discutendo ([*APr* I 25, 42 a 8-24][108]).

In termini moderni, potremmo dire che la relazione di conseguenza sillogistica non è nè riflessiva nè monotona e, per quel che si è detto sopra, rispetta qualche forma di rilevanza (i termini della conclusione devono comparire nelle premesse in modo tale da risultare opportunamente collegati dal termine medio) (cfr. anche [*APr* I 25, 42 a 25-28][109]).

[106] Si deve esaminare allora se è stato assunto qualcosa di inutile e se è stato tralasciato qualche elemento necessario, e questo deve essere posto, mentre quello deve essere messo da parte, fino a giungere alle due protasi.

[107] La postulazione e l'assunzione di quel che è stato domandato all'inizion, dal punto di vista del genere, consiste nel non dimostrare quel che è stato proposto come tesi. Ma ciò si verifica in più modi, e cioè sia se in generale non si sillogizza, sia se si sillogizza in forza di protasi più ignote del conseguente o similmente ignote, sia se si sillogizza quel che viene prima in forza di quel che viene dopo. La dimostrazione infatti procede da protasi più sicure e anteriori al conseguente. La postulazione di quel che è stato domandato all'inizio tuttavia non coincide con alcuno di questi casi.

[108] Sia infatti E ciò che è concluso dalle protasi A B C D. É quindi necessario che qualcuna di queste sia assunta nel rapporto di tutto e parte rispetto ad un'altra, giacché è stato provato prima che, se si ha sillogismo, è necessario che alcuni termini siano in tali rapporti. Sia allora A in tale rapporto con B. Si ha dunque un conseguente da tali rptoasi. Pertanto esso sarà o E, oppure una delle due protasi C D, oppure qualche altra protasi diversa da queste. Ma, se il conseguente fosse E, il sillogismo procederebbe dalle protasi A B soltanto. D'altra parte, se le protasi C D sono in un rapporto tale che l'una è un tutto e l'altra una parte, si avrà un conseguente anche da esse, e questo sarà o E, o una delle protasi A B, o qualche altra protasi diversa da queste. Ma, se il conseguente è E, oppure una delle due protasi A B, o i sillogismi saranno più d'uno, oppure si verifica che il medesimo conseguente sia effettuato in forza di più protasi, nel senso indicato come possibile. Se invece il conseguente è qualcosa di diverso da tali nessi, i sillogismi saranno più d'uno e non connessi tra loro. Invece, se C non è con D in un rapporto tale da dar luogo a un sillogismo, tali protasi sono assunte inutilmente, a meno che non lo siano per dare principio ad un'induzione, oppure per dissimulare qualcosa all'avversario, o per qualche altro di questi scopi.

[109] Se dalle protasi A B non risulta E, ma qualche altro conseguente, e dalle protasi C D risulta una delle due protasi A B o qualche altra protasi diversa da queste, i sillogismi risultano più d'uno e non pertinenti all'oggetto della prova, giacché era stato supposto che il sillogismo avesse per oggetto E.

2.11 CONCLUSIONE

Il modo in cui Aristotele imposta la sua ricerca logica, come ho detto e come si comprenderà meglio confrontando quanto detto qui con i capitoli successivi, è assai diverso da quello che, per lo più, è stato ed è abituale negli autori contemporanei.

In primo luogo, la logica ha ricevuto una considerazione più autonoma da altri settori della filosofia e della ricerca scientifica e la relazione di conseguenza studiata non si è più limitata alla conseguenza sillogistica, ma si è considerata soprattutto la nozione di conseguenza logica in sé. Come vedremo non ci è più concentrati tanto sul rapporto predicativo, quanto su altri rapporti (*in primis* la conservazione della verità) che, a prescindere dalla forma degli enunciati coinvolti, vigono tra le premesse e la conclusione.

Come si dirà, quando la conseguenza logica è definita in termini di preservazione della verità, le proprietà della riflessività e della monotonia che, con qualche anacronismo, si sono è detto che sono rifiutate da Aristotele, saranno accettate e sarà rifiutata, invece, la proprietà della rilevanza (abbiamo spiegato, sopra, in che senso e con quale cautela si possano fare affermazioni circa le proprietà della riflessività, della monotonia e della rilevanza circa la nozione di conseguenza studiata da Aristotele). Ciò non indica, tuttavia, che nell'epoca contemporanea si sia imposta una sola nozione di conseguenza. Cercherò di mostrare, al contrario, che vi sono anche oggi diversi modi legittimi di intenderla e, in alcuni, sono messe in dubbie proprietà come la riflessività e la monotonia o si propone, invece, di adottare una relazione di conseguenza logica che rispetti qualche forma di rilevanza, adducendo motivazioni affini a quelle di Aristotele.

Ciò che mi preme, comunque, notare è soprattutto come Aristotele ci fornisca un primo e notevole esempio di nozione di conseguenza logica diversa da quella abituale nella ricerca logica contemporanea e di come ciò sia dovuto al fatto che le nozioni logiche non vivono separate da considerazioni metafisiche o epistemologiche o da intuizioni , scopi e obiettivi che possono legittimamente essere differenti. Al contrario, proprio le molteplici relazioni che intercorrono tra la logica e la nostra visione del mondo e la nostra impresa conoscitiva in generale sono uno stimolo ad approfondire la ricerca logica e, di fatto, in Aristotele hanno determinato un risultato affatto particolare. É bene apprezzare tale risultato senza appiattirlo su prospettive posteriori che si sono imposte quando i problemi, i temi e le motivazioni della ricerca logica e le sue coordinate filosofiche e scientifiche, come vedremo, non erano più le stesse.

Capitolo 3

FORMALITÀ E REGOLE: LA NOZIONE DI CONSEGUENZA IN KANT

3.1 PREMESSA

É noto che Kant, alle soglie di un periodo che ha segnato grossi cambiamenti nel campo della logica, aveva esplicitamente dichiarato che la logica, per la sua essenza, sorta pressoché perfetta grazie ad Aristostele, non può compiere alcun avanzamento:

> Peraltro, dai tempi di Aristotele, la logica non ha acquistato granché quanto al *contenuto*, il che d'altronde le è impedito dalla sua stessa natura. (...) Ci sono solo poche scienze che possono arrivare a uno stato di stabilità dove non subiscano più alcun mutamento. Di queste [fa] parte la logica [L *Intr.* II, p. 14]

Questa affermazione, a ben vedere, non esprime , però, un banale errore, ma, come vedremo, si fonda su una precisa idea di cosa sia la logica e di come si giungano a determinare le leggi logiche che ne costituiscono quel contenuto che, secondo Kant, non era più suscettibile di avanzamenti, nel senso che tutte le leggi logiche fondamentali erano state scoperte. La logica, infatti, è riuscita a raggiungere tale posizione di definitiva e inamovibile staibilità in quanto si occupa solo della forma degli atti dell'intelletto e non considera per nulla gli oggetti particolari, con tutte le loro peculiarità, caratteristiche e differenze, con cui la conoscenza, di volta in volta, ha a che fare [B IX][1]. Proprio questa idea di

[1] Che la logica sia riuscita così bene è un vantaggio che essa deve unicamente alla sua limitatezza, in virtù della quale è autorizzata - anzi, è obbligata - ad astrarre da tutti gli

logica, accettata da Kant ed espressa nella sua *Logica* (frutto della rielaborazione delle lezioni kantiane da parte del suo allievo Jäsche), si distacca di molto dalle idee di Aristotele e, paradossalmente, ha determinato, come vedremo, l'orizzonte concettuale adatto per far sorgere le nuove ricerche logiche che, dall'Ottocento in poi, hanno notevolmente cambiato il campo degli studi logici.

Concentrandosi su concetti quali quello della formalità, del seguire le regole dell'intelletto che sono necessarie per l'esercizio dello stesso pensare, Kant lega la nozione di conseguenza logica a nozioni, esigenze, scopi e problemi ben diversi da quelli trattati dallo stagirita. Certamente Kant non ha fornito innovazioni dal punto di vista tecnico, non ha dedicato alla logica un'attenzione paragonabile a quella che ha dedicato a campi quali la metafisica e l'etica e, sulla base di affermazioni come la precedente, si può anche dire che non era consapevole dello scarto che vi era tra la sua riflessione sulla logica e quella di Aristotele. Nonostante questi aspetti, ciò che Kant dice sulla logica pone in luce aspetti della conseguenza logica che sono profondamente diversi da quelli che si ritrovano nelle opere di Aristotele e questi nuovi concetti avranno un ruolo importante, *in primis* in Bolzano e in Boole, per determinare il quadro concettuale adeguato all'acquisizione di nuovi risultati in logica. Questi nuovi risultati, come vedremo, non nascono dal fatto che i logici che li hanno scoperti si sono dimostrati più ingegnosi di quelli del passato, ma dal fatto che il modo in cui era concepita la logica permetteva di concentrarsi su aspetti che esulassero dallo studio dei rapporti predicativi e dalla giustificazione di enunciati in cui compaiono due termini e uno di essi si predica dell'altro. Le nozione di formaltità e di seguire delle regole di carattere universale utilizzate da Kant per trattare la logica, permetteranno di considerare, in generale, quando si può dire che qualcosa segue da qualcos'altro, quali sono le condizioni che legano in tal modo un enunciato a certi insiemi di enunciati, in che modo si può specificare tale legame senza fare ricorso a forme inferenziali ben particolari, come il sillogismo.

Anche se Kant, dunque, non ha dato contributi tecnici originali, la sua concezione di logica, intimamente legata a vari concetti fondamentali che ha esaminato nelle sue opere maggiori (seguire una regola e intelletto) costituisce un momento importante e da considerare nell'ambito della nostra ricerca.

3.2 UNA DIVERSA CONCEZIONE DELLA LOGICA

La citazione riportata sopra, prosegue spiegando perché la logica, dopo Aristotele, non può può compiere alcun progresso:

> Aristotele non aveva trascurato alcun momento dell'intelletto; in questo noi siamo solo più precisi, più metodici e più ordinati [L *Intr.* II, p. 14].

oggetti della conoscenza e dalle loro differenze, di modo che in essa l'intelletto non abbia a che fare con nient'altro che non sia se stesso e la sua forma.

Non ci possono essere nuove scoperte in logica, perché la logica ha a che fare solo con la forma del pensiero e questo può essere esaustivamente indagato in modo preciso e con certezza. Aristotele ha già compiuto questo lavoro e, dopo di lui, non è stato possibile aggiungere nulla perchè i momenti dell'intelletto non sono cambiati e non ne sono nati di nuovi. Ora, la prima importate novità rispetto ad Aristotele che traspare da queste riflessioni è che la logica è essenzialmente collegata con l'intelletto e la scoperta dei contenuti della logica si svolge indagando i momenti dell'intelletto. Vedremo di capire meglio cosa intende dire Kant. Ad ogni modo, possiamo già osservare che Aristotele non ha mai presentato la indagine nel campo della logica tramite un così stretto collegamento con l'intelletto e con i suoi momenti. Per lui la logica aveva a che fare con la predicazione tra termini, il ruolo del termine medio, il mettere in forma un argomento e fornire una giustificazione di enunciati scientifici che, per la sua visione metafisica ed epistemologica, esprimevano sempre la predicazione di qualcosa rispetto a qualcosa d'altro. L'importanza della logica, per Aristotele, è legata al fatto che in tal modo si può porre su salde e consapevoli basi il procedere scientifico, procedere con metodo e rispondere alle false argomentazioni, come a quelle dei sofisti. Egli non ha mai mostato di intendere la logica come una tassonomia di momenti intellettivi.

Occorre specificare che Kant utilizza il termine logica in più di un senso. Quella che a noi interessa, qui, è esclusivamente la logica che egli caratterizza come logica dell'uso generale dell'intelletto [B 76], che contiene le regole assolutamente necessarie del pensiero [B 76]. Kant riconosce l'esistenza anche di una logica intesa come insieme di accorgimenti per procedere nel modo migliore in un determinato campo di ricerca scientifica. Si tratta, in questo caso, della logica dell'uso particolare dell'intelletto [B 76][2]. Quel che ci interessa, qui, è solo la logica intesa nella prima accezione, in quanto è in tale disciplina che ricadono i concetti, quali inferenza, regola e formalità, che interessano la nostra ricerca. Più precisamente, all'interno della logica generale, Kant distingue ulteriormente una logica prua ed una logica applciata. La prima è quella che abbiamo quando, come spiegheremo meglio, non ci curiamo delle situazioni concrete e particolari in cui compiamo determinati atti dell'inteletto (non ci curiamo, cioè, della memoria, dell'abitudine, dell'inclinazione, ...), ma ci basiamo solo sui principi a priori che determinano formalmente i nostri atti, qualsiasi sia il loro contenuto determinato. La logica generale applicata, invece, prende in considerazione le

[2] A sua volta, poi, la logica può essere considerata da due punti di vista: o come logica dell'uso generale dell'intelletto, o come logica del suo uso particolare. La prima contiene le regole assolutamente necessarie del pensiero, quelle senza di cui non ci sarebbe uso alcuno dell'intelletto, e dunque riguarda quest0ultimo a prescindere dalla diversità degli oggetti cui esso si può dirigere. La logica dell'uso particolare dell'intelletto contiene invece le regole per pensare correttamente su di un certo ripo di oggetti. La prima può essere chiamata logica elementare; la seconda invece l'*organon* di una certa scienza piuttosto che di un'altra. Nelle scuole, il più delle volte, questa seconda logica ha la precedenza come propedeutica alle scienze, anche se, stando al cammino percorso dalla ragione umana, essa costituisce piuttosto l'ultimo traguardo, allorquando la scienza sia già da lungo tempo compiuta, ed abbia bisogno soltanto di un'ultima mano per essere rettificata e resa perfetta. Occorre infatti che si conocsano già gli oggetti, e in un grado piuttosto elevato, se si vogliono fornire le regole in base alle quali si possa costituire una scienza di quegli oggetti.

condizioni empiriche, come quelle ricordate sopra, che possono, di fatto, influire sul corso del pensiero (l'abitudine a compiere un cetro collegamento tra due giudizi, l'influsso dei sensi che ci rendono più evidente un certo aspetto della questione piuttosto che un altro che, pure, andrebbe considerato, ...) [B 77][3].

La logica generale (detta anche formale o logica dell'uso generale dell'intelletto) è quella che rispecchia la partizione delle facoltà superiori della conoscenza, collettivamente denominate intelletto in generale, cioè l'intelletto in senso stretto, la facoltà di giudizio e la ragione e che, tratta, quindi, rispettivamente, di concetti, giudizi e inferenze (*Schluss*) [B 169][4]. L'intelletto in senso stretto è la facoltà che produce i concetti quanto alla loro forma [L §6, p. 86][5]; la facoltà di giudizio è la facoltà di sussumere sotto delle regole, cioè di distinguere se qualcosa stia o non stia sotto una data condizione [B 171][6]; la ragione, nel significato che assume nella logica, è la facoltà dell'inferire, ossia di giudicare mediatamente, connettendo ciò che è stato sussunto sotto una regola (dalla facoltà del giudizio) con l'asserzione della regola ([B 386][7], [L §58, p. 115][8]). Riprenderò fra poco queste definizioni per chiarirle meglio.

Il nostro interesse, dunque, chiaramente, deve essere rivolto solo alla logica generale pura e, nel seguito di questo capitolo, mi disinteresserò delle altre accezioni del termine logica. Avviso, poi, che non intendo indagare, qui, l'origine storica dei concetti usati da Kant e della sua concezione di logica. Dobbiamo, però, domandarci, restando all'interno delle opere di Kant, su che cosa si fondi questa nuova caratterizzazione della logica.

[3]la logica generale, poi, o è una logica pura o una logica applciata. Nella prima, noi astraiamo da tutte le condizioni empiriche sotto le quali viene esercitato il nostro intelletto, per esempio dall'influsso dei sensi, dal gioco dell'immaginazione, dalle leggi della memoria, dalla forza dell'abitudine, dall'inclinazione ecc.; e quindi anche dalle fonti di pregiudizio, anzi, in generale da tutte quelle cause che fanno sorgere in noi, o a cui si possono far risalire, determinate conoscenze: e questo perché esse riguardano semplicemente l'intelletto sotto determinate circostanze, per conoscere le quali si richiede l'esperienza. Una logica generale, che sia pura, ha dunque a che fare solamente con principi a priori, ed è un canone dell'intelletto e della ragione, ma solo riguardo a quanto vi è di formale nel loro uso, quale che sia poi il loro contenuto (empirico o trascendentale). Una logica generale si chiama invece applicata, quando è diretta alle regole dell'uso dell'intelletto, sotto quelle condizioni empiriche soggettive che ci vengono insegnate dalla psicologia. Essa possiede dunque dei principi empirici, sebbene sia generale per il fatto di riferirsi all'uso dell'intelletto senza tener conto della diversità degli oggetti. Per questo motivo, poi, essa non è un canone dell'intelletto in generale, e non è nemmeno l'*organon* di scienze particolari, ma è solamente uno strumento catartico dell'intelletto comune.

[4]La logica generale è costruita secondo un impianto che corrisponde perfettamente alla partizione delle facoltà superiori della conoscsenza. Queste ultime sono: intelletto, facoltà di giudizio e ragione. Una tale dottrina tratterà dunque - nella sua nalitica - di concetti, giudizi e inferenze, proprio in conformità alle funzioni e all'ordine di quelle facoltà dell'animo che sono comprese sotto la più ampia denominazione di intelletto in generale.

[5]Gli atti logici dell'intelletto grazie ai quali i oncetti vengono prodotti, quanto alla loro forma.

[6]Quella del giudizio sarà la facoltà di sussumere sotto delle regole, cioè di distinguere se qualcosa stia o non stia sotto una data regola (*casus datae legis*).

[7]La ragione, considerata come facoltà di una certa forma logica della conoscenza, è la facoltà di inferire, cioè di giudicare mediatamente (attraverso la sussunzione della condizione di un giudizio possibile sotto la condizione di un giudizio dato).

[8]L'inferenza della ragione premette una *regola univesale* e una *sussunzione* sotto la condizione di questa.

3.3 CENTRALITÀ DELLA NOZIONE DI SEGUIRE UNA REGOLA

Kant incomincia la sua *Logica* trattando precisamente della facoltà dell'intelletto e delle regole che l'intelletto deve seguire per poter, in generale, pensare. Con il termine *pensare* si intende l'attività del soggetto che congiunge spontaneamente il molteplice di un'intuizione semplicemente possibile [B 428][9]. Ora, ogni processo che accade in natura segue delle regole [L *Intr.* I, p. 5][10]. La nostre facoltà non fanno eccezione e il loro esercizio, pertanto, può avvenire soltanto se è guidato, appunto, da regole [L *Intr.* I, p. 5][11]. Ciò non significa che noi siamo sempre e dall'inizio consapevoli di tali regole, anzi normalmente esercitiamo le nostre facoltà senza sapere quali siano i processi messi in atto e come si svolgano [L *Intr.* I, p. 5][12]. Come ogni facoltà, anche l'intelletto, che è la facoltà del pensare, procede secondo regole [L *Intr.* I, p. 5][13]. Come già aveva notato Aristotele, non occorre essere consapevoli delle leggi della logica per poter pensare, così come, per citare l'esempio di Kant, non occorre essere consapevoli delle regole grammaticali per parlare [L *Intr.* I, p. 5][14]. La logica è la scienza che studia precisamente le regole che occorre seguire per poter, in generale, pensare, ossia esercitare la facoltà del pensare e proprio studiando le regole del pensiero in generale la logica possiede quella caratteristica sulla quale Kant insisterà a lungo che è la *formalità* [L *Intr.* I, p. 5][15].

Una regola è una rappresentazione di una condizione universale che permette di fornire una determinata organizzazione ad un materiale molteplice [A 113][16]. Pensare secondo regole, dunque, significa sussumere un molteplice dato sotto una condizione universale, ossia conoscere il fatto che la condizione ha luogo per quel molteplice, determinando, come vedremo meglio fra poco, in tal modo,

[9] Il pensiero, preso per se stesso, è soltanto la funzione logica, quindi la mera spontaneità della connessione del molteplice di un'intuizione semplicemente possibile.

[10] Tutto nella natura, sia in quella animata sia in quella inanimata, accade *secondo regole*, anche se queste non sempre ci sono note. (...) L'intera natura in generale non è propriamente altro che una connessione di fenomeni secondo regole; *assenza di regole non* si dà in alcun luogo. Quando crediamo di trovarla, possiamo solo dire che in quel caso le regole ci sono ignote.

[11] Anche l'esercizio delle nostre facoltà accade secondo certe regole.

[12] Anche l'esercizio delle nostre facoltà accade secondo certe regole che noi suiamo dapprima senza esserne coscienti, fino a che giungiamo gradualmente a conoscerle per emzzodi tentativi e di un uso prolungato delle nostre facoltà; alla fine, anzi, prendiamo tanta dimestichezza con esse che ci costa molta fatica pensarle in abstracto. Così, per es., la grammatica generale è la forma di una lingua in generale. Ma si parla anche senza conoscere la grammatica; e chi parla senza conoscerla ha in realtà una grammatica e parla secondo regole, delle quali però non è cosciente.

[13] L'intelletto va considerato come la fonte e la facoltà di pensare, in geenrale, secondo regole.

[14] Si parla anche senza conoscere la grammatica; e chi parla senza conoscerla ha in realtà una grammatica e parla secondo regole, delle quali però non è cosciente.

[15] Questa scienza delle leggi necessarie dell'intelletto e della ragione in generale o - il che è lo stesso - della sola forma del pensiero in generale è ciò che chiamiamo logica.

[16] Ora, la rappresentazione di una condizione universale secondo la quale un certo molteplice può essere posto (quindi in modo identico) si chiama regola.

un'inferenza [L §41, p. 107][17], immediata o mediata, ossia un rapporto tra giudizi ([L §44 p. 108][18], [L §58, pp. 114-5][19]). Le regole logiche, dunque, sono ciò che determina in che modo, in generale, si debba pensare. Le regole logiche sono quelle necessarie del pensiero, nel senso che sono le condizioni di possibilità del pensiero stesso e che senza di esse non ci sarebbe uso alcuno della facoltà dell'intelletto [B 76][20], e che valgono a prescindere dagli oggetti che l'intelletto può considerare (B 76). Con ciò, come vedremo, Kant intende una varietà di atti intellettivi che non si riducono all'inferenza e alla relazione di conseguenza logica, che sono ciò che ci interessa maggiormente in questa sede. Le regole logiche che riguardano la conseguenza logica, possiamo anticipare, sono quelle che indicano come si debbano compiere certe inferenze, ossia in che modo si collegano necessariamente fra loro un insieme di giudizi, le premesse, ed un certo giudizio, la conclusione [L §41, p. 107][21].

Poiché ci occupiamo solo dell'ambito della logica generale non ci riguardano le regole, che pure esistono, che dipendono da specifici oggetti della conoscenza, come, per esempio, le regole valide solo per gli oggetti matematici, le regole valide solo nell'ambito della morale e così via. Kant denomina tali regole *contingenti*, nel senso che è contingente il fatto che il pensiero si rivolga agli oggetti a cui si possono applicare tali regole. Le regole dell'uso generale dell'intelletto, ossia quelle a cui non si può non fare riferimento quando si pensa, qualsiasi cosa costituisca l'oggetto del nostro pensiero, sono le regole necessarie. Tali regole sono necessarie perché sono una condizione necessaria dell'uso dell'intelletto in generale. Senza di esse, non si pensa per nulla ([L *Intr.* I, p. 6][22],[L *Intr.* V, p.

[17] L'inferire va inteso come quella funzion del pensiero per mezzo della uale un giudizio viene derivato da un altro. Un'inferenza in generale è percio la derivazione di un giudizio da un altro.

[18] Il carattere essenziale di tutte le inferenze immediate o il principio della loro possibilità consiste esclusivamente in un mutamento della *mera* forma dei giudizi; mentre la materia dei giudizi, il soggetto e il predicato, resta la *medesima*, *immutata*.

[19] Una regola è un'asserzione sotto una condizione universale. Il rapporto della condizione con l'asserzione, cioè il modo in cui questa sta sotto quella, è l'*esponente* della regola.

La conoscenza del fatto che la condizione ha luogo (da qualche parte) è la *sussunzione*.

la ocnnessione di ciò che è stato sussunto sotto la condizione con l'asserzione della regola è l'*inferenza*.

[20] A sua volta, poi, la logica può essere considerata da due punti di vista: o come logica dell'uso generale dell'intelletto, o come logica del suo uso particolare. La prma contiene le regole assolutamente necessarie del pensiero, quelle senza di cui non ci sarebbe uso alcuno dell'intelletto, e dunque riguarda quest0ultimo a prescindere dalla diversità degli oggetti cui esso si può dirigere.

[21] L'inferire va inteso come quella funzion del pensiero per mezzo della uale un giudizio viene derivato da un altro. Un'inferenza in generale è percio la derivazione di un giudizio da un altro.

[22] Tutte le regole secono le quali procede l'intelletto sono o necessarie o contingenti. Le prime sono tali che senza di loro non sarebbe possbile alcuun uso dell'intelletto; le seconde, tali che senza di loro non avrebbe luogo un certo uso determinaot dell'intelletto. Le regole contingenti, che dipendono da un determinato oggetto della conoscenza, sono così molteplici come questi oggetti stessi. Cos', per es., c'è un uso dell'intelletto nella matematica, nella metafisica, nella morale, etc. Le regole di quest'uso particolare, determinato, dell'intelletto nelle scienze suddette son contingenti perché contingente è il fatto che io pensi questo o quell'oggetto al quale si riferiscono queste regole particolari.

28][23]).

3.4 FORMALITÀ DELLA LOGICA

La nozione di seguire una regola, dal momento che stiamo trattando solo regole necessarie, ossia che ineriscono all'atto di pensare in quanto tale e lo costituiscono, conducono all'altra nozione basilare della riflessione kantiana, ossia alla nozione di formalità. Le regole di cui si occupa la logica generale, come abbiamo detto, sono valide a prescidenre dai particolari oggetti considerati. Sono regole valide sempre e rispettate ogni volta che si pensa. Ciò significa che tali regole riguardano solo la *forma* del pensiero in generale, ossia solo la forma che possono assumere i vari atti intellettivi e i vari processi di pensiero ([L *Intr.* I, p. 7][24], [L *Intr.* I, p. 13][25], [L *Intr.* I, p. 15][26]). La logica è formale in quanto considera solo leggi necessarie in ogni campo del sapere, nel senso che tali leggi sono adoperate quando si pensa, a prescindere dal campo di oggetti e di conoscenze a cui ci si rivolge di volta in volta e senza il rispetto di tali regole non può esserci alcun pensare. Le leggi della logica sono scoperte proprio fissando l'attenzione sull'uso dell'intelletto in generale, quando ciò, non si considerano oggetti particolari e la conoscenza che deriva da essi [L *Intr.* I, p. 6][27]. Tali leggi, non possono derivare dagli oggetti, proprio perché sono condizione necessaria del pensiero. Tali leggi logiche, dunque, sono a priori, ossia valide e conoscibili indipendentemente dalle esperienze che, di fatto, si hanno [L *Intr.* I, p. 6][28].

Da queste caratteristiche, segue che la logica ha a che fare solo con la forma del pensiero in generale [L *Intr.* I, p. 6][29], dove per *forma del pensiero in generale* dobbiamo intendere il modo in cui si determina il rapporto delle conoscenze fra loro senza che si tenga in alcun conto, qui, degli oggetti particolari a cui si riferiscono tali conosccenze [B 79][30]. La logica generale, dunque, è formale perché e nel senso che si occupa solo dei rapporti che intercorrono tra i diversi contenuti di pensieri: non conta se tali contenuti derivino dall'esperienza

[23] [La logica] si occupa solo (...) [di] ciò mediante cui ha luogo ogni pensiero.

[24] Questa scienza delle leggi necessarie dell'intelletto e della ragione in generale o - il che è lo stesso - della sola forma del pensiero in generale è ciò che chiamiamo *logica*.

[25] Ma la logica deve essere una scienza delle regole del pensiero *in abstracto*.

[26] Non abbiamo bisogno di nuove invenzioni per la logica, perché essa contiene solo la forma del pensiero.

[27] ma se ora mettiamo da parte ogni conoscenza che non possiamo non derivare dagli oggetti e riflettiamo esclusivamente sull'uso dell'intelletto in generale, ecco che scopriamo quelle sue regole che sono assolutamente necessarie, sotto ogni riguardo e a prescindere da tutti gli oggetti particolari del pensiero, perché senza di esse non penseremmo affatto.

[28] Queste regole, pertanto, possono essere viste anche *a priori, cioè indipendentemente da ogni esperienza*, perché esse contengono solamente, *senza distinzione degli oggetti*, le condizioni dell'uso dell'intelletto in generale, puro o empirico che sia.

[29] E da ciò segue pure che le regole unviersali e necessarie del pensiero in generale non possono riguardare che la *forma* soltanto e in nessun modo la materia.

[30] La logica generale astrae - come abbiamo mostrato - da ogni contenuto della conoscenza, cioè da ogni rapporto di quest0ultima all'oggetto, e considera soltanto la forma logica del rapporto delle conoscenze fra di loro, cioè la forma del pensiero ingenerale.

o sia tratti a priori da soggetto stesso, se trattino di un certo oggetto piuttosto che di un altro, se siano relative e in che modo ad altri aspetti del soggetto, quali memoria, abitudine, gusto, ... Ciò che conta, per la logica generale, sono esclusivamente i rapporti che l'intelletto può instaurare tra contenuti di pensiero qualsivoglia [B 80][31]. La logica non è altro, quindi, dice Kant, che

> scienza della forma della nostra conoscenza intellettuale o del pensiero [L *Intr.* I, p. 6].

3.5 GENERALITÀ DELLA LOGICA

É chiaro che il fatto che la logica si occupi solo delle regole necessarie dell'intelletto, nel senso che abbiamo visto, ossia solo di ciò che riguarda la forma degli atti intellettivie dei collegamenti tra contenuti di pensiero implica che la logica sia una disciplina di applicazione assolutamente *generale*. Niente può essere compiuto dall'intelletto senza ricorrere alle leggi della logica. Kant dice la logica può essere considerata una sorta di grammatica generale, valida per ogni complesso di regole che sia una grammatica particolare per un certo linguaggio. In tale grammatica generale non si fa riferimento ad alcuna combinazione di simboli in particolare, ossia non si citano determinate parole e non si considerano particolari espressioni. Queste costituiscono, piuttosto, il materiale particolare di un certo linguaggio. La grammatica generale esprimerebbe, piuttosto, ciò che deve essere presente e rispettato in ogni linguaggio, senza che essa stessa dica nulla su come, di fatto, siano poi le parole e le espressioni che compaiono in un dato linguaggio [L *Intr.* I, pp. 6-7][32].

Dal fatto che la logica è tale scienza di ambito del tutto generale in quanto investe ogni esercizio del pensiero, segue che essa è *fondamento* di tutte le altre scienze [L *Intr.* I, p. 7][33]. Ogni scienza diversa dalla logica, in quanto risultato di un'attività di pensiero, deve rispettare le leggi della logica. In effetti, non è altro che l'applicazione delle leggi della logica, di per sé indifferenti ad ogni oggetto specifico, ad un ambito determinato e particolare di oggetti. Ora, occorre fare attenzione ad un aspetto che Kant affronta senza soffermaricisi, perché, per lui, era del tutto scontato che fosse così anche se, oggi, le cose sono molto cambiate. Kant, infatti, dice che la logica è fondamento delle altre scienze, ossia delle scienze diverse dalla logica stessa. Egli non dedica attenzione a questo fatto, che gli appariva non problematico. Egli sta dicendo che la logica non fonda se stessa. La logica, semplicemente, si dà con l'attività di pensiero,

---

[31] La logica generale non ha niente a che fare con quest'origine della conocsenza, e considera invece le rappresentazini - siano esse originariamente presenti in noi stessi a priori, osiano date soltanto in modo empirico - semplicemente secondo le leggi con cui l'intelletto quando pensa, adopera quelle rappresentazioni nei loro vicendevoli rapporti.

[32] Possiamo quindi farci un'idea della possibilità di una tale scienza [la logica] così come di una grammatica generale, che non contiene altro che la sola forma della lingua in generale, senza le parole, le quali fanno parte della materia della lingua.

[33] In quanto scienza che concerne tutto il pensiero in generale, a prescidnere dagli oggetti, che sono la materia del pensiero, la logica va considerata come *fondamento* di tutte le altre scienze.

ma non vi è alcun modo legittimo di spiegare come sia possibile lo stesso darsi di un'attività intellettiva e, quindi, anche di una logica. Kant, come Frege e Russell dopo di lui, non concepisce la possibilità di studiare la logica da un punto di vista metalogico: la logica è quel che serve per pensare e non è possibile trattarla come una materia di studio circoscritta dall'esterno, ossia trattata come una qualsiasi altra disciplina scientifica, di cui si studiano le proprietà e le caratteristiche. Vedremo che, con gli algebristi della logica e poi con Tarski, si affermerà, invece, anche uno studio metateorico della logica, o come si dirà meglio a quel punto, dei diversi sistemi logici. Con questo passaggio, come dirò meglio nei prossimi capitoli, si afferma un cambiamento concettuale importante. Kant, senza preoccuparsene in modo particolare, assume che l'unico studio possibile della logica sia quello di rilevare quali sono le leggi formali e necessarie del pensiero in generale e mostrare come tali leggi, in quanto necessarie, formali e generali, costituiscono un riferimento imprescindibile per ogni altra disciplina scientifica, in quanto risultato di un'attività intellettuale. Le leggi della logica, tuttavia, non sono a fondamento della logica stessa. Vi è, chiaramente per Kant, una sola logica e questa è data con la facoltà intellettiva stessa che, dotata di una certa natura, compie la sua attività in modo conforme, appunto, a tale natura. La nostra conoscenza della logica richiede la logica ed è basata sull'osservazione ed il discernimento di certe regole proprie dell'attività dell'intelletto. La logica, tuttavia, non sta a fondamento di se stessa, in quanto essa non ha alcun fondamento in un scienza, ma nella semplice attività dell'intelletto, ossia nella semplice attività del pensiero che noi troviamo già compiersi. Possiamo solo porci a studiare questa attività, usando altri atti che sono pensiero essi stessi e che, quindi, rispettano le regole logiche. Non possiamo porre a fondamento della logica se stessa (tantomeno un'altra scienza) che fornisca delle regole che la logica dovrebbe rispettare, in quanto scienza edificata sul fondamento di un'altra scienza, perché è la logica stessa ad essere la scienza delle regole che devono essere rispettate perché si dia una qualsivoglia attività di pensiero [L *Intr.* p. 7][34].

La logica può esser considerata come un canone del pensiero, nel senso che riporta e analizza le leggi necessarie con cui si pensa, ossia le leggi senza di uci non vi è alcuna attività di pensiero [L *Intr.* p. 7][35]. La logica non serve ad ampliare le nostre conoscenze. Poiché essa è un disciplina esclusivamente formale, non considera alcun oggetto in particolare e, perciò, dice Kant, non serve ad acquisire nuova conoscenza, nel senso che non ci indica proprietà specifiche di oggetti di un determinato campo di indagine. La logica, piuttosto, serve soltanto a giudicare e, eventualmente, emendare e correggere le conoscenze già acquisite sulla base delle leggi necessarie del pensiero [L *Intr.* p. 7][36]. In questo senso,

[34] La logica non può perciò nemmeno prendere in prestito principi da una qualche scienza o da una qualche esperienza.

[35] La logica è però un canone, in quanto essa è una scienza delle leggi necessarie del pensiero senza le quali non ha luogo alcun uso dell'intelletto e della ragione, regole che sono di conseguenza le condizioni sotto le quali l'intelletto può e deve accordarsi unicamente con se stesso: le leggi e condizioni necessarie del suo retto uso.

[36] La logica, invece, in quanto propedeutica generale di ogni uso dell'intelletto e della ragione,

Kant dice che la logica, non è un organo delle scienze, ossia non è strumento che permette alle scienze di ampliare le proprie conoscenze [L *Intr.* p. 7][37]. Uno strumento delle scienze sarebbe una disciplina che funga da guida e ausilio per raggiungere una determinata conoscenza in un determinato campo di studio. A tal fine, dice Kant, occorre che si prendano in considerazione determinati oggetti, accomunati da certe proprietà specifiche in modo tale che sia possibile indicare un modo di considerazione particolare adatto ad essi [L *Intr.* p. 7][38]. La logica non è un organo[39] della conoscenza perché le sue leggi valgono in ogni campo e non sono di alcuna utilità specifica per un certo settore di indagine e non è in grado di indicare quali sono le leggi e le caratteristiche proprie di un certo ambito di oggetti [40].

Questa indicazione sul rapporto tra la logica e le scienze, sebbene, da un lato, sia una mera riformulazione terminologica di alcuni aspetti della concezione aristotelica della logica (ricordiamo, infatti, che il nome *Organon*, dato ai libri che trattano anche della logica, è posteriore ad Aristotele), contiene elementi che si riveleranno importanti per determinare il cambiamento concettuale che ha permesso le moderne trattazioni della logica. Da un lato, come abbiamo detto, si può dire che Kant stia riformulando, in termini diversi, quel che Aristotele stesso pensava. Anche per Aristotele, infatti, la logica (o meglio: la sillogistica) non è in grado di fornire leggi che riguardino uno specifico campo di oggetti in quanto campo di tali oggetti. Poiché per esprimere ciò che si dà nella realtà si ricorre a enunciati che espongono nessi predicativi, la sillogistica, che mostra come si giustifichino tali nessi predicativi, è applicabile in campo del sapere e non dice nulla che sia proprio solo di un certo ambito di ricerca. D'altro lato, però, abbiamo visto come il privilegiare la sillogistica e i nessi predicativi e come il determinare le caratteristiche dei sillogismi in certi modi (due premesse, tre termini, conclusione diversa dalle premesse, ...), indichi uno stretto legame tra concezione della realtà e di come si svolga l'indagine scientifica su tale realtà. Aristotele non si occupa del seguire di necessità in generale perché quel che serve all'indagine scientifica è, più che altro, il capire come giustificare

---

in generale, non può entrare nella scienza e anticiparne la materia: essa, pertanto, è solo un'*arte generale della ragione* (*canonica Epicuri*) che consiste nell'adeguare le conoscenze in generale alla *forma* dell'intelletto; solo in questo senso può essere detta un orgnano, che però non serve certamente ad *ampliare*, bensì solo a *giudicare* e *correggere* la nostra conoscenza.

[37] Ma d'altro canto, proprio per il fatto che essa prescinde totalmente da ogni oggetto, essa [la logica] non può essere un *organo* delle scienze.

[38] Per *organo*, infatti, noi intendiamo una guida alla produzione di una certa conoscenza. Ma per questo si richiede che mi sia già noto l'oggetto della conoscenza che verrà prodotta secondo certe regole.

[39] A questo punto va segnalato un limite del paragone avanzato sopra tra la logica e la grammatica generale. Pur non considerando il materiale specifico di alcun linguaggio, la grammatica generale è, comunque, relativa ad un certo settore di indagine e, in tal senso, è un organo di certe scienze e non un canone per esse, come, invece, la logica.

[40] Un organo delle scienze, pertanto, è qualcosa d'altro che non mera logica, perché esso presuppone la cognizione precisa delle scienze, dei loro oggetti e delle loro fonti. Così, ad es., la matematica è un organo eccellente in quanto scienza che contiene il fondamento dell'ampliamento della nostra conoscenza rispetto a un certo uso dell'intelletto. La logica, invece, in quanto propedeutica generale di ogni uso dell'intelletto e della ragione, in generale, non può entrare nella scienza e anticiparne la materia.

un enunciato che esprime un rapporto predicativo tra termini. Da qui deriva l'importanza del termine medio e del mettere in forma. Ora, Kant, separando nettamente l'indagine logica da quella scientifica rivolta a particolari ambiti del reale, fornisce una visione della logica distante da quella dello stagirita, senza, probabilmente, essere stato consapevole di tale distanza. Kant, infatti, pone l'accento sulla pura individuazione delle regole che determinano l'attività intellettiva in generale. Non c'è, in questa caratterizzazione, alcun riferimento all'uso dell'intelletto nell'attività scientifica, né ai nessi predicativi e nè alla stuttura della realtà. Una legge logica è tale e degna di essere considerata dalla logica semplicemente perché è una regola dell'intelletto nel suo uso generale, ossia semplicemente perché è una legge necessariament osservata quando si pensa in generale. Ogni attività scientifica, ovviamente, non può che seguire anche le leggi della logica, ma la logica non è legata a tale attività di ricerca scientifica, non è legata al mostrare come si giustificano le affermazioni scientifiche e non è legata neppure al dare indicazioni alle procedure scientifiche (come il mettere in forma, aiutare a precisare il ruolo del termine medio per poter individuare il termine adeguato per formare un certo sillogismo, ...). In questo modo, come vedremo, si determina un orizzonte concettuale profondamente diverso e che permette di comprendere come sia stato possibile porsi l nuove domande e i nuovi problemi che si porranno, di lì a pochi anni, Boole e Bolzano per individiduare, in generale, forme inferenziali e studiare altri rapporti di dipendenza logica tra gli enunciati che non erano stato considerate dalla logica aristotelica e da quella tradizionale che derivata dai testi dello stagirita. Se la logica ha a che fare con le regole degli atti dell'intelletto e le leggi necessarie del pensiero, indipendentemente da ogni altra considerazione, fossero anche quelle relative al procedere scientifico, allora la logica diventa la scienza di un campo di indagine autonomo e che si può sviluppare astraendo da ogni altro tipo di considerazione. In questo modo è possibile concepire uno studio di essa che sia fine a se stesso o che, comunque, decida da sé quali sono i problemi e i temi che lo riguardano e in che modo, anche slegato da ogni possibilità di applicazione in contesti pratici, si debbano sviluppare tali indagini. In tal modo, è possibile porre in primo piano il concetto di conseguenza logica, a cui è dedicata questa ricerca. Con l'impostazione che offre Kant, infatti, diventa possibile concepire il concetrare l'attenzione sulla conseguenza sillogistica come una restrizione dei compiti possibili che competono alla logica. Abbiamo visto che in Aristotele, rivolgere l'attenzione al solo sillogismo non era considerata una restrizione, perché in tal modo, diceva lo stagirita, era possibile occuparsi di tutti gli enunciati rilevanti per la scienza. Se, invece, l'attenzione è rivolta a tutte le leggi necessarie con cui si compiono gli atti intellettivi, allora, è possibile concepire che ci siano atti intellettivi che procedono in modi diversi e, comunque, non è più assicurato che non ci siano connessioni di pensiero che non sia di natura sillogistica o che, comunque, si comportino in modo diverso da quello descritto da Aristotele. Siccome tali eventuali nuove connessioni di pensiero rispecchiano leggi necessarie degli atti di pensiero tanto quanto i sillogismi aristotelici, allora sono degne di altrettanta considerazione e la logica può e deve sviluppare i metodi adeguati per trattarli. In generale, ciò che, grazie a questi cambiamenti concettuali, sarà possibile considerare con sempre maggiore chiarezza e che assumerà un ruolo preminente e maggiore rispetto al passato è proprio il concetto di conseguenza logica, ossia di connessione necessaria tra pensieri o, ancora più in generale, tra contenuti possibili. Vedremo come, in primo luogo, in Bolzano e nell'algebra della logica questi cambiamenti concettuali si tradurranno in innovative ricerche logiche, anche di natura tecnica.

Tutto ciò in Kant si presenta solo nella misura in cui la logica è definita come la scienza della sola forma del pensiero in generale. Non ci sono, in Kant, le innovazioni tecniche che questa impostazione rende praticabili e comprensibili. Egli, come vedremo, quando passa a trattare i risultati tecnici della logica, si attiene alle forme inferenziali che aveva conosciuto dall'insegnamento tradizionale della disciplina (sillogismo categorico, sillogismo ipotetico e sillogismo disgiuntivo). É, tuttavia, estremamente importante porre attenzione all'iimpostazione concettuale che sorregge la riflessione kantiana, di come essa sia ormai profondamente diversa, in tanti aspetti essenziali, da quella aristotelica e di come ciò sia stato importante per determinare un nuovo modo di pensare i problemi, i metodi, gli obiettivi, i campi di indagini e i metodi tecnici con cui fare logica.

3.6 NATURA DEI CONCETTI

Chiaramente non mi interessa, qui, ricostruire in maniera completa la trattazione della logica da parte di Kant. Dopo aver messo in luce gli aspetti concerneti il ruolo del seguire una regola, il ruolo della formalità e l'immagine della logica che è delineata in questo modo, occorre presentare anche alcuni aspetti relativi alla trattazione delle inferenze, in quanto si ritrovano applicati i concetti espressi sopra a livello teorico. Per presentare il tema delle inferenze, occorre accennare a cosa si intende per concetto e per giudizio, dal momento che le inferenze coinvolgono i giudizi e i giudizi, a loro volta, coinvolgono i concetti. Non occorre compiere, qui, più che un accenno a queste nozioni e, piuttosto, riservare più spazio alla presentazione delle inferenze, che come vedremo, benché riguardi forme inferenziali tradizionali, è fatta da Kant in modo conforme alla sua visione generale della logica e notevolmente diverso da quanto si ritrova in Aristotele.

La logica è, come si è detto sopra, scienza della forma forma del pensiero in generale, ossia di tutte e sole le regole necessarie affinché si dia l'attività dell'intelletto. Da ciò segue che la logica ha a che fare con tutto ciò che permette che si dia, in generale, un pensiero. Ebbene, secondo Kant, ciò signfica che la logica tratta di concetti, giudizi ed inferenze [L *Intr.* V, p. 28][41]. Come abbiamo detto, ciò che ci interessa maggiormente, in questa sede, sono le inferenze, ma per esporre le riflessioni di Kant a tale riguardo, occorre chiarire anche cosa si intende con concetti e giudizi.

Il pensiero è conoscenza ottenuta tramite i concetti ([L I 1 §1, p. 83][42], cfr.

[41] [La logica], per quanto la riguarda, si occupa solodel pensiero in concetti, giudizi e infereze - che è ciò mediante cui ha luogo ogni pensiero.

[42] La conoscenza per concetti si chiama *pensiero* (*cognitio discursiva*).

anche [B 93][43] e [B 94][44]), laddove per concetto si intende una rappresentazione di caratteristiche, o note, che possono essere comuni a diversi oggetti, ossia una rappresentazione che è in grado di racchiudere più oggetti insieme [L I 1 §1, p. 83][45], che costituiscono l'estensione di tale concetto [L I 1 §7, p. 88][46]. Il pensiero, dice Kant, consiste nel formare delle rappresentazioni per mezzo di concetti, ossia per mezzo delle operazioni che uniscono o separano diverse caratteristiche in modo da stabilire nuovi concetti e collegamenti tra concetti [L *Intr.* VIII, p. 52][47].

3.6.1 Il procedimento dell'astrazione

Ora, uno dei modi con cui l'intelletto forma i concetti, dice Kant, è l'*astrazione*, che consiste nel considerare una collezione di rappresentazioni e di determinare un nuovo concetto definito da alcune caratteristiche comuni alle rappresentazioni in tale collezione. Per generare un nuovo concetto per astrazione, in altre parole, si considerano le caratteristiche degli oggetti di una serie di rappresentazioni e si considerano alcune di queste caratteristiche che sono comuni a tutti gli oggetti di tale serie di rappresentazioni. Il nuovo insieme di caratteristiche determina un nuovo concetto, che si dice ottenuto per astrazione, ossia per separazione di alcune caratteristiche comuni dalle altre, da una certa collezione di rappresentazioni. Per poter compiere un atto di astrazione da una certa classe di rappresentazioni occorre ricorrere, dunque, dapprima all'atto della *comparazione* (si pongono a confronto gli oggetti di una certa classe di rappresentazioni) e, poi, all'atto della *riflessione* (considero quali caratteristiche sono comuni a tutti gli oggetti di tale classe di rappresentazioni, quali caratteristiche non sono comuni e quali, tra le caratteristiche comuni, intendono considerare). Una volta comparato e riflettuto sulle caratteristiche degli oggetti di una data classe di rappresentazioni, è possibile astrarre dalle caratteristiche che non intendiamo considerare e determinare, in modo, con le rimanenti caratteristiche, un nuovo concetto. Supponiamo, per esempio, di avere di porre, con la mente, di fronte a noi un serie di rappresentazioni di diversi alberi: tiglio, salice, ... Ora, con l'atto della comparazione possiamo confrontare tra loro le diverse caratteristiche che li contraddistinguono e, poi, con l'atto della riflessione, possiamo selezionare solo alcune di esse tra quelle che sono comuni a tutti gli oggetti di quelle rappresentazioni. A questo punto, per astrazione, posso determinare un nuovo concetto che è esattamente definito da quelle caratteristiche che avevo

[43] Dunque, la conoscenza di ogni intelletto - o per lo meno dell'intelletto umano - è una conoscenza mediante concetti, non intuitiva, ma discorsiva.

[44] Pensare è la conoscenza mendiante concetti.

[45] Il concetto (...) è una rappresentazione generale o una rappresentazione di ciò che è comune a più oggetti, dunque una rappresnetazione *in quanto essa può essere contenuta in molti*.

[46] Ogni concetto, *in quanto concetto parziale*, è contenuto nella rappresentazione delle cose; in quanto *fondamento conoscitivo*, cioè in quanto *nota*, sono queste cose ad essere contenute sotto di esso. Dal primo punto di vista ogni concetto ha un *contenuto*, dal secondo ha un'*estensione*.

[47] Tutti i nostri *concetti* sono perciò *note* e ogni *pensare* non è altro che un rappresentare per mezzo di note.

deciso di considerare. Il concetto di albero, per esempio, può essere considerato ottenuto comparando tra loro le caratteristiche di tiglio, salice, ... Dopo di ciò si selezionano le caratteristiche comuni e, astraendo da tutto il resto, si ottiene il concetto che definisce che cos'è, in generale, un albero [L I 1 §6, p. 87][48].

3.6.2 Concetti superiori e concetti inferiori

Questo discorso sull'atto dell'astrazione è importante perché ci permette di determinare una gerarchia di concetti a seconda del loro grado di generalità rispetto ad altri concetti. Intuitivamente, ciò significa che il concetto di albero è *superiore* di quello di tiglio perché le tutte le caratteristiche che definiscono il concetto di albero sono proprie anche del concetto di tiglio, ma non viceversa. Poiché mentre ogni caratteristica di un albero è anche una caratteristica di un tiglio, ma non ogni caratteristica di un tiglio è una caratteristica di un albero (vi sono, infatti, alberi che non sono tigli), allora il concetto di albero è superiore rispetto a quello di tiglio e il concetto di tiglio è inferiore rispetto a quello di albero. Un concetto A, in altre parole, è più generale di un concetto B se e solo se è possibile ottenere A per astrazione dalle caratteristiche che definiscono B. Ogni concetto A può essere superiore rispetto ad un concetto B, ma, per altro verso, essere inferiore rispetto a un concetto C. In tal caso, B sarà inferiore sia rispetto ad A sia rispetto a C e C, a sua volta, sarà superiore sia rispetto ad A sia rispetto a B. Consideriamo, per esempio, come sopra, i concetti di tiglio e di albero e aggiungiamo, ora, il concetto di pianta. Ora, è chiaro il concetto di albero è inferiore al concetto di pianta e, di conseguenza, il concetto di tiglio è inferiore ad entrambi. D'altra parte, si può dire che il concetto di pianta è superiore a quello di albero e, quindi, poiché il concetto di albero è superiore al concetto di tiglio, il concetto di pianta è superiore anche a quello di tiglio [L I 1 §§8-9, pp. 88-89][49].

---

[48] Gli atti logici dell'intelletto grazie ai quali i concetti vengono prodotti, quanto alla loro forma, sono:

1) la *comparazione*, cioè il confronto delle rappresentazioni fra loro, in rapporto all'unità della coscienza;

2) la *riflessione*, cioè la considerazione del modo in cui rappresentazioni divese possono essere contenute in un'unica coscienza; e infine

3) l'*astrazione* o separazione di tutto il rimanente (vale a dire di tutto ciò in cui le rappresentazioni dati si distinguono).

Osservazioni. 1) Per formare concetti da rappresentazioni, bisogna dunque essere in grado di *comparare*, di *riflettere* e di *astrarre*; queste tre operazioni logiche dell'intelletto, infatti, sono le condizioni essenziali e universali per la produzione di qualunque concetto in generale. Io vedo, per es., un salice e un tiglio. Confrontando questi oggetti fra loro, innanzi tutto, noto che essi sono diversi l'uno dall'altro riguardo al tronco, ai rami, alle foglie, etc.; ma poi, riflettendo solo su ciò che essi hanno in comune fra loro: il tronco, i rami e le foglie stesse, e astraendo dalla loro grandezza, dalla loro figura, etc., ottengo un concetto dell'albero.

[49] Del concetto si può dire che esso, in quanto *fondamento di conoscenza*, contiene sotto di sé tutte quelle cose dalle quali è astratto, per es., il concetto di metallo contiene sotto di sé l'oro, l'argento, il rame, etc. Infatti, giacché ogni concetto, in quanto è una rappresetnazione valida universalmente, contiene ciò che è comne a più rappresetnazioni di cose diverse, tutte queste cose contenute sotto di esso possono venire rappresentate con esso. (...) I concetti si dicono *superiori* (*conceptus superiores*) in quanto hanno sotto di sé altri concetti, i quali vengono

Ora, poiché ogni caratteristica che definisce un concetto definisce anche ogni altro concetto che è inferiore ad esso, si può dire che il concetto più generale è *fondamento* di conoscenza dei concetti ad inferiori. Non possiamo, in altre parole, giungere a conoscere un concetto B senza avere conosciuto anche tutte le caratteristiche che servono a definire il concetto A che è superiore a B [L I 1 §13, p. 91][50].

Diciamo che una caratteristica α conviene ad un concetto A se e solo se ogni concetto che cade nell'estensione di tale concetto gode di tale proprietà. Diciamo che una caratteristica α ripugna ad un concetto A se e solo se, se un oggetto cade nell'estensione di A, allora non gode di α. Ora, dalle osservazioni dei paragrafi precedenti si ricavano alcune proprietà che riguardano i rapporti tra concetti e che saranno alla base del successivo discorso sui giudizi e sulle inferenze:

1. se una caratteristica α conviene a un certo concetto A, allora α conviene ad ogni concetto inferiore rispetto ad A;

2. se una caratteristica α ripugna a un certo concetto A, allora α ripugna ad ogni concetto inferiore rispetto ad A;

3. se una caratteristica α conviene a tutti i concetti inferiori rispetto al concetto A, allora α conviene ad A;

4. se una caratteristica α ripugna a tutti i concetti inferiori rispetto al concetto A, allora α ripugna ad A ([L I 1 §14, p. 91][51]).

3.7 DIVERSE FORME DEI GIUDIZI

L'intelletto adopera i concetti formando giudizi [B 93][52], dove per giudizio si intende una rappresentazione di un'altra rappresentazione di un oggetto [B 93][53]. Con ciò Kant intende dire che per mezzo di un giudizio possiamo ottenere una conoscenza mediata di un oggetto [B 93][54] in quanto rappresentazioni diverse

---

detti, in rapporto ai primi, concetti *inferiori*. (...) *Osservazione.* Giacché i concetti superiori e inferiori si chiamano così solo *relativamente* (*respective*), un solo e medesimo concetto può dunque essere al tempo stesso, in rapporti diversi, superiore e inferiore. Così, per es., il concetto di *uomo* è un concetto superiore in relazione al concetto di *cavallo*, ma è un concetto inferiore in relazione a quello di *animale*.

[50] Il concetto inferiore (...) è contenuto sotto il concetto superiore, perché quest'ultimo contiene il fondamento di conoscenza dell'inferiore.

[51] Riguardo all'estensione logica dei concetti valgono le seguenti regole generale:

1) ciò che conviene o ripugna ai concetti superiori conviene o ripugna anche a tutti i concetti inferiori che sono contenuti sotto quei concetti superiori, e

2) viceversa: ciò che conviene o ripugna a *tutti* i concetti inferiori, conviene o ripugna anche al loro concetto superiore.

[52] Ora, l'intelletto non può adoperare in altro modo questi concetti, se non giudicando per mezzo di essi.

[53] Il giudizio è (...) la rappresentazione di un rappresentazione di un oggetto.

[54] Il giudizio è dunque la conoscenza medita di un oggetto.

sono rappresentate come unite da un determinato rapporto [L I 2 §17, p. 93][55]. Il tipo di rapporto che unisce tali diverse rappresentazioni determina, come vedremo, il tipo di giudizio con cui si ha a che fare.

Ora, nei giudizi si distinguono *materia* e *forma*. Con materia, Kant intende il contenuto particolare di un certo giudizio, ossia ciò di cui parla in modo specifico. Con forma, invece, egli intende il modo con cui diverse rappresentazioni sono collegate ta loro, ossia il tipo di rapporto che un certo giudizio instaura tra i suoi contenuti [L I 2 §18, p. 93][56]. La logica, in quanto disciplina che non ha a che fare con i contenuti particolari del pensiero, tralascia ogni considerazione relativa ai contenuti dei giudizi e considera solo la loro forma [L I 2 1§9, pp. 93-4][57]. Secondo Kant, le proprietà dei giudizi che derivano dalla loro forma sono raggruppabili in quattro gruppi (di tre proprietà ciascuno) ed ogni gruppo deriva da una specifica funzione dell'intelletto. Non ci interessa, in questa sede, approfondire questa analisi kantiana. Ciò che vale ricordare è solo che i quattro gruppi in cui Kant suddivide la proprietà formali dei giudizi sono quantità, qualità, relazione e modalità. Ognuno di questi gruppi contiene tre proprietà, per un totale, quindi, di dodici proprietà:

1. quantità dei giudizi: universali, particolari, singolari
2. qualità dei giudizi: affermativi, negativi, infiniti
3. relazione tra i concetti nei giudizi o tra i giudizi tra loro:categorici, ipotetici, disgiuntivi
4. modalità dei giudizi: problematici, assertori, apodittici.

Si tratta della famosa tavola dei giudizi fornita nella KrV ([B 95][58], cfr. anche [L I 2 § 20, p. 94][59]). Ciò che assume particolare rilevanza, ai fini della nostra trattazione, è l'analisi che Kant offre delle proprietà che si possono attribuire ad

[55] Un giudizio (...) è la rappresentazione de rapporto [di rappresentazioni diverse] in quanto esse costituiscono un concetto.

[56] Di ogni giudizio fanno parte, come suoi elementi essenziali, *materia* e *forma*. Nelle consocenze date, congiunte nel giudizio per l'unità della coscienza, consiste la *materia* e nella determinazione del modo in cui le diverse rappresentazioni, in quanto tali, pertengono a una sola coscienza consiste la *forma* del giudizio.

[57] Giacché la logica astrae da ogni differenza reale o oggettiva della conoscenza, essa non può occuparsi della materia dei giudizi più di quanto non si occupi del contenuto dei concetti. Essa deve perciò prendere in considerazione esclusivamente la differenza dei giudizi riguardo alla loro mera forma.

[58] Se facciamo astrazione da ogni contenuto di un giudizio in generale, e prendiamo in considerazione soltanto la forma pura dell'intelletto in esso, troveremo che la funzione del pensiero in quel giudizio può essere ricondotta sotto quattro titoli, ciascuno dei quali contiene in sé tre momenti. Essi possono essere rappresentati in modo opportuno nella tavola seguente:
1. Quantità dei giudizi: Universali, Particolari, Singolari
2. Qualità: Affermativi, Negativi, Infiniti
3. Relazione: Categorici, Ipotetici, Disgiuntivi
4. Modalità: Problematici, Assertori, Apodittici.

[59] Le differenze dei giudizi riguardo alla loro forma sono riconducibili ai quattro momenti principali della *quantità*, della *qualità* della *relazione* e della *modalità*, in rapporto ai quali vengono determinate altrettante diverse specie di giudizi.

un giudizio dal punto di vista delle relazioni che possono intercorre tra i concetti che compaiono in un certo giudizio o tra certi giudizi tra loro. Le relazioni che il pensiero in generale, può stabilire fra concetti in un giudizio o fra giudizi fra loro, dice Kant, sono tre: possiamo avere giudizi categorici, ipotetici o disgiuntivi [L I 2 §23, p. 97][60], che hanno a che fare, rispettivamente, con il rapporto di attribuzione tra due concetti, il rapporto di fondazione di un giudizio da parte di un altro giudizio e il rapporto di più giudizio tra loro ciascuno dei quali ha a che fare con l'attribuzione di un certo predicato ad un concetto in modo tale che necessariamente esattamente uno di tali giudizi è vero[61].

3.7.1 I giudizi categorici

Per quanto riguarda il rapporto fra concetti in giudizio, si può dare solo il caso in cui si tratti la sussunzione di un concetto A nell'ambito di un altro concetto B, ossia si dichiara che A è o non è (a seconda della qualità), in tutto o in parte (a seconda della quantità), in un certo modo (a seconda della modalità), inferiore rispetto a B. In tal caso abbiamo un giudizio categorico in cui si tratta dell'attribuzione di un concetto ad un altro concetto come di un predicato ad un soggetto[L I 2 §23, p. 97][62]. Se prescindiamo dai concetti particolari che compaiono in un certo giudizio categorico, allora ciò resta da considerare, la *forma* del giudizio categorico stesso, è la relazione che si instaura tra il concetto che funge da soggetto e quello che funge da predicato, ossia la *copula* del giudizio [L I 2 §24, p. 98][63].

I giudizi categorici costituiscono la materia su cui sono edificati i giudizi disgiuntivi e i giudizi ipotetici [L I 2 §24, p. 98][64], che non riguardano più il rapporto tra concetti tra loro, ma il rapporto tra giudizi (in ultima analisi, tra giudizi categorici) tra loro ([L I 2 §25, p. 98][65] e [L I 2 §28, p. 99][66]). Ora,

[60] Secondo la relazione i giudizi sono o *categorici* o *ipotetici* o *disgiuntivi*.

[61] Tutte le relazioni del pensiero nei giudizi sono relaizoni a) del predicato con il soggetto, b) del fondamento con la conseguenza, c) della conoscenza divisa e di tutti quanti i membri della divisione fra di loro. Nella prima specie di giudizi sono considerati soltanto due concetti, nella seconda due giudizi, nella terza diversi giudizi in relazione reciproca. [Nella] proposizione ipotetica resta indeciso se entrambe queste proposizioni siano vere in sé-, è solo la loro consequenzialità che viene pensata mediante questo giudizio. Infine, il giudizio disgiuntivo contiene una relazione di due o più proposizioni tra di loro, non però nel senso di una derivazione, bensˆin quello di un'opposizione logica, in quanto la sfera dell'una esclude la sfera dell'altra. Al tempo stesso però esso contiene anche una relazione di comunanza, in quanto quelle proposizioni, assieme, riempiono la sfera di conoscenza che è loro propria: dunque, esso contiene una relazione tra le parti che compongono la sfera di una conoscenza, dal momento che la sfera di ciascuna parte costituisce un elemento integrativo della sfera di un'altra parte, concorrendo così all'insieme totale della conoscenza divisa.

[62] Le rappresentazioni date sono infatti subordinate, nel giudizio [categorico], l'una all'altra, perl'unità della coscienza, (...) come *predicato* al *soggetto*.

[63] Nei giudizi categorici, soggetto e predicato costituiscono la materia; la forma, con la quale viene determinato il rapporto (di accordo o di opposizione) fra soggetto e predicato, si chiama *copula*.

[64] I giudizi categorici costituiscono (...) la materia degli altri giudizi.

[65] La materia dei giudizi *ipotetici* consiste in due giudizi che sono congiunti l'uno all'altro come fondamento e conseguenza.

[66] I molteplici giudizi dati di cui è composto il giudizio disgiuntivo costituiscono la *materia*

è interessante che Kant polemizza apertamente con quanti hanno ritenuto di poter fare a meno dei giudizi ipotetici e dei giudizi disgiuntivi, pensando di poterli ridurre ai giudizi categorici. Kant insiste, invece, sul fatto che queste tre forme di giudizi (categorici, ipotetici e disgiuntivi) sono il risultato di altrettante essenzialmente diverse funzioni dell'intelletto e che, perciò, devono essere esaminate ciascuno per proprio conto[L I 2 §24, p. 98][67]. Questa osservazione è importante in quanto conferma quanto abbiamo osservato sopra a proposito dell'impostazione della logica kantiana e che è essenzialmente diversa da quella aristotelica: Kant, infatti, basa la logica sullo studio delle leggi necessarie del pensiero e, perciò, se gli atti dell'intelletto da cui risultano, rispettivimente, i giudizi categorici, quelli ipotetici e quelli disgiuntivi sono essenzialmente diversi tra loro, allora anche i modi attraverso cui si organizza il pensiero per mezzo di tali giudizi devono essere essenzialmente diversi tra loro e, perciò, devono essere distinti e studiati separatamente l'uno dall'altro nella logica. Le leggi del pensiero in base a cui si producono tali giudizi, in quanto derivanti da atti intellettivi differenti, sono differenti e tale differenza, ricavata dall'osservazione del modo in cui deve procedere il pensiero affinché sia tale, deve essere tematizzata nella logica.

La stessa definizione di giudizio data sopra, dice Kant, è stata elaborata in modo da tale da evitare di ridurre il giudizio al semplice stabilire un rapporto tra due concetti, escludendo, in tal modo, i giudizi ipotetici e i giudizi disgiuntivi [B 141][68].

3.7.2 I giudizi ipotetici

Un giudizio ipotetico è il porre un rapporto tra due giudizi precedentemente formati (che, in ultima analisi, si basano sempre sui giudizi categorici) in modo tale che uno sia posto come fondamento del darsi dell'altro e quest'ultimo, quindi, sia posto come conseguenza del darsi del primo. Il giudizio che fonda il successivo è detto *antecendente* e quello fondato dal primo è detto *conseguente*. Se la forma dei giudizi categorici era il legame tra i concetti, il legame tra i giudizi ipotetici è il legame tra l'antecedente e il conseguente [L I 2 §25, p. 98][69]. Si noti

di ques'ultimo e vengono chiamati *membri della disgiunzione* o *opposizione*.

[67] *Osservazione.* I giudizi categorici costituiscono sì la materia degli altri giudizi; ma non per questo si deve credere, come fanno invece parecchi logici, che i giudizi ipotetici e, allo stesso modo, i disgiuntivi non siano altro che formulazioni diverse dei categorici e che perciò possano essere ricondotti tutti quanti a questi ultimi. Le tre specie di giudizi si fondano su funzioni logiche dell'intelletto differenti per essenza e devono perciò venir esaminate secondo la loro differenza specifica.

[68] La definizione di giudizio in generale, quale viene data dai logici, non mi ha mai soddisfatto: stando a quello che essi dicono, infatti, il giudizio sarebbe la rappresetnaizone di una relazione fra due concetti. Ora, senza voler contestare quanto vi è di difettoso in questa loro definizione, la quale tutt'al più si adatterebbe soltanto ai giudizi categorici, ma non a quelli ipotetici e disgiuntivi (giacché questi ultimi, in quanto tali, non contengono una relazione di concetti, bensì proprio una relazione di giudizi), e anche a prescindere da tutte le fastidiose conseguenze che sono derivate da questo sbaglio dei logici, in questa sede mi limito a far ntare che in quella definizione non viene determinato in cosa consista questa relazione.

[69] La materia dei giudizi *ipotetici* consiste in due giudizi che sono congiunti l'uno all'altro come fondamento e conseguenza. L'uno di questi giudizi, quello che contiene il fondamento,

che, qui, non si afferma in alcun modo che i giudizi che compongono un certo giudizio ipotetico sono veri se è vero il giudizio ipotetico stesso. Ciò che si pone è solo la verità del rapporto di dipendenza del conseguente dall'antencedente. Potrei dire con verità, per esempio, che se tutti i corpi sono composti, allora sono divisibili, anche se non considero vero che esistano solo corpi composti ([B 98][70], [L I 2 § 25, pp. 98-99][71]).

3.7.3 I giudizi disgiuntivi

I giudizi disgiuntivo sono costituiti mediante l'alternazione, o disgiunzione, di una serie di giudizi (che, in ultima analisi, si basano sempre sui giudizi categorici) in modo tale che non possono essere tutti falsi e la verità di uno implica la falsità degli altri, ossia, in modo tale che necessariamente esattamente uno di tali giudizi è vero. Mentre i giudizi particolari che compaiono in tale alternazione sono la *materia* del giudizione disgiuntivo, il rapporto di alternazione che necessariamente rende vero uno ed uno solo disgiunto è la *forma* del rapporto disgiuntivo [L I 2 §28, pp. 99-100][72]. Il senso della definizione di questo tipo di giudizio è quello di considerare un certo campo di conoscenze che è esaurientemente descritto dall'unione di tutti i giudizi considerati nella disgiunzione e dal fatto che le conoscenze comunicate da tali giudizi non si sovrappongono in alcuna parte. I disgiunti, in altre parole, forniscono tutti i punti di vista possibili, ossia tutto ciò che può essere detto, a proposito di un certo ambito e tali punti di vista sono selezionati in modo tale che l'uno esclude l'altro. Kant fornisce il seguente esempio. Possiamo dire che, riguardo al motivo per cui esiste il mondo, vale esattamente uno dei tre casi: o il mondo esiste per un cieco caso o il mondo esiste per un'intrinseca necessità o il mondo esiste per una causa esterna. Ognuno di questi disgiunti, secondo Kant, indica una possibile determinazione della questione circa il motivo per cui il mondo esiste. Poiché non esistono altre

---

è la *proposizione antecedente* (*antecedens*, *prius*), l'altro, che si rapporta al primo come sua conseguenza, è la *proposizione conseguente* (*consequens*, *posterius*); e la rappresentazione di questa specie di congiunzione dei due giudizi fra loro per l'unità della coscienza è detta *conseguenza*: in essa consiste la *forma* dei giudizi ipotetici.

Osservazioni. 1) Ciò che per i giudizi categorici è la copua è dunque, per i giudizi ipotetici, la conseguenza: la loro forma.

[70]La proposizione ipotetica: se esiste una giustizia perfetta, allora ch persiste nel male è punito, contiene propriamente la relazione di due proposizioni: eisste una giustizia perfetta, e : chi persiste nel male è punito. Qui resta indeciso se entrambe queste proposizioni siano vere in sé; è solo la loro consequenzialità che viene pensata mediante questo giudizio.

[71]Nei [giudizi] ipotetici, invece, solo la conseguenza è assertoria. In questi ultimi, perciò, posso congiungere fra loro due giudizi falsi; qui infatti importa solo la correttezza della congiunzione: la *forma della conseguenza*; su ciò si fonda la verità logica di questi giudizi. C'è una differenza essenziale fra le due proposizioni: Tutti i corpi sono divisibili, e : Se tutti i corpi sono composti, allora sono divisibili. Nella prima proposozione affermo la cosa direttamente, nella seconda solo sotto una condizione espressa problematicamente.

[72]I molteplici giudizi dati di cui è composto il giudizio disgiuntivo costituiscono la *materia* di quest'ultimo e vengono chiamati *membri della disgiunzione* o *opposizione*. La *forma* di questi giudizi consiste nella *disgiunzione* stessa, cioè nella determinazione del rapporto dei diversi giudizi in quanto membri reciprocamente escludentisi e completantisi di tutta la sfera della conoscenza così divisa.

possibili risposte che non siano già contemplate in qualcuno di questi disigunti, allora uno di essi deve essere vero. Ma, poiché ognuna di queste determinazioni esclude le altre, al massimo uno dei disgiunti può essere vero [B 98-99][73].

3.8 INFERENZE

L'*inferire* è quel particolare procedimento del pensiero con cui si deriva un giudizio da altri giudizi [L I 3 §41, p.107][74]. Le inferenze, in generale, possono essere immediate o mediate [L I 3 §42, p.107][75]. Questa distinzione è tradizionale e, di fatto, abbiamo visto che si tova già in Aristotele. Ancora una volta, tuttavia, come vedremo, la presentazione kantiana di materiale tradizionale si discosta, in vari punti essenziali, dalla riflessione aristotelica.

Le inferenze immediate sono quelle in cui un giudizio è derivato da un altro giudizio e da nient'altro [L I 3 §42, pp. 107-108][76]. Ora, le inferenze immediate classificate da Kant sono quelle di cui abbiamo già parlato a proposito di Aristotele. Le inferenze immediate, innazitutto, riguardano solo i giudizi categorici [L I 2 §55, p.113][77] e sono quelle che abbiamo già esposto sopra, trattando della logica dello stagirita. In queste inferenze non cambiano mai i concetti considerati, ma cambia la forma del loro rapporto, come abbiamo già visto.

3.8.1 Inferenze mediate

La trattazione delle inferenze mediate è più interessante e presenta elementi diversi rispetto a quelli che si trovano in Aristotele. Un'inferenza è *mediata*, dice Kant, se e solo se la conclusione è derivata necessariamente da più premesse, di cui una (la premessa maggiore) enuncia una regola che collega tra loro certi concetti o certi enunciati tra loro e l'altra (la premessa minore) fornisce la condizione che, unita alla regola data, permette di giungere alla conclusione [L I 3 II §56, p. 113][78]. Ogni inferenza mediata, quindi, è composta da due premesse, la maggiore e la minore, e la derivazione della conclusione dalle premesse è giustificata ponendo in risalto il ruolo della regola e di come essa sia determinante per stabilire la necessità di una certa conclusione: date certe condizioni ed una

[73] Infine, il giudizio disgiuntivo contiene una reazione di due o più proposizioni tra di loro, non però nel senso di una derivazione, bensì in quello di un'opposizione logica, in quanto la sfera dell'una esclude la sfera dell'altra. Al tempo stesso però esso contiene pure una relazione di comunanza, in quanto quelle proposizioni, assieme, riempiono la sfera di conoscenza che è loro propria: dunque, esso contiene una relazione tra le parti che compongono la sfera di una conoscenza, dal momento che la sfera di ciascuna parte costituisce un elemento integrativo della sfera di un'altra parte, concorrendo così all'insieme totale della conoscenza divisa.

[74] L'*inferire* va inteso come quella funzione del pensiero per mezzo della quale un giudizio viene derivato da un altro. Un'inferenza in generale è perciò la derivazione di un giudizio da un altro.

[75] Tutte le inferenze sono o *immediate* o *mediate*.

[76] Un'*inferenza immediata* (*consequentia immediata*) è la derivazione (*deductio*) di un giudizio da un altro senza un giudizio intermedio (*iudicium intermedium*).

[77] I tipi immediati d'inferenza dei quali si è trattato si riferiscono solo a giudizi *categorici*.

[78] Un'inferenza [mediata] è la conoscenza della necessità di una proposizione mediante la sussunzione della sua condizione sotto una regola universale data.

certa regola, non è possibile, pena il non rispettare la condizione o la regola, evitare di giungere ad una certa conclusione. Le inferenze mediate (dette anche inferenze della ragione, denominazione che, però, non mi soffermo ad analizzare) non comprendono solo le inferenze dei sillogismi con giudizi categorici. A differenza di Aristotele, Kant, seppure con qualche ambiguità, come vedremo, dedica una trattazione speciale anche alle inferenze mediate che esulano dalla teoria aristotelica del sillogismo aristotelico (e anche dalla teoria del sillogismo arrichita fino a comprendere la cosiddetta quarta figura sillogistica).

Kant afferma che, oltre alle inferenze sillogistiche tradizionali, che prendono in considerazione solo i giudizi categorici, vi sono altri due tipi di inferenze immediate che occorre considerare e che non sono riducibili alle precedenti. Si tratta delle inferenze ipotetiche e delle inferenze disgiuntive, che considerano, rispettivamente i giuidizi ipotetici e i giudizi disgiuntivi. Kant dichiara esplicitamente (anche se vi sono passaggi più problematici) che tali inferenze non sillogistiche sono, comunque, inferenze di cui la logica deve occuparsi, dal momento che sono leggi del pensiero, tanto quanto quelle espresse dai sillogismi. Kant, infatti, dichiara:

> Molti logici considerano *ordinarie* solo le inferenze categoriche della ragione e le altre, invece, *straordinarie*. Ma ciò è falso e privo di fondamento. Tutte e tre queste specie, infatti, sono prodotti di funzioni della ragione parimenti corrette, ma distinte l'una dall'altra in modo parimenti essenziale [L I 3 II §60, p. 116].

Passo, ora, a mostrare brevemente cosa intende Kant con i vari tipi di inferenza. Al di là dell'individuazione di specifiche forme inferenziali, comunque, ciò che è importante, per la nostra ricerca, è il modo con cui le descrive. Conformemente all'impostazione degli altri aspetti della sua logica, Kant descrive queste inferenze come atti di pensiero e afferma che non tutti gli attti di pensiero che determinano delle inferenze sono riducibili al sillogismo e non in tutte è centrale il ruolo del termine medio. Ciò, come abbiamo già sottolineato, determina un orizzonte concettuale che rende possibile attribuire un nuovo statuto e un nuovo campo di indagine alla logica e permette di far apparire la trattazione tradizionale della logica come limitata solo a particolari inferenze e a particolari problemi, che non esauriscono tutto il campo di quel che può legittimamente trattare la logica. Questo supposto ampliamento, come sto cercando di mostrare, non è un progresso che era rimasto, per qualche motivo o per caso, irrangiubile per millenni. Si tratta, piuttosto, di un nuovo orizzonte culturale che, in modi non sempre lineari, senza cancellare del tutto le tracce del passato o, comunque, trasfigurandole nella nuova situazione, ha determinato il sorgere di una nuova concezione della logica, dei suoi scopi, dei suoi metodi e delle sue potenzialità.

Ora, dal fatto che, secondo la relazione, abbiamo tre tipi di giudizi (categorici, ipotetici e disgiuntivi) e dal fatto che ciascuno di questi giudizi può fungere da regola in un'inferenza, segue, come abbiamo anticipato, che abbiamo tre diversi tipi di inferenza: sillogistica, ipotetica e disgiuntiva [L I 3 II §60, p. 115][79]. La premessa che in un'inferenza funge da regola, infatti, può essere, o un giudizio categorico (in tal caso abbiamo un sillogismo) o un giudizio ipotetico (in tal caso abbiamo un'inferenza ipotetica) o, infine, un giudizio disgiuntivo (in tal caso abbiamo un'inferenza disgiuntiva)[80]. I momenti della quantità, della qualità e della modalità, invece, non hanno alcuna rilevanza sulla determinazione delle diverse categorie di inferenze [L I 3 II §60, pp. 115-6][81], anche se non è il caso di approfondire, qui, questo tema.

3.8.2 Inferenze sillogistiche, inferenze ipotetiche e inferenze disgiuntive

Kant esamina, prima di tutto, le inferenze sillogistiche, che definisce nel modo tradizionale ed espone nelle consuete quattro figure. L'unico scarto lo si ritrova quando nomina *regola*, in accordo con il significato datole poco sopra, la premessa maggiore. La premessa maggiore, infatti, è ciò che descrive un certo rapporto che vale tra il termine medio e un certo concetto e questo rapporto è ciò sotto cui è sussunto un altro termine per mezzo della premessa minore. Questa sussunzione è ciò che è rivelato nella conclusione. Quando poniamo, per esempio, la premessa maggiore *Tutti i mammiferi sono animali*, stiamo fornendo una condizione che, unita alla specificazione *Tutti gli uomini sono mammiferi*, permette di sussumere anche la categoria degli uomini sotto la categoria dei mammiferi, ossia, passando attraverso il termine medio, è possibile attribuire tutte le caratteristiche dei mammiferi anche agli uomini (*Tutti gli uomini sono mammiferi*). Per quel che riguarda la presente ricerca, non occorre analizzare ulteriormente quel che Kant dice a tale proposito [L I 3 II §62, p. 116-7][82].

---

[79] Tutte le regole (giudizi) contengono l'unità soggettiva della coscienza del moteplice della conoscenza, quindi una condizione sotto la quale una conoscenza appartiene, insieme all'altra, a una sola coscienza. Ma non è possibile pensare che tre condizioni di questa unità, vale a dire: come soggetto dell'inerenza delle note, o come fondamento della dipendenza di una conoscenza dall'altra, o, infine, come congiunzione delle parti in un tutto (divisione logica). Di conseguenza possono esserci solo altrettante specie di regole univrsali (*propositiones maiores*) mediante le quali la conseguenza di un giudizio viene mediata da un altro giudizio.

[80] Ciò che distingue le tre specie suddette di infreenze della ragione risiede nella maggiore [cioè nell'enunciato che funge da regola]. Nelle inferenze *categoriche* della ragione la maggiore è una proposizione categorica, nelle *ipotetiche* è una proposizione ipotetica o problematica e nelle *disgiuntive* è una proposizione disgiuntiva.

[81] Osservazioni. 1) Le inferenze della ragione non possono venire ripartite *né* secondo la *quantità* (perché ogni maggiore è una regola, quindi qualcosa di unviersale), *nè* in rapporto alla *qualità* (perché è indifferente che la conclusione sia affermativa o negativa), *né*, infine, riguardo alla *modalità* (perché la conclusione è sempre accompagnata dalla coscienza della necessità e ha quindi la dignità di una proposizione apodittica). Non resta dunque che la *relazione* soltanto quale unico fondamento possibile di raportizione delle inferenze della ragione.

[82] In ogni infreenza categorica della ragione si trovano tre *concetti principali* (*termini*), vale a dire:

1) il predicato (nella conclusione), concetto che si chiama *concetto maggiore* (*terminus maior*), perché esso ha una sfera maggiore di quella del soggetto;

2) il soggetto (nella conclusione), il cui concetto si chiama *concetto minore* (*terminus minor*); e

Subito dopo, egli presenta le inferenze ipotetiche, che consistono di due premesse e una conclusione. Una delle premesse è un giudizio ipotetico ed è ciò che svolge il ruolo di regola. L'altra premessa è o l'affermazione dell'antecedente o la negazione del conseguente della premessa precedente. Da ciò, poi, è possibile concludere, rispettivamente, o all'affermazione del conseguente della regola (per *modus ponens*) o alla negazione dell'antencedente della regola (per *modus tollens*). Il giudizio ipotetico fornisce la condizione che enuncia quale sia il rapporto tr ai giudizi considerati, mentre l'altra premessa stabilisce il darsi dell'antecedente o il non darsi del conseguente, in modo che è possibile inferire necessariamente la conclusione applicando la regola (il giudizio ipotetico) allo stato di fatto stabilito dalla seconda premessa [L I 3 II §75, p. 123][83].

In conclusione, Kant presenta le inferenze disgiuntive. Anche le inferenze disgiuntive, chiaramente, sono composte da due premesse, in quanto occorre sempre che vi una premessa che enunci un regola (un certo rapporto tra concetti o, come in questo caso, tra giudizi) e un'altra premessa che stabilisca il darsi di un certo stato di cose. La premessa che funge da regola, nel caso di inferenze disgiuntive, è un giudizio disgiuntivo e la seconda premessa stabilisce o la verità di esattamente un disgiunto o la falsità di tutti i disgiunti meno uno. In questo modo, è possibile concludere, rispettivamente, alla falsità di tutti gli altri membri della disgiunzione o alla verità dell'unico disgiunto non dichiarato falso [L I 3 II §77, p. 124][84].

3.9 CONCLUSIONE

La prima considerazione prende spunto da un problema interpretativo dovuto ad affermazioni non coincidenti nel testo kantiano. Kant ha qualche oscillazione a proposito della questione se le inferenze ipotetiche siano inferenze mediate o immediate. Da un lato, come testimonia anche la citazione sopra, egli le pone tra le inferenze mediate, a motivo del fatto che non possono essere ricavata da una sola premessa, ma d'altra parte, dichiara che non è propriamente un'inferenza mediata, bensì immediata (a) perché non vi compaiono tre distinti enunciati, ma solo due (evidentemente, per Kant, p, q e $p \to q$ non sono tre enunciati, ma due soltanto: p e q), come nelle inferenze immediate, (b) perché la derivazione del conseguente dall'antencedente avviene senza mediazione di un altro concetto (termine che, in L I 3 II, a volte, è usato anche per indicare i giudizi) e (c) perché un'inferenza mediata deve fornire una prova della conclusione dalle premesse,

3) una nota intermedia (*nota intermedia*), che si chiama *concetto medio* (*terminus medius*), perché per mezzo suo una conoscenza viene sussunta sotto la condizione della regola.

[83] Un'inferenza ipotetica è quella che ha come maggiore una proposizione ipotetica. Essa consiste perciò di due proposizioni:

1) una *proposizione antencedente* (*antencedens*) e

2) una *conseguente* (*consequens*) e qui si conclude o col *modus ponens* o col *modus tollens*.

[84] Nelle inferenze disgiuntive la maggiore è una proposizione *disgiuntiva* e deve perciò avere, in quanto tale, membri della ripartizione o disgiunzione.

Qui si conclude o 1) dalla verità di un membro della disgiunzione alla falsità degli altri; oppure 2) dalla falsità di tutti i membri, eccetto uno, alla verità di quest'ultimo.

ma l'inferenza ipotetica fornisce solo la struttura di una prova, in quanto, intende presumibilmente Kant, l'implicazione tra l'antencendente e il conseguente non spiega su quali basi sia legittimo il passaggio dal primo giudizio al secondo, ma si limita a stipulare che tale passaggio sia possibile [L I e II §75, p. 123][85]. Si noti, tuttavia, che, nonostante queste osservazioni, il paragrafo che le contiene è intitolato *Inferenze ipotetiche* della ragione, ossia inferenze ipotetiche mediate: esattamente il contrario di quel che ci si aspetterebbe. Non è il caso, comunque, di discutere, qui, questa tensione presente nel testo kantiano, in quanto non influisce sulla nostra trattazione. Si può, ad ogni modo, osservare che tali motivazioni potrebbero essere ripetute, *mutatis mutandis*, a proposito dell'inferenza disgiuntiva, ma Kant non lo fa. Ciò che Kant fa, tuttavia, è fornire una definizione di inferenza della ragione, fornita sopra, che si adatta bene solo alle inferenze categoriche e solo con più difficoltà alle inferenze ipotetiche e a quelle disgiuntive. Kant, infatti, asserisce che una delle due premesse (la premessa minore) di un'inferenza mediata deve sussumere una certa conscenza sotto la regola fornita dall'altra premessa (la premessa maggiore). La premessa minore, nelle inferenze ipotetiche e nelle inferenze disgiuntive, non consente, propriamente parlando, un atto di sussunzione di una certa conoscenza sotto la regola della premessa maggiore, ma, semplicemente, esprime un certo darsi o non darsi di qualcosa descritto da determinati giudizi. Nel caso delle inferenze sillogistiche, invece, la premessa minore, chiaramente, tramite rapporto predicativo con il termine medio, permette di affermare che un certo concetto, espresso dal termine minore, è inferiore rispetto ad un altro concetto, espresso dal termine maggiore. É probabile che queste tensioni derivino dal fatto che in Kant convivono ancora certi aspetti della prospettiva logica tradizionale e certi aspetti che, invece, aprono la possibilità di nuove forme di logica e che lo stesso Kant non era consapevole delle nuove prospettive che tale impostazione può aprire. Per questo motivo, egli non valorizza appiena il significato del riconoscere come atti di inferenze legittime anche le inferenze ipotetiche e le inferenze disgiuntive. Ciò significa che la logica non verte intorno ai rapporti predicativi e al ruolo del termine medio, come invece accadeva in Aristotele, ma per valorizzare questo fatto, sarebbe stato necessario riformare a fondo la nozione di inferenza mediata, che, seppure non sempre nei termini kantiani, è quanto accadrà, non a caso, poco dopo Kant, per esempio in Bolzano. Nei prossimi capitoli fornirò maggiori informazioni a questo riguardo.

[85] Il fatto che l'inferenza ipotetica consiste solo di due proposizioni, senza avere un concetto medio, rende evidente che essa non è propriamente un'inferenza della ragione, ma piuttosto, solo un'inferenza immediata, dimostrabile a partire da una proposizione antencedente e da una conseguente, secondo la materia o la forma (*conseguentia immediata semonstrabilis* [*ex antecedente et consequente*] *vel quoad materiam vel quoad formam*).

Ogni inferenza della ragione dev'essere una prova. Ora, però, l'inferenza ipotetica porta con sé solo il *fondamento* della prova. Anche da questo punto di vista è perciò chiaro che essa non può essere un'inferenza della ragione.

3.9.1 Ambivalenza e apertura della logica kantiana

Ora, come si vede, la prospettiva kantiana, dal punto di vista della logica contemporanea, è ancora limitata, in quanto l'aggiunta di due nuove categorie di inferenze valide[86] non cambia sostanzialmente la situazione: la nozione di conseguenza logica in sé non è centrale in Kant, così come non lo era in Aristotele. Ciò che rende importante la riflessione kantiana, però, è il fatto che il suo porre al centro dell'indagine logica la nozione di legge necessaria del pensiero fornisce la possibilità concettuale di concepire una logica che si occupa di ogni legge necessaria del pensiero, ossia di ogni inferenza valida, senza restrizioni di sorta e, quindi, anche senza restringersi alle particolari forme di inferenza che Kant ha indicato.

Con Kant l'impresa logica porta già in sé i prodromi di possibili sviluppi, contrariamente a quel che Kant stesso credeva.

La sua caratterizzazione della logica come disciplina formale delle regole secondo cui l'intelletto pensa permetterà di elaborare un nuovo concetto di conseguenza che sia specificamente logico, in quanto formale e permette proprio di portare in primo piano la conseguenza logica in quanto relazione fondamentale tra certi atti dell'intelletto in generale.

Dal momento che lega la sua trattazione di concetti, giudizi e inferenze agli atti dell'intelletto, in senso lato, che li giustificano, diventa possibile studiare inferenze diverse da quelle sillogistiche e conferirle una pari importanza, anche se Kant, come abbiamo visto, di fatto resta ancora più concentrato sulle sole inferenze sillogistiche. La sua impostazione, però, permette di elaborare concezioni della logica più ampie di quella aristotelica, ossia di studiare ogni atto intellettivo che possa essere pensato come un'inferenza in senso lato, ossia come passaggio necessario dalle premesse alla conclusione solo per motivi formali, ossia solo per il fatto che si compie un atto intellettivo in generale, senza considerare i particolari oggetti di cui trattano gli enunciati su cui ci si concentra.

Pur modificando il senso dell'impostazione kantiana, questo sarà proprio quello che farà Bolzano definendo la relazione di conseguenza come conservazione della verità tra proposizioni in sé, come vedremo. In tal modo si determinerà, in modo ormai quasi del tutto esplicito, la possibilità di studiare in termini del tutto generali la relazione di conseguenza.

Nonostante la sua impostazione che offre la possibilità di sviluppare innovazioni, Kant conserva l'idea, già aristotelica, che la logica debba essere disciplina interessante dal punto di vista della ricerca scientifica. In questo senso, Kant, come abbiamo visto, la definisce un canone e aggiunge altre caratterizzazioni tese ad escludere la possibilità di situazioni inferenziali banali (come quelle in cui la premessa è uguale alla conclusione). In certi casi dice vi sono enunciati privi di conseguenze e che ciò significa, in realtà, che ciò che si potrebbe ottenere da loro sono solo altri enunciati privi di utlità, evidentemente, rispetto all'indagine scientifica o, comunque, rispetto all'impresa conoscitiva [L I 2 §37,

[86] Si noti che Kant, come Aristotele, in realtà, parla semplicemente di inferenze: quelle che noi chiameremmo inferenze non valide, per lui, semplicemente non sono inferenze.

p. 105][87]. A ciò si aggiunga che Kant, come già Aristotele, si pone a considerare anche aspetti non attinenti le deduzioni, ma considera anche casi come i ragionamenti induttivi e i ragionamenti per analogia [L I 3 III §84, p. 127][88].

Questo aspetto della rilevanza e dell'utilità per la scienza sarà ancora abbastanza forte in Bolzano, come dirò, mentre verrà progressivamente accantonato in autori successivi, più interessanti a studiare in termini sempre più astratti la nozione di conseguenza logica in generale. Tale aspetto, tuttavia, sarà poi ricordato e difeso di nuovo in tempi recenti ed avremo modo di sottolineare, più avanti, tutte queste connessioni.

[87] Le proposizioni tautologiche sono *virtualiter* vuote ossia *prive di conseguenze*; infatti non hanno utilità né uso. Tale è ad es. la proposizione tautologica: *l'uomo è uomo*. Infatti, se dell'uomo non so dire nient'altro se non che è un uomo, allora non so proprio nient'altro di lui.

[88] "Il Giudizio, procedendo dal particolare all'univesale per trarre dall'esperienza, quindi non *a priori* (...) giudiuniversali conclude *o* da *molte* cose a *tutte* le cose di una speicie, oppure da *molte* determinazion e proprietà in cui cose della medesima speicie si accordano alle *rimanenti, in quanto esse appartengono allo stesso principio.* Il primo modo d'inferire si chiama inferenza *per induzione*; il secondo, inferenza *per analogia*.

Capitolo 4

BOLZANO: DEDUCIBILITÀ E VARIAZIONE

4.1 PREMESSA

Bolzano è il primo pensatore a definire la nozione di conseguenza logica in termini generali e a dedicarle, ormai, un'attenzione non marginale. Con questa affermazione non intendo dimenticare la teoria medievale delle *consequentiae*, che sicuramente portò a considerare in una prospettiva unitaria i diversi tipi di nessi infernziali stabiliti dalla logica tradizionale. Il fatto è che alla teoria delle *consequentiae*, per essere una teoria delle relazioni di conseguenza, manca il tentatio di fornire una definizione univoca e formale del nesso consequenziale e l'esplicita consapevolezza che è ad un tale livello di generalità che va posta l'analisi delle connessioni logiche tra proposizioni. Malgrado in Ockham, Burley e Buridano, per citare solo i più noti ed influenti, ci siano tentativi di fondare una nozione generale di conseguenza logica (in Buridano, per esempio, si trova già anhe l'idea, che sarà, poi, propria anche di Bolzano, di spiegare le conseguenze formali in termini di sostituzioni) non c'è il progetto di formulare una teoria generale, quanto quello di ricercare una serie di regole generali da formularsi in modo esplicito. Tale ricerca non è priva di ambiguità e contraddizioni e, spesso, non riesce ad uscire dall'ambito strettamente linguistico e ad analizzare la portata semantica generale del problema.

É in Bolzano, come vedremo, che il concetto di conseguenza logica è chiaramente considerato e fondamentale dal punto di vista della riflessione filosofica sulla natura della logica. Certo tale nozione non si situa comunque al centro dei suoi interessi in modo esclusivo e le sue ricerche nel campo delle nozioni logiche sono ancora legate ad interessi epistemologici, che lo spingono a non dedicarsi ad un'indagine logica fine a se stessa e generale come saranno le indagine di altri logici successivi. Nell'opera di Bolzano, tuttavia, seppure in un contesto diverso da quello dei sistemi logici contemporanei, come vedremo, la nozione di conseguenza logica è definita senza essere legata a particolari forme inferenziali privilegiate. Bolzano, inoltre, per la prima volta, definisce tale nozione per mezzo di idee che, soprattutto grazie a Tarski (che, a sua volta, come diremo, le riceve attraverso i lavori degli assiomatici nel campo della matematica), riceveranno grande attenzione nella riflessione logica contemporanea, ossia conservazione della verità dalle premesse alla conclusione e variazione in tutti i modi possibili delle parti non logiche delle proposizioni. Ciò si fonda, a sua volta, sull'idea, mantenuta, seppure in un nuovo contesto anche nei sistemi logici contemporanei, che le proposizioni siano ottenute, per combinazione, da elementi semplici.

Definendo un concetto di conseguenza logica e non più la validità di acune forme inferenziali, considerate, per qualche motivo (come l'importanza del rapporto predicativo in Aristotele o degli atti dell'intelletto in Kant), bensì come un rapporto tra premesse e conclusione, qualunque siano le premesse equalunque sia la conclusione, Bolzano compie un notevole passo oltre la concezione di logica propria di Aristotele e oltre la concezione di logica propria di Kant. Anche se in Bolzano ci sono anche elementi, come vedremo, che rinviano ad un'impostazione tradizionale della logica, ve ne sono anche altri, espliciti e molto importanti, che lo legano a visioni della logica che si sviluperranno dopo di lui e che sono, oggi, ancora, attuali.

Bolzano è stato il primo a cercare di descrivere la relazione di conseguenza logica interamente in termini di variazione di parti degli enunciati (o proposizioni, come vedremo) che compongono le premesse e la conclusione. Prima di lui, la logica era stata principalmente una logica delle relazioni tra termini (o tra concetti) e la relazione di conseguenza logica era studiata verificando l'esistenza di un termine medio tra altri due termini: l'enfasi era posta sulle regole sillogistiche e sul ruolo del medio nelle inferenze. In Kant si ritrova una situazione diversa, come abbiamo visto, perché egli presta attenzione alle nozioni di leggi necessarie del pensiero e di atti dell'intelletto. É pur sempre vero, però, che non si studia, ancora, la nozione di conseguenza logica in sé, ma solo certe forme inferenziali, considerate come comprendenti tutte le inferenze legittime. Bolzano propone un'idea di logica profondamente innovativa: non più studio di certe forme inferenziali o delle leggi necessarie del pensiero, bensì studio dei rapporti *oggettivi* che sussistono tra le proposizioni, a prescindere dalla loro sussunzione sotto certi schemi inferenziali e a prescindere dalle regole degli atti intellettivi. Con Bolzano, sebbene, come vedremo, non si possa ancora dire che la nozione di conseguenza logica è studiata in sè, si giunge ormai molto vicini a questo risultato e si forniscono degli strumenti concettuali, *in primis* la variazione delle parti non logiche delle proposizioni, che si staccano ormai nettamente dai precedenti studi di logica e si avvicina, invece, alle ricerche contemporanee.

É, quindi, assai importante, in questo ambito, considerare la riflessione bolzaniana a tale proposito. Come nel caso degli altri autori, non intendo fornire una descrizione completa del pensiero di Bolzano nel campo della logica, ma porre in evidenza quegli aspetti che riguardano la presenta indagine sulle molte versioni della nozione di conseguenza logica.

4.2 PROPOSIZIONI IN SÉ E RAPPRESENTAZIONI IN SÉ

Per giungere a delineare la nozione di conseguenza logica secondo Bolzano, occorre considerare alcune sue indagini di carattere semiotico volte a definire i concetti di proposizione in sé o di rappresentazione in sé. Come vedremo, tali nozioni sono essenziali per comprendere la sua definizione di conseguenza logica in quanto le proposizioni in sé sono ciò che può comparire, come premessa o come conclusione, in un argomento e le rappresentazioni in sé sono ciò da cui sono formate le proposizioni in sé e ciò che può essere variato per determinare se una certa conclusione segue logicamente da determinate premesse.

4.2.1 Proposizioni in sé

In un normale atto comunicativo, ci serviamo di segni, organizzati in modo opportuno, come veicolo di un certo significato. Questi segni costituiscono l'enunciato materialmente usato (scritto o proferito). Ad essi si collegano ciò che Bolzano chiama le *proposizioni in sé* (*Sätze an sich*) o *proposizioni oggettive*. Tali proposizioni in sé sono da distinguere, da un lato, dagli enunciati come veicoli materiali di un significato e, dall'altro, con il messaggio effettivamente inteso da chi scrive o proferisce un certo enunciato e con il messaggio effettivamente recepito dal destinatario della comunicazione. Le proposizioni in sé sono, piuttosto, qualcosa di analogo ai pensieri di cui parlerà Frege in senso tecnico (cfr. Frege [1918-'19]). Si tratta di enti che sussistono oggettivamente e che costituiscono il significato genuino di una certa sequenza significativa di simboli scritta o proferita [ML §2.2 p. 44][1].

Le proposizioni oggettive, dunque, non coincidono con il significato effettivo trasmesso, ossia recepito dal destinatario della comunicazione o con il significato pensato da colui che proferisce o scrive l'enunciato. In questi casi, infatti, si ha a che fare solo con rappresentazioni mentali soggettive, non necessariamente collegate all'enunciato. La proposizione oggettiva è qualcosa che si accompagna necessariamente ad un certo enunciato e ne costituisce la materia oggettiva: le circostanze che esso enuncia, univocamente determinate in modo indipendente dalle reazioni soggettive a quell'enunciato. Tali proposizioni, quindi, sono dette in sè o oggettive pe rindicare che si danno in modo indipendentemente da ogni riferimento a qualche entità di altro tipo (ad eccezione, presumibilmente, di Dio): non dipendono, in particolare, dal fatto che si scrive o si proferisce l'enunciato che vi si riferisce e non dipendo dal fatto che le si pensa. Così come si danno in modo indipendente dal soggetto e da ogni altro ente, anche, come vedremo

[1] Ciò che intendo per *proposizioni* lo si potrà desumere non appena io osservi che una *proposizione in sé* o proposizione *oggettiva* per me non significa quel che i grammatici chiamano proposizione, ovvero l'espressione linguistica, bensì il mero *senso* di questa espressione, senso che deve essere sempre o soltanto vero o soltanto falso.

la loro struttura interna e i rapporti tra una proposizione e le altre si danno in modo oggettivo. Proprio tale oggettività sarà ciò a cui ricorrerà Bolzano per definire la nozione di conseguenza logica.

Le proposizioni oggettive, poi, sono ciò a cui si possono attribuire, in maniera propria, i valori di verità, Vero e Falso. Ogni proposizione in sé ha sempre esattamente un valore di verità, ossia ogni proposizione in sé, necessariamente, è vera o falsa (e non vera e falsa insieme). Dal momento che è la proposizione in sé che enuncia circostanze, ossia che descrive fatti, è di essa che si predicano propriamente la verità o la falsità e non dei significati mentali o degli enunciati materialmente impiegati e a cui si riferisce una certa proposizione in sé [ML §2.1, p. 45][2].

Lo statuto ontologico di questi enti non è facilmente determinabile. Accenno solo al fatto che Bolzano, per quanto li consideri enti che sussistono in modo oggettivo e tra cui, come vedremo si danno relazioni oggettive, ossia indipendenti da noi, nega che siano qualcosa di esistente, a differenza, invece, degli enunciati, materialmente scritti o proferiti, e del messaggio inteso da chi dà il via ad un atto comunicativo o da chi riceve la comunicazione [ML §2.1, p. 44][3]. Non è rilevante, ad ogni modo, approfondire, qui, il problema dello statuto ontologico delle proposizioni in sé. Quel che conta, per noi, è soltanto che Bolzano le ammette e basa su di esse, come vedremo, la sua definizione della nozione di conseguenza logica.

4.2.2 Rappresentazioni in sé

Abbiamo anticipato che le proposizioni in sé sono dotate di una struttura interna, che è oggettiva, così come le proposizioni stesse sono oggettive, nel senso, specificato sopra.

Ogni proposizione in sé, dunque, è composta da parti diverse. Tali parti possono essere altre proposizioni in sè oppure possono essere enti che non sono essi stessi delle proposizioni. In ultima analisi, ogni proposizione in sé si risolve in enti che non sono più proposizioni. Tali enti sono le *rappresentazioni* (*Vorstellungen*) *in sé* o rappresentazioni oggettive o, come Bolzano dice ancora, concetti [ML §2.1, p. 45][4].

Bolzano, in ML, non fornisce dei criteri precisi per individuare le rappresentazioni che costituiscono una certa proposizione. Dall'esempio che fornisce

[2] Qualunque proposizione (...) è sempre o soltato vera o soltanto falsa.

[3] Attribuisco esistenza al concepire una proposizione della mente di un essere pensante, dunque alla proposizione *pensata* e al *giudizio formulato*, esistenza nella mente di chi pensa queste proposozioni e formula queste giudizi; e, invece, annovero le mere proposizioni in sé o *proposizioni oggettive* fra un genere di cose che non sono né potranno mai divenire assolutamente nulla di esistente. Il nostro *pensare* una proposizione, il nostro *giudizio* che una cosa sia in un modo o in un altro è qualcosa di reale, che in un determinato momento si è generato e in un determinato momento sparirà di nuovo; parimenti i *segni* scritti con cui, da qualche parte, mettiamo per iscritto le medesime proposizioni sono qualcosa che ha esistenza reale, ma le proposizioni in sé non esistono in nessun tempo e in nessun luogo.

[4] in ogni proposizine in sé si possono distinguere diverse parti; e queste, nella misura in cui non siano già a loro volta proposizioni complete, io denomino rappresentazioni, o talvolta anche *concetti* (secondo una distinzione che dovrà essere spiegata in seguito).

sembra che, almeno normalmente, ad ogni unità dell'analisi sintattica di un enunciato corrisponda almeno una rappresentazione oggettiva. L'esempio di Bolzano, infatti, è i seguente. Consideriamo la proposizione in sé *Dio ha onniscienza.* tale proposizione è composta da tre rappresentazioni oggettive (*Dio*, *ha*, *onniscienza*) [ML §2.1, p. 45][5]. Ciò che conta, per noi, comunque, non è capire come si debba procedere per determinare le rappresentazioni che compongono una proposizione, ma solo il fatto che, in ultima analisi, ogni proposizione è composta da tali rappresentazioni.

Al pari delle proposizioni in sé, le rappresentazioni in sé hanno un'esistenza oggettiva e tra di esse vigono dei rapporti oggetti, come vedremo. Come una proposizione in sé non corrisponde alla rappresentazione mentale propria di un soggetto, altrimenti non sarebbe un'entità oggettiva, così neanche le rappresentazioni in sé che compongono una proposizione in sé, per lo stesso motivo, corrispondono agli elementi di una rappresentazione mentale. Come nel caso delle proposizioni in sé, poi, anche le rappresentazioni in sé non sono nulla di esistente, benché, come le proposizioni, si diano in qualche modo oggettivo [ML §2.1, p. 44][6].

Ogni proposizione, dunque, consiste di rappresentazioni oggettive. Un altro punto importante è che alcune rappresentazioni oggettive possono essere ulteriormente scomposte in rappresentazioni oggettive più semplici. Anche in questo caso, Bolzano, in ML, si limita a fornire degli esempi di come ciò possa accadere, senza fornire regole precise. La rappresentazione oggettiva *nulla*, per esempio, egli dice, risulta dalla composizione della rappresentazione oggettiva *non* e della rappresentazione oggettiva *qualcosa* (nulla = non qualcosa). Le rappresentazioni che costituiscono un'altra rappresentazione sono dette il *contenuto* di questa rappresentazione [ML §3.1, pp. 45-6][7].

Non ci sono rappresentazioni scomponibili all'infinito in ulteriori rappresentazioni più semplici. Ad un certo punto si giunge a rappresentazioni del tutto

[5] Così, la proposizione 'Dio ha onniscienza' consiste delle parti 'Dio', 'ha' e 'onnniscienza', a cui do il nome di rappresentazioni.

[6] La rappresentazione in sé va quindi distinta dal suo essere concepita nella mente di un essere pensate (rappresentazione *soggettiva* o *pensata*). Infatti soltanto a quest'ultima spetta veramente realtà. Se in questo momento penso a una montagna d'oro, la rappresentazione 'montagna d'oro' ha vermanete realtà in quanto rappresentazione soggettiva esistente nella mia mente, precisamnete per tutto il tempo in cui essa esiste nella mia mente. Ma la rappresetnazione oggettiva che sta a fondamento di questa rappresnetazione soggettiva, rappresentazione di cui quest'ultima è solo il concepimento, la mera rappreentazione in sé, non è e non può essere alcunché di esistente; e non perché - come nel caso dell'esempio addotto - non ci siano montagne d'oro, ma perché se già le rappresentazioni in sé fossero qualcosa di reale, allora anche tutte le proposizioni in sé, di cui quelle sono le parti, dovrebbero essere qualcosa di esistente.

[7] Ogni proposizione consiste di rappresentazioni, allo stesso modo molte rappresentazioni, anche se certo non tutte, sono composte di altre rappresentazioni. Ad esempio, la rappresentazione 'nulla' può considerarsi composta delle due rappresentazioni 'non' e 'qualcosa'; la rappresentazione 'triangolo equilatero', che possiamo esprimere anche con più parole, 'un triangolo che è equilatero', o 'dai tre lati uguali', contiene le rappresentazioni 'triangolo', 'lato', 'uguale' ecc. Ora, quelle rappresentazioni di uci è composta un'altra data rappresentazione, proprio come altrettante parti, formano insieme ciò che chiamo il *contenuto* di una rappresentazione (solo di una rappresentazione composta).

semplici, similmente a quel che Wittgenstein dice a proposito dell'esistenza di elementi semplici (cfr. Wittgenstein [1921]). Anche qui, Bolzano non spiega come si riconoscano le rappresentazioni semplici, ma fornisce solo alcuni esempi, come *non*, *qualcosa*, *avere* e *essere* [ML §3.1, p. 46][8].

Naturalmente non è necessario che due rappresentazioni composte dalle medesime rappresentazioni siano la stessa rappresentazione. L'esempio che fornisce Bolzano è il seguente: *quadrilatero con lati uguali e ancoli disuguali* e *quadrilatero con angoli uguali e lati disuguali* sono chiaramente rappresentazioni diverse, benché le rappresentazioni da cui sono composte siano le medesime [ML §3.1, p. 46][9].

Abbiamo visto che solo le proposizioni in sé sono vere o false. Le rappresentazioni non possono essere dette vero o false, se non in senso derivato, ossia in quanto si immagina che siano inserite in una proposizione che ne affermi l'esistenza (come *Esiste la montagna d'oro*) [ML § 2.3, p. 45][10].

4.3 RAPPORTI OGGETTIVI TRA PROPOSIZIONI IN SÉ

Tra le proposizioni in sé, sussistono chiaramente dei rapporti. Se mostriamo, per esempio, che la proposizione *Esiste un figura geometrica con più di venti facce uguali* è falsa, allora, è falsa anche la proposizione *Esiste una figura geometrica con più di ventuno facce uguali.* Ora, questo è solo un esempio delle molteplici relazioni che sussistono tra le proposizioni in sé. Dal momento che tali proposizioni sono oggettive, anche le relazioni che vigono tra di esse sono altrettanto oggettive e, quindi, in modo particolare, indipendenti da ogni soggetto e dalla sua attività di pensiero.

Ora, l'intuizione fondamentale di Bolzano è che anche la nozione di conseguenza logica possa essere descritta in termini di relazione oggettiva tra proposizioni in sé, a prescindere da qualsiasi struttura interna di tali proposizioni e a prescindere da qualsiasi attività intellettuale dei soggetti. In tal modo, come si vede, si introduce una concezione che non era mai stata affrontata con questa chiarezza e importanza e con questi strumenti, benché nella presentazione di

[8] Come ci sono rappresentazioni composte, così devono certamente esserci anche rappresentazioni non composte di altre, bensì semplici. Esempi di rappresentazioni che attualmente riterrei semplici sarebbero le rappresentazioni che designiamo con le parole 'non', 'qualcosa', 'avere', 'essere' ecc..

[9] A proposito delle rappresentazioni *composte* gioverà osservare ancora che rappresentazioni dall'*identico contenuto*, ossia costituite dai medesimi elementi, possono essere *distinte* quando questi elementi siano collegati in modo diverso (in una diversa successione). Così, le due rappresentazioni 'quadrilatero con lati uguali e angoli disuguali' e 'quadrilatero con angoli uguali e lati disuguali' sono certo molto diverse, nonostante abbiano esattamente i medesimi elementi ultimi, dnque il medesimo contenuto.

[10] Ma le mere rappresentzioni 'linea', 'punto0, 'essere divisibile' e simili non sono né vere né false. Se d'altronde può sembrare che certe rappresentazioni, per esempio 'montagna d'oro', 'quadrilatero rotondo', possano dirsi false, ciò accade solo fintanto si presupponga che qualcuno asserisca le proposizioni 'C'è una montagna d'ora', 'Possono esserci quadrilateri rotondi' e simili. Soltanto così intendiamo il parlare di rappresentazioni o concetti falsi.

Bolzano ancora permangano anche elementi legati alla logica tradizionale e che saranno poi trascurati (ma, anche in questo caso, non mancheranno le eccezioni, anche importanti, come vedremo).

4.3.1 Elementi variabili nelle proposizioni in sé

Come sappiamo, le proposizioni in sé sono ciò di cui, propriamente, si predicano il vero e il falso e sono composte da rappresentazioni in sé. Assumiamo una proposizione, diciamo ϕ. Immaginiamo, poi, di osservare quali siano le rappresentazioni da cui è composta. Supponiamo che $R_\phi = \{a, b, c, ...\}$ sia l'insieme di tali rappresentazioni. Possiamo anche scrivere $\phi(a, b, c, d, ...)$ per indicare che le rappresentazioni che compaiono in v siano tra quelle in $(a, b, c, d, ...)$. Con ciò, si badi, non si intende dire che tutte le rappresentazioni in $(a, b, c, d, ...)$ compaiano in ϕ.

Con *variazione ammissibile* (o, più semplicemente, *variazione*) di una rappresentazione a in una proposizione ϕ mi riferisco all'atto di determinare da $\phi(a)$ una serie di proposizioni $\phi(b/a)$, $\phi(c/a)$, ... in cui in ogni posto in cui compare a in ϕ compare, rispettivamente, b, c, ... e in modo tale che ogni $\phi(b/a)$, $\phi(c/a)$, ... è ancora una proposizione[11] e che per il resto sono identiche a $\phi(a)$. É chiaro che il valore di verità di una proposizione ϕ possa cambiare se cambiamo alcune delle sue rappresentazioni, perché, in tal modo stiamo, di fatto, generando una nuova proposizione.

Consideriamo, per esempio, la seguente proposizione: *La figura sul primo foglio è un triangolo.* Supponiamo che le rappresentazioni da cui è composta siano *figura*, *primo*, *foglio*, *essere* e *triangolo*. Ora, supponiamo di considerare variabile *triangolo* e fisse tutte le altre rappresentazioni. Ciò significa che, considerando tutte le rappresentazioni possibili che sostituite a triangolo generano una proposizione, proposizione, possiamo avere

- *La figura sul primo foglio è un quadrato*
- *La figura sul primo foglio è un elefante*
- *La figura sul primo foglio è verde*

e così via. ciò che non possiamo ottenere, però, è, per esempio, *La figura sul primo quadro è un triangolo* perché non possiamo sostituire la rappresentazione *foglio* con la rappresentazione *quadro*. Abbiamo stabilito all'inizio, infatti, che *foglio* sarebbe stata considerata, in questo caso, una rappresentazione fissa.

Ora, come si vede, ognuna di queste proposizioni è dotata del proprio valore di verità, che può essere diverso da quello della proposizione originaria.

Supponiamo, ora, di avere due proposizioni $\phi(a, b, c, ...)$ e $\psi(a, b, c, ...)$. É possibile chiedersi, a questo punto, quale sia il rapporto tra i valori di verità delle proposizioni $\phi(a, b, c, ...)$ e $\psi(a, b, c, ...)$ quando consideriamo come variabili

[11] La sostituzione, rispettivamente delle rappresentazioni b, c, ... al posto di a in $\phi(a)$, ossia, non determina un agglomerato di rappresentazioni che non sono una proposizione, ma una nuova proposizione.

alcune rappresentazioni che li compongono. Supponiamo, per esempio, di considerare variabile a e fisse tutte le loro altre rappresentazioni e di notare che che, per ogni sostituizione di a con un'altra rappresentazione α si ha che se $\phi(\alpha/a)$ è vera, allora $\psi(\alpha/a)$ è vera. In tal caso, possiamo dire che sussiste una relazione di un certo tipo, che potremmo nominare in modo opportuno, tra ϕ e ψ [ML §8.1, pp. 59-60][12].

Le relazioni che ci interessa definire, per mezzo del metodo della variazione, sono quattro: compatibilità, deducibilità in senso lato, deducibilità in senso stretto e conseguenza logica.

4.3.2 Compatibilità rispetto ad un insieme di rappresentazioni variabili

Assumiamo un insieme di proposizioni $\Gamma = \{\phi, \psi, \zeta, ...\}$. Poniamo, ora, di considerare come variabili le rappresentazioni in $Var = \{a, b, c, ...\}$. Diciamo che le proposizioni in Γ sono tra loro compatibili rispetto a Var se e solo se, esiste almeno un'operazione di variazione con cui, sostituendo uniformemente le rappresentazioni in Var con altre variazioni, si determina un insieme Γ' di nuove proposizioni che sono simultaneamente vere [ML §8.1,p. 60][13]. In caso contrario diciamo che le proposizioni in Γ sono tra loro incompatibili rispetto all'insieme di variazioni Var [ML §8.1,p. 60][14].

Forniamo un esempio. Poniamo $\Gamma = \{$*La figura sul primo foglio è un quadrato*, *La figura sul primo foglio ha al massimo tre lati*$\}$ e sia $Var = \{$*quadrato*$\}$. Ora, vediamo facilmente che le proposizioni in Γ sono tra loro compatibili rispetto a Var perché sostiutendo *quadrato* con *triangolo* otteniamo l'insieme $\Gamma' = \{$*La figura sul primo foglio è un quadrato, La figura sul primo foglio ha al massimo tre lati*$\}$ che contiene due proposizioni simultaneamente vere.

Occorre sottolineare che questa nozione di compatibilità è relativa ad un insieme di rappresentazioni variabili. A seconda di quali elementi consideriamo variabili nelle proposizioni, infatti, è possibile determinare certe nuove proposizioni piuttosto che altre e, quindi, considerare certi casi piuttosto che altri. Se nell'esempio precedente lasciamo invariato Γ e sostituiamo Var con il nuovo

---

[12] Dei diversi rapporti che possono aver luogo tra proposizioni basterà qui ricordare soltanto quelli che risultano dall'assunzione di elementi variabili nelle proposizioni. Infatti nel confronto reciproco delle proposizioni nulla è più abituale del pensare come variabili certi elementi che in esse compaiono (ora il soggetto, ora il predicato, o solo un certo elemento che compare nella rappresentazione-soggetto o nella rappresentazione-predicato), e del ricercare che cosa ne sia della loro verità quando le parti considerate variabili vengano scambiate con altre prese a piacere

[13] Il primo caso notevole che può capitare si ha quando le proposizioni A, B, C, D, ... da confrontare l'una con l'altra e i loro elementi assunti come variabili i, j, ... abbiano proprietà tali che esistano certe rappresentazioni da porre al posto degli i, j, ...; con questa operazione le proposizioni A, B, C, D, ... diventano complessivamente vere. In tal caso dico che le proposizioni A,B,C,D,... sono *concordanti* o *compatibili* rispetto alle parti variabili i, j, ...

[14] Quando si verifichi il caso contrario, quando cioè le proposizioni A,B,C,D,... e gli elementi in esse assunti come variabili i, j, ... abbiano proprietà tali per cui non sia possibile porre al loro posto qualcosa che renda complessivamente vere le dette proposizioni, dico che esse stanno in rapporto di *incompatibilità*.

insieme $Var' = \{primo\}$ otteniamo che le proposizioni in Γ non possono mai essere vere insieme, ossia le proposizioni in Γ sono incompatibili rispetto a Var'. Si vede così, chiaramente, come le proposizioni di un medesimo insieme possano essere tra loro compatibili rispetto ad una certa selezione degli elementi variabili e incompatibili rispetto ad un'altra selezione degli elementi variabili.

Consideriamo, ora, due insiemi $\Gamma = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3, ...\}$ e $\Delta = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3, ...\}$ di proposizioni. Diciamo che le proposizioni in Γ sono compatibili con le proposizioni in Δ rispetto ad un certo insieme di elementi variabili, se e solo se vi è almeno una variazione ammissibile che rende simultaneamente vere tutte le proposizioni in Γ e tutte le proposizioni in Δ. Questa nozione di compatibilità tra insiemi di proposizioni ci servirà per definire i seguenti concetti di dedcibilità, in senso stretto e in senso lato, e di conseguenza logica.

4.3.3 Deducibilità in senso lato rispetto ad un insieme di rappresentazioni variabili

Consideriamo, ora, due insiemi $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ...\}$ e $\Delta = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3, ...\}$ di proposizioni e sia Var un insieme di quelle rappresentazioni che consideriamo, qui, le rappresentazioni variabili. Diciamo che Δ è *deducibile in senso lato* (o, più semplicemente, deducibile) da Γ rispetto alle rappresentazioni variabili in Var se e solo se le proposizioni in Γ sono compatibili con le proposizioni in Δ e, per ogni variazione ammissibile, tutte le proposizioni in Δ sono vere se tutte le proposizioni in Γ sono vere [ML §8.2, p. 60][15]. Occorre rimarcare che anche la nozione di deducibilità (*Ableitbarkeit*) in senso lato, come quella di compatibilità, è relativa ad un insieme di rappresentazioni che sono considerate variabili e distinte dalle altre, considerate fisse. É chiaro che, poiché sono diverse le proposizioni che si generano da date proposizioni di partenza per mezzo di insiemi diversi di elementi variabili, anche i loro valori di verità sono diversi e possono determinarsi casi in cui le proposizioni in Δ sono deducibili da Γ rispetto ad un insieme Var di parti variabili, ma non rispetto ad un insieme Var' di altre parti variabili.

Consideriamo, per esempio, il caso in cui abbiamo di fronte una risma di fogli e sul primo di essi è disegnato un triangolo. Poniamo $\Gamma = \{$*La figura sul primo foglio è un triangolo*$\}$ e $\Delta = \{$*La figura sul primo foglio ha al massimo tre lati*$\}$. Se $Var = \{primo\}$, allora è chiaro che le proposizioni in Δ derivano da Γ. Poniamo, ora, $Var = \{tre\}$. In questo caso non possiamo più dire che le proposizioni in Δ derivino da quelle in Γ, infatti, se sostituiamo *tre* con *due*, abbiamo che *La figura sul primo foglio è un triangolo* è vera, ma *La figura sul primo foglio ha al massimo tre lati* non è vera.

---

[15] Se una o più propoosizioni A,B,C,... devono dirsi compatibili con una o più altre proposizioni M,N,... e proprio rispetto agli elementi i,j, ..., in forza di quanto detto devono esistere almeno alcuni elementi da porre al posto degli i,j,... che rendono vere non soltanto le proposizioni A,B,C,... ma anche le M,N,... Un caso particolarmente notevole si ha quando non solo alcune, ma *tutte* le rappresentazioni sostituite agli i,j,... rendono tutte vere le A,B,C,... e le M,N,... stanno in rapporto di *deducibilità* con le proposizioni A,B,C,... proprio rispetto alle parti variabili i,j,... e nel significato più ampio.

Come vedremo, questa definizione di Bolzano è ormai vicina della definizione di deducibilità, o conseguenza, definita nell'ambito delle ricerche assiomatiche nel campo della matematica. Questa osservazione sarà giustificata a suo tempo, quando parleremo degli Assiomatici, ma si può già dare qualche indicazione. Supponiamo che Γ sia l'insieme degli assiomi della geometria euclidea e Δ un insieme di enunciati formulati nel linguaggio della geometria euclidea. Sia Var l'insieme di tutti i termini che non sono né logici né primitivi nel sistema geometrico considerato. Ebbene, diciamo che Δ è un insieme di teoremi della geometria euclidea se e solo se è deducibile dagli assiomi in Γ solo sulla base del significato attribuito ai termini logici e ai termini primitivi del sistema, ossia facendo variare in tutti i modi possibili il significato degli altri termini.

Questo abbozzo di confronto sarà più chiaro quando parleremo degli assiomatici, ma è opportuno segnalarlo già ora. Oltre alle somiglianze, comunque, va notato che vi sono anche delle differenze: ossia il fatto che Bolzano non lavora con un linguaggio tecnico e non lavora,a differenza dalla logica tradizionale, con alcun linguaggio, ma con quegli enti oggettivi che sono le proposizioni in sé e le rappresentazioni in sé. Da queste differenze, discendono altre caratteristiche che, però, esporrò sotto, dopo aver trattato la nozione di conseguenza logica.

4.3.4 Deducibilità in senso stretto rispetto ad un insieme di rappresentazioni variabili

Ora, è assai interessante osservare che Bolzano propone anche un'altra definizione di deducibilità, che egli chiama *deducibilità in senso stretto*. Siano Γ un insieme di proposizioni, sia ϕ una proposizione e sia e sia Var un insieme di rappresentazioni, esattamente quelle che consideriamo variabili. Diciamo che ϕ è deducibile in senso stretto da Γ se e solo $\{\phi\}$ è deducibile da Γ e non esiste alcun insieme $\Gamma' \subset \Gamma$ tale che $\{\phi\}$ è deducibile da Γ [ML §8.2, pp. 60-1][16].

Si tratta di una nozione di deducibilità che rifiuta ogni forma di monotonia: se ϕ è deducibile in senso stretto da Γ, allora ϕ non è deducibile in senso stretto da alcun insieme Γ' di proposizioni che estende propriamente Γ, ossia tale che $\Gamma \subset \Gamma'$. La nozione di deducibilità stretta elimina qualsiasi forma di ridondanza e di non rilevanza: se da un insieme di premesse da cui si può dedurre, in senso stretto, una certa conclusione aggiungiamo altre informazioni che non sono necessarie per ottenere quella conclusione, allora possiamo parlare sì di deducibilità in senso lato (se le premesse e la conclusione rimangono compatibili), ma non di deducibilità in senso stretto. La ridondanza e l'irrilivenza sono, infatti, come Bolzano si esprime in un altro contesto, offese al buon metodo scientifico che non deve perdere tempo in procedimenti oziosi, come, in genere, è il dedurre

[16] In un senso *più ristretto* (...) dico che una proposizione M è *deducibile* dalle proposizioni A,B,C,... rispetto alle parti variabili i,j, ... quando ogni particolare rappresentazione che, sostituita agli i, j, ..., rende tutte vere le proposizioni A,B,C,... rende vera anche la proposizione M; e, quand'anche non valga lo stesso per una parte delle proposizioni A,B,C,..., cioè quand'anche non sempre, almeno ogniqualvolta diventa vera solo una certa parte di queste proposizioni, diventa vera anche la proposizione M.

qualcosa da più premesse di quelle che siano necessarie (cfr. [ML §3.1, p. 46][17]). A riprova del fatto che queste considerazioni erano particolarmente importanti per Bolzano sta il fatto che è proprio questo senso ristretto di deducibilità quello che gli interessa di più e quello che, di fatto, dichiara di usare nel corso della sua opera [ML §8.2, p. 60][18]. Il primo, quello lato, è qualcosa che può essere preso in considerazione, ma, che, di fatto, è meno utile e diffuso del secondo. Non è un caso, tuttavia, che Bolzano citi anche il caso più generale della deducibilità in senso lato, benché non lo consideri particolarmente interessante. Tale concetto, infatti, è facilmente definibile per mezzo della sua concezione dello studio dei rapporti tra proposizioni per mezzo della variazione di alcune loro parti. Ponendosi dal punto di vista dei rapporti tra proposizioni basate sulla nozione di variazione di alcune loro parti, è facile immaginare situazioni più generali di quelle studiate dalla logica fino a quel momento, perché ci si svincola dal riferimento ad una certa struttura delle proposizioni o dallo studio di certi atti intellettivi per considerare solo, sotto ipotesi piuttosto generali, la conservazione della verità dalle premesse alla concusione.

Considererò più ampiamente il significato di questo atteggiamento in Bolzano. Si può anticipare, comunque, che definizioni come questa e come il precedente requisito della compatibilità tra premesse e conclusioni mostrano come lo studio delle nozioni logiche, in Bolzano, non sia uno studio del tutto slegato da altri interessi, come abbiamo visto, e, come in Aristotele e in Kant, vi sono anche (non solo) considerazioni di ordine epistemologico. In certi passi, Bolzano mostra come egli intenda studiare le nozioni logiche anche per precisare delle nozioni rilevanti per l'impresa scientifica ed intende precisarle in modo che sia significative per tale impresa., (evitando, per esempio, tramite il requisito della compatibilità, di considerare casi in cui dalle premesse si può dedurre qualsiasi conclusione semplicemente perché le premesse sono contraddittorie).

4.4 CONSEGUENZA LOGICA E RAPPRESENTAZIONI LOGICHE

A parte qualche incertezza di cui discuteremo sotto, si può dire che la nozione di conseguenza logica è un'altra relazione oggettiva tra proposizioni. Per la sua importanza nel presente contesto, le dedico un sezione a parte rispetto a quella in cui ho parlato della relazioni di compatibilità, deducibilità in senso lato e deducibilità in senso stretto.

[17] Un altro esempio [di rappresentazione ridondante] potrebbe essere la rappresentazione: 'Questo, che è un albero'. Se infatti, dicendo 'questo', pensiamo effettivamente a un albero, la proprietà che questo oggetto sia un albero segue di nuovo da sé. Si ritiene comunemente un'offesa al buon metodo la ridondanza dei concetti introdotti, sotto determinate denominazioni, in un discorso scientifico. Chi, ad esempio, potrebbe non criticare il matematico che ci volesse spiegare il parallelogramma come un quadrilatero dai lati opposti a due a due uguali e paralleli?.

[18] In un senso più ristretto - e in tal senso userò sempre, d'ora in poi, questa espressione - dico che una proposizione M è deducibile dalle proposizioni A,B,C,... rispetto alle variabili i, j, ... quando (...).

La nozione di conseguenza logica è definita come un caso particolare di deducibilità. Ora, non è chiaro se Bolzano si riferisca, qui, alla deducibilità in senso lato o alla deducibilità in senso stretto. Propendo per la seconda ipotesi, dal momento che poche righe prima, egli ha dichiarato che,da quel punto in poi, avremmo parlato di deducibilità solo in senso stretto. La definizione di conseguenza logica, infatti, è fornita in [ML §8.3, p. 61] come caso particolare della relazione di deducibilità e in [ML §8.2, p. 60] egli dichiara:

> In un senso *più ristretto* - e in tal senso userò sempre, d'ora in poi, questa espressione - dico che una proposizione M è *deducibile* dalle proposizioni A,B,C,... rispetto alle parti variabili i,j, ... (...).

Come vedremo, è molto diverso basare la nozione di conseguenza logica sulla nozione di derivabilità in senso lato piuttosto che su quella di deducibilità in senso stretto, ma Bolzano non è del tutto chiaro.Dopo aver dichiarato nettamente che intende usare la nozione di deducibilità solo in senso stretto, quando, poco dopo, introduce la nozione di conseguenza logica, fa, implicitamente, riferimento anche alla nozione di deducibilità in senso lato. In tal punto, infatti, egli parla anche di deducibilità di un insieme di proposizioni da un insieme di proposizioni [ML §8.3, p. 61][19], esattamente come aveva fatto quando aveva definito la deducibilità in senso lato [ML §8.2, p. 60][20] e diversamente da come aveva fatto quando aveva definito la deducibilità in senso stretto, dove aveva parlato, invece, di deducibilità di una proposizione da un insieme di proposizioni [ML §8.2, pp. 60-1][21].

Sulla base della dichiarazione di Bolzano riportata sopra e sulla base di una considerazione sulla chiarezza con cui appaiono alla mente gli argomenti logicamente validi (che svilupperò poco sotto), ritengo più plausibile pensare che Bolzano intendesse definire la nozione di conseguenza logica come un caso particolare della relazione di deducibilità in senso stretto. Ad ogni modo, dopo aver presentato la nozione di conseguenza logica in questo modo, accennerò anche un'analisi del secondo modo in cui può essere intesa.

Prima di proseguire, occorre sottolineare che molti interpreti di Bolzano hanno sostenuto la visione opposta, ossia che la definizione di conseguenza log-

[19] Spesso, a seconda delle circostanze, è necessaria molta preparazione preliminare per vedere che tra le proposizioni A,B,C,... da un lato e le proposizioni M,N,O,... (...) sussiste un reale rapporto di deducibilità.

[20] Se una o più propoosizioni A,B,C,... devono dirsi compatibili con una o più altre proposizioni M,N,... e proprio rispetto agli elementi i,j, ..., in forza di quanto detto devono esistere almeno alcuni elementi da porre al posto degli i,j,... che rendono vere non soltanto le proposizioni A,B,C,... ma anche le M,N,... Un caso particolarmente notevole si ha quando non solo alcune, ma *tutte* le rappresentazioni sostituite agli i,j,... rendono tutte vere le A,B,C,... e le M,N,... stanno in rapporto di *deducibilità* con le proposizioni A,B,C,... proprio rispetto alle parti variabili i,j,... e nel significato più ampio.

[21] In un senso *più ristretto* (...) dico che una proposizione M è *deducibile* dalle proposizioni A,B,C,... rispetto alle parti variabili i,j, ... quando ogni particolare rappresentazione che, sostituita agli i, j, ..., rende tutte vere le proposizioni A,B,C,... rende vera anche la proposizione M; e, quand'anche non valga lo stesso per una parte delle proposizioni A,B,C,..., cioè quand'anche non sempre, almeno ogniqualvolta diventa vera solo una certa parte di queste proposizioni, diventa vera anche la proposizione M.

ica fornita da Bolzano sia basata sulla relazione di deducibilità in senso lato e non su quella in senso stretto (cfr. Rusnock, Burke [2010], pp.18-9; Cellucci [1985], pp. 19-20, Sebestik [2007]). Nessuno di questi autori, però, sembra notare il problema e, semplicemente, omettono di considerare la parte in cui Bolzano definisce la relazione di deducibilità in senso stretto e dichiara che intenderà sempre deducibilità in questo senso. Non dando importanza a questo passo, non si soffermano neppure a notare la coerenza che vi è tra il basare la nozione di conseguenza logica sulla relazione di deducibilità in senso stretto e le dichiarazioni di Bolzano che mostrano come egli, di fatto, come esempi di argomenti logicamente validi, avesse in mente soprattutto i sillogismi.

4.4.1 Conseguenza logica

Tra le rappresentazioni in sé, dice Bolzano, è possibile distinguere quelle rappresentazioni che sono logiche e quelle che non lo sono. Bolzano non si sofferma a sottolineare questo punto, che tuttavia, come vedremo rivestirà un ruolo centrale nella definizione di conseguenza logica. Bolzano non fornisce, qui, alcun criterio per distinguere le rappresentazioni logiche da quelle non logiche. Dato il suo richiamo alla sillogistica (cfr. [ML §8.3, p. 62]), comunque, è plausibile ritenere che i quattro modi individuati da Aristotele in cui un termine si può predicare di un'altro (totalmente predicarsi, in parte predicarsi, totalmente non predicarsi, in parte non predicarsi) siano esempi di rappresentazioni logiche (presumibilmente composte, in quanto è plasuibile ritenere che *totalmente*, *in parte*, *predicarsi* e *non* siano altrettante rappresentazioni diverse). Ad ogni modo, è importante notare che la nozione che Bolzano fornisce è generale e può applicarsi anche a situazioni diverse da quelle considerate nella teoria del sillogismo.

Ora, consideriamo un insieme di proprosizioni Γ e una proposizione ϕ. Diciamo che ϕ è *conseguenza logica* di Γ se e solo se ϕ è deducibile in senso stretto da Γ quando sono considerate variabili tutte e sole le rappresentazioni non logiche e nel caso in cui questo rapporto di deducibilità risulti chiaro al primo sguardo [ML §8.3, p. 61][22].

Questa definizione di Bolzano rappresenta una notevole novità nell'ambito degli studi logici, benché sia, come vedremo, il risultato anche di elementi tradizionali.

Per prima cosa, notiamo che, Bolzano inserisce nella sua definizione anche il requisito che la deducibilità rispetto al variare tutte le rappresentazioni non logiche sia chiara al primo sguardo [ML §8.3, p. 61]. Ovviamente questo non è un requisito preciso e non è facile comprendere perché Bolzano ne parli. In questa sede, dopo aver rilevato che Bolzano aggiunge tale requisito, dal momento che non è possibile dirne nulla di preciso, lo trascurerò. Del resto, se si pensa

[22] Spesso, a seconda delle circostanze, è necessaria molta preparazione preliminare per vedere che tra le proposizioni A,B,C,... da un lato e le proposizioni M,N,O,..., o anche soltanto la singola M, dall'altro sussiste un reale rapporto di deducibilità: un fatto di per sé a tutti evidente. Solo nel caso che questo rapporto risulti chiaro al primo sguardo e si fondi su ciò che si chiama la mera forma logica della proposizione si suole indicarlo son la denominazione di conseguenza logica.

a come Bolzano ha precedentemente definito le due nozioni di deducibilità, ossia come rapporti oggettivi tra proposizioni e se si pensa che Bolzano ha richiamato tali definizioni proprio prima di spiegare la sua nozione di conseguenza logica, appare presumibile intendere che anche tale relazione debba essere qualcosa di oggettivo, ossia non debba essere inficiata da valutazioni soggettive, quali la chiarezza con cui un certo rapporto di dipendenza appare alla mente. Probabilmente, Bolzano ha aggiunto il requisito della chiarezza non per attribuire alla relazione di conseguenza logica una natura almeno parzialmente soggettiva. Un fatto di tale rilevanza sarebbe stato ben altrimenti enfatizzato. Probabilmente Bolzano pensava che tale aggiunta fosse ininfluente per determinare la relazione di conseguenza logica, ossia che quando vale la relazione di conseguenza logica tra certe premesse ed una certa conclusione, allora tale relazione è evidente. Ciò è possibile se, nonostante la sua definizione di conseguenza logica apra prospettive radicalmente nuove, Bolzano pensava che la classe degli argomenti validi coincidesse con i sillogismi, come del resto fa pensare quel che dice poco dopo aver definito la nozione di conseguenza logica:

> I diversi tipi di conseguenza che possiamo usare per raggiungere un buon risultato li insegna, o almeno li dovrebbe insegnare, la logica (in quella sua parte chiamata sillogistica).

Ciò avvalora il fatto che Bolzano, quando definisce la nozione di conseguenza logica come un caso particolare di deducibilità, si riferisca alla deducibilità in senso stretto e non a quella in senso lato. Nel primo caso, infatti, proprio come accade nel sillogismo, le premesse di un argomento valido sono esattamente quelle richieste per giungere alla conclusione e, nel caso del sillogismo, sono solo due e si può affermare che è facile (chiaro al primo sguardo) rendersi conto che tale argomento è logicamente valido. Nel caso in cui, invece, si ricorra alla nozione di conseguenza in senso lato, le cose non tornano: è, infatti, possibile avere argomenti con premesse ridondanti che potrebbero facilmente generare molti casi di argomenti validi in cui, per il gran numero di premesse da considerare, non è chiaro al primo sguardo che la conclusione segua dalle premesse.

Credo, dunque, che, facendo riferimento solo a nozioni tecniche ed oggettive, si possa definire la nozione di conseguenza logica in Bolzano nel modo seguente:

la proposizione ϕ è conseguenza logica dell'insieme Γ di proposizioni se e solo se ϕ è deducibile in senso stretto da Γ quando sono considerate variabili tutte e sole le rappresentazioni non logiche.

Su questo definizione è possibile sviluppare diverse riflessioni. Vediamo alcune.

Proprietà della relazione di conseguenza

Per prima cosa, possiamo notare che, dalle rispettive definizioni, segue che se ϕ segue logicamente da Γ, allora ϕ è deducibile in senso stretto da Γ e se ϕ è deducibile in senso stretto da Γ, allora ϕ è deducibile in senso lato da Γ. Questa è un'osservazione molto semplice e basta considerare le definizioni di queste relazioni per rendersene conto.

Come si dirà con molti particolari più avanti, poi, vi è un modo, molto diffuso nelle ricerche di logica contemporanee, di intendere la relazione di conseguenza logica che le attribuisce quattro proprietà formali: riflessività, monotonia, transitività e strutturalità. Con qualche anacronismo (useremo argomenti non sillogistici), proviamo a vedere cosa succede se indaghiamo la relazione di conseguenza logica definita da Bolzano per mezzo di questi concetti contemporanei.

Non è il caso, ora di presentarli compiutamente, come si farà, invece, più avanti. É interessante, tuttavia, svolgere alcune considerazioni, anche se non del tutto formali, intorno ad esse ed alla relazione di conseguenza logica.

Riflessività Con *riflessività* intendiamo la proprietà per cui dalle premesse si può derivare una conclusione che sia identica ad una delle premesse. Per il requisito della non ridondanza con cui si definisce la relazione di deducibilità in senso stretto, dobbiamo dire che se vale la proprietà della riflessività per la conseguenza logica, essa deve valere solo tra argomenti con esattamente una premessa. In generale, però, possiamo osservare che tale proprietà non vale perché Bolzano richiede che le premesse e la conclusione siano tra loro compatibili, ossia che vi sia almeno una variazione che faccia sì che le premesse e la conclusione siano vere insieme. In tal caso, allora, dobbiamo osservare che da un proposizione contraddittoria non segue se stessa, in quanto non vi è alcuna variazione che le rende vere insieme (una contraddizione, infatti, è sempre falsa). Si può notare che, se escludiamo gli enunciati contraddittori, allora possiamo dire che la relazione di conseguenza di Bolzano è riflessiva se le premesse sono composte da un solo enunciato. In altre parole, la relazione di conseguenza definita da Bolzano soddisfa la proprietà della transitività nella forma: da $\{\phi\}$ si può derivare ϕ se ϕ non è una contraddizione. Per la proprietà della non ridondanza delle premesse, invece, non vale la riflessività nella forma: da Γ si può derivare ϕ se $\phi \in \Gamma$ ed esiste almeno una variazione che rende tutte simultaneamente vere le proposizioni in Γ. In questo caso, infatti, poiché ϕ segue già da $\{\phi\} \subset \Gamma$, allora non può seguire da Γ. Nel caso, invece, in cui si basi la nozione di conseguenza logica sulla relazione di deducibilità in senso lato e non su quella di deducibilità in senso stretto, allora vale anche questa seconda forma di riflessività ristretta agli insiemi non contraddittori di premesse.

Monotonia Con *monotonia*, invece, intendiamo la proprietà per cui se una conclusione ϕ segue da un insieme Γ di proposizioni, allora ϕ segue da qualunque insieme Δ di proposizioni che contiene Γ. Ciò non è vero per la proprietà di non ridondanza che si lega alla relazione di deducibilità in senso stretto, come abbiamo già notato. Possiamo osservare, comunque, che anche se definissimo la nozione di conseguenza logica sulla base della deducibilità in senso lato e non sulla base della deducibilità in senso stretto (ossia dicendo che ϕ segue logicamente da Γ sse ϕ è deducibile in senso lato da Γ quando sono conisderate variabili tutte le rappresentazioni non logiche), non varrebbe la proprietà della monotonia. Supponiamo, infatti, che ϕ segua da Γ e consideriamo, ora, l'insieme $\Gamma \cup \{\perp\}$, dove $\perp$ è un proposizione contraddittoria. Per la proprietà della compatibilità, come sappiamo, ϕ non segue da Γ e, quindi, ϕ non segue neanche logicamente da Γ.

Transitività Con *transitività* intendiamo la proprietà secondo cui se ϕ segue da Γ ed ogni proposizione in Γ segue da Δ, allora ϕ segue da Δ. La relazione di conseguenza logica definita da Bolzano soddisfa la proprietà della transitività. Assumiamo, infatti che ϕ segua logicamente da Γ ed ogni proposizione in Γ segua logicamente da Δ. Assumiamo che valga Δ. Allora da Δ seguono logicamente tutte le proposizioni in Γ e da queste segue logicamente ϕ. Quindi se vale Δ, allora vale anche ϕ.

Strutturalità Con *strutturalità*, ci riferiamo al fatto che se ϕ segue da $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ...\}$, allora ogni enunciato ϕ' ottenuto da ϕ sostituendo le sue rappresentazioni non logiche con altre rappresentazioni non logiche (in modo da ottenere sempre una proposizione) segue da $\Gamma' = \{\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3, ...\}$. Ora, questa proprietà è valida per definizione nel caso della relazione di conseguenza logica.

Una relazione sottostrutturale Possiamo notare, poi, un'altra aspetto. La relazione di conseguenza logica definita da Bolzano, se analizzata in termini delle proprietà dei sequenti definite da Gentzen, è una relazione di conseguenza sottostrutturale. Vediamo di spiegare la questione senza tecnicismi che ora non sono opportuni. Consideriamo un argomento come un tipo particolare di sequente in cui la conclusione è rappresentata da una sola proposizione. Rappresentiamo l'argomento con premesse $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ...\}$ e conclusione ϕ come il sequente $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ... \vdash \phi$.Ora, una delle proprietà strutturali (da non confondere con la proprietà della strutturalità considerata sopra) definite da Gentzen riguarda la possibilità di considerare equivalenti i due sequenti seguenti $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ... \vdash \phi$ e $\gamma_1 \wedge \gamma_2, \gamma_3, ... \vdash \phi$ dove $\wedge$ rappresenta la congiunzione logica. Ora, per la proprietà della non ridondanza, ciò non vale nel caso della relazione di conseguenza definita da Bolzano. Consideriamo, infatti, i due casi seguenti. Siano ϕ, ψ e ζ delle proposizioni qualsiasi e sia $\rightarrow$ il simbolo che rappresenta l'implicazione materiale:

1. $\zeta, \zeta \rightarrow \phi, \zeta \rightarrow \psi \vdash \phi$
2. $\zeta, (\zeta \rightarrow \phi) \wedge (\zeta \rightarrow \psi) \vdash \phi$.

Ora, il primo sequente esprime un argomento non logicamente valido perché la premessa $\zeta \rightarrow \psi$ è ridondante, ossia ϕ segue già da un sottoinsieme di $\{\zeta, \zeta \rightarrow \phi, \zeta \rightarrow \psi\}$, ossia da $\{\zeta, \zeta \rightarrow \phi\}$. Il secondo sequente, invece, esprime un argomento logicamente valido, in quanto ϕ è vero per ogni variazione delle parti non logiche che rende vere le premesse e non vi è alcun sottoinsieme proprio delle premesse da cui ϕ segue logicamente.

Possiamo notare che, se adottiamo la relazione di deducibilità in senso lato come base per definire la nozione di conseguenza logica, allora tale proprietà strutturale nel senso di Gentzen vale, infatti, in tale caso, non la proprietà della non ridondanza.

Paraconsistenza Un'altra proprietà che può essere considerata è la paraconsistenza. Diciamo che una relazione è paraconsistente se e solo se da non è vero che ogni argomento con premesse contraddittorie è logicamente valido, ossia non è vero che da premesse contraddittorie segue qualsiasi cosa. La relazione di conseguenza logica definita da Bolzano è, in effetti, paraconsistente e ciò può essere mostrato in due modi. Il motivo principale e più generale è che ϕ può essere conseguenza logica di Γ solo se ϕ e Γ sono compatibili, ossia solo se esiste almeno una variazione ammissibile che rende vere insieme sia ϕ sia tutti le proposizioni in Γ. Ora, se Γ è un insieme contraddittorio di premesse, qualunque sia la variazione delle parti non logiche che consideriamo, non sarà mai vero e, quindi, non sarà mai neanche vero che ϕ e Γ sono veri insiemi per qualche variazione, ossia non è vero che ϕ e Γ sono compatibili. Da ciò segue che da un insieme di premesse contraddittorie non segue logicamente nulla e, quindi, tale relazione di conseguenza è paraconsistente. Accanto a questa ragione che vale per ogni caso con premesse contraddittorie, è anche possibile notare che basta la proprietà della non ridondanza per rendere paraconsistente tale relazione di conseguenza logica. Supponiamo, infatti, di avere come premesse le proposizioni in $\{\phi, \neg\phi\}$. Ora, se non abbiamo il requisito della compatibilità e manteniamo tutti gli altri aspetti della definizione di conseguenza logica, possiamo dire che da $\{\phi, \neg\phi\}$ segue logicamente qualsiasi altra proposizione. Tuttavia, non è vero che da ogni insieme contraddittorio di premesse segue logicamente qualsiasi altra proposizione. Infatti, da $\{\phi, \neg\phi, \psi\}$ non segue nulla, benché $\{\phi, \neg\phi, \psi\}$ sia un insieme contraddittorio di premesse. La proprietà della non ridondanza, infatti, impedisce di derivare un enunciato da $\{\phi, \neg\phi, \psi\}$ perché ogni enunciato segue già da $\{\phi, \neg\phi\}$, che è un sottoinsieme proprio di $\{\phi, \neg\phi, \psi\}$. Ora, se, invece, si basa la definizione di conseguenza logica sulla deducibilità in senso lato e non sulla deducibilità in senso stretto, non si può applicare la proprietà della non ridondanza per rendere paraconsistente la relazione di conseguenza logica. La proprietà della paraconsistenza, in tal caso, dipende solo dal requisito della compatibilità tra premesse e conclusione.

Altre proprietà che seguono dalla proprietà della non ridondanza delle premesse Notiamo, poi,che per la proprietà della non ridondanza, non è possibile affermare che una verità logica è conseguenza di ogni insieme di premesse. Se una verità logica deriva logicamente dall'insieme vuoto, infatti, allora essa non può derivare da nessun altro insieme che quello. Questo è un altro aspetto che distingue la nozione di conseguenza logica di Bolzano da definizioni successive che possono essere considerate analoghe a questa (cfr., per esempio, Tarski [1936], su cui avremo modo di soffermarci a lungo). Naturalmente, se si definisce la nozione di conseguenza logica per mezzo della relazione di deducibilità in senso lato e non per mezzo della nozione di deducibilità in senso stretto, allora è possibile affermare, come si, in genere, oggi, che una verità logica è conseguenza di qualsivoglia insieme di premesse.

Sempre per la proprietà della non ridondanza, poi, si può notare che una proposizione ϕ segue logicamente dalle proposizioni in Γ solo se nessun enunciato $\gamma \in \Gamma$ è logicamente deducibile da $\Gamma \backslash \{\gamma\}$. Quel che intendo dire, in altre parole, è che se ϕ segue logicamente dalle proposizioni in Γ, allora tutti gli enunciati in Γ sono logicamente indipendenti l'uno dall'altro. Questo è un requisito sensato solo se, come è in effetti, si pensa che la nozione di conseguenza logica debba aver a che fare con la pratica scientifica, in cui, al fine di non complicare inutilmente gli argomenti, è assai preferibile non assumere delle premesse ridondanti, ossia, che possono essere dimostrate dalle altre premesse già assunte.

Indico, ora, alcuni risultati di un certo interesse, non solo sulla relazione di conseguenza logica in sé, ma anche sui suoi rapporti con le nozioni di deducibilità definite sopra. In genere le dimostrazioni sono omesse, in quanto semplici da ricavare. Uso il simbolo $\neg$ per indicare la negazione di una proposizione. In questo modo, per esempio, con $\neg\phi$ indico la proposizione contradditoria rispetto alla proposizione ϕ. Ora, possiamo affermare che, se è possibile dedurre in senso lato $\{\phi\}$ sia da $\Gamma \cup \{\psi\}$ sia da $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$, allora ϕ non segue in senso stretto né da $\Gamma \cup \{\psi\}$ né da $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ e, quindi, ϕ non è conseguenza logica né di $\Gamma \cup \{\psi\}$ né di $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$. La dimostrazione di questo fatto è immediata se si pensa che la proprietà della non ridondanza delle premesse vale per la relazione di deducibilità in senso stretto e, quindi, anche per la nozione di conseguenza logica, ma non per la relazione di deducibilità in senso lato.

Teorema di deduzione La proprietà della non ridondanza, poi, serve anche a mostrare che vale solo una direzione di quello che poi sarà detto teorema di deduzione. Indichiamo con $\phi \to \psi$, il rapporto di implicazione materiale tra due proposizioni. Allora, possiamo dire che vale:

1. per ogni proposizione ϕ, ψ e per ogni insieme di proposizioni Γ, se ϕ segue logicamente da $\Gamma \cup \{\psi\}$, allora $\psi \to \phi$ segue logicamente da Γ.

   Ciò che non vale, però, è.

2. per ogni proposizione ϕ, ψ e per ogni insieme di proposizioni Γ, se $\psi \to \phi$ segue logicamente da Γ, allora ϕ segue logicamente da $\Gamma \cup \{\psi\}$.

La dimostrazione, nel primo caso, si basa sull'osservare che se ϕ segue logicamente da $\Gamma \cup \{\psi\}$, allora ϕ non può essere falso se sono vere tutte le proposizioni in Γ e se è vera la proposizione ψ, ossia, se vale Γ, allora $\psi \to \phi$ deve essere vera. Poiché, poi, ϕ segue logicamente da $\Gamma \cup \{\psi\}$, allora ϕ è compatibile con le premesse in $\Gamma \cup \{\psi\}$, perciò anche $\psi \to \phi$ è compatibile con le premesse in Γ. Inoltre, se ϕ segue logicamente da $\Gamma \cup \{\psi\}$, allora nessuna premessa è ridondante, perciò anche nel caso in cui $\psi \to \phi$ segua in senso lato da Γ, nessuna premessa è ridondante. Il che significa, però che, allora $\psi \to \phi$ segue in senso stretto da Γ e, poiché, ϕ segue logicamente da $\Gamma \cup \{\psi\}$, allora anche $\psi \to \phi$ deve essere vero se rispetto ad ogni variazione di tutte le rappresetanzioni non logiche che rende vere tutte le proposizioni in $\Gamma \cup \{\psi\}$. Concludiamo, quindi, che $\psi \to \phi$ segue logicamente da Γ.

Non vale, invece, il secondo caso, ossia la direzione inversa. Poniamo, infatti, $\Gamma = \{\psi, \psi \to (\psi \to (\psi \wedge \phi))\}$. Ora, da Γ segue logicamente $\psi \to \phi$, ma, per la proprietà della non ridondanza da $\Gamma \cup \{\psi\}$ non segue logicamente ϕ perché ϕ segue logicamente da $\Gamma \subset (\Gamma \cup \{\psi\})$. Ora, se basiamo la conseguenza logica sulla relazione di deducibilità in senso lato, invece che su quella in senso stretto, vale anche questo secondo caso.

In questo paragrafo mi sono concentrato sulla nozione di conseguenza logica, dal momento che questa è la nozione che ci interessa maggiormente, ma è chiaro che, poiché tutte queste dimostrazioni si basano sul ruolo svolto dalla proprietà di non ridondanza, esse valgono anche sostituendo la relazione di conseguenza logica con la relazione di deducibilità in senso stretto e potrebbero essere facilmente riformulata in tal senso, acquistando un carattere più generale.

4.5 VARIAZIONE DELLE RAPPRESENTAZIONI NON LOGICHE

L'idea principale sviluppata da Bolzano è quella di legare il concetto di deducibilità e, quindi, anche quello di conseguenza logica, al concetto di variazione.

La verità di una proposizione è determinata dal significato delle sue rappresentazioni non logiche, dal significato delle sue rappresentazioni logiche, dal modo in cui le rappresentazioni dei due tipi si combinano fra di loro. Bolzano non considera, diversamente da quel che si farà più avanti, il mondo in cui si devono interpretare le proposizioni. Le proposizioni, infatti, sono già dotate di un significato e si riferiscono già a stati di cose.

La variazione di tutti gli elementi non logici in tutti i modi legittimi possibili garantisce, nelle intenzioni di Bolzano, che il legame tra premesse e conclusione non dipenda dagli enti particolari di cui si tratta. Se un argomento conserva la verità dalle premesse alla conclusione indipendentemente dalle rappresentazioni non logiche che ne compongono gli enunciati, allora significa che la sua validità non dipende da tali rappresentazioni non logiche. La sua validità, in tal caso, dice Bolzano, dipende solo dalla sua *forma logica* [ML §8.3, p. 61][23].

Il metodo di Bolzano, però, dipende criticamente dalla possibilità di distinguere in maniera corretta le rappresentazioni logiche da quelle non logiche, distinzione sulla quale, come abbiamo visto, Bolzano non dice nulla di determinato. Bolzano avvicina i concetti di forma logica e di conseguenza logica. Quando per avere una relazione di conseguenza è sufficiente la forma logica delle proposizioni considerate, allora la deducibilità è conseguenza logica. Analogamente era accaduto nella definizione di validità e validità logica. Poiché per individuare la forma logica consideriamo variabile tutto ciò che non fa parte delle

[23] Solo nel caso in cui questo rapporto [di deducibilità in senso stretto] risulti chiaro al primo sguardo e si fondi su ciò che si chiama la mera *forma logica* della proposizione si suole indicarlo con la denominazione di *conseguenza logica*.

rappresentazioni logiche, la conseguenza logica è una relazione formale. Il tentativo di Bolzano, dunque, è quello di descrivere una relazione formale riducendo il concetto di formalità a quello di variazione di tutte le rappresentazioni non logiche. Se non si dispone di un metodo indipendente per individuare quali siano le rappresentazioni logiche, il progetto, tuttavia, si espone a gravi critiche. Ora, Bolzano non dice molto a questo proposito, anche se, come vedremo non è un problema di cui sia facile la soluzione ed è anche stato sostenuto (cfr. Tarski [1936c]) che non vi è una soluzione univoca in quanto, a seconda dell'ambito, può ritenersi legittimo considerare logici concetti che non sono considerati logici in un altro ambito. Per ora, comunque, preferisco non approfondire oltre tale questione. Più avanti sarà possibile affrontarla con maggiore consapevolezza.

L'idea di variazione è strettamente connessa alla tradizionale idea che la logica sia una disciplina formale, in quanto indipendente da ogni specifico stato di cose di cui trattano le premesse e la conclusione, e all'idea che la logica sia una disciplina del tutto generale e universale, perché presenta forme inferenziali, che in quanto indipendenti da ogni particolare stato di cose, sono valide in ogni campo del sapere. L'idea di descrivere queste proprietà della conseguenza logica con lo strumento della variazione delle rappresentazioni non logiche è un'idea che permette di sviluppare uno studio sistematico e generale degli argomenti logicamente validi e di concepire come ristretto lo studio, come in Aristotele e in Kant, solo di determinate forme inferenziali, privilegiate perché legata al procedimento scientifico o alla natura del pensiero. Mentre per Aristotele, per esempio, il passaggio necessario dalle premesse alla conclusione era sempre dovuto al ruolo del medio e ai particolari rapporti predicativi tra i termini, per Bolzano, tale passaggio è fondalmente basato sulla conservazione della verità dalle premesse alla conclusione quando si considerano variabili tutte le parti non logiche, ossia tutte le parti con un contenuto che non riguarda i rapporti logici tra enti. Nella definizione di conseguenza logica, anche se non compiutamente nella pratica, Bolzano non fa più riferimento a particolari e specifici nessi che devono valere tra ciò che compone le premesse e ciò che compone la conclusione. Con Bolzano si apre la possibiltà di una considerazione semantica della nozione di conseguenza logica, nel senso che si apre la possibilità di caratterizzare la nozione di conseguenza logica non più in termini di regole di inferenza, ma di preservazione della verità dalle premesse alla conclusione e di formalità. I termini semantica e sintassi non sono usati da Bolzano in questo senso e l'idea di logica come sistema formale in senso contemporaneo non si trova ancora nei suoi scritti. Possiamo, però, con le cautele spiegate, usarli per mostrare la novità che si annucia nella riflessione di Bolzano: la conseguenza logica, ora, può essere considerata un concetto semantico, ossia un concetto che ha a che fare con i rapporti che, sotto certe condizioni, valgono tra i valori di verità du ciò che compone un argomento. La nozione di conseguenza logica, quindi, occorre sottolinearlo, si svincola dal riferiemento a date forme inferenziali, ossia da ciò che, con termini posteriori a Bolzano, potremmo chiamare la struttura sintattica di ciò che compone un argomento. In questo modo, la precedente riflessione logica, concentrata solo su certi nessi deduttivi, può apparire come ristretta in modo improprio a certe forme di argomenti e si può porre il problema di indagare, in generale, qualsiasi forma argomentativa valida e la relazione di conseguenza logica in sé, svincolata da ogni limitazione dovuta al privilegiamento di certe forme di inferenza.

4.5.1 Caratteristiche fondamentali della nozione di variazione

Abbiamo visto, però, che, seguendo l'impostazione di Bolzano, diventa importante capire come sia possibile distinguere tra rappresentazioni logiche e non logiche (o, comunque, di capire cosa significa operare tale distinzione e cosa significa, eventualmente, il non poterla effettuare con chiarezza una volta per tutte). Bolzano riconosce esplicitamente che la distinzione tra le rappresnetazioni che sono logiche e quelle che non lo sono non sembra tracciabile con chiarezza una volta per tutte [WL II 148][24]. Ciò costituisce un primo problema, a cui ho già accennato, ma, ora, è sufficiente notare che vi è tale problema e rimandarne la discussione ai capitoli successivi, quando sarà possibile trattarla con più consapevolezza.

Come vedremo, la nozione di variazione delle parti non logiche degli enti che compongono un argomento è stata usata anche da Tarski [1936c] per fornire una definizione di conseguenza logica ed è stata criticata, in molti modi, da Etchemendy [1990] e Etchemendy [2008]. A suo tempo, considereremo tutte queste questioni che, tuttavia, ho voluto citare già adesso per introdurre alcune considerazioni che riguardano la nozione di conseguenza logica definita da Bolzano e che, come si capirà meglio più avanti, si collegano alle critiche che Etchemendy ha mosso contro Tarski. In questo modo, sarà possibile mostrare alcune particolarità della definizione di Bolzano che, nonostante il comune ricorso alla nozione di variazione delle parti non logiche, la distinguono dalla definizione che sarà fornita da Tarski.

Livelli di analisi logica

Possiamo notare, in primo luogo, che la proposta di Bolzano può essere considerata soddisfacente solo se esiste un livello massimo di analisi logica e lo si può individuare considerando le rappresentazioni non logiche di una proposizione. Vediamo di affrontare tale questione con un esempio. Consideriamo il seguente argomento:

$$\frac{\text{Tutti i lacedemoni sono uomini} \quad \text{Tutti gli uomini sono mammiferi e bipedi}}{\text{Tutti i lacedemoni sono mammiferi.}}$$

Se consideriamo logiche le rappresentazioni dei modi in cui una rappresentazione si può predicare di un'altra e gli usuali connettivi proposizionali e consideriamo non logiche tutte le altre rappresentazioni, tratta di un argomento logicamente valido nel senso di Bolzano (rispetta anche la proprietà della non

[24] Il dominio dei concetti appartenenti alla logica non è demarcato così nettamente che non possano sorgere dispute in merito.

ridondanza). Immaginiamo, però, di formalizzarlo nel modo seguente. Poniamo L=lacedemoni, U=uomini, P=mammiferi e bipedi e, infine, M=mammiferi. Indichiamo i modi di predicazione con gli stessi simboli usati nel capitolo su Aristotele. Otteniamo, dunque, la seguente formalizzazione:

$$\begin{array}{c} UaL \\ PaU \\ \hline MaL \end{array}$$

In questo modo, mostriamo che intendiamo applicare la variazione delle rappresentazioni non logiche alle rappresentazioni *lacedemoni*, *uomini*, *mammiferi e bipedi* e *mammiferi*. Ciò che è importante notare è che consideriamo come un'unica rappresentazione *mammiferi e bipedi*. Nella definizione di conseguenza logica, nulla impedisce di considerare *mammiferi e bipedi* come un'unica rappresentazione e, quindi di considerare variazioni di tutto il complesso *mammiferi e bipedi* e non delle due parti (*mammiferi*, da un lato, e *bipedi*, dall'altro) separatamente. Questa forma argomentativa non è logicamente valida. Possiamo facilmente mostrare una variazione che rende vere le premesse e falsa la conclusione. Definiamo, infatti, la seguente variazione: *lacedemoni/lacedemoni*, *uomini/uomini*, *mammiferi e bipedi/mammiferi e bipedi*, *alberi/mammiferi*. In sostanza, lasciamo immutate tutte le rappresentazioni, tranne l'ultimo caso, in cui sostituiamo *alberi* a *mammiferi*. In tal modo, è chiaro, le premesse sono vere e la conlusione è falsa.

Questa semplice osservazione pone in luce un problema importante. Ogni proposizione, in genere, può essere considerata come l'esemplificazione di *diverse* forme logiche. Ne segue che anche gli argomenti, composti da proposizioni, possono, in genere, essere considerati l'esemplificazione di forme argomentative diverse e alcune di esse posso non essere logicamente valide. Questo argomento sarà affrontato in modo più approfondito, con gli strumenti dei moderni sistemi formali, più avanti. É importante, tuttavia, svolgere alcune considerazione già ora, perché il modo con cui Bolzano definisce la nozione di conseguenza logica rende ormai ineludibile affontare questo problema, che non si poneva per Aristotele e Kant, dal momento che consideravano solo forme argomentative particolari e definite in modo tale da avere un struttura che evitasse formalizzazioni ambigue.

Se un argomento è esemplificazione di almeno una forma argomentativa logicamente valida, allora è logicamente valido. Il problema, quindi, è che, se forniamo un caso di forma argomentativa di cui l'argomento considerato è un'esemplificazione e mostriamo che tale forma non è logicamente valida, non possiamo concludere che, quindi, l'argomento non è logicamente valido. Potrebbe, infatti, esserci un'altra forma argomentativa di cui tale argomento è un'esemplificazione e che mostra che tale argomento è logicamente valido. Nel caso dell'argomento considerato sopra per esempio, possiamo mostrare che tale argomento è valido individuando la sua forma logica nel modo seguente. Siano L, U e M come sopra. Ora, però, non consideriamo più come unica la rappresentazione *mammiferi e bipedi*, ma la consideriamo come composta da mammiferi, da un lato, e da bipedi, dall'altro e poniamo B=bipedi. Possiamo, allora, indicare la forma di tale argomento in questo modo:

$$\frac{\begin{array}{c} UaL \\ (M \wedge B)aU \end{array}}{MaL}$$

A questo punto, non è più possibile trovare una variazione che renda vere le premesse e falsa la conclusione e, dal momento che premesse e conclusione sono compatibili e le premesse non sono ridondati, possiamo affermare che la conclusione segue logicamente dalle premesse.

Poiché Bolzano, quindi, non lega la sua definizione di conseguenza logica a forme inferenziali particolari, ma all'idea di variazione delle rappresentazioni non logiche, diventa importante capire quale sia il livello adeguato di analisi logica in cui occorre porsi per essere sicuri di non dichiarare non logicamente validi argomenti che, invece, sono logicamente validi. A questo punto, è importante richiamare una caratteristica delle rappresentazioni, così come sono state definite da Bolzano. Ogni rappresentazione o è semplice o è stata ottenuta per composizione, tramite un numero finito di passaggi da rappresentazioni semplici. Vale a dire che se ci troviamo di fronte ad una rappresentazione, o questa è semplice o è complessa e, allora, possiamo sempre scomporla, in un numero finito di passi, in rappresentazioni che sono semplici. Tutto ciò ricorda, non a caso, il procedimento di formazione degli enunciati e dei termini nei sistemi formali contemporanei. Come tale procedimento è essenziale per permettere una definizione ricorsiva di verità di un enunciato e, quindi, di assicurare di essere sempre in grado di riconoscere, in linea di principio, un argomento logicamente valido, così questa natura delle rappresentazioni è essenziale per poter accettare la definizione di conseguenza logica in termini di variazione delle parti non logiche delle proposizioni.

Quel che Bolzano non considera, ma che sembra immplicito dal suo discorso, è che la possibilità di scomporre le rappresentazioni composte in rappresentazioni semplici deve essere univoca, ossia non deve essere possibile scomporre una rappresentazione in modi alternativi, altrimenti non si saprebbe indicare una forma logica unica delle proposizioni a cui fare riferimento e a cui demandare l'onere di assicurare che il metodo della variazione sia una definizione accettabile della nozione di conseguenza logica. Una volta ottenuta una scomposizione di una rappresentazione complessa in rappresentazioni semplici, infatti, non si potrebbe escludere la possibilità che vi siano altri scomposizioni che conducono ad altre rappresentazioni semplici e, quindi, non si potrebbe escludere che esistano altre forme argomentative di cui un certo argomento è un'esemplificazione e che potrebbero mostrare che è logicamente valido, laddove quella ottenuta con la precedente scomposizione rendeva possibile formulare controesempi.

Ora, Bolzano non sembra avere coscienza di tale problema, in quanto non ne fa alcuna menzione. Egli, però, sembra dare per scontato che la scomposizione delle rappresentazioni complesse in rappresentazioni semplici siano sempre univoca. Quando, infatti, fornisce degli esempi di scomposizione, non mostra di avere dubbi su quale sia il modo di rilsolvere le rappresentazione complesse in quelle semplici (cfr. [ML §3.1, pp. 45-6][25]). Egli, poi, parla direttamente di quelle rappresentazioni di cui è composta un'altra data rappresentazione [ML §3.1, p. 46], dove non fa accenno a possibilità di scomposizione alternative e legittime e parla risolutamente di *quelle* rappresentazioni che compongono una rappresentazione complessa come certe rappresentazioni ben determinate e non alcune tra le rappresentazioni possibili con in cui si potrebbe, alternativamente, scomporre una certa rappresentazione complessa.

C'è, poi, un ulteriore aspetto che non è esplicitamente menzionato in Bolzano, ma che, ancora un volta, sembra implicito nel suo discorso. Non basta, infatti, che le rappresentazioni composte siano univocamente scomponibili in rappresentazioni semplici per poter accettare una definizione della conseguenza logica in termini di variazione delle rappresentazioni non logiche. Occorre, infatti, che anche le proposizioni complesse, ossia le proposizioni composte da altre proposizioni, siano univocamente scomponibili in proposizioni semplici. In questo caso, non possiamo basarci su esempi di scomposizione delle proposizioni complesse in proposizioni semplici perché Bolzano non ne fornisce. Poiché, però, tratta questo punto come non problematico e non accenna a possibili scoposizioni alternative, è plausibile pensare che, analogamente al caso delle rappresentazioni, ritenesse che anche le proposizioni complesse si possono scomporre in un unico modo nelle proposizioni semplici.

Ora, se ammettiamo che le proposizioni complesse si possono scomporre in modo univoco in proposizioni semplici e che le rappresentazioni che compongono tali proposizini semplici si possono, a loro volta, scomporre in modo univoco in rappresentazioni semplici, allora è possibile sostenere che il metodo della variazione delle parti non logiche delle proposizioni è in grado di individuare tutti gli argomenti logicamente validi. Ciò è possibile perché si può individuare la forma logica che mostra in modo esaustivo la struttura dell'argomento e si può definire la variazione sulle rappresentazioni semplici ed essere sicuri che, in tal modo, si induce un'univoca variazione di tutte le parti complesse che prende in considerazione ogni aspetto della struttura degli argomenti. É chiaro che se un argomento risulta logicamente valido quando è stata considerata in modo completo la sua struttura logica, allora è effettivamente logicamente valido e, soprattutto, non può esserci un argomento logicamente valido che non è riconosciuto come tale perché stiamo trascurando alcuni aspetti della sua struttura che, se considerati, mostrerebbero che è logicamente valido.

Torniamo all'esempio di prima. Supponiamo che *lacedemoni*, *uomini*, *mammiferi* e *bipedi* siano rappresentazioni semplici. Ora, se definiamo le diverse variazioni sempre considerando le rappresentazioni semplici, allora siamo sicuri che non stiamo trascurando qualche elemento logico dell'argomento. Nell'esempio esposto sopra, infatti, abbiamo potuto trovare un caso in cui le premesse erano vere e la conclusione falsa solo perché non abbiamo scomposto la rappresentazione *mammiferi e bipedi* nelle sue parti componenti.

[25] ad esempio, la rappresentazione 'nula' può considerarsi composta delle due rappresentazioni 'non' e 'qualcosa'; la rappresentazione 'triangolo equilatero', che possiamo esprimere anche con più parole, 'un trinagolo che è equilatero', o 'dai tre lati uguali', contiene le rappresentazioni 'trinagolo', 'lato', 'uguale' ecc..

La definizione di variazione, dunque, per evitare problemi di questo tipo, dovrebbe essere sempre ristretta alle variazioni semplici. In questo modo siamo sicuri che quando induciamo una variazione sulle rappresentazioni complesse non stiamo trascurando alcuna informazione di natura logica. In Bolzano, se si accetta l'interpretazione che ne ho fornito, è possibile dare una definizione di questo tipo, anche se è solo con lo sviluppo dei successivi sistemi formali che questa procedura, ma in un altro contesto, è stata articolata in modo completo e soddisfacente.

Natura non linguistica degli argomenti

Occorre sottolineare che la relazione di conseguenza logica definita da Bolzano non vige tra enti linguistici. Questo punto marca una netta differenza tra la concezione di Bolzano e quelle analoghe (cfr, per esempio, Tarski [1936c]), formulate successivamente. Non si tratta solo di una differenza concettuale, per quanto rilevante. Ciò implica anche che alcuni aspetti che costituiscono un problema per il secondo genere di definizioni non rappresentano un problema per Bolzano.

In particolare, come vedremo meglio, prima di fornire la sua definizione di conseguenza logica, Tarski [1936c, p. 415] considera il tentativo di definire tale relazione in termine di sostituizione dei simboli non logici con altri simboli non logici di tipo opportuno. Questo modo di procedere, da un lato, ricorda il procedimento di Bolzano che fa variare le rappresentazioni non logiche sostituendole con altre rappresentazioni non logiche opportune. Tarski [1936c, p. 415-6] critica tale procedimento perché, si osserva, nulla ci assicura che il linguaggio sia dotato del poter espressivo necessario per trovare almeno un controesempio per ogni argomento che non è logicamente valido. Ebbene, per Bolzano non si pone alcun problema di questo tipo, in quanto egli afferma di non muoversi all'interno di un linguaggio, né formale né naturale. Le proposizioni in sé e le rappresentazioni in sé costituiscono degli enti che sussistono indipendentemente dagli altri (eccetto Dio) e oggettivamente. Il limite del linguaggio umano con cui si possono descrivere tali proposizioni e tali rappresentazioni non è un limite delle proposizioni o delle rappresentazioni.

Certo, si potrebbe chiedersi se vi sono casi in cui il linguaggio con cui possiamo parlare delle proposizioni in sé e delle rappresentazioni in sé non è in grado di descrivere i casi necessari a formulare dei controesempi ad argomenti che non sono logicamente validi. Se vi sono casi di questo tipo, la definizione di conseguenza logica di Bolzano potrebbe anche essere una definizione concettualmente accettabile, ma perderebbe interesse in quanto, in pratica, dovendo ricorrere al linguaggio per parlare di proposizioni e rappresentazioni, si rivelerebbe difettosa.

Ad ogni modo, la generalità della definizione di conseguenza logica fornita da Bolzano, permette di staccarsi da considerazioni relative alla forma linguistica degli enunciati o dalla conformità degli argomenti a determinati atti dell'intelletto e movimenti del pensiero. Con il suo riferirsi ad un piano di realtà oggettive e indipendenti tra cui vigono relazioni oggettive, Bolzano fornisce gli strumenti (che egli non usa fino in fondo) per definire una relazione di conseguenza logica svincolata dall'epistemologia, dalla rilevanza delle premesse per la conclusione, dalla credenza, dalla pensabilità, ... Come abbiamo in parte già visto e come torneremo a dire sotto, se è vero che Bolzano fornisce gli strumenti concettuali per effettuare questo cambiamento nella concezione della conseguenza logica e nella concezione della logica in sé, è anche vero che, nella sua riflessione, permangono elementi più tradizionali, come la richiesta di compatibilità tra premesse e conclusione (al fine di evitare deduzioni banali, come nel caso in cui le premesse sono contraddittorie), il richiamo al sillogismo e la proprietà di non ridondanza delle premesse.

4.5.2 Universo unico

Un altro importante aspetto che distingue la definizione della conseguenza logica data da Bolzano da quella di Tarski [1936c] è che Bolzano assume un unico universo rispetto a cui valutare il valore di verità delle proposizioni alla luce delle diverse variazioni ammissibili, mentre Tarski, che, ricordiamolo, opera con linguaggi e fornisce la sua definizione di conseguenza logica, nell'ambito della Teoria dei tipi, richiede che si prendano in considerazione diversi universi. In questo modo, Tarski vuole evitare che alcuni argomenti risultino logicamente validi solo perché vi sono caratteristiche specifice del particolare universo a cui ci stiamo riferendo per valutare il valore di verità degli enunciati[26] che impediscono di costruire un controesempio che, invece, si troverebbe se si considerassero universi con una diversa composizione.

Non è il caso, qui, di approfondire questa questione che ci terrà impegnati più avanti, quando avremo maggiori informazioni e potremo studiarla più in dettaglio. É, comunque, importante segnalare anche questa particolarità della definizione di conseguenza logica fornita da Bolzano.

4.6 CONCLUSIONE

Come abbiamo visto e più volte sottolineato, Bolzano, pur mantenendo legami con la logica tradizionale, fornisce una definizione di conseguenza logica generale e che introduce elementi decisamente nuovi, quali l'esplicita e consapevole caratterizzazione della formalità della conseguenza logica in termini di variazoine. Con tale definizione, la nozione di conseguenza logica è, in linea di principio, definita in sé, senza legarla a certe forme inferenziali, determinate da certi rapporti predicativi o da certi atti intellettivi. Bolzano definisce la relazione di conseguenza logica come una relazione oggettiva tra enti che sussistono indipendentemente dal soggetto. Certo non si comprenderebbe la peculiarità della posizione di Bolzano se si pensasse che è stato un primo tentativo di fare quel che farà Tarski dopo di lui (come vedremo, infatti, Tarski fornirà una caratterizzazione della conseguenza logica che è avvicinabile a quella data da Bolzano

[26] In questo contesto, possiamo considerare gli enunciati di cui parla Tarski come equivalenti alle proposizioni di cui parla Bolzano. Mostrerò a suo tempo, però, che, in realtà si tratta di due concetti differenti.

per certi importanti aspetti). La posizione di Bolzano è semplice una posizione tutta sua e il suo tentativo è diverso, anche negli scopi, come vedremo, da quel che farà Tarski. Abbiamo, infatti, notato, come le forme sillogistiche costituiscano il suo punto di riferimento principale e come egli intenda legare lo studio della nozione di conseguenza logica (e, più in generale, di deducibilità) a ciò che può essere interessante nel campo delle ricerche scientifiche, evitando inferenze considerate banali. In questo modo, infatti, si spiegano le condizioni, sulle quali ci siamo già soffermati, della compatibilità tra le premesse e la conclusione e la non ridondanza della premesse. In tal modo, infatti, si evita di prendere in considerazione forme argomentative che un ricercatore, in genere, non ritiene interessanti. Non è, infatti, in alcun modo significativo, mettersi a dedurre logicamente ogni premessa se si sono adottate premesse contraddittorie. Piuttosto, quel che accade in questi casi, è cercare di correggere le premesse in modo da evitare la contraddizione. Allo stesso modo, è in genere preferibile non assumere premesse che, di fatto, non servono per dedurre una certa conclusione e concentrarsi, economicamente, solo sugli argomenti che non si basano su premesse ridondanti.

Queste condizioni (compatibilità e non ridondanza) sono certo, in genere, preferibili quando si svolge un'indagine scientifica. Bolzano, intendeva presentare una logica che fosse anche una metodologia ed un'euristica di cui si potesse servire lo scienziato nel corso delle sue indagini. Abbiamo visto, sopra, alcune sue affermazioni che pongono in rapporto le sue indagini con il campo delle ricerche scientifiche. Un'altra importante attestazione di questa sua volontà di collegare la logica con l'indagine scientifica è rappresentato dagli stessi contesti in cui Bolzano ha esposto le sue ricerche logiche. Innazitutto Bolzano non ha mai esposto le idee nel campo della logica in un libro a sé stante, dedicato solo a questa disciplina. Egli, piuttosto ha esposto tali sue idee o nella *Wissenschaftslehre*, che fa riferimento all'indagine scientifica fin dal titolo o in ML, che, ancora una volta, rappresenta solo l'introduzione all'incompiuta *Grössenlehre*, in cui avrebbe dovuto esporre i risultati conseguiti nell'ambito delle sue ricerche matematiche.

Capitolo 5

TRA '800 E '900: CALCOLO, ALGEBRA E TEORIA ASSIOMATICA

5.1 PREMESSA

In questo capitolo, intendo esaminare alcuni spunti che si ritrovano nelle opere di Frege, degli algebristi della logica e degli assiomatici. Come vedremo, in questi autori si ritrovano, da punti di vista differenti, delle riflessioni che, come nel caso di Frege e degli assiomatici, sono direttamente rilevanti per approfondire ciò che si può legittimamente intendere con la nozione di conseguenza logica o che, come nel caso degli algebristi della logica, presentano una nuova idea di ciò che è la logica, di quali siano i suoi scopi e i suoi problemi che, differenziandosi nettamente dalla posizione logicista e avendo dei punti in comune, piuttosto, con lo studio assiomatico delle teorie, avrà grande influenza nel determinare il sorgere degli studi che saranno detti metateorici e che saranno così importanti, nel XX secolo, per le riflessioni sulla nozione di conseguenza logica.

Occorre ribadire, seppur velocemente, che non intendo affrontare tutti gli spunti di riflessione che questi autori nel campo, in generale, della logica. Ciò che propongo, piuttosto, è un percorso attraverso di essi che ne metta in luce solo quanto strettamente interessante per i nostri scopi.

In Frege è importante notare la sua idea di calcolo e sistema deduttivo, unita alla convinzione che la logica costituisca un unico sistema posto a fondamento di tutte le discipline deduttive e che i suoi assiomi esprimano delle verità necessarie. In quanto tale, la logica non può essere studiata dall'esterno, da un punto di vista che oggi chiameremmo emtalogico, in quanto le dimostrazioni possono essere compiute solo all'interno del sistema e non al di fuori di esso e su di esso. Per compiere il suo progetto di fondazione logica dell'aritmetica, Frege definisce un linguaggio formale e un sistema deduttivo che, nei suoi tratti, essenziali non si differenzia dalle presentazioni attuali dei sistemi formali. In tal sistema, le derivazioni sono compiute per mezzo degli assiomi e delle regole di deduzione, secondo uno spirito che ha delle analogie con l'idea di inferenza come seguire una regola che abbiamo trovato in Kant.

Nella tradizione dell'algebra della logica, invece, troviamo una concezione della logica che non la pone a fondamento dei sistemi matematici e, quindi, in linea di principio, non analizzabile come ogni altra teoria matematica. Gli algebristi della logica, invece, studieranno la logica proprio come un sistema matematico, in modo da poter studiare le proprietà di tale sistema e ricavare informazioni su di esso. I termini della logica e i suoi assiomi, per gli algebristi della logica, non hanno un'interpretazione fissata una volta per tutte, ma piuttosto, possono essere interpretati in molti modi diversi e ciò permetterà di affrontare con il metodo dei modelli e dei contromodelli problemi quali la consistenza e l'indipendenza degli assiomi.

Con lo studio assiomatico delle teorie matematiche, con cui l'algebra della logica ha diverse affinità, troviamo all'opera una concezione della conseguenza logica che influnzerà direttamente Tarski e che assumerà un ruolo centrale nel dibattito del XX secolo su questo nozione. Si tratta della concezione della conseguenza logica come relazione tra un insieme di enunciati (le premesse) ed un enunciato (la conclusione) basata sulla variazione delle interpretazioni possibili dei termini primitivi della teoria e sulla preservazione della verità dalle premesse alla conclusione. Come vedremo, gli assiomatici insisteranno molto su questo aspetti. Essi pongono tali nozioni alla base delle loro ricerche, interessate a mostrare come le teorie assiomatiche non siano interpretabili in un unico modo e, perciò, le conseguenze degli assiomi valgono solo per motivi formali, ossia senza tenere conto dei particolari enti che si possono assegnare ai termini primitivi, e interessate a studiare, per mezzo della tecnica dei modelli e dei contromodelli, la coerenza di diversi sistemi di assiomi e la loro non ridondanza, ossia il fatto che nessun assioma possa essere dedotto dai rimanenti.

5.2 LOGICA COME CALCOLO IN FREGE

Come è noto, Frege ha fornito un contibuto di notevole importanza nell'ambito della logica e ha lasciato dei lavori di grande complessità e che si riferiscono a molteplici problemi. Occorre sottolineare che, qui, ce ne occuperemo solo per quel che riguarda in senso stretto la nostra indagine sulla nozione di conseguenza logica. Ciò significa che non fornirò una trattazione completa delle sue idee nel campo della logica e che non mi occuperò, neanche per sommi capi, di molte sue idee che sono, per altri aspetti, di grande interesse e che hanno ricevuto notevole attenzione.

Quel che risulta notevole, qui, è la sua presentazione della logica come un *sistema deduttivo*. Frege assume che via siano enti particolari, detti *contenuti concettuali*, che, non dissimilmente dalle proposizioni in sé di cui parlava Bolzano, sono enti oggettivi che determinano delle conseguenze. Egli abbandona il ricorso al linguaggio naturale e fissa un *linguaggio formale* che permette di indicare precisamente la forma logica di tali contenuti concettuali e servirsi solo di questa forma logica per determinare le possibili conseguenze dei contenuti concettuali esaminati. Ora, come vedremo, ciò che è centrale in Frege non è la nozione di conseguenza logica, che non è pressoché nominata nei suoi scritti, bensì la nozione di *derivabilità* di certe formule espresse nel linguaggio formale adottato per mezzo degli assiomi e delle regole del sistema. Negli scritti di Frege si parla, come vedremo, di conseguenza logica (*logische Folge*) solo raramente, per affermare che che ciò che si ricava, mediante una deduzione, dagli assiomi segue logicamente da essi (cfr., per esempio, [BS *Intr.* p. 104][1]). Come abbiamo detto e come spiegherò meglio, Frege non pone mai al centro dei suoi interessi il problema di studiare la nozione di conseguenza logica in quanto tale e non ne fornisce mai una definizione generale e precisa.

Frege, dunque, da un lato è fedele all'idea di seguire una regola che Kant aveva considerato centrale nello studio della logica, ma d'altro lato introduce la nuova nozione, di importanza fondamentale, di derivazione in un sistema formale, che pone la nozione di seguire una regola in un contesto nuovo esattamente regimentato che permette di derivare, secondo Frege, tutte le leggi logiche da un ristretto numero di assiomi e di regole di inferenza, assunte come base.

5.2.1 LA SOSTITUZIONE DEL LINGUAGGIO NATURALE CON L'IDEOGRAFIA

Nell'ambito delle su ricerche sui fondamenti della matematica, Frege si propone di indagare fino a che punto sia possibile ridurre l'aritmetica ad un sistema formale deduttivo basato solo su verità logiche (le leggi del pensiero), valide in generale, e forme inferenziali che garantiscono che la conclusione segue logicamente dalle premesse e fino a che punto sia possibile affermare che la dimostrazione delle verità dell'aritmetica non dipende da fatti empirici [BS *Intr.*, p. 103-4][2]. Per ottenere questo risultato occorre descrivere un metodo rigorosamente scientifico per il procedere matematico [BS *Intr.*, p. 104][3], dal momento che Frege si riteneva insoddisfatto del rigore delle prove che si trovavano solitamente negli scritti dei matematici. Esprimendosi in larga parte per mezzo del linguaggio naturale, infatti, i matematici si esponevano al rischio di assumere la validità o, addirittura, l'evidenza di certi passaggi solo sulla base di suggestioni linguis-

[1] La via da seguire in tale indagine era questa: che dapprima io cercassi di ricondurre alla conseguenzialità logica il concetto dell'essere ordinato in una successione, per poi, proseguire, partendo da ciò, fino al concetto di numero.

[2] Suddivideremo in due tipi tutte le verità che abbisognano di una fondazione, ascrivendo al primo quella la cui dimostrazione può esssere condotta in modo puramente logico, al secondo le verità la cui dimostrazione deve appoggiarsi su fatti empirici. (...) Orbene, essendomi posto la questione a quale di questi due tipi appartenessero i giuudizi aritmetici, dovetti innazi tutto indagare fino a che punto si possa procedere nell'aritmetica in modo puramente deduttivo, basandosi solo sulle leggi del pensiero, che sono al di sopra di tutte le particolarità. La via da seguire in tale indagine era questa: che dapprima io cercassi di ricondurre alla conseguenzialità *logica* (*logische* Folge) il concetto dell'essere ordinato in una successione, per poi, proseguire, partendo da ciò, fino al concetto di numero.

[3] Per evitare che in questo tentativo si introducesse inavvertitamente alcunché di intuitivo, tutto doveva svolgersi senza la minima alcuna entro la catena deduttiva.

tiche e contenutstiche e non sulla base della struttura formale dei pensieri con cui hanno a che fare. Può darsi che tali suggestioni non siano formalmente valide e che segnino, quindi, delle rotture nel concatenamento logico dei pensieri [BS *Intr.*, p. 104][4].

Frege si pone, quindi, il problema di escogitare un metodo che permetta di esaminare in modo affidabile la validità di una catena di deduzioni. Ciò significa elaborare un metodo che permetta di precisare ogni singolo passo argomentativo in modo che non sia possibile sbagliarsi e compiere un'inferenza illegittima e ciò significa anche che tale nuovo metodo costringe ad essere del tutto espliciti al riguardo delle ipotesi e delle modalità inferenziali assunte [BS *Intr.*, p. 104][5]. Non è possibile dichiarare valida un'inferenza in cui alcuni passaggi non sono giustificati per mezzo del ricorso a regole deduttive ammesse e certe e neppure è possibile dichiarare valida un'inferenza in cui alcuni passaggi risultino in forza di premesse non esplicitamente inserite nella deduzione. Ogni oscurità e ogni imperfezione deve essere eliminata e ogni deduzione deve condurre, passo dopo passo, in modo certo da ciò che è dichiarato ed esplicitamente posto in evidenza a ciò che sicuramente segue da tali principi.

Questo ideale di rigore scientifico è sempre stato presente nell'opera di Frege e si ritrova ugualmente espresso tanto nella *Begriffsschrift* del 1879 quanto nei *Grundgesetze der Arithmetik* del 1893.

Nella prima opera si esprime nel modo che ho riassunto sopra e le stesse cose sono ripetute anche all'inzio dei *Grundgesetze*:

> L'ideale di un metodo rigorosamente scientifico per la matematica potrebbe venire, secondo me, così delineato.
>
> Che tutto venga dimsotrato non si può certo pretendere, perché impossibile. Si può esigere però che tutte le proposizioni, che si usano senza dimostrazione, vengano espressamente enunciate come tali, affinché si riconosca con chiarezza ove si fonda l'intero edificio. Bisogna quindi cercare di restringere il loro numero al minimo possibile, dimostrando tutto ciò che risulta dimostrabile.
>
> Si può esigere in secondo luogo - e con ciò io compio un passo al di là di Euclide - che vengano espressamente elencati, prima di costruire l'edificio matematico, i metodi di deduzione e di dimostrazione che si applicheranno in esso. Altrimenti è impossibile garantire che la stessa precedente esigenza sia davvero soddisfatta [GA §1, p. 480].

Come in BS, così in GA, Frege pone l'accento sull'importanza di esser in grado di assicurare che una prova sia condotta in modo del tutto rigoroso e

[4] Cercando di soddisfare nel modo più rigoroso a questa esigenza [di evitare ogni lacuna entro una catena deduttiva], incontrai un ostacolo nell'inadeguatezza della lingua: infatti, malgrado la crescente pesantezza d'espressione, la lingua tanto meno mi permetteva di raggiungere quella precisione che il mio intento esigeva, quanto più complesse divenivano le relazioni.

[5] Da questa necessità nacque l'idea dell'ideografia che qui presento. Essa deve dunque servire anzitutto a esaminare nel modo più sicuro la connessione di una catena deduttiva e a mettere in evidenza ogni ipotesi che voglia inavvertitamente insinuarvisi, affinché, successivamente si possa indagare sulla sua origine.

sicuro. Non si deve lasciare nulla di sottointeso o di implicito, ma tutto deve essere mostrato in modo che il processo deduttivo si svolga senza lacune che potrebbero inficiarne la validità. Solo in questo modo, come si evidenzia ancora in GA, è possibile evitare ogni lacuna da una catena di ragionamenti e rendersi conto di ogni assioma o presupposto impiegato per compiere tale successione di passi inferenziali [GA §1, p. 480][6]. Se, in questo modo, si riesce a dedurre ogni verità logica solo da leggi logiche e per mezzo di regole di inferenza valide, sulle quali non possa sorgere alcun dubbio, allora si può dire che la mateamtica riposa su un fondamento di natura esclusivamente logica e del tutto sicuro, perché il metodo formale garantisce da ogni possibilità di errore [GA §1, p. 480][7]. Se qualcuno, poi, intende contestare un certo risultato e pensa che sia stato commesso un errore, allora, grazie alla precisione del metodo, è sicuramente e sistematicamente possibile indicare esattamente dove si situerebbe l'errore controllando la catena di ragionamenti e confrontando ogni passo con gli assiomi e con le regole di inferenza e rifiutando una certa applicazione delle regole o contestando direttamente gli assiomi stessi o le regole stesse [GA §1, p. 480][8]. Se non si è in grado di mostrare alcun errore nella scelta degli assiomi, nella scelta delle regole di inferenza o nell'applicazione di tali regole nella catena deduttiva, allora la forza della deduzione ci costringe ad accettare il risultato, ossia a considerarlo, in effetti, un teorema del sistema [GA §1, p. 480][9]. Come vedremo, la chiarezza con cui si possono indicare la forma logica dei pensieri e la struttura e i fondamenti delle dimostrazioni, assicurano alla logica quel carattere normativo che le si attribuisce quando si afferma la necessità che si dia una conclusione che segue logicamente dalle premesse, se si danno le premesse. Tale chiarezza, poi, riesce anche a spiegare, almeno in parte, su cosa si fondi tale normatività. Se è vero, infatti, come dice Frege, che in nessun sistema scientifico si può dimostrare tutto, può, però, capitare che sia possibile selezionare un insieme ristretto e sicuro di verità fondamentali e, per mezzo di poche e sicure regole di deduzione, si derivino tutte el altre verità di quella disciplina. In questo caso, la chiarezza della scrittura, rende evidenti le connessioni che fondano una verità sulla base di altre verità. Qualora, a livello intuitivo non si sia convinti che un certo pensiero sia effettivamente un teorema di quella disciplina, si può comprendere il proprio errore e correggersi proprio seguendo i chiari passaggi di

[6] Eliminando qualsiasi lacuna dal concatenamento dei ragionamenti, si riesce a porre in luce ogni assioma, ogni presupposto, ogni ipotesi (o in qual altro modo la si voglia chiamare) su cui riposano le dimostrazioni.

[7] Così si raggiunge una base sicura, dalla quale valutare la natura conoscitive delle leggi dimostrate. Certamente venne già affermato più volte che la matematica costituisce soltanto un ulteriore svikuppo della logica; ma iò rimane contestabile fino a quando compaiono nelle dimostrazioni matematiche procedimenti che non si attuino secondo leggi logiche riconosciute e sembrino invece fondarsi su una conoscenza intuitiva. Solo se riusciremo a scomporli in passaggi logici elementari, potremo essere certi che alla base della matematica non vi è nulla fuorché la logica.

[8] Se qualcuno giudica errona qualche proposizione, egli deve poter individuare esattamente ove risiede secondo lui l'errore: nelle leggi fondamentali, nelle definizioni, nelle regole o in qualche loro speciale applicazione.

[9] Se trova tutto a posto, deve vedere con precisione le basi sulle quali è fondato ogni singolo teorema.

una dimostrazione.

Contenuto concettuale

Frege affronta il compito di formulare il linguaggio formale che occorre per rendere rigorose, precise e senza salti deduttivi le dimostrazioni matematiche nello scritto *Begriffsschrift*. Si tratta di un breve ma importante lavoro, pubblicato nel 1879, in cui Frege vuole determinare ed esprimere in maniera precisa tutto quel che occorre per studiare le deduzioni ed assicurarsi se siano valide o meno e per omettere intenzionalmente e sistematicamente tutto ciò che non è rilevante a questo scopo e che, perciò, rischierebbe solo di creare confusione o, addirittura, di ingenerare errori [BS Intr., p. 104][10]. Frege scrive che con il nuovo linguaggio formale che propone intende trascrivere tutti e soli quegli elementi che hanno importanza per determinare la *consequenzialità delle deduzioni* (*Schlussfolge*), ossia la caratteristica per cui nelle dimostrazioni ogni passaggio segue logicamente dai precedenti.

I matematici avevano già stabilito un loro simbolismo, ma quello che Frege intende ora studiare non sono i contenuti della matematica, ma lo stesso *ragionamento matematico*. Tale ragionamento si è sempre espresso, almeno parzialmente, ricorrendo al linguaggio naturale che, per quanta attenzione si ponga, riveste, comunque, il contenuto di cui si parla sfumature e significati accidentale che non sono propri di ciò di cui si tratta. In tal modo, poi, anche la stessa forma espressiva scelta, come la struttura soggetto-predicato, si impone su un contenuto senza alcuna garanzia che, in tal modo, lo si riesca ad esprimere in modo opportuno e preciso.

Ora, per esprimere non i contenuti della matematica, ma lo il procedere del ragionamento matematico stesso, Frege elabora quel nuovo linguaggio formale a cui dà il nome di *Begriffsschrift*, termine che è stato tradotto con *ideografia*. Con questo termine, Frege intende dire che il linguaggio che propone, ossia il sistema di scrittura (*Schrift*), serve per rappresentare i concetti (*Begriffe*) del pensiero puro (*rein Denken*)[11]. L'ideografia è, quindi, un nuovo sistema di scrittura dove la scrittura stessa è guidata dai concetti che intende rappresentare in modo assolutamente fedele. L'ideografia non si propone di essere una lingua che abbia pregi estetici, retorici o di concisione, ma solo quello della fedele rappresentazione di ciò che occorre precisare per studiare il processo deduttivo.

Fino a Frege, la struttura degli enunciati del linguaggio naturale aveva avuto un ruolo molto importante nello studio dei processi inferenziali. Frege, invece, dichiara nettamente che fare ciò significa rinunciare al rigore richiesto per uno studio appropriato della deduzione. L'ideografia è, perciò, una lingua guidata solo da ciò che è importante per la deduzione, ossia da ciò che Frege chiama,

[10] Da questa necessità nacque l'idea dell'ideografia che qui presento. Essa deve dunque servire anzitutto a esaminare nel modo più sicuro la connessione di una catena deduttiva e amettere in evidenza ogni ipotesi che voglia inavvertitamente insinuarvisi, affinché, successivamente, si possa indagare sulla sua origine. Perciò si è rinunciato ad esprimere tutto ciò che è senza importanza per la *consequenzialità delle deduzioni*.

[11] Il sottotitolo della sua opera *Begriffsschrift*, infatti, è *Eine der arithmetischen nachgebildete formelsprache des reinen Denkens* (*Un linguaggio in formule del pensiero puro*).

tecnicamente, *begrifflichen Inhalt* (*contenuto concettuale*) [BS *Intr.*, p. 104][12]. Frege non si sofferma ad analizzare a fondo, qui, la nozione di contenuto concettuale e tornerà su di essa, in parte rivedendo le sue idee, nell'opera del 1918 *Der Gedanke*. Ora, quel che ci interessa, qui, non è approfondire la riflessione di Frege su questo aspetto. Quel che è rilevante, in questa sede, è precisare che un contenuto concettuale è un ente oggettivo, indipendente dalla formulazione linguistica che ad esso si riferisce e indipendente dall'atto soggettivo con cui lo si pensa. Il contenuto concettuale è quell'aspetto delle informazioni che trasmettiamo in un atto linguistico che è esattamente ciò che, in quell'atto linguistico, è rilevante per compiere delle deduzioni legittime. Frege, anche se non si esprime ancora esplicitamente in questi termini, sta pensando, di fatto al significato oggettivo di un enunciato. Un contenuto concettuale è un significato obiettivo di un enunciato possibile, dove per significato obiettivo ci si riferisce a quel che tale enunciato significa a prescindere dalle intenzioni del parlante e del ricevente e a prescindere da ogni aspetto estetico o retorico. Come già abbiamo notato nel capitolo precedente, non si tatta di una nozione distante da quella a cui si riferisce Bolzano con le sue *proposizioni in sé*.

L'ideografia è, dunque, una grafia esclusivamente determinata da ciò a cui si riferisce il prefisso *ideo*, ossia esclusivamente determinata da ciò che è il contenuto concettuale che intediamo rappresentare perché questo è il modo di porre in luce quelle relazioni deduttive che ci servono per studiare il ragionamento matematico. Ogni distinzione presa dal linguaggio naturale non dovrebbe avere alcun valore se non corrisponde ad elementi della struttura dei contenuti concettuali, anche se non è sempre possibile ritenere che l'analisi di Frege riesca a rispettare questo principio. La famosa distinzione tra soggetto e predicato, per esempio, di notevole importanza per la logica precedente, diviene un semplice fatto accidentale che si è storicamente dato in certe lingue naturali [BS *Intr.*, p. 111][13]. Possiamo, infatti, dice Frege, formulare due frasi che sono diverse se le analizziamo rispetto alla struttura soggetto-predicato, ma che, dal punto di vista delle possibili conseguenze logiche, sono del tutto equivalenti. Ecco come si esprime Frege:

> Nella mia presentazione di un giudizio, non trova posto una distinzione fra *soggetto* e *predicato*. Per giustificare questo fatto, osservo che i contenuti di due giudizi possono differire fra loro in due modi diversi: il primo modo si ha quando le conseguenze che possono trarsi dall'uno in collegamento con determinati altri, seguono sempre anche dal secondo in collegamento con gli stessi giudizi; il secondo modo si ha quando ciò non accade. Le due proposizioni: A Platea i Greci sconfissero i Persiani e A Platea i Persiani vennero sconfitti dai Greci si differenziano nel primo modo.

[12] Perciò si è rinunciato ad esprimere tutto ciò che è senza importanza per la *consequenzialità delle deduzioni*. Ho dato il nome di *contenuto concettuale* a ciò su cui si accentra per intero il mio interesse.

[13] Nella mia presentazione di un giudizio, non trova posto una distinzione fra *soggetto* e *predicato*.

Ora, dal momento che l'obiettivo di Frege è studiare la consequenzialità delle deduzioni matematiche, non occorre prestare attenzione ad elementi di un giudizio che non hanno influenza sulle conseguenze logiche che si possono trarre da esso. Se due giudizi differiscono solo per questi aspetti secondari, rispetto allo scopo di studiare le deduzioni, allora devono essere rappresentati nell stesso modo nel linguaggio ideografico. Fare diversamente, sarebbe inserire, di nuovo, quegli elementi accessori e, almeno a volte, fuorvianti che, al contrario, si intendono espungere per raggiungere la chiarezza espositiva, relativamente all'obiettivo di Frege. Quella parte di informazione che condividono due enunciati che danno luogo alle medesime conseguenze è ciò si indica con contenuto concettuale e solo questa informazione è ciò che è considerato dall'ideografia [BS 1 §3, p. 111][14]. Per quanto riguarda ciò che ha attinenza con il processo deduttivo, poi, non si lascia nulla che non sia esplicitamente espresso. Il contenuto concettuale, in altre parole, è completamente catturato dall'ideografia, altrimenti in una catena deduttiva potrebbero verificarsi dei salti, ossia dei passagi la cui giustificazione logica non risulta da quanto espresso per mezzo delle formule dell'ideografia in un certo sistema deduttivo [BS 1 §3, p. 111][15]. Per catturare completamente il contenuto concettuale e, quindi, le informazioni rilevanti per effettuare le deduzioni, Frege ritiene di doversi occupare anche dell'ambito della costruzione dei concetti. Il linguaggio ideografico non è solo in grado, in altre parole, di rappresentare la struttura di quei contenuti di pensiero che sono o veri o falsi, come le proposizioni in sé di Bolzano, ma anche le parti, ossia i singoli concetti che li compongono. Mentre Bolzano, per esempio, assumeva che le rappresentazioni in sè siano date e che lo studio delle inferenze logiche incominci dopo che, appunto, si sono già tale rappresentazioni in sé, ossia dopo che disponiamo dei concetti già formati, Frege rende possibile studiare il modo in cui si determinano quei concetti che, poi, costituiranno i contenuti concettuali su cui si potranno applicare le tecniche deduttive del sistema.

5.2.2 IL SISTEMA DEDUTTIVO

Come ricordato sopra, non mi intendo fornire, qui, un resoconto completo della riflessione logica di Frege, neppure solo per quel che riguarda i contenuti della *Begriffschrift*. Quel che intendo fare è solo porre in luce quegli aspetti direttamente rilevanti per approfondire la nostra ricerca sulla nozione di conseguenza logica. Abbiamo visto che Frege non dedica un'attenzione particolare al concetto

[14] Orbene, io chiamo contenuto concettuale quella parte del contenunto che è la stessa in entrambe le proposizoini. Pochè solo questa ha impotranza per l'ideografia, tale ideografia non ha bisogno di fare alcuna distinzione fra proposozioni che abbiano lo stesso contenuto concettuale. (...) Ora, tutte le sfumature della lingua che scaturiscono soltanto dall'influenza reciproca di chi parla e di chi ascolta, in quanto chi parla tiene per esempio conto delle aspettative di chi ascolta e già prima di pronunciare una frase tenta di indirizzare tali aspettative sulla giusta traccia, non trovano alcunché di corrispondente nel mio linguaggio in formule, perché entro il giudizio viene preso in considerazione soltanto ciò che ha influenza sulle *possibili conseguenze*.

[15] Tutto ciò che è necessario per una deduzione esatta è espresso con completezza; ciò, invece, che non è necessario, non viene per lo più neppure indicato; *niente è lasciato da indovinare*.

di coneseguenza logica in sé. Quel che gli interessa è determinare le leggi logiche, ossia i giudizi del pensiero puro, veri a prescindere dal contenuto specifico che si attribuisce loro, sia deducibili, in modo preciso e senza salti, da un numero ristretto di leggi logiche fondamentali, gli assiomi, e di regole di deduzione.

Frege fornisce un sistema formale che, seppure con qualche cambiamento, è analogo a quelli abituali nella ricerca logica contemporanea. Egli stabilisce un insieme di simboli primitivi e delle regole di formazione che permettono di generare ricorsivamente tutte le formule del sistema. Egli, poi, individua nove assiomi, che considera leggi logiche, e stabilisce le regole di deduzione che permettono di dedurre altre leggi logiche da quelle assunte come primitive.

Non occorre, qui, soffermarsi a trattare del modo particolare in cui Frege specifica come determinare le formule del sistema e le deduzioni. Ciò che è importante osservare, piuttosto, è che, rispetto ai logici precendenti, Frege intende studiare le deduzioni a prescindere dalla loro forma particolare. Non si tratta di trovare quali siano i modi inferenziali validi, come aveva fatto Aristotele, ma definire un sistema semplice con cui è possibile costruire le derivazioni valide. Ogni derivazione valide è anche una forma inferenziale valida e il loro numero supera di gran lunga le quattordici forme valide individuate da Aristotele e anche le forme valide dei sillogismi categorici, di sillogismi ipotetici e dei sillogismi disgiuntivi di cui parla Kant.

Quel che l'opera di Frege determina non è la scoperta che vi sono forme inferenziali a cui prima non si è prestata attenzione. Quel che essa determina è un nuovo modo di intendere la logica e considerare le deduzioni. La logica è una disciplina che deve poter essere usata in ogni ambito in cui giochi un ruolo rilevante il processo dimostrativo [BS *Intr.*, p. 106][16] e che deve seguire la rappresentazione della struttura dei contenuti concettuali, non degli aspetti inessenziali veicolati dai linguaggi naturali. La necessità delle deduzioni è, in modo simile a Kant, la necessità del ragionamento [BS *Intr.*, p. 106][17] e quel che il sistema di Frege intende fornire è un metodo per mimare la necessità di tali ragionamenti. Non occorre che tale metodo sia intuitivo o naturale. Frege, al contrario, considera un pregio il fatto che sia semplice e che ci si possa limitare a pochi assiomi e a poche regole di inferenza.

Semplificando la presentazione del suo sistema, possiamo dire che Frege assume il simbolo di negazione, il simbolo di implicazione materiale, il simbolo di quantificazione universale, il simbolo di uguaglianza e un insieme di variabili per contenuti concettuali come simboli logici primitivi. Egli assume, poi, anche delle costanti per certi contenuti concettuali come simboli non logici. Dopo aver specificato come ottenere, per ricorsione, formule ben formate per mezzo di tali simboli, egli fornisce nove assiomi e due regole di deduzione: il *modus ponens* e la regola di sostituizione[18].

[16] Mi riprometto un fecondo impiego della mia ideografia ovunque debba venire dato un particolare rilievo alla connessione del processo dimostrativo, come per esempio nella fondazione del calcolo differenziale e del calcolo integrale.

[17] In questi ultimi campi, nei quali si fa valere una necessità fattuale accanto alla necessità razionale [che è quella studiata dalla logica] (...).

[18] Più precisamente, Frege fornisce solo la regola del *modus ponens*, ma la regola di

Le regole di deduzione indicano quali sono le trasformazioni sintattiche legittime, ossia che permettono di passare valida da certe formule ad un'altra formule che segue logicamente dalle prime. Frege, in altre parole, esprime in modo ormai preciso e rigoroso, l'idea di *calcolo* logico, ossia di sistema formale in cui è possibile derivare, per mezzo di trasformazioni puramente sintattiche, le conclusioni di determinate premesse. Il fatto importante è che Frege non considera la dimostrabilità da ipotesi, ma la deducibilità di leggi logiche, che comportano solo passaggio da ciò che è vero a ciò che è vero.

Affinità rispetto a Kant

La novità che Frege annuncia quando dichiara che non è importante fornire delle specifiche forme inferenziali, a differenza di quel avevano fatto Aristotele (esplicitamente citato da Frege [BS 1 §6, p. 119][19]). Ciò che ci interessa non è indicare dei modi di ragionamento di cui è possibile servirsi nel confronto dialettico o nei vari campi scientifici. Ciò che interessa a Frege non è classificare i modi di ragionamneto validi quando si assume che, per qualche motivo, gli argomenti debbano avere caratteristiche particolari (come i sillogismi). Egli, piuttosto, intende fornire i mezzi per determinare qualsiasi derivazione logicamente valida.

Tale progetto non aveva senso, come abbiamo visto, nell'ottica di Aristotele e in quella, diversa, di Kant, concentrati, l'uno sul rapporto predicativo ed il ruolo del medio e l'altro sulla nozione di seguire una regola come classificazione delle leggi necessarie del pensiero, considerato in un certo modo particolare. L'impostazione di Kant non è, per certi aspetti, lontana da quella di Frege. La richiesta di studiare le leggi del pensiero, intese come leggi secondo cui dobbiamo pensare (cfr. [GA §2, pp. 485-6][20] e [*Logica* 1897, p. 115][21]) e come leggi generali, valide a prescindere dallo specificato campo di oggetti a cui le si applica [*Logica* 1897, p. 116][22] è comune anche a Kant, come abbiamo visto (cfr. [L *Intr.* I, p. 7][23] e [L *Intr.* I, p. 7][24]). Come per Kant il rispetto delle leggi della logica costituisce una condizione necessaria per affermare la verità [L *Intr.*

sostituzione è, di fatto, necessaria.

[19] Non vi sarebbe neppure alcuna ragione di arrestarsi ai modi di deduzione di Aristotele, m, in caso di indeterminatezza, se ne potrebbero assumere sempre di nuovi: da ogni giudizio espresso in una formula (...) si potrebbe costruire un modo particolare di deduzione.

[20] Le leggi logiche meritano, a maggior diritto delle altre, il nome di leggi del pensiero, solo allorché si voglia dire con ciò che esse sono leggi più generali, le quali prescrivono come si debba pensare ovunque, in generale, si pensi.

[21] Come devo pensare per taggiungere la meta, ossia la verità? Dalla logica ci attendiamo una risposta a questa domanda.

[22] Non pretendiamo però che essa [la logica] si addentri nella specificità delle singole scienze e dei loro oggetti, ma ci attendiamo piuttosto che indichi quanto v'è di più generale, di valido in tutti i campi del pensiero: questo è il compito che assegniamo alla logica.

[23] La logica è però un canone, in quanto essa è una scienza delle leggi necessarie del pensiero senza le quali non ha luogo alcun uso dell'intelletto e della ragione, regole che sono di conseguenza le condizoini sotto le quali l'intelletto può e deve accordarsi unicamente con se stesso: le leggi e condizioni necessarie del suo retto uso.

[24] Questa scienza delle leggi necessarie dell'intelletto e della ragione in generale o - il che è lo stesso - della sola forma del pensiero in generale è ciò che chiamiamo *logica*.

I, p. 7][25], così per Frege la logica enuncia le *leggi dell'esser vero* (*Gesetze des Wahrseins*) [*Logica* 1897, p. 116][26] nel senso più generale possibile, ossia leggi che prescrivono come debba procedere il pensiero in quanto tale [GA §2, pp. 485-6][27]. Come per Kant, le leggi della logica sono fissate, basilari e generali, ossia condizione necessarie e immutabili di ogni altra conoscenza [GA §2, pp. 486-7][28].

Compiere dei ragionamenti, dunque, è, per Frege come per Kant, seguire delle regole che, in modo formale, generale e necessario, permettono di passare dal darsi del premesse al darsi della conclusione. Questa impostazione è fondamentale anche nell'idea di calcolo, che Frege presenta, però, non più come tassonomia di certi atti intellettivi che produce, quindi, una classificazione ed un elenco di un numero limitato di forme inferenziali valide. A Frege non interessa classificare gli atti dell'intelletto, neanche se questi sono quelli che permettono di rilevare dele leggi logiche. Il sistema di logica, piuttosto, va fondato secondo criteri assai divers, come dirò meglio nel prossimo paragrafo: il suo fine deve essere quello di essere in grado di sviluppare il contenuto di ogni legge logica a partire, per ragione di chiarezza, da poche leggi logiche e da poche regole di inferenza assunte inizialmente.

Sistema e derivazione

Con la nozione di sistema e di calcolo, Frege non intende dare una classificazione ed un elenco delle forme inferenziali logicamente valide. Quel che egli propone è una nuova concezione di logica, che fa apparire inguistificatamente ristretta solo a casi particolari l'impresa logica degli autori precedenti, come Aristotele e Kant. Frege, piuttosto, intende proporre un calcolo che permetta di derivare, in modo meccanico e sistematico, tutte le leggi logiche, o giudizi del pensiero puro. Le derivazini devono svolgersi con rigore e senza salti dagli elementi assunti inziialmente nel sistema, ossia dagli assiomi e dalle regole di deduzione.

Laddove è possibile limitarsi a pochi assiomi e a poche regole di deduzione, occorre farlo per rendere più ordinato e perspicuo il sistema. Ciò non esclude che si possano fornire altri metodi di deduzione rispetto a quelli fissati dalle regole primitive. Anzi, ogni derivazione valida indica un anche un metodo di

[25] [La logica], pertanto, è solo un'*arte generale della ragione* (*canonica Epicuri*) che consiste ell'adeguare le conoscenze in generale alla forma dell'intelletto; solo in questo senso può essere detta un organo, che però non serve certamente ad ampliare, bensì solo a *giudicare* e *correggere* la nostra conoscenza.

[26] Le regole del nostro pensiero e del nostro ritenere vero vanno pensate [come] determinate dalle leggi dell'esser vero. Con queste sono date anche quelle. Possiamo perciò anche dire: la logica è la scienza delle leggi più generali dell'esser vero.

[27] Le leggi logiche meritano, a maggior diritto delle altre, il nome di leggi del pensiero, solo allorché si voglia dire con ciò che esse sono leggi più generali, le quali prescrivono come si debba pensare ovunque, in generale, si pensi.

[28] Per leggi logiche io non intendo le leggi del ritner vero, ma le leggi dell'essere vero. (...) sono pietre basilari, poggiate su una roccia eterna, pietre che possono forse venire sommerse ma non scosse dal nostro pensiero, se esso vuole raggiungere la verità.

derivazione valido che, una volta stabilito, può essere considerato primitivo [BS 1 §1, p. 107][29].

Frege non intende fornire uno studio delle leggi necessarie del pensiero basata sulla classificazione degli atti dell'intelletto, come, invece, aveva fatto Kant. Per questo motivo, per lui non è importante fornire un sistema che sia facilmente accessibile dal punto di vista intuitivo. Quel che conta, piuttosto, ponendosi dal punto di vista dello studio della derivazione delle leggi logiche, è quello di indicare un sistema che permetta con chiarezza di ottenere tali leggi. Per questo motivo, la restrizione a pochi assiomi e poche regole di inferenze non solo non è un problema, ma, anzi, è un pregio del sistema. Allo stesso modo, non sono un problema la lunghezza e innaturalità delle dimostrazioni che si forniscono all'interno di tale sistema, ma solo il fatto che esse sappiano spezzare la catena del ragionamento in una successione di atti inferenziali mimabili e controllabili con i mezzi del sistema.

Frege dichiara chiaramente:

> Con questa limitazione a un unico modo di deduzione, non deve tuttavia per nessuna ragione venire espressa una proposizione psicologica, ma deve soltanto venire decisa una questione di forma in vista della massima confromità allo scopo [BS 1 §6, p. 119].

Lo scopo, come abbiamo, detto è la derivazione in modo sistematico e senza lacune delle leggi logiche. Tale deduzione non deve essere fatte per rendere le leggi più certe, cosa che spesso sarebbe inutile, ma per mostrare le connessioni che vigono tra di esse, ossia come alcune siano derivabili da certe altre [BS 2 §13, p. 136][30]. Fissando un calcolo basato su pochi assiomi e su poche regole di inferenza, stabiliamo un nucleo da cui si possono raggiungere le altre leggi della logica, anche se, certamente, vi sono molti modi possibili in cui fissare tale nucleo e mostrare i rapporti di tra le leggi logiche [BS 2, §13, p. 136][31]. Frege riconosce che la sua particolare sistemazione è arbitraria nel senso in cui si sarebbero potuti fissare sistemi con assiomi e regole diverse che, tuttavia, avrebbero condotto al medesimo insieme di formule derivabili [BS 2 §13, p. 136][32].

[29] La limitazione (...) a un unico modo di deduzione, viene giustificata dal fatto che nella *fondazione* di una tale ideografia gli elementi primitivi debbono venir scelti quanto più è possibile semplici, se si vogliono ottenere ordine e perspicuità. Questo non esclude che *in seguito* certi passaggi da più giudizi a un nuovo giudizio, i quali - sulla base di quell'unico modo di deduzione- risultano possibili solo mediatamente, vengano trasformati, per abbreviazione, in passaggi immediati. In effetti ciò potrebbe raccomandarsi in una applicazione successiva. Col che si originerebbero allora altri modi di deduzione.

[30] É cosa ovvia derivare i più complessi di tali giudizi da quelli più semplici, non per renderli più certi, il che per lo più sarebbe superfluo, ma per mettere in luce le relazioni dei giudizi fra loro.

[31] Evidentemente, il conoscere semplicemente le leggi non è la stessa cosa che sapere anche come le une siano già date per mezzo delle altre. Seguendo questa via si giunge a un ristretto numero di leggi, nelle quali - aggiungendovi quelle contenute nelle regole - è racchiuso, anche se non sviluppato, il contenuto di tutte le altre. E uno dei vantaggi di esporle derivandole una dall'altra è proprio quello di insegnarci a conoscere questo nucleo.

[32] Certamente bisogna ammettere che la riconduzione delle une alle altre è possibile non solo

5.2.3 Una prospettiva al di qua dei problemi metalogici

Frege fornisce gli elementi che servono per trattare la logica come un sistema deduttivo. Abbiamo visto, infatti, che egli definisce un linguaggio formale e stabilisce con precisione cosa significa essere una formula di tale linguaggio. Egli, poi, definisce gli assiomi e le regole di deduzione in modo che sia fissato esattamente cosa significa essere derivabile nel sistema. egli tuttavia, non si pone i problemi metalogici che, invece, come vedremo, saranno fondamentali per gli algebristi della logica, come Huntington, Bernstein e Post, e per Tarski. Frege non si pone problemi quali l'indipendenza degli assiomi, la loro compatibilità o la completezza del calcolo. Il passo da lui compiuto rende possibile fornire un sistema logico in forma assiomatica e questo rende possibile sviluppare, come si dirà appena sotto, le indagine metalogiche.

Frege, tuttavia, si mantiene lontano da questi problemi. Per lui non ha senso studiare la logica come un sistema matematico qualsiasi, dal momento che le leggi logiche e le regole di deduzione fissate dalla logica sono all'opera in ogni disciplina scientifica [BS *Intr.*, p. 106][33]. La logica è unica e collegata a tutte le scienze in quanto fornisce il fondamento ai procedimenti argomentativi di ogni disciplina [BS *Intr.*, p. 106][34], in quanto essa fornisce le leggi dell'esser vero, da cui dipendono le leggi del ritenere vero e che indicano come dobbiamo pensare affinché non ci si allontani dalla verità [*Logica* 1897, p. 116][35].

A differenza di quel che si farà nelle indagine metalogiche, Frege afferma decisamente che non è possibile definire né la verità [*Logica* 1897, p. 116][36] né la falsità [*Logica* 1897, p. 128][37]. Le nozioni di verità sono primitive e irriducibili ad altre nozioni più semplici [*Logica* 1897, p. 116][38]. Si tratta di nozioni oggettive e fondamentali per ricerca scientifica, che ha sempre di mirare il cogliere ciò che è vero [*Logica* 1897, p. 120][39] ed evitare ciò che è falso [*Logica* 1897, p.

---

nell'unico modo da noi seguito. Se ne ricava che con questo modo di esposizione non vengono messe in evidenza tute le relazioni delle leggi pensiero.

[33] L'ideografia qui proposta aggiunge a questi un nuovo campo, e precisametne quello situato in posizione centrale, che è confinante con tutti gli altri. Da qui perciò si possono prender le mosse - e con le maggiori possibilità di successo - per colmare le lacune dei linguaggi in formule attualmente esistenti, per collegare all'ambito di un unico di essi i loro campi finora separati, e per estenderli a quei campi che finora non vennero trattati con questo mezzo.

[34] Mi riprometto un fecondo impiego della mia ideografia ovunque debba venire dato un particolare rilievo alla connessione del processo dimostrativo.

[35] Non pretendiamo però che essa [la logica] si addentri nella specificità delle singole scienze e dei loro oggetti, ma ci attendiamo piuttosto che indichi quanto v'è di più generale, di valido in tutti i campi del pensiero: questo è il compito che assegniamo alla logica. Le regole del nostro pensiero e del nostro ritenere vero vanno pensate [come] determinate dalle leggi dell'esser vero. Con queste sono date anche quelle. Possiamo perciò anche dire: la logica è la scienza delle leggi più generali dell'esser vero.

[36] La verità è evidentemente qualcosa di così primitivo e semplice che è impossibile ricondurla a qualcosa di ancora più semplice.

[37] Quesi tutto quel che è stato detto del predicato vero vale anche per il predicato falso.

[38] La verità è evidentemente qualcosa di così primitivo e semplice che è impossibile ricondurla a qualcosa di ancora più semplice.

[39] Chi cercasse di confutare la veduta che il vero è tale indipendentemente dal nostro riconoscimento, contraddirrebbe con la sua asserzione ciò che ha asserito, analogamente al Cretese che dice tutti i cretesi mentono.

128][40]. Tutto ciò che possiamo fare è studiare le leggi dell'esser vero, come fa la logica, appunto, ma Frege non si pone problemi come quello di fornire modelli della teoria, come un qualsiasi teoria matematica, o mostrare l'indipendenza di un assioma dagli altri fornendo un modello che soddisfa tutti gli assiomi tranne quello di cui si intende provare l'indipendenza, come farà Bernstein, o, come farà Post, definire le tavole di verità per i connettivi e dimostrare la completezza del calcolo delle proposizioni classico. Vedremo meglio queste posizioni nel prossimo capitolo e da tale esposizione si comprenderà anche meglio, per opposizione, la posizione di Frege al riguardo.

Quel che possiamo sottolineare fin da ora è che Frege, così come, dopo di lui, Russell, non si pone a studiare tali problemi, perché, per lui, tutti i teoremi si dimostrano nella logica e non sulla logica. Quando Frege sottolinea la distanza della sua nozione di logica da quella di Aristotele, egli si richiama al fatto che, mentre Aristotele si era dedicato a studiare alcuni particolari forme inferenziali, lui delinea un sistema per trattare sistematica la derivazione delle leggi logiche, senza limitazioni ad una certa classe di determinate forme di inferenze. A questo punto, Frege sottolinea che, a tale scopo, è opportuno ridurre al massimo le regole di deduzione, in modo da aumentare la perspicuità del sistema [BS 1 §6, p. 119][41]. L'unico scopo del sistema, infatti, è permettere la deduzione delle leggi logiche. Precisamente qui ci aspetterremmo, dal punto di vista delle ricerche logiche contemporanee, alcune considerazioni su un problema metateorico come la completezza. Frege, invece, non appare per nulla interessato e neppure consapevole di una tale questione per il fatto che ciò richiederebbe concepire la logica non come un unico sistema generale, ma perlomeno anche come una teoria matematica di che è possibile studiare dall'esterno, dimostrando teoremi su di essa e non all'interno di essa.

Se infatti qualcosa fosse vera solo per colui che la ritiene vera non ci sarebbe alcuna contraddizione fra le opinioni delle varie persone. Chiunque fosse di quest'avviso non potrebbe di conseguenza contraddire l'opinione opposta e dovrebbe aderire al principio: *non disputandum est.* (...) Un'opinione che accampasse questa pretesa sarebbe ingiustificata, il che significherebbe che ogni opinione, nel senso corretne del termine, sarebbe ingiustificata, e quindi anche quella da noi propugnata; non si darebbe scienza, né errore, né correzione dell'errore, non si darebbe insomma niente di vero nel senso comune del termine. L'indipendenza dal nostro riconscimento qui sottolineata è così intimamente legata al senso di questa parola che non può esserne disgiunta.

[40] Ciò che è falso è falso in sé e indipendentemente dalla nostra opinione. Una disputa sulla falsità è sempre, al tempo stesso, una disputa sulla verità.

[41] Non vi sarebbe neppure alcuna ragione di arrestarsi ai modi di deduzione di Aristotele, ma, in casi di indeterminateza, se ne potrebbero assumere sempre di nuovi: da ogni giudizio espresso in una formula (...) si potrebbe costruire un modo particolare di deduzione. *Con questa limitazione a un unico modo di deduzione, non deve tuttavia per nessuna ragione venire espressa una proposizione psicologica, ma deve soltanto venir decisa una questione di forma in vista della massima conformità allo scopo.*

5.3 LA LOGICA COME TEORIA MATEMATICA NELL'ALGEBRA DELLA LOGICA

5.3.1 PREMESSA

Anche ai fini del nostro discorso è importante osservare che la concezione della logica presentata da Frege, poi detta *logicistica*, non è l'unica concezione che troviamo in quel periodo. Vi è almeno un altro modo importante di concepire la logica matematica moderna, ossia quello che si ritrova nella tradizione dell'*algebra della logica*, fondata, come è noto, da Boole con la sua opera del 1847, *The Mathematical Analysis of Logic*. Mentre, nella concezione di Frege, la logica non è studiata come scienza in sé, ma come teoria della deduzione che occorre per raggiungere la precisione e il rigore adeguati nelle dimostrazioni matematiche. Poiché nel procedere deduttivo non del tutto formalizzato si possono annidare errori e passaggi ingiustificati, occorre ricorrere alla logica per rendere chiari e precisi tutti i riferimenti ai principi usati e alle regole di deduzione impiegate. Il richiamo ad assiomi e regole usati come mezzo per rendere più rigorose le dimostrazioni matematiche si fondava su una concezione che potremmo chiamare assolutistica della logica. La logica costituisce un sistema deduttivo che fonda ogni altra deduzione che, quindi, non può che essere condotta con i metodi di tale logica e all'itnerno di tale logica.

In quanto fondamento, tale sistema di logica non può essere studiato come una qualsiasi sistema matematico, concepito come un sistema da i cui teoremi sono conseguenze degli assiomi, ma questi assiomi non sono affermati in modo categorico e, tantomeno, sono ritenute verità necessarie. Gli assiomi, in tal caso, sono ipotesi che fissano certe assunzioni e che, in generale, come vedremo meglio, possono ricevere diverse interpretazioni. La logica, secondo Frege e, più in generale, nella visione logicista, non era assimilabile ad un altro sistema matematico, in quanto era il fondamento imprescindibile di ogni altro sistema. a logica si pone a fondamento di ogni altra disciplina deduttiva e, perciò, non può essere studiata, come dirà esplicitamente Russell, come le queste altre discpline. Gli assiomi della logica non rappresentano mere assunzioni o ipotesi, ma sono le verità fondamentali, così come le regole di deduzione sono la rappresentazione di passi argomentativi validi in modo assoluto.

Gli algebristi della logica propongono, invece, un'idea di logica che si differenzie nettamente da quella di Frege e da quella, che non mi soffermo, qui, a delineare di Russell. Essi considerano la logica come un sistema dotato di una stuttura che può essere studiata matematicamente, determinando, in tal modo, una teoria matematica come le altre. La logica riceve una trattazione algebrica e, in tal modo, gli algebristi della logica saranno in grado di studiare la logica stessa dal punto di vista che oggi chiamiamo metalogico. Gli algebristi della logica si proporranno di fare esattamente quel che era escluso dalla tradizione logicista, ossia dimostrare teoremi sulla logica e non solo nella logica, ponendosi problemi quali l'indipendenza degli assiomi tra loro, la completezza del sistema di assiomi.

5.3.2 LOGICA COME TEORIA MATEMATICA

Come abbiamo anticipato, nell'algebra della logica si sviluppa una concezione della logica che si basa su convinzioni e su un approccio notevolmente diversi rispetto a ciò che si ritrova nella logistica. Nella tradizione dell'algebra della logica, la matematica è un mezzo con cui si possono affrontare le questioni e i problemi logici, il cui non è quello di fornire un calcolo che formalizzi in modo rigoroso i procedimenti matematici e che ne fornisca la fondazione su un livello di verità prime ed assolute, quali sono, per i logicisti, le verità della logica. Gli algebristi della logica, piuttosto, studiano la logica come una teoria matematica particolare, costituita sulla base di assiomi che costituiscono le leggi di combinazione dei simboli del sistema che, di per sé non sono vincolati ad alcuna interpretazione particolare. Ecco, infatti, come si esprime Boole, nella sua opera del 1847:

> Quanti sono a conoscenza dello stato attuale della teoria dell'algebra simbolica sono consapevole del fatto che la validità dei processi di analisi non dipende dall'interpretazione dei simboli impiegati, ma soltanto dalle leggi della loro combinazione. Ogni sistema di interpretazione che non intacchi la verità delle relazioni presupposte è egualmente ammissibile. (...) Potremmo fissare correttamente come carattere distintivo di un vero calcolo quello di essere un metodo fondato sull'impiego di simboli le cui leggi di combinazione sono note e generali e i cui risultati ammettono un'interpretazione coerente. (...) Appunto sulla base di questo principio generale io mi propongo di fondare il calcolo logico e pretendo per esso un posto tra le forme riconosciute di analisi matematica, indipendentemente dal fatto che, per quanto concerne il suo oggetto e i suoi strumenti, esso deve per il momento rimanere isolato [MA *Intr.* pp. 5-6].
>
> Qui si vedrà che la logica, come la geometria, riposa su verità assiomatiche e che i suoi teoremi sono costruiti su quella dottrina generale dei simboli che costituisce il fondamento dell'analisi ordinaria [MA *Intr.* p. 15].

Come si vede, la logica, qui, non è intesa come un'abilità da acquisire preliminarmente all'attività scientifica, ma è essa stessa una disciplina scientifica e, precisamente, una teoria matematica [MA *Intr.* p. 9][42]. La matematica non è essenzialmente una scienza legata al concetto di quantità, come si potrebbe erroneamente pensare considerandone la storia in modo superificiale [MA *Intr.* p. 6][43]. Per mezzo di essa, anzi, possiamo esprimere quelle medesime operazioni dell'intelletto che sono ciò su cui riposa la nostra capacità di ragionare [MA *Intr.* p. 8][44].

[42] La matematica che dobbiamo costruire è la matematica dell'intelletto umano.

[43] Il fatto che alle forme esistenti di analisi sia attribuita un'interpretazione quantitativa è il risultato delle circostanze da cui quelle forme sono state detrminate, ma non si deve farne una condizione universale dell'analisi.

[44] Ogni conseguenza matematica esprimerà un'inferenza logica. La generalità del metodo ci permetterà di esprimere qualsiasi operazione dell'intelletto, e così ci porterà alla dimostrazione

5.3.3 IL CONFRONTO CON LA TRADIZIONE LOGICISTA

Muovendo da un tale punto di vista, gli algebristi della logica si confrontano con i risultati della tradizione logicista, soprattutto, ovviamente, con i *Principia mathematica* di Russell e Whitehead, che rappresentano, come abbiamo detto, convinzioni profondamente diverse. Negli scritti di tali autori, come B. A. Bernstein, E. V. Huntington e E. L. Post, si delinea un deciso interesse metateorico nell'ambito delle ricerche logiche. Tale interesse deriva da un ben precisa idea di impresa logica e quali siano i suoi scopi che, come stiamo vedendo, differisce da quella degli autori della tradizione logicista.

Negli algebristi della logica, la logica non ha come obiettivo la costituizione di un calcolo che renda più rigoroso il ragionamento matematico. La logica, qui, si configura, piuttosto, come un sistema che può essere rappresentato in termini matematici, nel senso in cui si determinano i sistemi dell'aritmetica o della geometria. É possibile individuare una struttura matematica soggiacente alla teoria logica e proprio la messa in luce di tale struttura è ciò che consente di sviluppare considerazioni metateoriche, come, ad esempio chiedersi quali siano i modelli che soddisfano una certa teoria o porsi problemi relativi all'indipendenza degli assiomi o alla completezza del sistema.

Tali questioni metateoriche non erano affrontate nella tradizione logicista, perché, dato il carattere fondamentale della logica, ogni dimostrazione può essere condotta solo per mezzo di essa e non su di essa. In tal modo, essi negano ogni possibilità di distinguere tra teoria e metateoria nel caso della logica. Il risultato è che non è possibile trattare la logica come le altre teorie e dimostrare teoremi che abbia tale teoria come oggetto. Abbiamo citato, sopra, il caso di Frege, ma è soprattutto nei confronti dei più recenti *Principia mathematica* che si appunta l'attenzione degli algebristi della logica. Nella sua recensione alla seconda edizione del primo volume dei *Principia* (1925), Bernstein rileva come Russell, dopo aver fornito la lista di proposizioni primitive (che noi, oggi, distingueremmo in assiomi in senso proprio e regole) con cui definisce la logica delle proposizioni elementari, non si chiede se tali proposizioni primitive siano tra loro indipendenti e neppure se siano tra loro consistenti. Il motivo è esplicitamente fornito da Russell e citato da Bernstein:

> Gli ordinari metodi per provare l'indipendenza [e, quindi, anche la consistenza] non sono applicabili, senza riserve, ai fondamentali [Bernstein 1926, p. 711][45].

Al contrario, negli algebristi della logica troviamo sistematicamente impiegati gli usuali metodi matematici anche ai sistemi logici. Per dimostrare la consistenza degli assiomi, per esempio, si esibisce un loro modello e, per dimostrare l'indipendenza di un assioma dagli altri, si esibisce un modello in cui tale assioma è falso e tutti gli altri sono veri.

---

di teoremi generali di logica, analoghi, in grado piuttosto elevato, ai teoremi generali della matematica ordinaria.

[45] The ordinary methods of proving independence are not applicable, without reserve, to fundamentals.

Un esempio: Bernstein critico di Russell

Bernstein, in un articolo del 1929, sottolinea un punto del tutto centrale, che mostra chiaramente come egli distinguesse tra ciò che oggi chiamiamo teoria e metateoria. Egli dichiara che, se nel sistema di logica proposizionale dei *Principia* si distinguono le idee che fanno parte del sistema da quelle parlano del sistema e, perciò, sono al di fuori di esso, è possibile contestare l'affermazione di Russell secondo cui non si possono studiare gli elementi fondamentali di tale logica nello stesso modo in cui si studiano gli elementi fondamentali degli altri sistemi matematici. É istruttivo osservare come procede Bernstein.

Riportiamo, dapprima, per sommi capi, la parte del sistema definito da Russell che è utile per riportare le riflessioni di Bernstein. Sia l'esposizione sistema di Russell, sia l'esposizione delle osservazioni di Bernstein sono riportate in una forma leggermente modificata e abbreviata. Sarebbe inultimente lungo riportare, qui, le loro idee rispettandone la forma originale. Ciò che essenzilamente ci interessa, qui, però, dovrebbe essere stato mantenuto.

Le idee primitive del sistema di Russell sono quattro:

1. (a) proposizioni elementari (simbolizzate dalle lettere $p, q, r, ...$)
   (b) asserzione di una proposizione elementare p (simbolizzata da $\vdash p$)
   (c) negazione di una proposizione elementare p (simbolizzata da $\neg p$)
   (d) disgiunzione di due proposizioni elementari p e q (simbolizzate da $p \vee q$).

Per proposizioni elementari si può intendere quel che oggi si intende con le proposizioni non analizzate della logica proposizionale, mentre negazione e disgiunzione sono da considerarsi come la negazione e la disgiunzione classiche, ossia $\neg p$ va letto come *non-p* e $p \vee q$ va letto come *p o q*. Il simbolo $\vdash$ (che deriva dalla *Begriffsschrift* di Frege, dove, però aveva un significato un po' diverso) è il simbolo di asserzione, ossia $\vdash p$ va letto come *p è vera* e va distinta dalla semplice proposizione p, che non fa riferimento solo alla proposizione ma non indica né che essa è considerata vera né che essa è considerata falsa [PM I A 1, pp. 92-3]. Possiamo definire l'implicazione materiale nel solito modo per mezzo della negazione e della disgiunzione, ossia, per ogni proposizione elementare p, q, $p \rightarrow q =_{def.} \neg p \vee q$. Possiamo anche definire, nel solito modo, la congiuzione, ossia $p \wedge q =_{def.} \neg(\neg p \vee \neg q)$.

Ora diamo quelle che Russell chiama le proposizioni primitive del sistema e che noi, diremmo assiomi (le proposizioni dalla 2 alla 6) o regole di formazione (le ultime due proposizioni). Si noti che la prima proposizione, anche se nelle intenzioni di Russell dovrebbe essere, di fatto, una regola di inferenza (cfr. [PM I A 1, p. 95][46]), non contiene nessun simbolo del sistema (come nota lo stesso

[46] The above principle [our first primitive proposition] is used whenever we have to deduce a *proposition* from a *proposition*.

Russell [PM I A 1, p. 94][47] e come rimarca Bernstein [1929], p. 485[48], cfr. anche Bernstein [1926], p. 712[49]), quindi non possiamo chiamarla, in senso moderno, regola di inferenza. Ad ogni modo, le sue proposizioni primitive sono:

1. tutto ciò che è implicato da una proposizione elementare vera è vero
2. $\vdash ((p \vee p) \rightarrow p)$
3. $\vdash (q \rightarrow (p \vee q))$
4. $\vdash ((p \vee q) \rightarrow (q \vee p))$
5. $\vdash ((p \vee (p \vee r)) \rightarrow (q \vee (p \vee r)))$
6. $\vdash ((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow (p \vee r)))$
7. se p è una proposizione elementare, allora $\neg p$ è una proposizione elementare
8. se p e q sono proposizioni elementari, allora $p \rightarrow q$ sono proposizioni elementari.

Russell non distingue nettamente tra regole di inferenza, assiomi e regole di formazione. Egli presenta insieme tutte le otto proposizioni riportate sopra e le chiama primitive (o anche assiomi) [PM I A 1, pp. 94-7].

I metodi di prova adottati, nota Bernstein, sono due e sono quelli che abitualmente chiamiamo regola di sostituzione e regola del *modus ponens* (Bernstein [1929], p. 483[50]). Al di là dei passaggi che potrebbero non essere del tutto chiari e che, comunque, non coincidono con il modo odierno di presentare un sistema formale (le regole di deduzione andrebbero messe tra le proposizioni primitive, secondo l'impostazione di Russell? qual è il rapporto tra 1 e la regola del *modus ponens*?), quel che realmente è interessante, qui, è capire in che modo questa presentazione non soddisfa un algebrista della logica quale Bernstein.

[47] [This principle] is not the same as 'if p is true, then if p implies q, q is true'. This is a true proposition, but it holds equally when p is not true and when p does not imply q. It does not, like the principle we are concerned with, enable us to asser q simply, without any hypothesis. We cannot express the principle symbolically, partly because any symbolism in which p is variable only gives the *hypothesis* that p is true, not the *fact* the it is true.

[48] Proposition [1] *has no symbols*, hence, impliedly, has no ideas belonging to the theory, hence says nothing about the ideas of the theory.

[49] Proposition [1], our authors observe, cannot be expressed in symbols. If we take this remark literally, [1] says nothing about the indefinables of the system, and hence cannot be a proposition belonging to the system.

[50] The theorems derived from the primitive propositions are all, with the single exception of *3.03, of the form $\vdash \phi(p, q, r, ...)$, where $\phi(p, q, r, ...)$ is an elementary proposition built up from $p, q, r, ...$ by means of the operations '$\neg$' and '$\vee$', that is, the theorems are all, with the seingle exception of *3.03, of the type of propositions [3-6]. In proving a theorem of the form $\vdash \phi(p, q, r, ...)$ the authors restrict themselves to two general methods. One is to find a *known* proposition $\vdash f(p, q, r, ...)$ of which $\vdash \phi(p, q, r, ...)$ is a particular case got from $\vdash f(p, q, r, ...)$ by substituting particular forms of elementary propositions for the general propositions $p, q, r, ...$ The other method is to find a function $f(p, q, r, ...)$ such that we have both $\vdash f(p, q, r, ...)$ and $f(p, q, r, ...) \rightarrow \phi(p, q, r, ...)$, and then apply [1].

Bernstein, in effetti, contrasta questa presentazione della logica proposizionale con quella abituale tra gli algebristi della logica, ossia determinando un sistema che egli chiama booleano (Bernstein [1929], p. 488[51]).

Per prima cosa, abbiamo detto che tra le idee primitive del sistema compare anche il simbolo di affermazione, ma, poi, il significato o, quantomeno, l'uso di tale simbolo non è fissato da alcuna proposizione primitiva. Ciò significa che, a rigore, un scrittura come $\vdash p$ non ha alcuna ruolo nella teoria. Le cose, in realtà, non stanno così nelle intenzioni di Russell, che, evidentemente, pensava di aver fissato tale uso con la proposizione 1, sebbene non vi compaia il simbolo $\vdash$. Russell pensa che la proposizione 1 non possa essere espressa simbolicamente, altrimenti ciò che otterremmo sarebbe un enunciato condizionale come $\vdash ((p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q)$ [PM I A 1, p. 94][52]. Ciò è indicativo, in effetti, proprio di quel modo di intendere la logica come un sistema che, in quanto assoluto, non può essere considerato dall'esterno. Russell ha ragione nel compiere quell'osservazione, in quanto, anche se questi concetti non sono chiaramenti messi a fuoco nei *Principia*, una regola di inferenza è cosa diversa da un enunciato condizionale assunto come assioma. Quel che egli avrebbe dovuto dire, però, come nota Bernstein, è che la proposizione 1 non può essere *interamente* espressa in modo simbolico, ma certamente può e deve essere parzialmente espressa in tal modo. Può essere espressa in tal modo perché, come vedremo meglio fra poco, ogni volta che si definisce un sistema si deve necessariamente ricorre ad idee che non fanno parte di tale sistema e che appartengono, piuttosto, alla metateoria o, come dice Bernstein, al linguaggio generale per mezzo del quale sono date le informazioni (Bernstein [1929], p. 484[53]). Deve essere parzialmente espressa in modo simbolico altrimenti non avrebbe alcuna connessione con i concetti che la teoria intende sviluppare (Bernstein [1929], p. 712[54]). Quel che Russell intendeva dire, allora, avrebbe dovuto, piuttosto, essere reso così:

1. a. Se, $\vdash p$ e $\vdash p \rightarrow q$, allora $\vdash q$.

In questo modo, il simbolo di asserzione assume una caratterizzazione per mezzo delle proposizioni primitive e, al contempo, la proposizione 1.a. parla dei concetti del sistema, perché non è espressa solo in modo informale, a differenza di 1.

La presentazione russelliana della teoria nasconda la struttura matematica che, pure, vi è alla sua base. Ciò è dovuto al fatto, come abbiamo visto, che

[51] This system is the theory of the *Principia* cleared of obvious redundancies in the primitives and written in the notation of Boolean logic.

[52] [This principle] is not the same as 'if p is true, then if p implies q, q is true'. This is a true proposition, but it holds equally when p is not true and when p does not imply q. It does not, like the principle we are concerned with, enable us to asser q simply, without any hypothesis. We cannot express the principle symbolically, partly because any symbolism in which p is variable only gives the *hypothesis* that p is true, not the *fact* the it is true.

[53] Every proposition must contain, beside the ideas *belonging to* the science, also ideas that are *outside* the science. The latter are the ideas of general language by means of which the informaton is given.

[54] Proposition [1], our authors observe, cannot be expressed in symbols. If we take this remark literally, [1] says nothing about the indefinables of the system, and hence cannot be a proposition belonging to the system.

Russell non distingue tra idee che appartengono alla teoria e idee che esprimono qualcosa sulla teoria e ad altri difetti, come il fatto che negli assiomi 2-6 compaiono specifici oggetti della teoria, ossia specifici simboli che stanno proprio per determinate proposizioni, e questo fatto, unito all'assenza di una regola di sostituzione[55] rende impossibile considerare tale teoria come un sistema matematico astratto, perché non è possibile attribuire diverse interpretazioni a tali simboli (infatti Russell dovrà accettare che vi è una logica proposizionale diversa per ogni livello della Teoria dei tipi) (Bernstein [1929], pp. 485-6[56]).

Questi difetti, tuttavia, possono essere rimossi e si può ottenere una teoria che indichi la struttura matematica alla base della proposta di Russell. Questa teoria è un tipo particolare di sistema matematico, ossia un insieme di proposizioni suddivise in assiomi e teoremi, che sono conseguenza di tali assiomi (Bernstein [1929], p. 484[57]). Tali proposizioni riguardano sempre una certa collezione di oggetti e certe operazioni e relazioni che vigono tra gli elementi di tale collezione (Bernstein [1929], p. 484[58]). Nel presentare un sistema di questo tipo dobbiamo avere presente che non possiamo ricorrere solo a proposizioni che appartengono al sistema, ma anche a proposizioni sul sistema e che non appartengono al sistema. Quando si fornisce una regola che indica come si combinano i simboli, per esempio, si deve ricorrere a quello che Bernstein chiama un linguaggio generale e che noi diremmo metalinguaggio che usa i concetti della metateoria per definire i concetti della teoria (Bernstein [1929], p. 484[59]).

Nel caso in cui la teoria matematica studiata è la logica, allora dobbiamo distinguere due modi in cui possiamo parlare di logica. In un senso, infatti, con logica intendiamo certi principi e certe inferenze che compiamo nella metateoria (il linguaggio) e, in altro senso, con logica intendiamo i principi e le inferenze codificati in tale teoria presentata matematicamente (Bernstein [1926], p. 713[60]). Il sistema definito nei Principia non opera questa distinzione (Bernstein [1929], p. 488[61] eBernstein [1926], p. 713[62]). La presentazione di una teoria

[55]Bernstein [1929] non nota questo fatto.

[56]Propositions [2-6] (...) *contain only symbols denoting ideas of the theory*, and hence do not satisfy anything about these ideas. (...) The presenze of [1-6] among the primitive propositions removes the theory from the category of abstract sciences, and would account for the author's view that the recognized methods of proving independence are not applicable to their theory.

[57]A mathematical science, a science in the sense of a pure deductive theory, is a body of propositions consisting of *postulates* and *theorems*.

[58]The propositions of a mathematical science concern a certain totality of things and certain connections of elemts and about certain connections among the things, they give information about a certain class of *elements* and about certain *operations* or *relations* among the elements.

[59]Since the propositions of the science give information *about* its ideas, every proposition must contain, beside the ideas *belonging to* the science, also ideas that are *outside* the science. The latter are the ideas of general language by means pf which the information is given.

[60]As a mathematical system, the logic of propositions is amenable to the postulational treatment applicable to any other branch of mathematics. As a language, this logic has *all* its symbols *outside* the system which it expresses.

[61]In the *Principia* form this separation [between the ideas that are outside the theory and the ideas that belong to the theory] is not made.

[62]This distinction between the propositional logic as a mathematical system and as a language must be made, if serious errors are to be avoided; this distinction the *Principia* does not make.

matematica dovrebbe mostrare questa differenza tra ciò è compreso nella teoria e ciò che è al di fuori di essa e non è determinato dagli assiomi e dalle regole della teoria, ma, al contrario, è usato per determinare gli assiomi e le regole.

Bernstein fornisce un esempio concreto di come si può definire, per mezzo di un'algebra, un sistema di logica proposizionale che sia, ad un tempo, *astratto*, ossia non legato a nessuna interpretazione particolare, e che mostri la differenza tra idee del sistema ed idee al di fuori del sistema e sul sistema. Assumiamo un collezione P di oggetti $\top, p, q, r, ...$ sulla cui natura non facciamo alcuna ipotesi. Quando

Ora, assumiamo due operazioni $'$ e $+$, rispettivamente unaria e binaria, su P. A questo punto, possiamo dichiarare che la teoria della logica proposizionale è il sistema $\langle P, +, ', \top \rangle$ definito dalle seguenti proposizioni primitive (che corrispondono a quelle, con lo stesso numero, del sistema dei *Principia*). Per ogni $p, q, r, \in P$:

1. se $p = \top$ e $p' + q = \top$, allora $q = \top$
2. $(p + p)' + p = \top$
3. $q' + (p + q) = \top$
4. $(p + q)' + (q + p) = \top$
5. $(p + (q + r))' + (q + (p + r)) = \top$
6. $(q' + r)' + ((p + q)' + (p + r)) = \top$
7. se p è in P, allora p' è in P
8. se p, q sono in P, allora $p + q$ sono in P.

Come Russell definiva l'implicazione materiale e la congiunzione per mezzo delle idee primitive del suo sistema, così Bernstein può definire $p \supset q = p' + q$ e $pq = (p' + q')'$ (Bernstein [1929], p. 488).

Quando gli elementi di P sono interpretati come proposizioni, allora il significato attribuito a $\top$ è quello di essere una proposizione vera. in tal caso, per esprimere il fatto che p è vera, possiamo scrivere $p = \top$ dove p e $\top$ sono simboli del sistema (se p è vera), ma $=$ è un simbolo con cui parliamo di fatti del sistema e che non appartiene ad esso. L'interpretazione di $=$ è fissata nella metateoria con cui parliamo del sistema e non è vincolata dagli assiomi e dalle leggi della teoria. La sua interpretazione è '*avere la medesima capacità deduttiva*', ossia $p = q$ significa che da p si possono dedurre esattamente le stesse proposizioni che si possono dedurre da q.

É chiaro che ogni proposizione del sistema di Bernstein può essere tradotta nel linguaggio del sistema di Russell e viceversa. Dato questo algoritmo di traduzione, è possibile mostrare che le due teorie dichiarano vere esattamente le medesime proposizioni, ma la versione algebrica di Bernstein mostra che tale teoria, anche se è considerata il sistema di logica, non è più fondamentale di una qualsiasi altra teoria matematica. La teoria di Bernstein, al contrario, è una teoria matematica esattamente come lo sono un sistema di aritmetica o un sistema di geometria e, come loro, può essere studiato con i conseuti metodi postulazionali e su di essa si possono porre i soliti problemi connessi alle discipline matematiche e si possono tentare dimostrazioni come quella di consistenza degli assiomi e quella dell'indipendenza degli assiomi fra loro ricorrendo a diverse interpretazioni (Bernstein [1929], p. 488[63]).

5.3.4 RICAVARE INFORMAZIONI DALLE TEORIE

L'interesse principale che emerge dalle ricerche degli algebristi della logica, che sono state, sopra, richiamate nei loro punti per noi più interessanti, è un interesse per i problemi metateorici posti dallo studio di teorie matematiche astratte, ossia che non hanno un'interpretazione fissata. Proprio basandosi sul fatto che ogni interpretazione di una teoria matematica che ne rispetta gli assiomi è legittima, essi possono studiare alcuni di quei problemi che, nell'ottica fondazionale assunta dall'indirizzo logicista, non erano considerati per motivi di principio.

Il lavoro degli algebristi della logica, come abbiamo visto, non è quello di fornire un sistema di logica che fondi la matematica e, con il suo calcolo, ne garantisca il rigore deduttivo. Un interesse fondazionale di questo tipo è del tutto assente nell'ambito di questa tradizione. Ciò che a loro interessa è determinare la logica come sistema matematico per poter ricavare informazioni su tale sistema. A differenza di quel che succede nell'indirizzo logicista, gli algebristi della logica non cercano di determinare la *corretta* teoria della deduzione dalla quale la matematica e, eventualmente, le altr discipline deduttive possano attingere il perfetto rigore delle dimostrazioni.

Tantomeno gli interessa fornire il sistema delle verità fondamentali da cui si possano ricavare tutte le altre leggi della logica. Non è stato possibile approfondire, qui, in modo compiuto, tutti gli aspetti della tradizione dell'algebra della logica, ma dovrebbe essere chiaro, da quel che si è detto sopra, che la determinazione di un sistema di logica, in questa tradizione, non significa che si proponga tale sistema come quello che rappresenta la logica in modo corretto. Piuttosto, con Peirce e Post, per esempio, si sfrutta il fatto che i sistemi logici possono essere espressi come teorie matematiche per studiare logiche alternative a quella classica e per indagare i rapporti che intercorrono tra questi sistemi. Post, per esempio, nel suo articolo del 1921, dopo aver definito, ricavandolo dai *Principia*, il sistema di logica proposizionale a due valori per mezzo di particolari assiomi e di particolari regole di inferenza, considera dei nuovi sistemi di logica che egli ottiene per mezzo di modifiche nell'aparato degli o delle regole di deduzione. Dapprima considera, per esempio, dei sistemi dotati di un numero finito qualunque di connettivi primitivi di arietà finita qualsiasi e a cui assegna

[63]The two forms of the theory give the same facts of logic, but while in the Boolean form the ideas that are outside the theory are separated from those that belong to the theory, in the *Principia* form this separation is not made. It is the failure to distinguish between these two sets of ideas that makes the authors say that 'the recognized methods of proving independece is not applicable, without reserve, to fundamentals'. The theory, as seen from the Boolean form, is not more fundamental than any other mathematical theory and is subject to postulational investigations applicable to all other mathematical sciences.

una tavola di verità arbitraria. Di seguito definisce una classe di sistemi con un numero finito qualunque di assiomi o regole di di inferenza e, infine, considera tavole di verità con un numero finito e maggiore o uguale a 2 di valori di verità, determinando, in tal modo alcuni tra i primi esempi di logiche polivalenti [cfr. Post [1921], pp. 173-85].

É in quest'ambito che si sviluppano le prime indagine che oggi chiameremmo metamatiche. Tra i primi notevoli risultati, si può citare ancora il medesimo articolo del 1921 di Post. Post, dopo aver definito il sistema della logica proposizionale classica per mezzo di assiomi e regole di inferenza, introduce il metodo delle tavole di verità a due valori per assegnare un valore di verità alle formule. Sulla base di queste nozioni, egli dimostra quello che chiama il *teorema fondamentale* e che è il teorema di correttezza debole e completezza debole per il calcolo proposizionale rispetto al metodo delle tavole di verità.

Ora, al di là dei risultati specifici che sono stati richiamati, è importante sottolineare il carattere profondamente diverso di questo tipo di ricerche rispetto a quelle che si ritrovano nella tradizione della logistica ed è importante aver mostrato come tali differenze risiedano in concezioni diverse su quali siano gli scopi dell'indagine logica: ricavare informazioni dalle teorie nel caso dell'algebra della logica e fondare una teoria della deduzione nel caso della logicistica.

La rilevanza della tradizione dell'algebra della logica, nell'ambito della nostra ricerca, non risiede nel fatto che questi pensatori hanno proposto particolari concezioni relative alla nozione di conseguenza logica. Il loro interesse, piuttosto, e non è da sottovalutare, risiede nel fatto che la loro concezione della logica, con gli strumenti concettuali che ha portato alla luce (come distinzione fra teoria e metateoria e i vari concetti metateorici ricordati sopra) contribuirà a far emergere l'esigenza di dare definizioni precise di nozioni quali la verità di un enunciato e, appunto, la conseguenza logica. Come vedremo, Tarski ricaverà anche da questa tradizione l'attenzione ai problemi metateorici che lo porteranno a definire i concetti propri di quella che chiamerà la metodologia delle scienze deduttive, nel cui ambito si interesserà al problema di definire, appunto, la nozione di conseguenza logica.

5.4 L'EMERGERE DEL METODO ASSIOMATICO

5.4.1 PREMESSA

Tra la fine del XIX secolo e l'inizio del XX, sorge uno specifico interesse per le teorie come sistemi di enunciati di cui si considerano le conseguenze. Tale interesse non coinvolge solo teorie matematiche, ma, in linea di principio, come vedremo, ogni scienza deduttiva. Il modo tipico di procedere prevede di scegliere un linguaggio ed assumere alcuni enunciati di tale linguaggio come assiomi (o postulati) e definire la teoria deduttiva come l'insieme di tutti gli enunciati che seguono da tali assiomi. Come vedremo, uno dei passaggi principali di tale procedimento è che, come tra gli enunciati, alcuni sono assunti come assiomi da cui dedurre le conseguenze, così alcuni termini sono posti come primitivi. Questi termiin primitivi sono sono determinati solo dalle proprietà esplicitamente stabilite dagli assiomi. Così, per esempio, se in geometria di parla del termine primitivo linea, allora non si può attribuire agli oggetti che essa designa alcuna proprietà che non discenda da qualcuno degli assiomi del sistema. In particolare, non è possibile attribuire agli oggetti che designa proprietà che si basano solo sulla nostra immaginazione o sul nostro modo pre-teorico di concepire cosa sia una linea.

In tal modo, come vedremo, l'effettivo termine usato per designare certi oggetti non è rilevante e tale termine può essere interpretato in modi diversi e un'interpretazione si dirà *modello* del sistema di assiomi se e solo se gli oggetti che si considerano, di volta in volta, come ciò che esso designa, soddisfano tutte le proprietà richieste dagli assiomi della teoria.

Ciò che è caratteristico del metodo assiomatico, dunque, è l'intenzione di studiare le teorie indipendentemente dall'interpretazione dei loro termini e senza riconoscere un'interpretazione che sia, di diritto, quella privilegiata. Questi aspetti, avvicinano gli studi assiomatici sicuramente più allo spirito con cui gli algebristi della logica intendevano la nozione di logica che allo spirito con cui i logicisti intendevano la medesima nozione e non è un caso un caso se alcuni studiosi, come E. V. Huntington, possono essere classificati tanto nella categoria degli algebristi della logica quanto nella categoria degli assiomatici. Vedremo, poi, nel prossimo capitolo, come le nuove nozioni e le idee che ispirano le ricerche degli assiomatici riceveranno grande attenzione da parte di Tarski e costituiranno, per lui, uno stimolo e una fonte di questioni che contribuiranno a sviluppare il suo interesse per la metodologia delle scienze deduttive e per giungere a fornire una definizione in termini semantici della nozione di conseguenza logica.

Anche in questo contesto, occorre ribadire che non intendo fornire uno studio completo e approfondito dell'imprese assiomatiche tra Ottocento e Novecento. Ciò che mi preme è richiamare l'attenzione su un nuovo modo di studiare le teorie che porterà all'emergere di nuove esigenze e di nuovi problemi che, come ho accennato sopra, rivestiranno un ruolo di primo piano anche nella ricerca di Traski e nelle motivazioni che condurranno il logico polacco ad affrontare il problema della definizione della nozione di conseguenza logica.

Prima di proseguire, occorre, poi, inserire una piccola annotazione terminologica. Alcuni autori a farò riferimento, attribuiscono due diversi significati ai termini *assioma* e *postulato*. Di questo avviso è, per esempio, Huntington. Egli attribuisce il termine assiomi ad enunciati considerati veri ed il termine postulati (dal latino *postulo*) ad enunciati che, semplicemente, si richiede, in modo arbitrario, che siano soddisfatti nel sistema in cui sono posti (Huntington [1906], pp. 3-4[64]). In questa sede è inutile appesantire il discorso con questa differenza terminologica che, comunque, non era universalmente condivisa e che, poi, non si è conservata. Userò in modo indifferente i due termini per riferirmi agli

[64] These [general] laws are to be regarded no longer as 'axioms', since they are merely blank forms, not in themselves either tue or false, but rather as 'postulates', because we 'demand', arbitrarily, that the system considered shall conform to these conditions.

enunciati posti alla base di un sistema e che costituiscono le leggi fondamentali di tale sistema, quelle da cui seguono tutte le altre leggi valide del sistema.

5.4.2 ASSIOMATICA FORMALE

La prima caratteristica del metodo assiomatico su cui intendo porre l'accento è che si tratta di un modo di procedere formale, nel senso che le conseguenze degli assiomi sono determinate a prescindere dalla natura degli enti che si considerano designati dai termini che compaiono negli assiomi in una specifica interpretazione. In tal senso, si può anche dire che i termini che compaiono negli assiomi, in realtà, non designano nulla di determinato, ma possono ricevere varie interpretazioni. E. V. Huntington, per esempio, nelle prime pagine di *The Fundamental Laws of Addition and Multiplication in Elementary Algebra*, afferma, con grande chiarezza:

> La deduzione [dagli assiomi] (...) non è influenzata dalle importune connotazioni che si sicurmanete si attaccherebbero ad ogni concreta interpretazione dei simboli.
>
> Da questo punto di vista il nostro lavoro diviene, in realtà, molto più generale di uno studio del sistema dei numeri; è *lo studio di ogni sistema che soddisfa le condizioni poste dalle leggi generali* (...). ci sono, infatti, molti sistemi del genere, e tutti sono inclusi sotto il nome generale di algebra (Huntington [1906], p. 3[65]).

Senza soffermarsi su dettagli che non sono utili in questa ricerca, si può dire che, nell'articolo da cui è tratta questa citazione, Huntington intende fornire un sistema che definisca le operazioni di somma e prodotto tra i numeri. Come mostra il passo riportato sopra, però, egli nota che, in realtà, prescindendo dalla natura degli enti designati dai termini del sistema, si sta definendo non un sistema concreto, ma, per così dire, un sistema *astratto*, ossia un sistema i cui termini non sono interpretati e, perciò, non si rivolgono a nulla di determinato. Si è liberi di assegnare a questi termini l'interpretazione che si preferisce e si può, poi, verificare quali interpretazioni soddisfano le leggi fondamentali del sistema, ossia i suoi postulati, e quali non le soddisfano. Huntington mostra che si trovano facilmente diverse interpretazioni che soddisfano gli assiomi. Le leggi da lui poste come generali, infatti sono soddisfatte, ugualmente, dai numeri interi positivi, dai numeri razionali e dai numeri complessi. Ci sono anche enti non numerici, poi, che soddisfano tali leggi e sono i punti e i vettori. In tal caso, chiaramente, ciò che chiamiamo operazioni di somma e prodotto non saranno le operazioni a cui solitamente pensiamo quando usiamo questi termini, in quanto non ci stiamo più riferendo ad operazioni tra numeri.

---

[65] The deductions (...) will not be affected by the troublesome connotations which would be sure to attach themselves to any concrete interpretation of the symbols.

From this point of view our work becomes, in reality, much more general than a study of the sstem of numbers; it is *a study of any system which satisfies the conditions laid down in the general laws* of (...). As a matter of fact, there are many such systems, all of which are usually included under the general name of algebra.

Questa mancanza di un legame con le concezioni abituali di certi oggetti, secondo Huntington, ben lungi dal rappresentare un problema, è proprio ciò che è richiesto per lo studio assiomatico delle teorie. L'obiettivo di studiare assiomaticamente una teoria, infatti, è esattamente quello di rendere chiari i presupposti su cui regge tale disciplina. A tal fine, occorre evitare che nel considerare gli enunciati validi della teoria, ossia le sue leggi, si ricorra a premesse implicite, ossia a proprietà non esplicitamente ricavabili dagli assiomi. Se per esempio, intendo procedere a costruire un triangolo equilatero, al modo di Euclide, considerando, tra le altre cose, il punto di intersezione di due circonferenze, devo giustificare il fatto che necessariamente le circonferenze in quella costruzione si incontrano. Per gli assiomatici, se tutto deve essere derivabile dagli assiomi, chiaramente non si può considerare rigorosa una dimostrazione che ricorra a proprietà diverse.

Assumere che i termini del sistema di assiomi non abbiamo, di per sé, alcun significato determinato, ma che possano riceverne uno quando si propone un'interpretazione, significa garantire che nelle derivazioni delle conseguenze dagli assiomi non si ricorre a nulla che non sia ricavabile da essi. Nel caso della costruzione euclidea, per esempio, non è possibile ricorrere all'intuizione secondo cui le due circonferenze devono incontrarsi, neanche se pensiamo che tale proprietà discenda dalla natura stessa della circonferenza. Questa procedimento è illegittimo perché, in una teoria assiomatica, il termina circonferenza non significa nulla di per sé e può essere interpretato in modi diversi. Potrebbe esser interpretato in modo tale, per esempio, da assegnargli un oggetto per cui non si verifica ciò che è richiesto dalla costruzione di Euclide.

Anche su questo punto, Huntington si esprime con molta chiarezza. Si tenga presente che, coem si è fatto velocemente notare nel paragrafo precedente, Huntington, contrasta gli assiomi, proposizioni dotate di un contentuo preciso e vere, ai postulati, leggi che non hanno un contenuto preciso in quanto possono essere interpretate in modi diversi:

> Il primo obiettivo di questo scritto è presentare una lista di proposizioni fondamentali per l'algebra da cui (...) possano essere dedotte tutte le altre proposizioni dell'algebra (...).
>
> Il passo successivo è vedere quali proposizioni seguono da queste leggi per deduzione logica. Ma qui sorge subito la questione: come possiamo essere sicuri che la nostra deduzione sia rigorosa? Come possiamo essere sicuri che non usiamo, nel nostro ragionamento, alcune proprietà dei numeri oltre a quelle espressamente enunciate negli assiomi? L'unico modo di evitare questo pericolo è considerare le nostre leggi fondamentali non come proposizioni assiomatiche sui numeri, ma come *forme vuote* in cui le lettere $a, b, c, ...$ possono denotare ogni oggetto ci piace e in cui i simboli $+$ e $\times$ possono indicare qualsiasi regola di combinazione. Tale forma vuota diviene una proposizione solo quando alle lettere e ai simboli è data un'interpretazione definita - in effetti una proposizione vera per qualche

> interpretazione e una proposizione falsa per le altre. (Huntington [1906], p. 2[66]).

Ciò segue dagli assiomi (o, nel senso di Huntington, postulati) di una teoria assiomatica, dunque, segue in modo *formale*, ossia solo in virtù della forma degli assiomi (che sono forme vuote, come diceva Huntington) e delle leggi della logica. Nessuna proprietà che non è logicamente ricavabile dagli assiomi può essere usata per determinare le leggi della teoria. Ciò si basa sul fatto, come abbiamo detto, che non si fa alcuna assunzione sulla natura degli enti di cui si parla. Per questo motivo si può dire che le leggi del sistema seguono formalmente, ossia non contenutisticamente, dagli assiomi. Questa, come vedremo, sarà una caratteristica a cui Tarski, in un contesto analogo, anche se non identico darà particolare enfasi. Gli assiomatici, ad ogni modo, consideravano già centrale questa caratteristica che indicava semplicemente che le leggi del sistema sono effettivamente conseguenze logiche proprio degli assiomi e non degli assiomi e di qualche altra assunzione non esplicitata (cfr. , per esempio, Huntington [1906], p. 3[67]).

Le medesime idee si ritrovano, per esempio, negli scritti di Pieri e Padoa, per esempio (cfr. Pieri [1895], p. 13[68], Pieri [1905], p.312[69]; Padoa [1896], p. 1). Tutti questi autori sottolineano che per studiare le teorie come discipline deduttive è opportuno considerare le nozioni primitive come definite solo dagli assiomi della teoria e, come tali, prive di qualunque interpretazione determinata. In tal modo, infatti, è possibile assicurare che le dimostrazioni non si basano su altro significato dei termini che quello codificato dagli assiomi.

Ciò che occorre sottolineare con forza è che, per gli assiomatici, non vi sono termini o proposizioni che per principio sono primitivi. Sia nel campo della scelta

---

[66] The primary object of this paper is to present a list of fundamental propositions for algebra, from which (...) all the other propositions of algebra can be deduced (...).

The next step is to see what propositions follow from these laws by logical deduction. But here the question ar once arises: How can we be sure that our deduction is rigorous? How can we be sure that we do not employ, in our reasoning, some other properties of numbers besides those expressly stated in the axioms? The only way to avoid this danger is to think of our fundamental laws, not as axiomatic propositions about numbers, but as *blank forms* in which the letters a, b, c, etc. may denote any objects we please and the symbols $+$ and $\times$ any rules of combination; such a blank form will become a proposition only when a definite interpretation is given to the letters and symbols - indeed a true proposition for some interpretations and a false proposition for others. (...) The deductions made from such a blank forms must necessarily be purely formal, and hence will not be affected by the troublesome connotations which would be sure to attach themselves to any concrete interpretation of the symbols.

[67] The deductions made from such balnk forms must necesseraly be purely formal, and hnece will not be affectred by the troublesome coonotations wchich would be sure to attach themselves to any concrete interpretation of the symbols.

[68] Gli enti qui non definiti, vale a dire i concetti *primitivi* intorno a cui si aggirano tutti i Postulati (e sono come la materia greggia di ogni proposizione) vengono ad essere *tre* di numero, chiamati il *punto projettivo*, la *retta projettiva*, il *segmento projettivo*. Ad essi può attribuirsi qualsivoglia significato in armonia coi Postulati che saranno man mano introdotti.

[69] Si procederà da tre nozioni primitive, o dogamtiche: il *punto projettivo complesso*, la *congiungente due punti complessi distinti*, o *allineamento* fra punti, e la *catena di tre punti collineari e distinti*, o *concatenamento* fra punti; che verranno definite man mano implicitamente da una serie di proposizioni prinitive o postulati della *Geometria Projettiva complessa*.

dei termini sia in quello della scelta degli assiomi si è guidati solo da criteri quali l'economia (ricorrere a meno termini primitivi e a meno proposizioni primitive possibili) o di convenienza espositiva. Senza presentare dettagli che non sono necessari, si può notare come a volte la diversa scelta dei termini primitivi, per esempio, è dovuta al fatto che si scopre come definire uno dei termini precedentemente assunto come primitivo sulla base degli altri, ma altre volte si tratta di un libera scelta alternativa. Il caso più interessante, per noi è il secondo. Padoa ricorda, per esempio, come Pasch, Peano, Pieri e lo stesso Padoa abbiano presentato quattro sistemi di geometria da cui è possibile derivare le medesime proposizioni, ma che si basano su termini primitivi e, quindi, su assiomi diversi. Pasch assume *punto*, *segmento*, *piano* e la relazione '*sovrapporsi a*' come termini primitivi. Peano, invece, assume solo tre termini primitivi: *punto*, *segmento* e *movimento*. I primi due coincidono con quelli del sistema di Pasch. Piano non compare più come termine primitivo perché Peano mosta che può essere definito per mezzo delle nozioni di punto e segmento. La relazione '*sovrapporsi a*', poi, è sostituita dalla nozione di *movimento*. Pieri ha eliminato la nozione di segmento dal sistema di Peano, perché si è accorto che può essere definita per mezzo delle nozioni di punto e movimento. Padoa, infine, ha elaborato un sistema in cui i termini primitivi sono il primo e l'ultimo di quelli che aveva considerato Pasch, ossia *punto* e la relazione '*sovrapporsi a*' (Padoa [1900], pp.1-2).

Quel che si è detto a proposito dei termini, si potrebbe dire anche a proposito degli assiomi. Gli elementi di un sistema, come abbiamo detto, non hanno un'interpretazione determinata, ma gli possono essere attribuiti diversi significati, alcuni dei quali soddisferanno gli assiomi, mentre altri non li soddisferanno. Per questo motivo, la scelta dei termini primitivi e degli assiomi non dipende dal loro essere realmente primitivi o dal essere realmente veri (e, magari, verità realmente prime). I termini non possono essere primitivi per essenza e gli assiomi non possono essere veri di necessità finché non si stabilisce a quale universo di discorso si riferiscano. Poiché i termini di per sé non si riferiscano a nulla e gli assiomi, come dice Huntington, sono, di conseguenza mere forme vuote ed assunzioni su ciò vale tra quei termini, si possono cambiare liberamente sia i termini sia le assunzioni che si fanno su di essi. Sarà solo al momento dell'interpretazione che attribuiremo ai termini una realtà determinata e alle assunzioni un valore di verità, ma per quel che riguarda ciò che precede il momento interpretativo è chiaro che non vi è alcun vincolo sulle scelte possibili. Ogni discussione circa la semplicità intrinseca dei termini e l'evidenza o la verità in senso assoluto delle proposizioni primitive diviene, più che secondario, senza senso.

5.4.3 MODELLI, CONTROMODELLI E CONSEGUENZA LOGICA

Negli scritti degli assiomatici si possono trovare spesso usate in modo indifferente le nozioni *conseguenza logica* degli assiomi e *deducibile* dagli assiomi e, generalmente, non si pongono il problema se siano distinte. Come vedremo, essi fanno ricorso a nozioni che noi diremmo semantiche, ossia che riguardano i valori di verità degli enunciati di una teoria, ma le trattano spesso, e in modo non problematico, come la stessa cosa delle nozioni che fanno riferimento, piuttosto, alla deduzione. Vedremo che le loro affermazioni sono spesso, per così dire, tendenzialmente semantiche, ma ancora non si giunge a distinguere bene tra teoria e metateoria, così che quando si parla di nozioni che sembrano doversi avvicinare alla nozione di soddisfazione, che sarà definita da Tarski, essi si esprimono, invece, in termini sostituzionali.

Pieri, ne *I principii della geometria di posizione*, del 1898, fa un'affermazione che pare del tutto esplicita:

> Non sarà superfluo avvertire (...) che il giudizio 'Da $Q(a, b, c, \ldots)$ si deduce $P(a, b, c, \ldots)$' - dove P e Q siano proposizioni negli enti rappresentati dalle lettere $a, b, c, \ldots$ mutabili ad arbitrio, cioè non aventi significato indipendente da quello che è loro assegnato in P - è da ritenersi il medesimo che: 'Qualunque siano $a, b, c, \ldots$, se per essi è vera $P(a, b, c, \ldots)$ sarà altresì vera $Q(a, b, c, \ldots)$; chi di questi enti asserisce P, non può negar Q pei medesimi' (Pieri [1898], p. 109).

Nonostante in questo passo si parli di deduzione di $P(a, b, c, \ldots)$ da $Q(a, b, c, \ldots)$, Pieri non definisce il seguire di $P(a, b, c, \ldots)$ da $Q(a, b, c, \ldots)$ come una dimostrazione, ma al fatto che se $Q(a, b, c, \ldots)$ è una proposizione vera, allora anche $P(a, b, c, \ldots)$ deve essere una proposizione vera. Quando Pieri specifica che gli enti $a, b, c, \ldots$ sono mutabili ad arbitrio egli si riferisce, evidentemente, alla possibilità di cambiare l'interpretazione loro assegnata. Ciò significa se $P(a, b, c, \ldots)$ segue logicamente da $Q(a, b, c, \ldots)$, allora il fatto che $P(a, b, c, \ldots)$ sia vera posto che $Q(a, b, c, \ldots)$ lo sia è indipendente da quali siano gli speicifici oggetti designati dai termini $(a, b, c, \ldots)$.

Abbiamo già osservato che i termini deduzione e conseguenza logica non sono usate in modo diverso e, in particolare, con deduzione non ci si riferisce in senso stretto ad una dimostrazione, tantomeno formale. Ciò risulta evidente da un altro passo di Pieri, in cui i due concetti sono definiti nello stesso modo e in termini che oggi diremmo semantici:

> Date più proposizioni condizionali $P(x, y, z, ...), Q(x, y, z, ...), R(x, y, z, ...)$ ecc., sugli enti variabili $x, y, z, ...$ non può cader dubbio sul valore delle asserzioni 'dalle P e Q *non si deduce* la R', 'la R *non è conseguenza* P e Q': però che questo emerge senz'altro dal comun significato logico dei termini 'si deduce', ' è conseguenza di': vedi a pagina 9 [il passo riportato sopra]. Ambo i modi null'altro esprimono che questa proposizione particolare: '*esistono* degli $x, y, z, ...$ per cui son vere la P e la Q, ma non è vera la R'.
>
> Ciò premesso le proposizioni $P, Q, R, ...$ si diranno 'indipendenti le une dalle altre' se avvien che nessuna sia conseguenza delle rimanenti (dunque se avviene, che per ciascuna si possan trovare degli $x, y, z, ...$ che non la verificano, mentre rendon soddisfatte le altre)(Pieri [1898], p. 160).

Ciò significa, anticipando un modo di esprimersi che sarà chiarito meglio nel prossimo capitolo, che la relazione di conseguenza logica di una proposizione X da un insieme K di proposizioni è intesa come la conservazione della verità dalle premesse alla conclusione indipendentemente da quali siano gli specifici oggetti a cui si riferiscono i termini non logici presenti in X e in K.

Quando un'interpretazione soddisfano un insieme K di enunciati è detta *modello* di tale insieme. Quando si assume un insieme di assiomi, si tende ad evitare alcuni di questi assiomi siano conseguenza degli altri, ossia si tende ad evitare che l'insieme di assiomi sia ridondante e si possa fare a meno di qualcuno di essi (cfr., per esempio, Huntington [1906], p. 2[70] e Padoa [1902 b], p. 11[71]). Ora, per dimostrare che una proposizione X non segue logicamente da un insieme di proposizioni K, si cerca di trovare un'interpretazione che sia modello di $K\backslash\{X\}$ e tale che non renda vera anche X, ossia, si cerca di trovare un *contromodello* per X che sia, però anche un modello per $K\backslash\{X\}$. Bisogna osservare che per adottare un tale metodo non occorre concepire la nozione di conseguenza logica come conservazione della verità in tutte le interpretazioni possibili. A rigore, è sufficiente ammettere che tale condizione è necessaria, benché non necessariamente debba essere anche sufficiente. É sufficiente, in altre parole, ammettere che quando si fornisce una dimostrazione di X da $K\backslash\{X\}$ si conserva la verità dalle premesse alla conclusione.

Combinando i due passi di Pieri, citati sopra, però, ciò che risulta è precisamente l'affermazione che affermare che la proposizione X segue logicamente dall'insieme K di proposizioni è esattamente la stessa cosa che affermare che ogni interpretazione che rende vere tutte le proposizioni in K rende vera anche X. Pieri, in altre parole, afferma che X segue logicamente da K se e solo se ogni interpretazione che rende vere tutte le proposizioni in K rende vera anche X.

La medesima idea si ricava anche dagli scritti di Padoa. Supponiamo, infatti, di avere fornito un insieme di assiomi e vogliamo mostrare che nessun assioma segue dagli altri. Ecco, allora, come si esprime Padoa:

> Per *dimostrare* la *indipendenza* (...) di un sistema di proposizioni primitive è necessario e sufficiente determinare, per ciascuna di esse, un'interpretazione dei simboli primitivi per ui risulti falsa la proposizione considerata e vere tutte le altre (Padoa [1902 b], p. 11).

Ora, il punto centrale è che Padoa, come Pieri, dichiara che il trovare un'interpretazione dei termini primitivi del sistema che renda falso un assioma e veri tutti gli altri è condizione non solo sufficiente, ma anche necessaria per dire una

[70] The primary object of this paper is to present a list of fundamental propositions for algebra, from which, on the one hand, all the other propositions of algebra can be deduced, and in which, on the other hand, no superfluous items are included, - a list, in short, which is *sufficient*, and *free from redundancies*.

[71] É pur manifesto che, se non *necessario*, è almeno *desiderabile* che *le proposizioni primitive di un trattato formino un sistema irriducibile* (poiché, altrimenti, [ciò] consentirebbe di passare taluna di esse dalla categoria delle proposizioni primitive a quella dei teoremi).

proposizione non segue da un certo insieme di proposizioni. Se indichiamo con X una proposizione e con K un insieme di proposizioni, allora ciò significa, non solo che se c'è almeno un'interpretazione che rende vere tutte le proposizioni in K e non vera X, allora X non segue logicamente da K, ma significa anche che se X non segue logicamente da K, allora c'è almeno un'interpretazione che rende vere tutte le proposizioni in K e non vera X. In sintesi, possiamo dire che X non segue logicamente da K se e solo se c'è almeno un'interpretazione che rende vere tutte le proposizioni in K e non vera X. Ciò, però, è la stessa cosa che dire, appunto, che X segue logicamente da K se e solo se, per ogni interpretazione, se sono vere tutte le proposizioni in K, allora è vera X.

5.4.4 CONCLUSIONE

Come abbiamo visto, dunque, tra gli assiomatici si trova una definizione di conseguenza logica in termini di conservazione della verità dalle premesse alla conclusione a prescindere dalle specifiche interpretazioni adottate. Nel prossimo capitolo, ci feremeremo a lungo su questa definizione, per capire bene quale concezione esprima, in quale contesto di ricerca si inserisca e quali siano i problemi che si intendono risolvere, o perlomeno affrontare, definendo la nozione di conseguenza logica in questo modo. Vedremo che Tarski [1936], ricorrendo ad una serie di concetti, in parte chiariti proprio da lui, quali soddisfazione di una funzione enunciativa, interpretazione e modello, proporrà una definizione di conseguenza logica che si avvicina a quella proposta dagli assiomatici. Lo stesso Tarski sottolineerà che la sua definizione p, in qualche modo, già nota, sebbene gli si proponga di chiarirla alla luce delle recenti ricerche nel campo della semantica, a cui lui stesso ha contribuito (Tarski [1936], p. 414[72]).

Non può sfuggire neppre l'aria di famiglia con la definizione di Bolzano, sebbene, come abbiamo visto, Bolzano definiva òa nozione di conseguenza logica tra enti dallo statuto ontologico particolare, quali le proposizioni in sé, composte da rappresentazioni in sé. Ad ogni modo, sia negli assiomatici sia in Bolzano, compaiono la condizione della conservazione della verità dalle premesse alla conclusione e la condizione della formalità resa attraverso la variazione del significato delle parti non logiche delle proposizione (variazione delle rappresetazioni in sé nel caso di Bolzano e variazione delle interpretazioni nel caso degli assiomatici). Sia negli assiomatici sia in Bolzano, poi, queste due condizioni, insieme, sono considerate necessarie e sufficienti per definire il sussistere o meno della relazione di conseguenza logica tra una proposizione e un insieme di proposizioni.

Tarski sarà consapevole delle ricerche degli assiomatici, mentre non mostra alcuna conoscenza della proposta di Bolzano. Come abbiamo accennato e come vedremo diffusamente fra poco, Tarski riconosce che la sua definizione della

[72] I emphasize, however, that the proposed treatment of the concept of consequence makes no very high claim to complete originality. The ideas involved in this treatment will certainly seem to be something well known, or even something of his own, to many logician who has given close attention to the concept of consequence and has tried to characterize it more precisel. Nevertheless it seems to me that only the methods which have been developed in recent years for the establishment of scientific semantics, and the concepts defined with their aid, allow us to present these ideas in an exact form.

nozione di conseguenza logica possa suonare familiare a chi si ha già posto attenzione a questo problema. Come abbiamo visto, però, e come spiegheremo, con ulteriori dettagli, anche nel prossimo capitolo, gli assiomatici non avevano sviluppato una chiara distinzione tra concetti teorici e metateorici ed uno studio dei secondi paragonabile a quello che proporrà Tarski nei suoi lavori degli anni '30 del secolo scorso. Per questo, probabilmente, tendevano a non distinguere chiaramente la nozione di conseguenza logica da quella di deducibilità. Probabilmente ritenevano che la nozione di conseguenza logica, sebbene intesa in termini di conservazione della verità dalle premesse alla conclusione a prescindere dalle specifiche interpretazioni di termini primitivi del sistema, potesse essere trattata in modo del tutto rigoroso solo come deduzione, dal momento che questa nozione era ormai stata definita in modo preciso, mentre le nozioni di verità in un modello e di interpretazione erano ancora usate in modo più intuitivo. Come vedremo, per proporre la sua definizione della nozione di conseguenza logica, Tarski, non a caso, farà riferimento proprio al miglioramento nella comprensione e nella definizione delle nozioni metateoriche.

Capitolo 6

SISTEMI DEDUTTIVI E DEFINIZIONE SEMANTICA DELLA CONSEGUENZA LOGICA IN TARSKI

6.1 PREMESSA

In questo capitolo considereremo soprattutto due diversi contributi di Tarski relativi che interessano direttamente la nostra ricerca sulla nozione di conseguenza logica. Il primo contributo che considereremo si ritrova in due articoli degli anni '30 (Tarski [1930a] e Tarski [1930b]), Tarski ha studiato le proprietà di una nozione di conseguenza, non necessariamente logica, in generale, ossia a prescindere dal modo, sintattico o semantico, in cui essa è definita. Le idee elaborate in questi articoli saranno riprese e sviluppate, nell'ambito del filone di ricerca della logica algebrica, per studiare, in modo particolare, proprio la nozione di conseguenza logica, sempre a prescindere dal modo particolare in cui essa è definita. Il secondo contributo, invece, proposto in Tarski [1936c], riguarda la sua proposta di caratterizzare la nozione di conseguenza logica in termini semantici, basandosi sulle nozioni di soddisfazione di una funzione enunciativa e di modello. Entrambe queste proposte si riveleranno molto importanti.

Sulla prima parte mi soffermerò a lungo e in dettaglio negli ultimi capitoli della tesi, perciò, in questo capitolo, mi limiterò a delineare il senso delle ricerche tarskiane e questo proposito e ad accennare, come esempio, ai risultati più impotanti che egli ottiene. Quel che occorre sottolineare è il punto di vista del tutto generale dal quale si pone Tarski. Egli non considera in modo particolare la nozione di conseguenza logica, ma qualsiasi nozione di conseguenza generale, caratterizzata slla base di pochi assiomi che permettevano lo studio delle proprietà delle teorie deduttive che erano invarianti rispetto ai particolari sistemi formali o alle particolari semantiche con cui erano definite. In questo modo, egli ha potuto sviluppare il progetto della *metodologia delle scienze deduttive*, che lo ha tenuto particolarmente impegnato dalla metà degli anni'20 alla fine degli anni '30 e con cui ha inteso fornire uno studio generale delle scienze deduttive, termine con cui comprende tanto le teorie matematiche (come l'aritmetica e le algebre di Boole), quanto i sistemi di logica, compresi quelli non classici che stavano emergendo proprio in quegli anni (come la logica trivalente e le logiche polivalenti di Łukasiewicz, le logiche polivalenti di Post, la logica intuizionista formalizzata da Heyting e i sistemi dell'implicazione stretta di C. I. Lewis).

Sulla seconda questione, che riguarda la caratterizzazione, in Tarski [1936c], della nozione di conseguenza logica sulla base delle nozioni di conservazione della verità dalle premesse alla conclusione e di formalità, ci soffermeremo più a lungo. Occorre sottolineare fin da ora che, contrariamente a quel che ha sostenuto Etchemendy (Etchemendy [1990], p. 2[1]) e che è stato accettato da gran parte degli studiosi che si sono confrontati con lui (cfr., per esempio, Bays [2001], p. 1702[2]), la proposta di Tarski non ha l'obiettivo principale di definire ricorrendo a nozioni matematiche un concetto intuitivo che sarebbe il concetto proprio e corretto di conseguenza logica. Il tentativo tarskiano, piuttosto, tenta di rispondere all'esigenza metodologica di rendere chiari e trattabili negli studi formali una serie di concetti, quali la conseguenza logica, ma anche il concetto di verità e quello di definibilità. Come scrive Vaught [1986], frequentando una serie di seminari tra il 1927 e il 1929, Tarski era insoddisfatto dell'imprecisione con cui certi concetti (come enunciato vero, conseguenza e concetto primitivo) erano impiegati nelle indagini metamatematiche e incominciò a pensare che se si fosse riusciti a studiarli matematicamente si sarebbero potuti impiegare in modo più proficuo (Vaught [1986], p. 870[3]). Come abbiamo accennato, Tarski è spinto ad intraprendere questa indagine per rendere usabile il concetto di conseguenza logica (ed altri), non perchè intende fissare il significato del concetto proprio di conseguenza logica. Egli ha sempre rifiutato di concepire l'impresa scientifca come una fondazione della conoscenza su basi certe e indubitabili e, in modo particolare, si è sempre rifiutato di pensare che la logica fosse una disciplina che godesse di uno statuto privilegiato in quanto del tutto sicura. Come dimostrano diversi passi della sua opera, egli si è sempre tenuto lontano da una prospettiva

[1] Tarski takes as his goal an account of consequence that remains faithful to the ordinary, intuitive concept from which we borrow the name.

[2] On the whole, Tarski's paper is concerned with providing a mathematical analysis of the notion of logical consequence. In theory, this project should involve two different jinds of investigation: first, a philosophical investigation which clarifies our intuitive conception of logical consequence, and second, a mathematical investigation which develops a formal definition correspinding to our intuitive conception. Tarski's paper, however, tends to proceed as though the first of these investigations has already been completed.

[3] In the [1927-'29] seminar work, Tarski saw that it was desirable mathematically to study and in some cases define precisely notions like. true sentence, consequence, undefined concept, etc..

del genere. Un passo tratto da *What are Logical Notions* è del tutto chiaro al proposito, anche, come ho già notato, molti commentatori di Tarski lo hanno considerato sotto una prospettiva diametralmente opposta:

> Le persone parlano di afferrare il significato proprio e vero di una nozione, qualcosa di indipendente dall'uso reale e independente da ogni proposta normativa, qualcosa come l'idea platonica al di là della nozione. Quest'ultimo approccio è così alieno da me che, semplicemente, lo ignorerò (Tarski [1986], p. 145)[4].

Anche la conclusione di questo saggio è emblematica. Più avanti riprenderò queste considerazioni ed introdurrò anche la questione trattata in questo articolo. Per il momento, basta dire che egli giunge a mostrare che, se assumiamo la Teoria dei tipi come logica e consideriamo logiche tutte le nozioni che sono invarianti rispetto alle permutazioni dell'universo su se stesso, allora le nozioni insiemistiche sono logiche se sono definite usando il metodo dei *Principia* e non lo sono se le definiamo usando il metodo di Zermelo. Ora, un risultato di questo tipo non è un problema per Tarski, perché quel che egli ricerca non è la fondazione ultima della definizione di un concetto o di una teoria, ma la possibilità di studiare e chiarire teorie, metodi e nozioni, mostrandone le proprietà e le relazioni reciproche. Non si tratta di stabilire il vero sistema del sapere scientifico. Ecco, infatti, come Tarski commenta il risultato accennato sopra:

> Poiché è noto che le usuali nozioni insiemistiche possono essere definite in termini di una sola di esse, la nozione di appartenenza, o la relazione *essere membro*, l'ultima forma della nostra domanda è se la relazione *essere membro* è una relazione logica nel senso della mia proposta. La risposta sembrerà deludente. Infatti possiamo sviluppare la teoria degli insiemi, la teoria della relazione *essere membro*, in un modo tale che la risposta a questa questione è affermativa o possiamo procedere in modo tale che la risposta è negativa.
>
> Così la risposta è: Come vi pare! (Tarski [1986], p. 152[5])

Nei paragrafi seguenti tornerò ad occuparmi di queste questioni e le svilupperò con ulteriori dettagli. Poichè, però, queste osservazioni sul lavoro di Tarski non sono diffuse tra i suoi commentatori e svolgeranno un ruolo importante nel modo in cui analizzerò la caratterizzazione tarskiana della nozione di conseguenza logica, è stato opportuno parlarne fin da ora.

[4]People speak of catching the proper, true meaning of a notion, something independent of actual usage, and independent of any normative proposals, something like the platonic idea behind the notion. This last approach is so foreign and strange to me that I shall simply ignore it.

[5]Since it is known that all usual set-theoretical notions can be defined in terms of one, the notions of belonging, or the membership relation, the final form of our question is whether the membership relation is a logical one in the sense of my suggestion. The answer will seem disappointing. For we can develop set theory, the theory of the membership relation, in such a way that the answer to this question is affirmative, or we can proceed in such a way that the answer is negative.

So the answer is:'As you wish'!.

6.2 LA FUNZIONE CONSEGUENZA NELLA METODOLOGIA DELLE SCIENZE DEDUTTIVE

Nel suo diffuso libro del 1936 *Introduzione alla logica e alla metodologia delle scienze deduttive*, tarski fornisce una chiara illustrazione di ciò a cui si riferisce quando parla di metodologia delle scienze deduttive. Conviene riportare questo passo, prima di svolgere ulteriori osservazioni:

> La metodologia delle scienze deduttive è divenuta una teoria generale in un senso analogo a quello per cui l'aritmetica è la teoria dei numeri e la geometria è la teoria delle configurazioni geometriche. Nella contemporanea metodologia noi studiamo le teorie deduttive come unità in se stesse oltre che gli enunciati che le costituiscono; noi consideriamo i simboli e le espressioni di cui questi enunciati sono formati, le proprietà e gli insiemi di espressioni e enunciati, le relazioni su di essi definite (come la relazione di conseguenza) ed addirittura relazioni tra le espressioni e gli oggetti di cui esse parlano (come la relazione di designazione); a proposito di questi concetti stabiliamo leggi generali (Tarski [1941], p. 175).

Tarski definisce, quindi, la metodologia delle scienze deduttive come quella disciplina che permetteva di studiare, da un punto di vista unitario, le teorie deduttive, che, come vedremo meglio, sono insiemi di enunciati su cui è definita una operazione di conseguenza logica. Come accennato sopra, queste teorie possono essere tanto sistemi matematici in senso stretto[6] (aritmetica, analisi, geometria, algebre di Boole, ...) quanto sistemi logici e ricordiamo che proprio in quegli anni stavano sorgendo nuovi sistemi di logica alternativi a quella classica

[6] Aggiungo questa specificazione perché in un passo di Tarski [1936d] si suggerisce che anche i sistemi logici possono essere considerati sistemi matematici:

> Sempre più si diffonde l'opinione secondo cui l'unca caratteristica essenziale, mediante la quale si possono distinguere le discipline matematiche da tutte le altre scienze, è il metodo deduttivo; non solo ogni disciplina matematica è una teoria deduttiva è una teoria deduttiva, ma anche, per converso, ogni teoria deduttiva è una disciplina matematica (secondo questo punto di vista anche la logica deduttiva andrebbe annoverata tra le discipline matematiche). Non discuteremo qui le ragioni in favore di questa tesi, ci limiteremo a sottolineare che è possibile portare in sua difesa argomenti di notevole portata (Tarski [1936d], p. 154).

Anche in un altro passo della stessa opera, egli sembra identificare scienze deduttivie e matematica, in quanto usa i due termini in modo equivalente:

> Tenteremo ora un'esposizione dei principi fondamentali che vanno adottati nella costruzione della logica e della mateamtica. L'analisi dettagliata e la valutazione critica di questi principi sono compito di una disciplina particolare, chiamata METODOLOGIA DELLE SCIENZE DEDUTTIVE o METODOLOGIA DELLA MATEMATICA (Tarski [1936d], p. 151).

(come, ad esempio, le logiche a più valori di verità di Łukasiewicz e quelle di Post, i sistemi dell'implicazione stretta di C. I. Lewis, il sistema di logica intuizionista proposto da Heyting).

Nel dedicarsi alle ricerche di questa disciplina, Tarski, come si è accennato sopra, non intendeva ricondurre le teorie deduttive ad una base certa, magari identificata con la logica, come nel programma logicista. La metodologia delle scienze deduttive, piuttosto, è un tentativo di chiarire ed analizzare i concetti e i metodi impiegati nelle varie teorie deduttive (Tarski [1936d], p. 151[7]) e, ad un altro livello, studiare queste teorie in se stesse per metterne in luce, come vedremo, le caratteristiche e le relazioni.

Ora, in questo ambito di ricerche, nel 1930, Tarski pubblica due articoli in cui studia la nozione di conseguenza da un punto di vista assiomatico molto generale e che, come vedremo in dettagli nella parte finale del nostro lavoro, sarà ripreso e arricchito per studiare la nozione di sistema logico in generale, a prescindere da presentazioni specifiche, di tipo sintattico o semantico. Il primo di questi articoli, *Über einige fundamentale Begriffe der Metamathematik*, Tarski [1930a], deriva da una conferenza che egli aveva tenuto già due anni prima, nel 1928, presso la *Società matematica polacca*. Il secondo, *Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften*, Tarski [1930b], sostanzialmente riprende ed ampia notevolmente i concetti e i risultati delineati nel primo scritto. Entrambi questi articoli, sebbene divergano su alcuni punti, si concetrano su uno studio generale delle scienze deduttive. Si assumono solo due concetti primitivi, quello di *enunciato sensato* (o, più semplicemente, enunciato) e quello di *conseguenza*. Indichiamo con S l'insieme degli enunciati. Allora la nozione di conseguenza è considerata una funzione Cn che ad ogni insieme particolare di enunciati $\Delta \subseteq S$, assegna un altro insieme particolare di enunciati, che sono considerati le conseguenza e che è designato come $Cn(\Delta)$. Formalmente, quindi, scriviamo $Cn : \wp(S) \to \wp(S)$.

Tarski non assume alcunché circa la struttura degli enunciati e non assume alcunché circa il modo in cui si definisca il modo di ricavare le conseguenze di un certo insieme di enunciati. La sua analisi è concentrata su strutture del tipo $\langle S, Cn \rangle$, dove Cn deve soddisfare la seguente serie di assiomi. Per ogni $\Delta \subseteq S$,

1. $|S| \leq \omega$
2. $\Delta \subseteq Cn(\Delta)$
3. $Cn(Cn(\Delta)) \subseteq Cn(\Delta)$
4. $Cn(\Delta) = \bigcup_{\Gamma \subseteq_\omega \Delta} Cn(\Gamma)$.

[7] Tenteremo ora un'esposizione dei principi fondamentali che vanno adottati nella costruzione della logica e della mateamtica. L'analisi dettagliata e la valutazione critica di questi principi sono compito di una disciplina particolare, chiamata METODOLOGIA DELLE SCIENZE DEDUTTIVE o METODOLOGIA DELLA MATEMATICA.

Ora, il primo assioma riguarda l'insieme degli enunciati e ci dice che la quantità degli enunciati è al massimo numerabile[8]. Gli altri tre assiomi, invece, caratterizzazione le proprietà fondamentali della conseguenza, sempre senza fare alcun riferimento ad una sua presentazione specifica. Su questi assiomi ci soffermeremo in modo particolare nella parte conclusiva della tesi, per cui mi limiterò, ora, a fornirne una presentazione piuttosto generale, enfatizzando soprattuto il loro ruolo nel delineare la nuova e generale prospettiva, che gli studi di Tarski aprono, per studiare il concetto di conseguenza. Il secondo assioma, dunque, afferma ciò che vale come premessa, vala anche come conclusione, ossia i punti di partenza sono mantenuti dall'operazione di conseguenza. Questa assioma esprime quella che più avanti chiameremo la proprietà della riflessività. Il secondo assioma, che esprime quel che chiameremo proprietà della transitività, afferma che, per ogni $\Delta \subseteq S$, $Cn(\Delta)$ è un insieme chiuso rispetto all'operazione di conseguenza, ossia che non può essere ulteriormente esteso per mezzo di quella operazione, in quanto comprende già tutte le conseguenze che derivano dagli enunciati che contiene. In sostanza, la proprietà della transitività afferma che le conseguenze delle conseguenze sono conseguenze e riflette, a livello formale, ciò che accade nella pratica matematica quando, per giungere ad una certa conclusione da determinate premesse, si dimostrano, prima, dei lemmi che seguono da quelle premesse e, poi, si mostra che la conclusione cercata segue dai lemmi. Il terzo assioma esprime ciò che chiameremo la finitezza e, insieme alla transitività, ci dice che Cn è un operatore di chiusura algebrico. La finitarietà indica che le conseguenze di un insieme infinito di premesse sono equivalenti alle conclusioni che si ottengono unendo tutte le conseguenze delle parti finite di tale insieme di premesse. La finitezza e la transitività permettono di derivare la proprietà della monotonia, che è uno dei primi risultati che Tarski mostra, ossia, per ogni $\Delta, \Gamma \subseteq S$

- se $\Delta \subseteq \Gamma$, allora $Cn(\Delta) \subseteq Cn(\Gamma)$.

Questa proprietà afferma che se si aggiungono nuove premesse non si smentiscono le conclusioni già raggiunte sulla base delle premesse precedenti. In altre parole, ciò significa che se qualcosa segue da certe premesse, allora segue sempre da quelle premesse, anche qualora si aggiunga nuova conoscenza, perché quelle conclusioni erano raggiunte in modo del tutto conclusivo, che non lascia spazio ad alcuna revisione. É sulla base di questo teorema che, in termini moderni, si può affermare che Cn, poiché soddisfa già la proprietà riflessiva e quella transitiva, è un operatore di chiusura, che diventa algebrico qualora consideriamo anche la finitezza.

La struttura $\langle S, Cn \rangle$ è ciò che Tarski intende per sistema deduttivo in generale. Il fatto che la metodologia delle scienze deduttive, ossia lo studio di tali sistemi, sia generale dipende dal fatto che i concetti metamatematici che si possono definire su questa base si riferiscono ad *ogni possibile realizzazione* di $\langle S, Cn \rangle$ data da una particolare teoria deduttiva, ossia a un particolare modello

[8] Tarski [1930b], p. 64 osserva, comunque, che, se non fosse per evitare di sollevare dispute irrilevanti, egli assumerebbe direttamente che S è un insieme numerabile di oggetti ($|S| = \omega$).

degli assiomi (matematica o logica, di qualsiasi tipo, come abbiamo visto sopra) (cfr. Tarski [1935], p. 343, nota 1[9]) e lo stesso vale per i risultati che si possono stabilire tramite queste considerazioni astratte. Tutte le proprietà dei sistemi deduttivi in generale (come assiomatizzabilità finita, consistenza e completezza) stabiliti a questo livello valgono per ogni modello specifico, a prescindere dal modo particolare, sintattico o semantico, e a prescindere da quale particolare calcolo o quale particolare semantica sono adottate per definire, in concreto una teoria deduttiva.

Come sia definita, in ogni teoria concreta, la nozione di conseguenza logica e, quindi, che altre proprietà abbia e cosa siano gli enunciati (quale sia la loro strutture, se siano composti con connettivi o con connettivi e quantificatori su variabili, ...), sono questioni che sono lasciate aperte. In ciò Tarski si comporta esattamente come si comportavano gli assiomatici. Possiamo definire un sistema parlando di punti e rette, ma ciò che è importa sono le proprietà che sono assegnate a tali enti dagli assiomi della teoria e non che cosa siano punti e rette in sé o di quali particolari punti e rette parliamo di volta in volta.

Questa prospettiva così generale può subire restrizioni, per scopi specifici, come avviene, per esempio, in Tarski [1930a], dove all'operazione conseguenza Cn è un imposto un ulteriore assioma, che richiede che vi sia almeno un enunciato da cui Cn deduce tutti gli altri enunciati. In termini più formali, richiediamo che

- per almeno un $\perp \in S$, $Cn(\{\perp\}) = S$.

Possiamo notare, a titolo di esempio, che se assumiamo una relazione di derivabilità classica $\vdash$ definita da insiemi di enunciati ad un enunciato, allora, è facile rendersi conto che sono soddisfatti tutti gli assiomi posti da Tarski, compreso l'ultimo, in quanto basta porre $\perp = (\phi \wedge \neg\phi)$, dove $\phi \in S$ e, poiché vale la legge dello pseudo-Scoto, da $\phi \wedge \neg\phi$ è possibile derivare qualunque enunciato. Supponiamo di definire la relazione di derivabilità $\vdash$ come abbiamo fatto nel capitolo 8, §1.3.3., con un sistema alla Hilbert che contiene tre schemi di assiomi e la regola del modus ponens. Definiamo, allora, $Cn_{\vdash}(\Delta) = \{\phi \in S : \Delta \vdash \phi\}$ per ogni $\Delta \subseteq S$. É immediato verificare che valgono tutti gli assiomi di Tarski, come abbiamo detto. Si può notare che la soddisfazione della proprietà della finitezza è assicurata dal modo stesso in cui, in quel paragrafo, è definito che cos'è una derivazione e, in particolare, dal fatto che è una successione *finita* di formule e che l'unica regola di deduzione ammessa è il *modus ponens*, che ha solo due enunciati come premesse.

Immaginiamo, ora, di definire la relazione di conseguenza semantica $\models$ come nel primo esempio che si trova nel capitolo 8, §1.3.4., ossia tramite un'algebra dei valori di verità. Definiamo $Cn_{\models}(\Delta) = \{\phi \in S : \Delta \models \phi\}$ per ogni $\Delta \subseteq S$. In questo caso, mentre si verifica subito che valgono le proprietà della riflessività, della transitività e della monotonia, non è banale affermare che vale anche la proprietà della finitezza, anzi dimostrare ciò equivale a dimostrare che vale la compattezza.

[9]By deductive theories I understand here the models (realizations) of the axiom system.

Oltre ad assumere l'esistenza di un elemento inconsistente per Cn, Tarski [1930a] esplora anche un'altro modo di restringere la generalità dell'impostazione che abbiamo delineato sopra, in modo da poter dimostrare risultati più specifici. Distinguendoli nettamente dai primi assiomi, che abbiamo già presentato, Tarski [1930a], pp. 31-2, pone delle condizioni sulla struttura degli enunciati. In modo particolare, si assume che esista un connettivo che corrisponda alla negazione e un connettivo che corrisponda all'implicazione materiale. Egli pone, infatti, gli ulteriori assiomi seguenti. Per ogni $\phi, \psi \in S$ e per ogni $\Delta \subseteq S$,

- $\neg\phi, \phi \rightarrow \psi \in S$
- se $\phi \rightarrow \psi \in Cn(\Delta)$, allora $\psi \in Cn(\Delta \cup \{\phi\})$
- se $\psi \in Cn(\Delta \cup \{\phi\})$, allora $\phi \rightarrow \psi \in Cn(\Delta)$
- $Cn(\{\phi\} \cup \{\neg\phi\}) = S$
- $Cn(\{\phi\}) \cap Cn(\{\neg\phi\}) = \emptyset$.

Il primo assioma fornisce una regola di formazione che indica come generare gli enunciati in cui, rispettivamente, la negazione e l'implicazione appaiono come i connettivi principali. Il secondo e il terzo costituiscono i due versi del teorema di deduzione che proprio Tarski (contemporaneamente e indipendentemente) da Herbrand e che riteneva di grande importanza nel contesto della metodologia delle scienze deduttive in quanto permetteva di far corrispondere ad ogni teorema che segue da certi assiomi una legge logica formulata come un'implicazione che ha la congiunzione di tali assiomi come antecendente e tale teorema come conseguente. Tarski considerava questo risultato la giustificazione teorica della possibilità di fornire diverse interpretazioni di una teoria ed essere sicuri che tutti i teoremi dimostrati nella teoria originaria restano validi anche nella nuova interpretazione (Tarski [1936d], pp. 162-3[10]). Il quarto e il quinto assioma stabiliscono le proprietà classiche della negazione, stabilendo, rispettivamente che ϕ e $\neg\phi$ esauriscono tutti i casi possibili in cui può essere coinvolto l'enunciato ϕ e che ϕ e $\neg\phi$ si escludono a vicenda, ossia non vi è alcun enunciato che segua dal primo e si possa dare con il secondo e viceversa.

Se non si assume null'altro sulla struttura di S e sulle proprietà dei connettivi, allora $Cn(\emptyset)$ è l'insieme di tutte le leggi della logica classica. Per la monotonia, è chiaro che ciò significa che le leggi della logica valgono in ogni

[10] L'enorme importanza pratica di questa legge [il teorema di deduzione] nasce dal fatto che noi normalmente siamo in grado di esibire numerosi modelli di un sistema d'assiomi di una particolare teoria, anche senza uscire dal dominio delle teorie deduttive. Per giungere ad un simile modello è sufficiente scegliere alcune costanti da qualche altra teoria deduttiva (he può essere la logica o una teoria che presuppone la logica), porle al posto dei termini primitivi negli assiomi e mostrare che gli enunciati ottenuti in questo modo sono teoremi dell'altra teoria. (...) Anche i teoremi della teoria originaria saranno sottoposti ad una analogia trasformazione, rimpiazzando ovunque i termini primitivi con le costanti che sono state utilizzate nell'interpretazione degli assiomi. Sulla base della legge di deduzione possiamo quindi essere sicuri in anticipo del fatto che gli enunciati cui giungiamo in questo modo sono teoremi dell'altra teoria.

contesto, ossia sono universali e indipendenti da ciò che si dà in ogni caso particolare. Ciò indica anche che leggi della logica sono valide in ogni particolare teoria deduttiva, ossia danno sempre il loro contributo a determinare le conseguenze di un insieme di assunzioni. In modo equivalente, si può dire che, quando si stabilisce una particolare teoria deduttiva, la logica è già presupposta e le sue leggi sono valide tanto quanto le leggi specifiche del particolare sistema considerato (Tarski [1936d], p. 153[11]).

Non occorre soffermarsi ulteriormente su questi concetti, per quanto estremamente interessanti, perché li riprenderemo in esame nella parte conclusiva di questa ricerca e li sottoporremo ad una lunga analisi. Quel che occorre sottolineare, ancora una volta, è la generalità dell'approccio tarskiano che permette di trattare la nozione di conseguenza senza curarsi di come debba essere stabilita, ma solo delle proprietà che essa deve rispettare. Come vedremo, dopo Tarski, altri logici polacchi (come Łos, Suszko, Wójcicki, Czelakowski e Malinowski, che considereremo più avanti), riprenderanno questa impostazione pe studiare le proprieà generali della nozione di sistema logico e sarà possibile anche porre l'accento su possibili nozioni di logica in cui si ridiscutono le proprietà stabilite da Tarski (un esempio tra i più noti è costituito dalle logiche non monotone).

6.3 LA DEFINIZIONE SEMANTICA DELLA CONSEGUENZA LOGICA

6.3.1 Il problema della conseguenza logica come problema metodologico

Come anticipato nell'introduzione, Tarski, in un articolo pubblicato in polacco nel 1936, *Sul concetto di conseguenza logica*, derivato da un intervento tenuto al *Congresso internazionale di filosofia scientifica* svoltosi nel 1935 a Parigi, fornisce una caratterizzazione della nozione di conseguenza in termini di preservazione della verità dalle premesse alla conclusione e di formalità. Quel che mi propongo, in questo paragrafo, è di spiegare il senso proposta tarskiana, da porre in relazione al suo progetto di sviluppare una metodologia delle scienze deduttive e non con quello di definire il concetto *giusto* di conseguenza logica. Nel capitolo successivo, prenderò in considerazione le critiche che J. Etchemendy, muovendo da una interpretazione opposta degli obiettivi di Tarski, ha mosso a questa caratterizzazione tarskiana e, lì, avrl modo di chiarire alcuni aspetti della proposta tarskiana che non saranno trattati già in questo paragrafo.

Per prima cosa, come ho anticipato nella premessa, occorre sottolineare con

[11] Se una qualsiasi altra disciplina è costruita in conformità a questi principi, essa è già fondata sulla logica; in questo caso la logica è, per così dire, già presupposta. Questo significa che tutte le espressioni e le leggi della logica sono poste sullo stesso piano dei termini primitivi e degli assiomi della disciplina in esame; i termini logici, ad esempio, sono utilizzati nella formulazione degli assioimi, dei teoremi e delle definizioni senza spiegazione alcuna del loro significato, e le leggi logiche sono applicate nelle dimostrazioni senza che prima si sia stabilita la loro validità.

forza che l'obiettivo che Tarski si propone di raggiungere con questa caratterizzazione della nozione di conseguenza logica, così con altre indagini sui concetti metamatematici e sui concetti semantici, non è quello di riportare certe nozioni vaghe alla loro definizione propria e unica. Come Tarski è sempre stato lontano dai progetti di fondare le scienze deduttive e, in particolare, la matematica riportandole ad una base, magari la logica, del tutto sicura, così egli è sempre stato lontano da analoghi progetti che si proponevano di dirimere, una volta per tutte e nell'unico modo corretto, questioni che riguardavano il modo di concepire una nozione, come, per esempio, i concetti di definibilità, verità e, appunto, conseguenza .

Per Tarski, le cose si pongono in modo diverse. In primo luogo, egli è convinto che non abbia senso chiedersi quale sia la definizione *giusta e l'unica legittima* riguarda ad una certa nozione. Questa visione, secondo Tarski, si baserebbe sull'assurdo presupposto che vi sia una sorta di idea platonica che costituisca il significato reale e proprio di una nozione, senza che, peraltro, si sappia indicare alcun modo ragionevole di raggiungere tale idea. Piuttosto, in generale, si dà il caso che con un unico termine persone diverse, in contesti diversi e con fini diversi, si riferiscono a più di un concetto. L'unica cosa possibile, quindi, è scegliere un certo uso che si intende studiare e cercare di definirne le caratteristiche importanti in modo da renderlo più chiaro e, soprattutto, fruttuoso in quanto utilizzabile in modo univoco. Ciò non significa che tale definizione sia l'unica possibile o che colga il vero significato di tale termine. Tarski è del tutto scettico a questo proposito e finanche disinteressato. Quel che davvero è importante è che, quando si definisce un concetto, lo si possa rendere utilizzabile per quello studio scientifico che ha bisogno di ricorrere ad esso.

Questa impostazione tarskiana, come ho accennato nella premessa, è stata per lo più gravemente trascurata da coloro che si sono dedicati a commentare la sua definizione di conseguenza logica. Abbiamo visto, infatti, come Etchemendy attribuisca a Tarski il progetto di fornire, con strumenti formali, l'analisi concettuale del concetto intuitivo di conseguenza logica, laddove ciò che Tarski nega è proprio che abbia senso parlare di tale unico concetto intuitivo.

Comprendere e giustificare in modo esaustivo questo punto è essenziale per mettere in luce il senso proprio dell'analisi tarskiana, perciò, ricorrerò ad alcune citazioni direttamente nel corpo del testo, invece, che porle, come al solito, in nota.

Ecco come si esprime Etchemendy:

> Quando forniamo un resoconto preciso di questa nozione [la nozione della conseguenza logica], non stiamo definendo, in modo arbitrario, un concetto nuovo, le cui proprietà abbiamo intenzione, quindi, di studiare - come quando introduciamo, diciamo, il concetto di gruppo o quello di campo reale chiuso. É per questo motivo che Tarski assume come proprio obiettivo [fornire] un resoconto della conseguenza che rimanga fedele al concetto ordinario e intuitivo da cui deriviamo

> il nome. É per questo motivo che il compito diviene, in larga parte, un compito di analisi concettuale (Etchemendy [1990], p. 2[12]).

Ora, Tarski, come ho detto e come approfondiremo ancora, sostiene, invece, che egli si considera lontano da ricerche di questo tipo. Ecco la prima citazione che giustificano quanto ho detto a proposito della posizione di Tarski:

> Spero che nulla di ciò che dirò qui sia interpretato come la pretesa che la concezione semantica della verità sia quella *giusta* o, addirittura, l'*unica possibile*. Non ho la minima intezione di contribuire in alcun modo a quelle discussioni infinite e spesso violente sul tema:"Qual è la giusta concezione della verità?. Devo confessare che non capisco cosa ci sia in palio in questo tipo di dispute, perché il problema stesso è così vago che non è possibile alcuna soluzione definita. Mi sembra, infatti, che il senso in cui si usa l'espressione la concezione giusta non sia mai stato chiaro. Nella maggior parte dei casi, si ha l'impressione che l'espressione sia usata in un senso quasi mistico, basato sulla credenza che ogni parola ha un unico significato *reale* (una specie di idea platonica (...)), e che tutte le concezioni in gara tentino davvero di afferrare quest'unico significato. Poiché, tuttavia, si contraddicono l'una con l'altra, solo un tentativo può avere successo e, quindi, solo una concezione è quella *giusta*.
>
> Dispute di questo tipo non sono per nulla ristrette alla nozione di verità. Accadono in ogni dominio dove - invece di una terminologia esatta e scientifica - si usa il linugaggio comune con la sua vaghezza e la sua ambigità e sono sempre insensate e, quindi, vane.
>
> Mi sembra ovvio che l'unico approccio razionale a questi problemi sia il seguente: dovremmo accettare il fatto che ci troviamo di fronte non ad un unico concetto, ma a molti diversi concetti che sono denotati da un'unica parola. Dovremmo tentare di rendere questi concetti i più chiari possibili (per mezzo di definizioni p di una procedura assiomatica o in qualche altro modo) (...) e, poi, dovremmo procedere ad un calmo e sistematico studio di tutti i concetti coinvolti, che esibiranno le loro proprietà principali e le loro mute relazioni (Tarski [1944], p. 355[13]).

[12] When we give a precise account of this notion, we are not arbitrarly defining a new concept whose properties we then set out to study - as we are when we introduce, say, the concept of a group, or that of a real closed field. It is for this reason that Tarski takes as his goal an account of consequence that remains faithful to the ordinary, intuitive concept from which we borrow the name. It is for this reason that the task vecomes, in large part, one of the conceptual analysis.

[13] I hope nothing which is said here will be interpreted as a claim that the semantic conception of truth is the 'right' or indeed the 'only possible' one. I do not have the slightest intention to contribute in any way to those endless, often violent discussions on the subject:'What is the right conception of truth?'. I must confess I do not understand what is at stake in such disputes; for the problem itself is so vague that no definite solution is possible. In fact, it seems to me that the sense in which the phrase 'the right conception' is used has never been made clear. In most cases one gets the impression that the phrase is used in an almost mystical

Come si vede chiaramente, qui Tarski, prendendo spunto dalle dispute suscitate dalla sua analisi (Tarski [1933a]) del concetto di verità nei linguaggi formalizzati, enuncia, più in generale, le sue convinzioni su tale tipo di dispute. La conseguenza logica è proprio una nozione che è usata assai spesso nel contesto delle teorie deduttive, in quanto ne costituisce un concetto essenziale, come l'analisi del paragrafo precedente ha contribuito a mostrare. Eppure è una nozione che, secondo Tarski, manca ancora di una definizione chiara e precisa, requisito che, invece, è necessario per poterla usare in modo consapevole e controllato nel campo delle teorie deduttive. Come vedremo, a quel tempo esisteva una nozione rigorosa di dimostrabilità in un sistema formale e si sarebbe potuto ritenere che la nozione di conseguenza logica coincidisse con quella. Come sto cercando di dimostrare in questi capitoli, questa è una strada che ha effettivamente riscosso simpatie nel corso della storia di questa nozione e altre simpatie le riceverà anche in tempi rencenti, come vedremo nel capitolo conclusivo di questa prima parte. Tarski, tuttavia, sta pensando ad un'altra nozione e non ritiene possibile ridurla a quella di dimostrazione in un sistema formale.

Quel che conta, ora, non è spiegare queste riflessioni di Tarski sulla conseguenza logica, cosa che farò fra poco, ma far capire il senso della sua impresa. Laddove Etchemendy, come abbiamo visto sopra, descrivere l'impresa tarskiana, dicendo che sta cercando di descrivere un ordinario ed intuitivo e che, quindi, sta cercando di evitare ogni aspetto arbitrario, Tarski, proprio all'inizio dell'articolo sulla conseguenza logica, afferma:

> Dobbiamo accettare fin dall'inizio il fatto che ogni definizione precisa di questo concetto [il concetto di conseguenza logica] mostrerà, ad un livello maggiore o minore, dei caratteri arbitrari (Tarski [1936c], p. 409[14]).

Questa definizione è tutt'altro che sorprendente e si concilia perfettamente con le idee espresse in Tarski [1944] citate sopra. L'esigenza di dare una definizione della nozione di conseguenza logica non significa, come ritiene, invece, Etchemendy, rispondere ad un'esigenza dottrinaria e volerne scoprire ed impartire la definizione giusta. L'esigenza che muove Tarski, invece, è di tipo *metodologico*: per studiare

sense based upon the belief that every word has only one 'real' meaning (a kind of Platonic (...) idea), and that all the competing conceptions really attempt to catch hold of this one meaning; since, however, they contradict each other, only one attempt can be succesful, and hence only one conception is the 'right' one.

Disputes of this type are by no means restricted to the notion of truth. They occur in all domains where - instead of an exact, scientific terminology - common language with its vagueness and ambiguity is used; and they are always meaningless, and therefore vain-

It seems to me obvious that the only rational approach to such problems would be the following: We should reconcile ourselves with the fact that we are confronted, not with one concept, but with several different concepts which are denoted by one word; we should try to amke these concepts as clear as possible (by means of definition, or of an axiomatic procedre, or in some other way); (...) and then we may proceed to a quiet and systematic study of all concepts involved, which will exhibit their main properties and mutual relations.

[14] We must reconcile ourselves from the start to the fact that every precise definition of this concept will show arbitrary features to a greater or less degree.

le teorie deduttive, occorre precisare il concetto di conseguenza logica e renderlo utilizzabile in questo contesto scientifico. Si tratta di una questione molto diversa. Quel che Tarski ricerca non è la definizione ultima, così come con l'impresa della metodologia delle scienze deduttive, diversamente dal programma metamatematico di Hilbert, non intende fondare tali scienze deduttive e, in modo particolare, non intende fondare la matematica. Il suo obiettivo è chiarire la nozione di conseguenza (e, prima, quella di verità) in modo da renderla operante nel contesto delle sue ricerche.

In un contesto analogo, in una lettera a M. White del 1944 (pubblicata nel 1987), Tarski rimarca che, sebbene sia possibile discutere le definizioni di *termine logico* e *verità logica*, le definizioni che sono già attualmente accettate si sono dimostrate utili e che proprio in ciò, non nella loro correttezza rispetto a qualche criterio su cui Tarski è scettico, risiede il carattere più importante di tali definizioni:

> Non dimentichiamo neppure per un minuto che ogni definizione di *termine logico* e di verità logica può essere dat solo in termini di un determinato linguaggio e in riferimento ad un determinato linguaggio (o ad una determinata classe di linguaggi). É chiaro che per tutti i linguaggi che ci sono familiari tale definizione può essere data (o piuttosto: è stata data). [Tali dimostrazioni], inoltre, si dimostrano fruttuose e questo è ciò che è più importante (Tarski [1987], p. 29[15]).

Sebbene con cautela, Tarski congettura che tutta la nostra conoscenza abbia un'origine empirica, anche quella conoscenza che consideriamo logica e quella che consideriamo matematica e che le verità della logica e della matematica (Tarski [1987], p. 31[16]). Non vi è una separazione di diritto tra verità logiche e verità matematiche, che sarebbero certe e indubitabili, da un lato, e verità empiriche, incerte e dubitabili, dall'altro. Anche le verità della logica, per esempio, potrebbero essere rigettate sulla base di considerazioni empiriche (come certi sviluppi scientifici della meccanica quantistica, dice Tarski, potrebbero suggerire) (Tarski [1987], pp. 31-2[17]).

[15] Let us not forget even for a minute that any definition of 'logical term' and 'logical truth' can only be given in terms of a determined language and in reference to a determined language (or to a determined class of languages). It is clear that for all languages which are familiar to us such definitions can be given (or rather: have been givem); moreover, they prove fruitful, and this is really the most important.

[16] I would be inclined to believe (following J. S. Mill) that logical and mathematical truths don't differ in their origin frm empirical truths - both are results of accumulated experience. A rough example. In a very early stage of their development, people learned to use the words 'not' and 'or'. In certain cases they were sure that something was white, in other cases that it was not white. In many cases they were first unable to decide whether a given thing was white or not (e.g., as a result of a bad light). But they noticed that in many such uncertain cases they finally reached a decisoin - by means of more thorough and repeated observations, better instruments, etc. Hence they began to believe in 'Everything is white or is not white' and, more generally, in 'p or not p'.

[17] I think I am ready to reject certain logical premisses (axioms) of our science in excatly

Un altro passo che è opportuno citare e che illustra in modo del tutto chiaro la sua avversione per una visione fondazionalista della metodologia delle scienze deduttive si trova in un articolo, pubblicato nel 1995 e ricavato da una conferenza del 1944, in cui critica il progetto metamatico di Hilbert, considerandolo una sorta di teologia, piuttosto che normale scienza umana:

> Ma venti o venticinque anni fa, ci trovavamo in una situazione del tutto differente. allora la metamtica era ancora nel suo stadio embrionale, non aveva quesi alcun risultato e stava cercando il proprio metodo di indagine. In più, dal giorno della sua nascita è stata gravata da compiti che stanno ben oltre la portata di ogni normale scienza umana. era concepita come un tipo di teologia, il cui obiettivo era procurare ai matematici un senso di assoluta sicurezza (Tarski [1995], p. 160[18]).

6.3.2 La definizione di conseguenza: preservazione della verità e formalità

Consideriamo, ora, direttamente l'articolo di Tarski dedicato al concetto di conseguenza logica. Sulla base delle osservazioni e delle citazioni proposte nella premessa e nel paragrafo precedente, dovrebbe essere chiaro che il compito che Tarski si propone non è quello attribuitogli da Etchemendy, ossia di fornire l'analasi del vero concetto di conseguenza logica. Come vedremo, invece, Tarski aveva sperimentato, nel corso delle sue indagini, che vi i mateamtici facevano spesso ricorso alla nozione di conseguenza logica senza definire, però, con precisione tale concetto. Abbiamo visto, per esempio, le formulazioni degli assiomatici e abbiamo notato, allora, come esse non fossero del tutto chiare e precise, se confrontate con la definizione sematica che, di solito, è adottata adesso e che deriva, essenzialmente, proprio dalla proposta tarskiana. Abbiamo visto, in particolare, come la terminologia degli assiomatici non fosse completamente precisa e tendessero a riferirsi indifferentemente a nozioni come conseguenza logica, implicazione e deducibilità (o provabilità), benché la loro intenzione, si pensi, per esempio a Pieri, fosse chiaramente quella di dare una definizione di conseguenza logica in termini semantici.

---

the same circumstances in which I am ready to reject empirical premisses (e.g., physical hypotheses); and i do not think that I am an exception in this respect. (...) Axioms of logic are of so general a nature that they are rarely affected by such experiences in special domains. However, I don't see here any difference 'of principle'; I can imagine that certain new experiences of a very fundamnetal nature may make us inclined to change just some axioms of logic. And certain new developments in quantum mechanics seem clearly to indicate this possibility.

[18] But twenty or thwenty-five years ago we were confronted with a quite different state of affairs. Then metamathematics was still in its embryonic stage, it had almost no results, and it was searching for proper methods of investigation. In addition, from the day of its birth it was encumbered with tasks which lay far beyond the reach of any normal human science. It was conceived as a kind of theology, whose goal was to provide for mathematicians a feeling of absolute security.

Nei paragrafi che seguono cerco di delineare i punti principali del discorso su Tarski, anche se, ovviamente, ne talscerò alcune parti per potermi concentrare solo sugli aspetti che sono più rilevanti.

Il legame con gli studi assiomatici delle teorie matematiche

Non è un caso, come cercherò di mostrare, che i due tratti salienti delle definizioni di conseguenza logica (o di spiegazione del metodo del contromodello per mostrare che un assioma è indipendente dagli altri) che si ritrovano nei testi degli assiomatici siano la preservazione della verità dalle premesse alla conclusione in ogni realizzazione degli assiomi e la formalità. Ciò è del tutto chiaro, come abbiamo visto, nella definizione di Pieri che abbiamo riportato nel capitolo precedente, ma, seppure in forma meno diretta era presente anche in altri autori (Padoa, ...). Questa situazione era del tutto naturale in un contesto dove l'interesse principale era quello dis tudiare le teorie come sistemi di enunciati di cui si considerava ciò che segue dagli assiomi, senza privilegiare alcuna particolare interpretazione dei termini primitivi, che erano, dunque, caratterizzati solo dalle proprietà esplicitamente poste dagli assiomi.

Quel che sostengo[19] è che l'obiettivo di Tarski, nell'articolo che ci apprestiamo ad esaminare, fosse proprio quello di rendere formalmente preciso il concetto di conseguenza logica che troviamo all'opera nello studio assiomatico delle teorie matematiche. A riprova di questo fatto vi è, come vedremo, l'identità delle caratteristiche (preservazione della verità e formalità) che Tarski ritiene proprie della nozione di conseguenza logica che intende definire e la stretta somiglianza tra la sua definizione e quella che ritroviamo negli assiomatici. Di fatto, come vedremo, Tarski, grazie alle nozioni tecniche di soddisfazione di una funzione enunciativa e di modello, riesce a fornire una versione formalmente precisa di ciò che gli assiomatici esprimevano in termini in parte vaghi e intuitivi. Come ulteriore conferma si può citare la sicura familiarità di Tarski con i lavori degli assiomatici e con lavori dove la nozione di conseguenza logica non era primariamente intesa come derivabilità in un calcolo. Vaught [1986], p. 870, per esempio, riporta come i temi del seminario tenuto da Tarski all'Università di Varsavia dal 1927 al 1929 era dedicato al metodo di eliminazione dei quantificatori, in riferimento ai lavori di Löwenheim, Skolem e C. H. Langford [20]. da Tarski-Givant [1999], p. 175, poi, si apprende che Tarski aveva tenuto delle lezioni all'Università di Varsavia nel 1926-27 che erano dedicate allo sviluppo assiomatico della geometria euclidea elementare, ossia la parte della geometria euclidea che può essere formalizzata per mezzo della logica del primo ordine[21]. La conoscenza dei testi degli assiomatici e l'interesse di Tarski per questo tipo di ricerche, poi,

[19] In ciò concordo con Jané [2006] e, soprattutto, con Bozzi [2000a] e Bozzi [2000b].

[20] In 1927-29 Tarski held a seminar at Warsaw niversity (...). The 1927-29 seminar was on the method of eliminating quantifiers, which had been initiated by Löwenheim [1915] and used in fully developed form by Skolem [1919] and C. H. Langford [1926-27].

[21] In his 1926-27 lectures at the University of Warsaw, Alfred Tarski gave an axiomatic development of elementary Euclidean geometry, the part of plane Euclidean geometry that is not based upon set-theoretical notions, or, in other words, the part that can be developed within the framework of first-order logic.

è testimoniato anche dai temi che Tarski stesso tratta che sono, per esempio, la definibilità dei concetti (cfr. Tarski [1934] e Tarski [1948]), la categoricità di un insieme di enunciati (cfr. Tarski [1934] e Tarski-Lindenbaum [1935]) e la questione dell'ω-completezza (che riprenderò e spiegherò brevemente parlando di Tarski [1936c]). In questi lavori troviamo citati autori che hanno usato e sviluppato il metodo assiomatico, quali M. Pieri (cfr. Tarski [1929], p. 27) A. Padoa (cfr. Tarski [1934], pp. 299-300), O. Veblen [cfr. Tarski [1933b], p. 282 e Tarski [1934], p. 307, p. 309], A. Fraenkel (cfr. Tarski [1935], p. 390) e H. V. Huntington (cfr. Tarski [1929], p. 26). Questo elenco è chiaramento incompleto, ma quel che conta è confermare la ulteriormente la confidenza e l'interesse di Tarski verso lo studio assiomatico delle teorie matematiche. Oltre all'evidente analogia fra la definizione di conseguenza logica fornita in Tarski [1936c] (che, per ora, è stata solo accennata) e la definizione di conseguenz alogica fornita da Pieri e, più in generale, quella a cui ricorrevano gli assiomatici, vi è anche una chiara testimonianza della vicinanza tra gli interessi di Tarski e quelli di questa tradizione.

Seguire logicamente

Possiamo idealmente suddivere Tarski [1936c] in quattro parti. La prima e l'ultima sono, rispettivamente, un'introduzione al tema dell'intervento e una conclusione. In mezzo troviamo due parti, la prima delle quali Tarski considera una possibile definizione della nozione di conseguenza logica in termini di dimostrabilità in un calcolo mentre l'altra parte contiene due diverse definizioni, di carattere semantico, della nozione di conseguenza logica. Egli scarta le prime due, come vedremo, in quanto inadeguate a rendere il concetto a cui si riferisce ed avanza l'ultima come la propria proposta. Nella conclusione, poi, affronta delle questioni che si collegano alla propria definizione e che ne chiariscono meglio il senso e la portata.

Per quanto riguarda la prima parte, non occorre dire nulla, in quanto si occupa di introdurre il tema della conseguenza logica ed ho già spiegato sopra in che senso questo concetto diventa un problema per Tarski e in che senso, metodologico e non dottrinario, egli intenda ricercarne una definizione.

Conseguenza logica come dimostrabilità in un calcolo Con la seconda parte, Tarski comincia ad occuparsi direttamente della questione di come si possa definire quella nozione di consegenza logica che egli considera il concetto comune (Tarski [1936c], p. 409[22]). Egli prende spunto da quella che considera essere l'opinione di molti logici secondo cui, con la nozione di dimostrabilità in un calcolo, è già stata data una definizione rigorosa del concetto comune di conseguenza, o, almeno, dare una definizione che coincida con tale concetto dal punto di vista estensionale, ossia che dichiari logicamente validi tutti e soli gli

[22] The common concept of consequence.

argomenti che sono validi secondo quel concetto comune di conseguenza logica (Tarski [1936c], p. 409[23]).

Ora, Tarski non cita alcun nome, ma abbiamo visto che una caratterizzazione della conseguenza logica come dimostrabilità in un calcolo era stata data, per esempio, da Frege (anche se, come si ricorderà, Frege non parla di conseguenza logica e il suo obiettivo non è quello di studiare questa nozione in sé). Esempi più vicini a Tarski sono invece rappresentati dai *Principia Mathematica* e, in generale, da quelli che sono detti *calcoli alla Hilbert*. Ciò che accomuna tutte queste proposte è quella che, si definisce un calcolo, fissando un linguaggio formale, certi assiomi e certe regole di inferenza, e, poi, si definisce cosa significa dimostrazione all'interno del calcolo: una successione finita di formule in cui ognuna o è un assioma o è un'assunzione (quando il calcolo lo permette) o deriva dalle formule precedenti per mezzo di una regola di inferenza. Una dimostrazione, quindi, come abbiamo già visto, è una successione di formule che subiscono trasformazioni strutturali, ossia della loro natura disuccessioni di simboli, determinate dalle regole di inferenza ammesse. In questo modo, la nozione di conseguenza logica diviene dominabile in quanto ogni passaggio è rigorosamente determinato sulla base degli elementi del calcoli, che sono tutti posti in modo esplicito. Questa prospettiva è stata trattata nel capitolo precedente, nella sezione su Frege, e sarà ripresa ed approfondita nell'ultimo capitolo di questa sezione, per cui ora non occorre fornire molti dettagli. Quello che deve essere chiaro è che caratterizzare la nozione di conseguenza logica per mezzo della nozione di dimostrabilità in un calcolo fa sì che la conseguenza logica sia dominabile con mezzi finiti e che erano stati chiariti in modo preciso fin dalla *Begriffsschrift* di Frege. Come sottolineerò nell'ultimo capitolo di questa sezione, ci sono aspetti della nozione di conseguenza logica che rendono plausibile questa caratterizzazione, al di là del pregio di permettere di maneggiare enti (le dimostrazioni in un calcolo) che sono controllabili in modo chiaro. Come dirò, infatti, molti pensatori hanno evidenziato caratteri normativi ed epistemici nella conseguenza logica, legandola ai concetti di *ragionamento* e *seguire una regola*, che fanno sì che la dimostrazione in un calcolo possa essere considerata la controparte formale di questa nozione.

Tarski, tuttavia, non considera soddisfacente questa caratterizzazione della nozione di conseguenza logica. Egli, evidentemente, intende riferirsi ad un altro concetto di conseguenza, quello, come ho già anticipato, che era in uso nello studio assiomatico delle teorie matematiche. Egli infatti, fornisce un esempio in cui si ha un enunciato matematico che segue, secondo Tarski nel senso intuitivo e usuale (Tarski [1936c], p. 411[24]), dalle premesse, ma che non può essere dimostrato nei calcoli soliti.

[23]Even until recently many logicians believed that they had succeeded, by means of a relatively meagre stock of concepts, in grasping almost exactly the content of the common concept of consequence, or rather in defining a new concept which coincided in extent with the common one. (...) Thanks to the progress of mathematical logic we have learnt, during the course of recent decades, how to present mathematical disciplines in the shape of formalized deductive theories,

[24]Yet intuitively it seems that the universal sentence A follows in the usual sense from the totality of particular sentences $A_0, A_1, ..., A_n, ...$

Ora, l'esempio fornito da Tarski è una veloce esposizione della questione dell'ω-completezza, a cui si è fatto accenno sopra e che Tarski aveva trattato in modo specifico in un articolo del 1933 (cfr. Tarski [1933b]). Non occorre fornire, qui, più dettagli di quelli che Tarski stesso richiama. Vediamo, dunque, in modo piuttosto informale, di che cosa si tratta. Supponiamo di avere una teoria tra i cui teoremi compaiono enunciati come

$$A_0.\ 0 \text{ possiede la proprietà } P$$
$$A_1.\ 1 \text{ possiede la proprietà } P$$

e, in generale, per ogni numero naturale n, è un teorema ogni enunciato della forma

$$A_n.\ n \text{ possiede la proprietà } P.$$

Ora, Tarski [1933b] ha mostrato che in tale teoria l'enunciato

$$A.\ \text{Per ogni numero naturale } n,\ n \text{ possiede la proprietà } P$$

non è un teorema, benché lo sia tutti gli enunciati della forma A_n.

Ora, Tarski afferma che ciò contaddice il senso usuale di conseguenza logica. Su quale base lo afferma? Per motivare la sua posizione, Tarski collega il concetto di conseguenza logica usuale, cioè quello che lui ha intenzione di definire, con la preservazione della verità dalle premesse alla conclusione in tutti i casi possibili. Egli, infatti, scrive:

> Eppure, intuitivamente, sembra che l'enunciato universale A segue nel senso usuale dalla totalità degli enunciati particolari $A_0, A_1, ..., A_n, ...$ Posto che tutti questi enunciati siano veri, anche l'enunciato A deve essere vero (Tarski [1936c], p. 411[25]).

Tarski, dunque, caratterizza il concetto intuitivo ed usuale di conseguenza logica nello stesso modo in cui gli assiomatici definiscono la nozione di conseguenza logica a cui si riferiscono: preservazione della verità dalle premesse alla conclusione e formalità (il deve che compare nella citazione sopra, infatti, come sarà più chiaro da ciò che segue, si riferisce al fatto che la verità è conservata in ogni caso logicamente possibile). Si tratta di un prima importante conferma dell'interpretazione che propongo.

Tarski, dunque, comincia a mostrare di intendere la nozione di conseguenza logica da un punto di vista semantico e non dal punto di vista di un calcolo. Un difensore di questa seconda via, però, potrebbe ancora ribattere che se la teoria presentata da Tarski non riesce a dimostrare che A segue da $A_0, A_1, ..., A_n, ...$, il problema risiede nella teoria e va migliorata, con nuovi assiomi o con nuove

[25] Yet intuitively it seems that the universal sentence A follows in the usual sense from the totality of particular sentences $A_0, A_1, ..., A_n, ...$ Provided all these sentences are true, the sentence A must also be true.

regole di inferenza. Tarski considera questa possibile obiezione, ma, in ultima istanza, si appella al risultato di incompletezza stabilito da Gödel [1931] per affermare che in ogni teoria assiomatizzabile e coerente in cui può essere sviluppata una certa parte dell'aritmetica è possibile costruire un enunciato che segue dagli assiomi della teoria, ma che è indimostrabile, qualunque sia la base di assiomi e qualunque siano le regole di inferenza, purchè decidibili (Tarski [1936c], p. 412-3[26]).

L'approccio semantico In quella che abbiamo deciso di considerare la terza parte dell'articolo, Tarski propone, dunque, di abbandonare il tentativo di caratterizzare la nozione di conseguenza logica in termini di dimostrabilità in un calcolo e di sostituirlo con una definizione che, tramite i concetti di soddisfazione di una funzione enunciativa e di modello, può descrivere in modo più adeguato, come vedremo, quel concetto a cui Tarski si riferisce (Tarski [1936c], p. 413[27]). Per giungere alla sua proposta, Tarski cerca di isolare, in primo luogo, le caratteristiche che gli sembrano essenziali per poter definire la conseguenza logica. Poi considera due tentativi di definizione, mostrando che il primo non è accettabile, mentre il secondo gli sembra adattarsi bene a ciò che si era proposto di indagare, sebbene, come dirà nella quarta ed ultima parte dello scritto, rimangano questioni aperte.

Le proprietà essenziali della nozione di conseguenza logica che Tarski intende studiare sono esattamente le due caratteristiche che abbiamo già citato varie volte e che, come abbiamo sottolineato, si trovavano già nella concezione di conseguenza logica presente negli scritti degli assiomatici: preservazione della verità dalle premesse alla conclusione e formalità. Con le parole di Tarski:

> Si consideri una classe K di enunciati e un enunciato X che segue dagli enunciati di questa classe. Da un punto di vista intuitivo, non può mai capitare che la classe K consista solo di enunciati veri e l'enunciato X sia falso. Inoltre, poiché ci occupiamo, qui, del concetto di conseguenza logica, cioè *formale*, e, quindi, con una relazione che è determinata unicamente dalla forma degli enunciati tra cui vale, questa relazione non può essere influenzata in alcun modo dalla consocenza empirica e, in particolare, dalla concoscenza degli oggetti a cui l'enunciato X o gli enunciati della classe K si riferiscono (Tarski [1936c], p. 414-5[28]).

[26] The conjecture now suggests itself that we can finally succeed in grasping the full intuitive content of the concept of consequence by the method sketched abpve, i.e. by supplementing the rules of inference used in the construction of deductive theories. By making use of he results of K. Gödel we can show that this conjecture is untenable. In every deductive theory (apart from certain theories of a particularly elementary nature), however much we supplement the ordinary rules of inference by new purely structural rules, it is possible to construct sentences which follow, in the usual sense, from the theorems of this theory, but which nevertheless cannot be proved in this theory on the basis of the accepted rules of inference.

[27] In order to obtain the proper concept of consequence, which is close in essentials to the common concept, we must resort to quite different methods and apply quite different conceptual apparats in defining it.

[28] Consider any class K of sentences and a sentence X which follows from the sentences of

Con la prima caratteristica, dunque, si richiede che se l'enunciato X segue logicamente dagli enunciati in K, allora X ogni volta che sono veri tutti gli enunciati in K. Per la seconda caratteristica, invece, si richiede che la natura degli enti particolari che compaiono in X o in qualche enunciato in K sia del tutto ininfluente. Come in un sistema assiomatico, le conseguenze derivano dagli assiomi indipendentemente da ciò a cui si ritiene che si riferiscano i termini primitivi e, proprio perciò, è possibile utilizzare, come abbiamo visto, il metodo dei contromodelli per dimsotare che un assioma è indipendente, ossia non segue logicamente, dagli altri assiomi.

La vicinanza con la concezione degli assiomatici è evidente e le caratteristiche individuate da Tarski si comprendono facilmetne alla luce della spiegazione che hanno già ricevuto nel capitolo precedente, proprio nella sezione dedicata alle caratteristiche della conseguenza logica negli scritti degli assiomatici.

Conseguenza logica e sostituzione Sulla base di queste considerazioni, Tarski propone un primo tentativo di definire la conseguenza logica. Egli, però, lo ritiene insoddisfacente e si pone a cercarne un altro. Leggiamo direttamente la definizione di Tarski, prima di commentarla:

> Se negli enunciati della classe K e nell'enunciato X le costanti - eccetto quelle puramente logiche - sono rimpiazzate con altre costnati (rimpiazzando gli stessi segni con gli stessi segni) e se denotiamo con K' la classe degli enunciati così ottenuta da K e con X' l'enunciato ottenuto da X, allora l'enunciato X' deve essere vero, posto solo che siano veri tutti gli enunciati della classe K' (Tarski [1936c], p. 415[29]).

Naturalmente, per rendere la definizione del tutto precisa, bisognerebbe anche prendere in considerazione la necessità di eliminare i termini definiti, rimpiazzandoli con i termini primitivi da cui sono definiti e bisognerebbe assicurarsi che la sostituizione di un segno con un altro segno avvenga rispetto il tipo del segno sostituito. É facile comprendere come ciò debba avvenire e sarebbe inutilmente complicato soffermarsi, qui, su questi dettagli tecnici (Tarski [1936c], p. 415[30]).

---

this class. From an intuitive standpoint it can never happen that both the class K consists only of true sentences and the sentence X is false. Moreover, since we are concerned here with the concept of logical, i.e. *formal*, consequence, and thus with a relation which is to be uniquely determined by the form of the sentences between which it holds, this relation cannot be influenced in any way by empirical knowledge, and in particular by knowledge of the objects to which the sentence X or the sentences of the class K refer.

[29] If, in the sentences of the class K and in the sentence X, the constants - apart from purely logical constants - are replaced by any other constants (like signs being everywhere replaced by like signs), and if we denote the class of sentences thus obtaines from K by 'K'', and the sentence obtained from X by 'X'', then the sentence X' must be true provided only that all sentences of the class K' are true.

[30] For the sake of simplifying the discussion certain incidental complications are disregarded, both here and in what follows. They are connected partly with the theory of logical types, and partly with the necessity of elimintating any defined signs which may possibly occur in the sentences concerned, i.e. of replacing them by primitive signs.

É chiaro che la prima condizione intuitiva posta da Tarski, ossia quella della preservazione della verità dalle premesse alla conclusione, è rispettata. I problemi si pongono con la seconda condizione. La richiesta di esaminare tutti i casi che si possono ottenere sostituendo in modo uniforme, i simboli non logici con altri simboli non logici è in grado di svincolare la preservazione della verità dalle premesse alla conclusione dalla specifica natura degli enti che compaiono negli enunciati? Vedremo che sarà proprio la risposta negativa a questa domanda che indurrà Tarski ad abbandonare questa proposta di definizione e a cercarne un'altra.

La formalità della relazione di conseguenza logica è assicurata se è possibile prendere in considerazione tutte le situazioni possibili, in modo da non trascurarne qualcuna che potrebbe fornire quel caso in cui le premesse sono vere e la conclusione falsa e che non si trova tra le altre situazioni considerate. Tutto ciò non è assicurato nel caso in cui il compito di assicurare la formalità della preservazione della verità dalle premesse alla conclusione è affidato al meccanismo della sostituzione di elementi lingusitici con altri elementi linguistici. Per poter esprimere linguisticamente tutte le situaizoni possibili e controllare se non si dia mai il caso che le premesse sono vere e la conclusione falsa, infatti, occorre avere delle risorsi linguistiche così potenti che possono designare ogni combinazione possibile di oggetti. Se nel linguaggio mancasse una costante per riferirsi ad un certo oggetto del dominio, per esempio, allora quell'oggetto non sarebbe considerato dal linguaggio e le situazioni in cui esso compare non sono descrivibili per mezzo degli enunciati. In questo modo, è chiaro che non si prendono in considerazione tutte le situazioni possibili e la formalità della relazione di conseguenza logica non è assicurata. Supponiamo, per esempio, di avere un linguaggio i cui unici simboli non logici sono la costante individuale 0, che si riferisce al numero 0, N che indica la proprietà di essere un numero naturale e $<$ che indica la relazione di essere strettamente minore di. Ora, consideriamo l'argomento

$$\frac{\neg N0}{\forall x(Nx \rightarrow \neg(x < 0))}.$$

Immaginiamo di applicare il tentativo di definizione della conseguenza logica riportato sopra e chiediamo se tale argomento, valutato secondo questo criterio, risulta logicamente valido. Poichè il linguaggio è estremamente povero, non è possibile trovare alcun rimpiazzamento uniforme dei simboli non logici con altri simboli non logici che renda vere le premesse e falsa la conclusione. É chiaro, però, che ciò non avviene perché non esista alcuna possibile interpretazione dei simboli non logici che renda vere le premesse e falsa la conclusione, ma solo perché il linguaggio non è in grado di rappresentare queste situazioni. Supponiamo, infatti, di interpretare 0 come il numero 3, N come la proprietà di essere un numero pari e $<$ come la relazione di essere divisibile da. Ora, questa interpretazione rende la premessa vera e la conclusione falsa e mostra, così che il nostro argomento non è logicamente valido. Il problema è che questa situazione sfugge alle capacità espressive del linguaggio (Tarski [1936c], pp. 415-6[31]). Per questo

[31] It may, and it does, happen - it is not difficult to show this by considering special formalized languages - that the sentence X does not follow in the ordinary sense from the sentences of the

motivo Tarski, decide di abbandonare questa definizione. In particolare egli nota che se un argomento è logicamente valido, allora rispetta questa condizione (Tarski [1936c], p. 415[32]), ma, in generale, come abbiamo mostrato, non è detto valga l'inverso, ossia che, se tale condizione è soddisfatta, allora l'argomento è logicamente valido.

Prima di proseguire, presentando quella che sarà effettivamente la definizione di coneguenza logica proposta da Tarski, occorre ricrodare la definizione di conseguenza logica che aveva dato Bolzano e che è analoga, per certi aspetti, a quella appena considerata, proposta e scartata da Tarski. In primo luogo occorre notare che, mentre Tarski sta considerando definizioni della conseguenza logica che valgono tra insiemi di enunciati ed un enunciato, Bolzano aveva considerato proposizioni in sé. Si ricorderà, poi, che Bolzano aveva detto che una proposizione ϕ in sé segue logicamente da un insieme Δ di proposizioni in sé se e solo se (1) Δ e ϕ sono compatibili, (2) per ogni variazione delle rappresentazioni in sé non logiche che compaiono in ϕ o in qualche enunciato in Δ, ϕ è vero se tutti gli enunciati in Δ sono veri e (3) non vi è alcun $\Delta' \subseteq \Delta$ tale che valgono le condizioni (1) e (2) per Δ e ϕ. Ora, la prima e l'ultima condizione di Bolzano si spiegano, come ho detto, con il legame che Bolzano instaurava tra conseguenza logica e ricerca scientifica nelle varie discipline, da un lato, e con un interesse che, per quanto non sempre del tutto evidente, vi è per gli argomenti in forma sillogistica piuttosto che per argomenti di qualsiasi tipo. Tarski, considerando il concetto di conseguenza logica esplicitato dagli assiomatici, non considera queste caratteristiche. La seconda condizione di Bolzano, però, a parte il cambiamento del riferimento, dalle proposizioni in sé in Bolzano agli enunciati in Tarski, è la medesima in entrambi i casi e deve svolgere il medesimo ruolo, ossia assicurare la formalità della preservazione della verità dalle premesse alla conclusione.

Il problema che Tarski rileva nella proposta di definizione della conseguenza logica appena esaminata non è un problema per Bolzano, come abbiamo avuto modo di spiegare nel capitolo che gli abbiamo dedicato. Se, nella definizione considerata da Tarski, il limite del linguaggio si riflette sulla possibilità di controllare se tra i casi logicamente possibili ve ne sono alcuni che renderebbero le premesse vere e la conclusione falsa, nulla di tutto questo accade per la concezione di Bolzano. Bolzano, infatti, come ho ricordato, tratta proposizioni in sé e rappresentazioni in sé che non sono enti linguistici e i limiti del linguaggio con cui esprimiamo i nostri enunciati non è un limite che affetta la possibilità di costruire nuove proposizioni in sé variando le rappresentazioni in sé non logiche.

Anche tra la prossima definizione proposta da Tarski, che sarà quella che egli dichiarerà soddisfacente, e la concezione della conseguenza logica di Bolzano è possibile tracciare delle analogie e vedremo che, allora, delle questioni che

class K although the condition (F) [la definzione che ho citato appena sopra] is satisfied. This condition may in fact be satisfied only because the language with which we are dealing does not posses a sufficient stock of extra-logical constants. The condition (F) could be regarded as sufficient for the sentence X to follow from the class K only if the designations of all possible objects occurred in the language in question. This assumption, however, is fictious and can never be realized.

[32]In the statement (F) we have obtained a necessary condition for the sentence X to be a consequence of the class K.

abbiamo già discusso a proposito di Bolzano si riproporranno anche a proposito della definizione di Tarski.

Conseguenza logica e modelli Occorre, dunque, cercare un'altra definizione della nozione di conseguenza logica che, oltre ad assicurare che la conclusione sia vera quando sono vere le premesse, assicuri anche che ciò avvenga indipendentemente dai particolari enti coinvolti negli enunciati che costituiscono un argomento.

Quando abbiamo ragionato sulla possibilità che la precedente definizione fosse in grado di rappresentare un criterio necessario e sufficiente per stabilire se un argomento è logicamente valido, abbiamo mostrato che vi sono casi possibili che non sono sono descrivibili se il linguaggio è limitato. Per mostrare che vi sono tali casi non rappresentabili in un linguaggio con certi limiti, abbiamo parlato di modi in cui si possono interpretare i simboli non logici negli enunciati che compongono un argomento. Ora, l'idea che Tarski intende usare per fornire una nuova e soddisfacente definizione della nozione di conseguenza logica è essenzialmente uno sviluppo di questo modo di ragionare. Invece di usare i simboli non logici per parlare degli oggetti, delle operazioni e delle relazioni in un certo dominio per cercare di parlare, tramite il rimpiazzamento uniforme dei simboli non logici con altri simboli non logici, delle situazioni possibili, possiamo immaginare che al posto dei simboli non logici vi siano delle variabili di tipo opportuno e in modo tale che il medesimo simbolo sia rimpiazzato dalla stessa variabile e un simbolo diverso da una variabile diversa e considerare tutte le interpretazioni possibili di queste variabili. In questo modo, siccome le interpretazioni non sono vincolate alla disponibilità di simboli non logici del linguaggio ma attribuiscono ad ogni variabile direttamente un oggetto, un'operazione o una relazione nel dominio, possiamo essere sicuri che il nostro giudizio sulla validità logica è formale, ossia prende in considerazioni tutti i casi possibili che possono essere indicati da enunciati con la medesima forma di quelli che compongono l'argomento che stiamo valutando.

Per proporre la sua definizione, Tarski ricorre al concetto semantico di *soddisfazione di una funzione enunciativa* per mezzo di una sequenza di oggetti. Questa nozione è stata definita nella sua monografia sulla verità (cfr. Tarski [1933a], pp. 189-93) ed è possibile, qui, limitarsi a richiamarla. L'esempio che fornisce Tarski rende facile comprendere, quale sia l'idea generale su cui si fonda. Consideriamo l'enunciato 'Giovanni e Pietro sono fratelli'. Ora, se in questo enunciato rimpiazziamo Giovanni con la variabile individuale x e Pietro con la variabile individuale y, otteniamo 'x e y sono fratelli', che è una funzione enunciativa, ossia un sequenza i simboli che nonha un valore di verità, am che lo acquisce qualora si attribuisca un valore alle sue variabili. Se nel dominio che stiamo considerando Giovanni e Pietro sono davvero fratelli, allora diciamo che l'interpretazione che attribuisce Giovanni a x e Pietro a y soddisfa la funzione enunciativa 'x e y sono fratelli'. Un modo equivalenti di esprimersi, che, poi, è quello di Tarski, è dire che la sequenza di oggetti $\langle$Giovanni, Pietro$\rangle$ soddisfa la funzione enunciativa 'x e y sono fratelli' (Tarski [1936c], p. 416[33]).

Sulla base della nozione di soddisfazione di una funzione enunciativa, richiamata appena sopra, è possibile definire la nozione di *modello* di un insieme di enunciati. Consideriamo una certa classe L di enunciati e immaginiamo di rimpiazzare tutti i simboli non logici che compaiono in enunciati in L con variabili di tipo opportuno, in modo che i medesimi simboli siano rimpiazzati dalle medesime variabili e simboli diversi siano rimpiazzati da variabili diverse. Chiamiamo L' la classe che contiene tutte e sole le funzioni enunciative ricavate nel modo appena indicato dagli enunciati in L. Diciamo che una certa sequenza di oggetti di oggetti è modello di L se e solo se soddisfa tutte le funzioni enunciative in L'. Nel caso in cui L contiene un unico enunciato X, ovviamente, se una sequenza di oggetti è modello di L diciamo anche, in modo equivalente, che è modello di X (Tarski [1936c], pp. 416-7[34]).

Per mezzo di questi concetti, è possibile fornire la definizione di conseguenza logica che Tarski intende proporre come soddisfacente:

> L'enunciato X *segue logicamente* dagli enunciati della classe K se e solo se ogni modello della classe K è anche un modello dell'enunciato X (Tarski [1936c], p. 417[35]).

Ora, come prima, è immediatamente chiaro che la condizione della preservazione della verità dalle premesse alla conclusione è rispettata. Come abbiamo già notato, poi, questa definizione non fa riferimento alle capacità espressive del linguaggio, ma a oggetti, operazioni e relazioni stessi che possono essere attribuiti alle variabili che sono state messe al posto dei simboli non logici che compaiono negli enunciati. Per questo motivo, Tarski ritiene di avere risolto il problema: non vi sono situazioni che non possono essere prese in considerazione perché i mezzi espressivi del linguaggio sono troppo limitati, ma, dal momento che ci riferiamo direttamente a come è fatto il dominio e possiamo far variare liberamente l'interpretazione delle variabili, possiamo cosiderare tutte le situazioni che il dominio è in grado di determinare.

Tarski osserva che gli sembra che la sua definizione renda bene, in termini più precisi, ciò che si intende con l'uso comune di conseguenza logica (Tarski

[33]Among the fundamental concepts of semantics we have the concept of the *satisfaction of a sentential function* (...) by a sequence of objects. It would be superfluous to give here a precise explanation of the content of this concept. The intuitive meaning of such pharses as : '*John and Peter satisfy the condition 'X and Y are brothers*' (...) can give rise to no doubts.

[34]One of the concepts which can be defined in terms of the concept of satisfaction is the concept of *model.* let us assume that in the language we are considering certain variables correspond to every extra-logical constant, and in such a way that every sentence becomes a sentential funcion if the constants in it are replaced by the corresponding variables. Let L be any class of sentences. We replace all extra-logical constants which occur in the sentences belonging to L by corresponding variables, like constants being replaced by like variables, and unlike by unlike. In this way we obtain a class L' of sentential funcions. An arbitrary sequence of objects which satisfies every sentential function of the class L' will be called a *model* (...) of the class L of sentences (in just this sense one usually speaks of models of an axiom system of a deductive theory). if, in particular, the class L consists of a single sentence X, we shall also refer to a model of the class L as a *model of the sentence* X.

[35]The sentence X *follows logically* from the sentences of the class K if and only if every model of the class K is also a model of the sentence X.

[1936c], p. 417[36]). Prima di presentare le sue due definizioni semantiche (di cui, come si è detto, accetta solo la seconda), aveva dichiarato che non intendeva proporre qualcosa di originale per quanto riguarda le intuizioni su cui si fonda, ma, piuttosto, qualcosa di originale per il modo in cui il problema era affrontato. Tarski spiega che le intuizioni alla base della sua proposta sono qualcosa di noto, e, infatti, come abbiamo visto, il suo atteggiamento è stato fin dall'inizio quello di cercare di precisare un certo uso del concetto di conseguenza logica, così come aveva fatto con il concetto di verità. Egli ritiene che il suo merito sia, semmai, quello di aver fornito una caratterizzazione precisa in termini formali, grazie all'uso delle nozioni semantiche di soddisfazione di una funzione enunciativa e di modello che erano state elaborate solo molto di recente (Tarski [1936c], p. 414[37]).

Le somiglianze tra le definizione di conseguenza logica fornita da Tarski e quelle che erano state formulate ed usate dagli assiomatici è evidente. Avendo analizzato gli scritti degli assiomatici nel precedente capitolo, è facile notare la consonanza tra queste definizioni tarskiane e quanto gli assiomatici esprimevano parlando di interpretazioni e modelli (o realizzazioni) di un insieme di enunciati o di una teoria. Le nuove definizioni tarskiane sono una precisazione, in termini metalinguistici e semantici, di ciò che gli assiomatici avevano inteso dire, anche se, come abbiamo visto, le loro formulazioni, se prese *alla lettera*, non mostravano ancora una chiara coscienza della distinzione tra il livello sintattico e il livello semantico, in quanto, per esempio, scambiavano spesso le espressioni *conseguenza logica* e *deduzione* (cfr. Pieri [1898], p. 109 e p. 160, cit. nel capitolo precedente), e lo stesso piano semantico non era definito con la medesima chiarezza con cui ciò avviene in Tarski. Un esempio può essere fornito da come Tarski (Tarski [1933a], pp. 189-93) la nozione di soddisfazione di una funzione enunciativa, distinguendo teoria e metateoria, definendo, poi, la nozione di sequenza di oggetti e le clausole ricorsive che mettono in grado di decidere, per ogni funzione enunciativa e per goni sequenza di oggetti, se tale sequenza soddisfa o meno quella funzione enunciativa. Mentre Tarski si preoccupa di mostrare come si possano definire queste nozioni in termini rigorosi gli assiomatici parlavano, senza particolari problemi, di verità di una formula in un'interpretazione e di un'interpretazione come variazione del significato dei termini senza che, però, a tali espressini corrispondessero delle precise definizioni formali.

Ciò che Tarski intende fare, quando si propone di definire la nozione di conseguenza logica, è, come ho cercato di mostrare, semplicemente fornire una trattazione più precisa di una nozione che, come quella di verità fino a poco prima, era usata dai matematici, ma non del tutto trattabile dal punto di vista

[36] It seems to me that everyone who understands the content of the above definition must admit that it agrees quite well with common usage.

[37] I emphasize (...) that the proposed treatment of the concept of consequence for a comprhensive class of consequence makes no very high claim to complete originality. The idea involved in this treatment will certainly seem to be something well known, or even something of his own, to many logician who has given close attention to the concept of consequence and has tried to characterize it more precisely. Nevertheless it seems to me that only the methods which have been developed in recent years for the establishment of scientific semantics, and the concepts defined with their aid, allow us to present these ideas in an exact form.

formale. É quell'esigenza metodologica che lo ha spinto ha compiere anche l'indagine sul concetto di verità e che, come abbiamo visto, in più occasioni gli ha fatto dire che il suo obiettivo, con queste analisi, era quello di chiarire dei concetti che ritrovava nella pratica matematica e non uno scopo fondazionale o dottrinario volto a scoprire e rendere nota la *vera* natura di certi concetti, impresa che per lui era addirittura assurda.

Una nozione relativa In quella che abbiamo considerato la quarta parte dell'articolo, Tarski si sofferma su alcune questioni che, a suo giudizio, restano aperte. Tra queste c'è una che è particolarmente rilevante per il nostro discorso e che ha ricevuto notevole attenzione negli anni recenti: è il problema di distinguere i simboli logici e i simboli non logici in un linguaggio formale.

Assunto che la nozione di conseguenza logica sia definita come sopra, allora il modo in cui si opera la distinzione tra simboli logici e simboli non logici del linguaggio influenza il modo di considerare un certo argomento. Un argomento, infatti, potrebbe apparire logicamente valido rispetto ad una certa suddivisione e non logicamente valido rispetto ad un'altra suddivisione. Il motivo è chiaro. il criterio per decidere se una argomento è logicamente valido richiede che si rimpiazzino i simboli non logici con variabili e che si vari, in tutti i modi possibili, il significato di queste variabili. Ora, se un simbolo è logico, non viene rimpiazzato dalle variabili e il suo significato non muta. Se, al contrario, un simbolo non è logico, è rimpiazzato da una variabile e il suo significato muta in tutti i modi possibili. La possibilità di costruire modelli degli enunciati, quindi, è relativa a quali sono i simboli logici e quali sono i simboli non logici.

Supponiamo di avere il seguente argomento:

$$\text{(a)} \quad \frac{Pa \wedge Qa}{Pa}.$$

dove a è una costante individuale, P e Q sono due simboli di predicato unari e $\wedge$ è la congiunzione. Supponiamo, come al solito che $\wedge$ sia l'unico simbolo logico tra quelli presenti in questo esempio. Per valutare se si tratta di un argomento logico, allora dobbiamo costruire la forma argomentativa

$$\frac{Xx \wedge Yx}{Xx}$$

dove x è una variabile individuale e X e Y sono due variabili per predicati unari. Secondo questa suddivisione dei simboli in logici e non logici, l'argomento (a) risulta logicamente valido.

Immaginiamo, però, di considerare $\wedge$ un simbolo non logico e a un simblo logico. In tal caso, si ottiene la seguente forma argomentativa:

$$\frac{Xa\zeta Ya}{Xa}$$

dove ζ è una variabile per connettivi binari e gli altri simboli sono come sopra. In tal caso, se si attribuisce a ζ il valore della disgiunzione, per esempio, risulta che (a) non è un argomento logicamente valido.

Ora, ben pochi sarebbero disposti a dichiarare seriamente che un connettivo come la congiunzione non sia un simbolo logico. Ciò che Tarski intende sottolineare, però, non è che si possano fornire risultati bizzarri come quello dato sopra, ma che (1) il concetto di conseguenza logica che egli ha definito è essenzialmente relativo alla suddivisione dei simboli del linguaggio in logici e non logici e (2) che egli non ritiene possibile separare in modo netto, una volta per tutte, i simboli logici da quelli non logici.

Mentre queste questioni sono sembrate un problema a molti commentatori, Tarski non le considera così e ciò non dovrebbe sorprendere se si accetta la presentazione delle sue idee circa la ricerca scientifica e, in particolare, la ricerca logica che ho fornito sopra. Nel paragrafo seguente, che è anche quello con cui si conclude il capitolo, intendo prendere spunto da queste riflessioni di Tarski sulla sua definizione della conseguenza logica per riprendere ed approfondire le sue idee sulla natura e sul ruolo della logica, che, come dirò, è vista essenziakmente come una nozione dai confini non ben determinati e che, in modo legittimo, possono essere talvolta estesi e talvolta ristretti.

6.4 UNA NOZIONE RELATIVA DEI CONCETTI LOGICI

Come abbiamo visto, Tarski fornisce una definizione di conseguenza logica non per catturare una ipotetica vera essenza di questa nozione, impresa che a più riprese ha dichiarato priva di senso, ma per caratterizzare in maniera precisa e rendere passibile di studio scientifico un concetto che era in uso presso i matematici e, in particolare, presso coloro che si occupavano dello studio assiomatico delle teorie.

Poiché in questa ricerca cerco di mostrare su quale base vengono formulate le diverse nozioni di conseguenza logica, è importante sottolineare questo aspetto, che abbiamo definito metodologico e non dottrinario, delle ricerche di Tarski.

L'atteggiamento con cui Tarski si è dedicato alle indagini sulla metodologia delle scienze deduttive e sui concetti semantici (come soddisfacibilità, modello, verità e conseguenza logica) nasceva da una concezione della scienza che potremmo definire orientata in senso culturale. Non si tratta di studiare delle verità indiscutibili e di fondare ciò che non è sicuro su ciò che, in linea di principio, è sicuro. Lo scopo di Tarski, piuttsto, è sempre stato quello di fare chiarezza, per quel che è posibile e fin dove è possibile, tra i concetti scientifici, mostrare come vigano certi rapporti tra essi e come sia possibile fissarne alcuni per studiarne altri e approfondire, così, la nostra conoscenza delle loro reciproche relazioni.

Un esempio interessante è fornito da Tarski-Lindenbaum [1935]. In questo articolo, i due autori assumono che la logica consista in una certa versione della Teoria dei tipi (la Teoria semplice dei tipi con assioma di estensionalità). Il primo risultato che espongono è un teorema che afferma che ogni relazione tra oggetti (che possono essere individui, classi, relazioni, ...) che si può esprimere solo con mezzi logici è invariante rispetto ad biiezione della classi di tutti gli individui su se stessa e tale invarianza è logicamente provabile. Ora, per mezzo di questo teorema è possibile studiare certi rapporti tra i concetti di categoricità, non ramificabilità e completezza di un insieme di enunciati. Quel che è importante non è tanto seguire i dettagli della questione, quanto prestare attenzione a ciò che Tarski e Lindenbaum osservano sulla base di tali risultati, ossia come i rapporti tra questi concetti varino al variare della logica e come ciò significhi che Tarski non sceglie una lgoica unica, come se ce ne fosse una sola giusta. Il suo scopo, occorre ribadirlo, non è quello di fondare qualche settore della conoscenza, ma quello, metodologico e non dottrinario, di studiare i rapporti tra i concetti che popolano la nostra conoscenza.

Le tre proprietà della categoricità, della non ramificabilità e della completezza di un sistema di assiomi sono definite in termini di dimostrabilità logica di un certo enunciato in qualche formulazione della Teoria dei tipi. Ora, è chiaro, quindi, che i rapporti tra queste proprietà variano a seconda della logica che si assume. Quel che è importante osservare è che Tarski e Lindenbaum non scelgono una logica come quella giusta e quella che, quindi, mostra i *veri* rapporti tra queste proprietà, ma indicano esplicitamente la relatività dei loro rapporti dalla logica scelta senza suggerire che ve ne sia una giusta (Tarski [1935], p. 391[38]). Il problema, infatti, come stiamo dicendo, non è quello di fondare un certa conoscenza, quanto mettere in luce le tame che corrono in essa.

Nel 1966, poi, Tarski ha tenuto una conferenza, il cui testo è stato pubblicato solo nel 1986 e che riprende alcuni risultati del lavoro con Lindenbaum del 1935. Ho già avuto modo di citarne e commentarne alcuni passi nella premessa. Ora, intendo riprendere brevemente il discorso per dare un ulteriore esempio della concezione pragmatica e metodologica che Tarski aveva della logica.

Il matematico Felix Klein, nel 1872, con il suo progetto noto come *Programma di Erlanger*, aveva proposto di distinguere tra loro i diversi sistemi di geometria (euclidea, affine, topologia, ...) sulla base di diverse nozioni di invarianza. Chiamiamo *trasformazione* dello spazio su se stesso una biiezione in cui dominio e codominio coincidono entrambi con l'intero spazio geometrico. A grandi linee, la sua proposta consisteva nel considerare le proprietà degli oggetti che sono invarianti rispetto a certi tipi di trasformazione dello spazio su se stesso. Per esempio, la geometria euclidea è caratterizzata come la disciplina che studia le proprietà dei corpi che sono invarianti rispetto ad una trasformazione t dello spazio su se stesso che rispetta la proporzione delle distanze dei punti tra di essi, ossia tale che se i punti a e b si trovano tra loro alla distanza D e i punti b e c si trovano tra loro alla distanza D', allora $t(a)$ e $t(b)$ si troveranno tra loro alla distanza D'' e $t(b)$ e $t(c)$ si troveranno tra loro alla distanza D''' tale che $D : D' = D'' : D'''$. É possibile, a questo punto, immaginare trasformazioni dello spazio su se stesso che lasciano invariate solo alcune delle proprietà che prima erano invarianti e definire una nuova disciplina che, in quanto studia solo

[38] In all such considerations it is important to bear in mind the relativity of the three concepts - categoricity, non-ramifiability, and completeness, with respect to the adopted system of logic. *If*, for example, *the logic is complete, then the concepts of non-ramifiability and completeness have the same extension for every axiom system, so that every categorical system is* (not only non-ramifiable but also) *complete*.

questo tipo di proprietà, sarà, a buon diritto, detta più generale della precedente. Se, per esempio, definiamo la classe delle trasformazioni che lasciano invariata la reciproca posizione lineare dei punti, ma non la proporzionalità delle loro distanze, allora definiamo il campo di studio della geometria affine, più generale della geometria euclidea. Mentre in quella euclidea, ad esempio, era possibile distinguere tra triangoli equilateri, isosceli, rettangoli, ecc. nella geometria affine ogni triangolo è indistinguibile da ogni altro e perciò si potrà parlare solo di quelle proprietà che o appartengono a tutti i triangoli o non appartengono a nessuno di essi (Tarski [1986], pp. 144-50).

Come si può applicare questa idea al campo della logica? Se davvero la logica è la disciplina più generale di tutte, allora si potrebbe pensare che essa studia quelle proprietà che sono invarianti rispetto ad ogni tipo di trasformazione dell'universo su se stesso. Ora, quel che mi interessa far notare è come, verso la fine della conferenza (Tarski [1986], pp. 151-3), si prenda in considerazione la questione se la matematica sia una parte della logica oppure no. Poiché la matematica può essere ricostruita nella teoria degli insiemi e questa si basa sulla relazione di appartenenza di un elemento ad un insieme, per mezzo della quale tutte le altre nozioni insiemistiche (unione di insiemi, disgiunzione di insiemi, ...) la questione può essere ridotta a quella di verificare se è una nozione logica o no.

La teoria degli insiemi può essere sviluppata nella teoria dei tipi (come nei *Principia Mathematica*) o come teoria del primo ordine (come nell'assiomatizzazione di Zermelo-Fraenkel). Nel primo caso l'universo è costituito solo da individui e tutti gli oggetti di ordine superiore sono costruiti solo in un secondo momento a partire dagli individui. Una trasformazione dell'universo su se stesso è, allora, definita tra individui: il suo dominio e il suo codominio sono l'universo degli individui. Una trasformazione applicata all'universo degli individui, poi, induce una trasformazione anche tra gli oggetti di tipo superiore, poiché questi sono costruiti da quelli. È chiaro, dunque, che la relazione di appartenenza, che vale tra un oggetti di tipo diverso, è invariante rispetto a questo tipo di trasformazioni e, dunque, nella teoria dei tipi, è una nozione logica.

D'altra parte, l'universo della teoria degli insiemi secondo Zermelo-Fraenkel non distingue gli oggetti in tipi diversi. Vi è un unico universo che contiene insiemi e individui. In questo caso la relazione di appartenenza vale tra elementi dell'universo, senza distinzione di tipo, ma, come abbiamo visto, vi sono solo quattro relazioni logiche di questo genere, la relazione universale, la relazione vuota, l'uguaglianza e la disuguaglianza. La reazione di appartenenza, dunque, in questo caso, non è una nozione logica.

La risposta di Tarski, che avevo già anticipato nella premessa di questo capitolo, è che non vi è motivo per scegliere a priori una soluzione piuttosto che l'altra. Si può fare come si preferisce (Tarski [1986], p. 152[39]). Fornire

[39] Since it is known that all usual set-theoretical notions can be defined in terms of one, the notions of belonging, or the membership relation, the final form of our question is whether the membership relation is a logical one in the sense of my suggestion. The answer will seem disappointing. For we can develop set theory, the theory of the membership relation, in such a way that the answer to this question is affirmative, or we can proceed in such a way that

una risposta in un senso o in un altro non è una questione di risposta giusta o sbagliata, bensì di diverso punto di vista (Tarski [1986], p. 153[40]). Ciò che è importante è che le nozioni logiche, come le altre suddivisioni scientifiche, si rivelino fruttuose quando ci dedichiamo alla ricerca scientifica (Tarski [1987], p. 29[41]), il fatto che siano le *vere* nozioni è una questione che non ha senso porre (Tarski [1944], p. 355[42]).

6.5 CONSIDERAZIONI SULLA DEFINIZIONE TARSKIANA: ALCUNE CRITICHE DI ETCHEMENDY

J. Etchemendy ha dedicato un libro (Etchemendy [1990]) ad analizzare e criticre severamente la caratterizzazione tarskiana della nozione di conseguenza logica. Più recenemente, ha pubblicato un articolo (Etchemendy [2008]) in cui conferma e chiarisce la sua posizione critica. In questo paragrafo, intendo considerare alcuni aspetti di questa critica per mettere meglio in luce alcune caratteristiche della definizione fornita da Tarski che mi sembrano importanti. Non intendo discutere tutte le critiche formulate da Etchemendy e considerare se, effettivamente, centrino l'obiettivo o meno. Mi servirò di alcune riflessioni di Etchemendy al solo scopo di far risaltare degli aspetti che si collegano all'impresa tarskiana e che non sono immediatamente chiari, per quanto abbiano un ruolo tutt'altro che trascurabile per comprendere appieno il punto di vista da cui si formula tale caratterizzazione della nozione di conseguenza logica.

---

the answer is negative.

So the answer is:'As you wish'!.

[40] The two possible answers correspond to two different types of mind.

[41] Let us not forget even for a minute that any definition of 'logical term' and 'logical truth' can only be given in terms of a determined language and in reference to a determined language (or to a determined class of languages). It is clear that for all languages which are familiar to us such definitions can be given (or rather: have been givem); moreover, they prove fruitful, and this is really the most important.

[42] I hope nothing which is said here will be interpreted as a claim that the semantic conception of truth is the 'right' or indeed the 'only possible' one. I do not have the slightest intention to contribute in any way to those endless, often violent discussions on the subject:'What is the right conception of truth?'. I must confess I do not understand what is at stake in such disputes; for the problem itself is so vague that no definite solution is possible. In fact, it seems to me that the sense in which the phrase 'the right conception' is used has never been made clear. In most cases one gets the impression that the phrase is used in an almost mystical sense based upon the belief that every word has only one 'real' meaning (a kind of Platonic (...) idea), and that all the competing conceptions really attempt to catch hold of this one meaning; since, however, they contradict each other, only one attempt can be succesful, and hence only one conception is the 'right' one.

Disputes of this type are by no means restricted to the notion of truth. They occur in all domains where - instead of an exact, scientific terminology - common language with its vagueness and ambiguity is used; and they are always meaningless, and therefore vain-

It seems to me obvious that the only rational approach to such problems would be the following: We should reconcile ourselves with the fact that we are confronted, not with one concept, but with several different concepts which are denoted by one word; we should try to amke these concepts as clear as possible (by means of definition, or of an axiomatic procedre, or in some other way); (...) and then we may proceed to a quiet and systematic study of all concepts involved, which will exhibit their main properties and mutual relations.

L'unica cosa che mi interessa considerare tra le numerose critiche di Etchemendy è l'obiezione che la definizione di Tarski *riduce* la nozione di conseguenza logica a implicazione materiale e generalizzazione. Il modo in cui Etchemendy, infatti, legge la definizione di Tarski è: l'enunciato X segue logicamente dagli enunciati nella classe K se e solo se, in ogni possibile interpretazione dei simboli non logici in X o in qualche enunciato in K, X è vero o qualche enunciato in K è falso (Etchemendy [2008], p. 265[43]).

Secondo Etchemendy, uno dei difetti (l'unico che prenderò in considerazione), di questa proposta è che quando parliamo di interpretazioni possibili ci riferiamo a strutture costruite in una certa meta-teoria, per esempio ZF, e non abbiamo alcuna garanzia né del fatto che tali strutture sappiamo effettivamente fornire sempre un controesempio nel caso in cui un argomento non sia logicamente valido, sia che questo tipo di definizione non coglie l'essenza della vera nozione di conseguenza logica perché nella metateoria si compiono assunzioni (come l'assioma della coppia e l'assioma dell'infinito) che non sono verità logiche. Ora, nelle righe seguenti proverò a spiegare meglio cosa Etchemendy intenda dire con queste affermazioni. L'aspetto della definizione tarskiana che mi interessa sottolineare è che essa è una nozione essenzialmente relativa ad una serie di assunzioni extra-logiche minimali che si compiono sulla natura degli oggetti che sono logicamente possibili. La definizione tarskiana di conseguenza logica, data la sua generalità, può essere anche vista come uno schema per fornire concrete definizioni di conseguenza logica, una volta specificata la teoria in cui si definisce la nozione di soddisfazione di una funzione enunciativa da parte di una sequenza di oggetti. Ora, quando si intende fornire una definizione di conseguenza logica lungo le linee delineate da Tarski, si assume che tale teoria sappia esprimere adeguatamente le situazioni logicamente possibili che devono essere prese in considerazione per poter valutare se un argomento è logicamente valido o meno. Il fatto che si abbia già un'intuizione di quali siano le situazioni logicamente possibili non significa che non sia, poi, possibile usare questa intuizione per capire se esista una tale situazione che fornisce un caso che smentisce la validità logica di un argomento. Dal punto di vista di Tarski, ciò è dl tutto legittimo in quanto il suo obiettivo, come abbiamo visto, è solo quello, metodologico, di fornire uno studio di certi concetti ed è banalmente vero che quando si studiano i concetti logici lo si deve fare sulla base di una teoria che permette di studiarli e che, a sua volta, presuppone già dei concetti logici. I concetti logici all'opera nella teoria con cui intendiamo studiare la logica, però, per quanto siano gli stessi, da un certo punto di vista (per esempio: il principio di non contraddizione, ...), da un altro punto di vista sono diversi in quanto si situano su livelli di discorso diversi: da un lato abbiamo i concetti logici che si usano nella mete-teoria e dall'altro abbiamo i concetti logici che compaiono nella teoria oggetto del nostro studio. Questa impressione di circolarità non è un problema per Tarski, dal momento

[43] Tarski proposes a reductive analysis of the logical properties. The analysis purports to reduce (...) logical consequence to material consequence plus generalization: an argument is logically valid, according to the analysis, if every argument in an associated class of arguments preserves truth, where by 'preserves truth' we mean simply that it has one or more false premises or a true conclusion.

che, come abbiamo visto, il suo intento è sempre stato solo quello di studiare un concetto a partire da altri concetti assunti per poterlo studiare e mostrare il tipo di relazioni che si instaurano tra di essi. Ciò che Etchemendy non considera nella sua critica, dunque, è che la totalità dei casi rispetto a cui valutare la validità logica di un argomento a cui ci si riferisce quando si fa dipendere la formalità della nozione di conseguenza logica da una certa teoria (Teoria dei tipi, ZF, ...) non è una totalità, per così dire, accidentale ma, almeno nelle intenzioni, *logica* e che in tal modo si faccia inevitabilmente ed essenzialmente riferimento a ciò che consideriamo le proprietà minimali degli elementi che costituiscono una situazione (che cos'è un individuo, che cos'è una relazione, ...). Naturalmente si può mettere in dubbio che la teoria scelta sia adatta a questo scopo e si può pensare che non sappia costruire delle situazioni che, invece, per qualche motivo, riteniamo che debbano essere presenti o si può pensare che costruisca situazioni che, al contrario, per qualche altro motivo, non sono considerate legittime e non dovrebbero essere costruibili nella teoria. Questa, però, è una questione che non riguarda più la legittimità del punto di vista su cui si basa la caratterizzazione della conseguenza logica fornita da Tarski (e, nelle sue linee essenziali, adottata abitualmente ancora adesso), ma la sua realizzazione concreta in un certo contesto.

Ripeto che quel che propongo, in questo paragrafo, è solo di chiarire questo aspetto delle critiche di Etchemendy alla definizione di Tarski. Si tratta di un aspetto trascurato dai commenti che le opinioni di Etchemendy hanno suscitato, ma che, nell'ambito di questa ricerca, è interessante perché permette di mettere in luce alcuni aspetti della nozione di conseguenza logica considerata da Tarski che, per quanto basilari, possono facilmente passare inosservati. Non intendo compiere un'analisi completa delle critiche di Etchemendy il che ci portrebbe a sviare dal percorso che stiamo compiendo.

6.5.1 Adeguatezza concettuale della definizione tarskiana

Etchemendy, come dimostrano le citazioni riportate sopra e in altri punti di questo lavoro, in modo opposto a Tarski, intende delineare quale sia la *vera* nozione di conseguenza logica e, con grave fraintendimento, attribuisce lo stesso obiettivo anche a Tarski (Etchemendy [1990], p. 2[44]). Al di là di questa convinzione, che ho già cercato di mostrare essere erronea, ciò che ci interessa qui è il modo con cui egli critica l'adeguatezza della definizione tarskiana a quello che egli ritiene essere il vero concetto di conseguenza logica. L'aspetto che conta, tra le sue molteplici critiche, è che, dice Etchemendy, è sicuramente sbagliato misconoscere la differenza che vi è tra una verità logica ed una verità di fatto e tra la nozione di validità logica e quella di implicazione materiale in un certo universo

[44]When we give a precise account of this notion, we are not arbitrarly defining a new concept whose properties we then set out to study - as we are when we introduce, say, the concept of a group, or that of a real closed field. It is for this reason that Tarski takes as his goal an account of consequence that remains faithful to the ordinary, intuitive concept from which we borrow the name. It is for this reason that the task vecomes, in large part, one of the conceptual analysis.

di discorso. Concentriamoci solo sulla validità logica degli argomenti, come fa anche Etchemendy [2008], dal momento che la verità logica può semplicemente essere considerata il caso particolare di una conclusione le cui premesse sono l'insieme vuoto. Ora, la validità logica di un argomento, secondo Etchemendy, deve essere *a priori* (Etchemendy [2008], p. 265[45]), ossia indipendentemente da come è fatto il mondo e non perché il mondo è fatto in modo tale che non è possibile trovare un controesempio ad un certo argomento (Etchemendy [2008], p. 267[46]).

Secondo Etchemendy, Tarski ragiona nel modo opposto, perché ammette che si può dichiarare che un argomento è logicamente valido quando non vi sia alcun controesempio che soddisfi le premesse, ma non la conclusione. Il fatto che nella teoria che stiamo usando per determinare ciò che informalmente chiamiamo i casi (o le situazioni) possibili non si possa fornire un controesempio ad un argomento non significa che tale argomento è logicamente valido perché questa impossibilità di trovare un controesempio potrebbe dipendere da assunzioni che valgono nella teoria e che non hanno nulla a che fare con la logica (Etchemendy [2008], pp. 271-2[47]). Per Etchemendy, i due concetti, *conseguenza logica* e *preservazione della verità in ogni caso*, sono distinti e, in particolare, non si può ridurre il primo al secondo. É vero che se l'enunciato X segue logicamente dagli enunciati in K, allora è l'argomento le cui premesse sono le funzioni enunciative in K' e la cui conclusione è la funzione enunciativa X' (dove le funzioni enunciative in K' e X' sono rispettivamente ricavate da K e da X nel modo specificato sopra) preserva la verità rispetto ad ogni caso (nei termini di Tarski: rispetto ad ogni successione di oggetti). Il problema, per Etchemendy, risiede nell'altro verso della sua lettura della definizione tarskiana, ossia che se l'argomento le cui premesse sono le funzioni enunciative in K' e la cui conclusione è la funzione enunciativa X' preserva la verità rispetto ad ogni caso, allora X segue logicamente dagli enunciati in K.

Anche qualora si potesse affermare che, in questo modo, non sono dichiarati logicamente validi argomenti che non sono *davvero* (secondo il modo di esprimersi di Etchemendy) logicamente validi, sarebbe comunque un errore definire la conseguenza logica in questo modo perciò si renderebbe una nozione che deve valere o non valere a priori, dipendente da un dato di fatto: il darsi o non darsi, nel teoria che usiamo per valutare gli argomenti, di un caso che renda tutte le premesse vere e la conclusione falsa.

Ora, è chiaro che il modo di ragionare di Etchemendy, che cerca di raggiungere la *vera* natura della conseguenza logica, è molto diverso da quello di Tarski. Su ciò, però, mi sono già espresso e non intendo riprendere le medesime osser-

[45] Surrounding the intutive concepts of logical consequence and logical truth are a host of (..) notions (...) like *a prioricity*.

[46] The property of being logically valid cannot simply consist in membership in a class of truth preserving arguments.

[47] Applications of the account will overgenerate if there are argument forms all of whose instances in fact preserve truth, yet which do not provide the guarantee of truth preservation required of logically valid arguments. Intuitively, this can happen if the truth preservation is an upshot of facts that have nothing to do with logic, the consequence relation, or anything plausibly related to it.

vazioni. Quel che mi interessa è mettere in luce come il concetto di conseguenza logica che Tarski ha inteso definire, riprendendo quello in uso nello studio assiomatico delle teorie matematiche, è diverso da quel che intende Etchemendy. Intendo mostrare che anche il concetto di conseguenza logica studiato da Tarski può essere usato per affermare che un argomento è logicamente valido o meno *a priori*, ossia non rispetto ad un mero dato di fatto, nonostante l'essere logicamente valido è equivalente al fatto che la forma argomentativa da esso derivata preserva la verità rispetto ad ogni assegnamento di valore alle variabili.

Quello che Tarski sottolinea e permette di fare è l'analisi dell'intergioco tra assunzioni sull'universo dei casi possibili e conseguenze valide. Nessuno dei due tipi di intuizione (quali sono i casi possibili, quali sono gli argomenti logicamente validi) è prioritario rispetto all'altro. Entrambi si controllano e su nessuno dei due abbiamo intuizioni a priori univoche. Si esperimenta e si sfruttano le definizioni di conseguenza e di verità per analizzare questo intergioco.

Conseguenza logica e situazioni possibili

Come abbiamo visto, Tarski, prima di fornire la sua definizione di conseguenza logica in termini di soddisfazione di una funzione enunciativa e di modello, considera una possibile definizione per mezzo della nozione di sostituizione. Tarski dichiara insoddisfacente quest'ultima condizione, perché non è detto che il linguaggio disponga delle risorse espressive necessarie per trovare i possibili controesempi che mostrerebbero che un certo argomento non è logicamente valido. Ciò che è importante sottolineare è che Tarski riteneva che quella definizione, legata alle capacità espressive del linguaggio, non assicurasse di poter considerare tutti i casi possibili e rilevanti, mentre egli ritiene che lo possa fare la seconda definizione.

Il collegamento della conseguenza logica con la preservazione della verità in tutti i casi possibili non è ritenuto un errore, al contrario di quel che lo considera Etchemendy. Le stesse idee di Tarski, come abbiamo visto, si ritrovano anche negli scritti degli assiomatici e in Bolzano ed è interessante ricordare che abbiamo esplicitamente notato che la definizione offerta da Bolzano sfugge alla critica che colpisce la prima definizione semantica di Tarski, poi abbandonata, in quanto Bolzano non parla di enti linguistici, ma di proposizioni in sé e rappresentazioni in sé.

Ora, l'idea che mi sembra stare alla base di questo modo di caratterizzare la nozione di conseguenza logica, sebbene solo implicita negli autori che abbiamo considerato, e che, comunque, può essere sviluppata da questa prospettiva è che si può distinguere una generalità di fatto e una *generalità logica*. Quel che voglio dire è che la teoria che si usa per costruire i casi tra cui possono esservi i contresempi ad un argomento, intende rappresentare tutti i casi che sono logicamente possibili. Se, quindi, un argomento non possiede controesempi, ciò non avviene per un fatto accidentale, ma perché non avrebbe potuto essere altrimenti.

Dico che una proprietà vale in modo generale e accidentale se e solo se vale in tutti i casi di una certa collezione, ma le cose, da un punto di vista logico, avrebbe potuto essere diverse. Dico, invece, che una proprietà vale in modo generale ed essenziale se e solo se vale in tutti i casi logicamente possibili, ossia se e solo se, da un punto di vista logico, le cose non avrebbero potuto essere diverse da come sono.

Consideriamo un argomento le cui premesse sono gli enunciati in K e la cui conclusione è l'enunciato X. Se consideriamo tutti i valori logicamente possibili che si potrebbero assegnare alle variabili in K' e in X', allora stiamo considerando tutte le situazioni logicamente possibili che assegnano un valore di verità alle funzioni enunciative in K' e in X'. Se non si dà mai il caso che una realizzazione di X' sia falsa quando tale realizzazione soddisfa tutte le funzioni enunciative in K', poiché assumiamo che la teoria sia in grado di fornire tutti i casi logicamente possibili, allora tra K e X non vige una relazione accidentale, ma essenziale, in quanto logicamente necessaria.

Il concetto di conseguenza logica indagato da Tarski e presente in Bolzano e negli assiomatici è un concetto *relativo* a ciò che si considera essere un caso possibile rispetto a cui valutare il valore di verità delle funzioni enunciative che si ricavano dagli di un certo argomento. La critica di Etchemendy permette di mettere in luce questo aspetto: la nozione di conseguenza logica che ritroviamo in Tarski è qualcosa che comporta un riferimento a quel che può essere un caso, ossia a ciò che, parlando sempre in modo informale, può essere uno stato di cose che può determinare il valore di verità di certe funzioni enunciative.

Ciò implica che ciò che ci serve per definire cosa sia un caso possibile, è essenzialmente legato a questa nozione di conseguenza logica. Se, per esempio, pensiamo che un caso, o uno stato di cose, debba essere composto da oggetti e relazioni, allora dobbiamo ritenere essenzialmente legati a questa nozione di conseguenza logica i concetti che servono a porre le basi di questa ontologia minimale, ossia i concetti che servono per poter parlare di oggetto e di relazione in generale.

I riferimenti a questo tipo di concetti e, addirittura, a concetti come la possibilità logica fanno parte di quel bagaglio di consocenze che si deve presupporre in ogni impresa scientifica. Anche lo stesso studio delle nozioni logiche deve muovere da altre nozioni logiche (e non solo, come stiamo vedendo) che sono presupposte e considerate su un altro livello, non sono le stesse nozioni logiche che fungono l'oggetto della nostra indagine, ma sono quelle nozioni che permettono di sviluppare l'indagine stessa. Tutto ciò si adatta bene alla concezione di impresa scientifica di Tarski, secondo cui non si pone il problema di fondare una scienza su un'altra in modo assoluto, ma, come abbiamo detto, di studiare certi concetti per mezzo di altri, senza che vi sia un piano di diritto del tutto sicuro e inattaccabile.

Supponiamo di scegliere ZF come teoria in cui definire la nozione di soddisfazione delle funzioni enunciative (Tarski ricorreva a qualche versione della Teoria dei tipi). Etchemendy fa notare che, in questo, modo quando determiniamo le strutture su cui interpretare le variabili che stanno per individui, operazioni o predicati ricorriamo agli assiomi di ZF, che non sono, dice, assiomi con un contenuto logico. In questo modo stiamo basando la definizione di una nozione logica su nozioni che non sono logiche e ciò sarebbe un fraintendimento concettuale. Ecco come si esprime:

> Quali fatti garantiscono che $\forall x \forall y \forall P(P(x) \to P(y))$ risulti falsa? In primo luogo, vi è l'assunzione dell'assioma dell'infinito; questo è quel che garantisce che ci sono due (tre, quattro, ...) oggetti da distinguere. Ma questo fatto da solo non garantisce che gli oggetti siano 'distinguibili'. Quando assumiamo che il dominio dei predicati consista di insiemi arbitrari, quel che fa questo lavoro è l'assioma della coppia. Questo assioma ci assicura che ogni oggetto è distinguibile da ogni altro oggetto, poiché ogni oggetto è l'unico membro del suo singoletto (Etchemendy [1990], p. 122[48])

Ora, quel che mi interessa, in questa sede, non è verificare se davvero il modo in cui questi assiomi sono citati ed usati sia corretto. Non mi interessa, in altre parole, mostrare, qui, se questo argomento di Etchemendy è corretto o no. Quel che questa citazione ci dice di importante, piuttosto, è il fatto che non si riconosce che gli assiomi di ZF possano essere usati per costruire una teoria che permetta di costruire formalmente quel che intendiamo con caso logicamente possibile. Etchemendy non considera, in altre parole, che gli assiomi di ZF, per quanto di contenuto non logico, possono nondimeno essere usati come caratterizzazioni di quell'ontologia minimale che occorre assumere per poter parlare di casi logicamente possibili.

A questo punto occorre distinguere due problemi. Il primo riguarda la plausibilità di definire la nozione di conseguenza logica come preservazione della verità in ogni possibile caso. Abbiamo già visto che Tarski ha un approccio metodologico e non dottrinario a questioni di questo tipo, quindi per lui il problema non si pone. Etchemendy, da un alto punto di vista, pone questo problema e risponde negativamente, ma non è questo che ci interessa ora. Vediamo, piuttosto, qual è il secondo problema. Si tratta della questione se intendiamo affermare che una certa teoria (la Teoria dei tipi, ZF, ...) è adatta a definire tutti quelli che consideriamo i casi logicamente possibili che devono essere considerati per valutare se un argomento è logicamente valido o no.

Consideriamo l'esempio che Etchemendy propone nel passo citato sopra. Consideriamo il caso dell'assioma dell'infinito. Non mi interessa, qui, capire se l'uso che ne fa Etchemendy in questo argomento sia corretto, ma solo notare che, nella prospettiva che propongo, la sua assunzione non è qualcosa di estraneo alla logica. Non intendo sostenere che il contenuto dell'assioma dell'infinito sia logico, ma che ammettere o non ammettere tra i casi logicamente possibili anche i casi in cui il dominio contiene una quantità infinita di oggetti è qualcosa che ha a che fare con la logica, nel senso che contribuisce a determinare quali siano

[48] What facts guarantee that $[\forall x \forall y \forall P(P(x) \to P(y))]$ (...) come[s] out false? first is the assumption of the axiom of infinity, this is what guarantees that there are two (three, four, ...) objects to be distinguished. But this alone does not guarantee that the objects are 'distinguishable'. When we take the predicate domain to consist of arbitrary sets, what does this job is the pair-set axiom. This axiom assures us that every object is (...) distinguishable from every other, each being the only memeber of its own singleton set.

gli stati di cose logicamente possibili. Un discorso analogo, si può applicare all'assioma della coppia. L'assioma della coppia e l'assioma dell'infinito, in altre parole, non hanno un contenuto logico, ma servono per fornire le interpretazioni possibili del linguaggio in cui si formulano gli argomenti e, quindi, pongono dei limiti a ciò che può essere logico.

In questo senso, se accettiamo il fatto che un teoria che fornisce i mezzi per costruire e maneggiare quelli che riteniamo essere i casi logicamente possibili, permette di esprimere una generalità che non è di fatto, bensì logica. Se una certa forma argomentativa preserva la verità dalle premesse alla conclusone rispetto ad ogni assegnamento di valore alle variabili, allora ogni esemplificazione di tale forma argomentativa costituisce un argomento logicamente valido in quanto la proprietà di preservare la verità dalle premesse alla conclusione non è accidentalmente soddisfatta in tutti casi, ma essenzialmente soddisfatta, dal momento che, accettate certe premesse, non è logicamente possibile formulare alcun altro caso.

Capitolo 7

CONSEGUENZA LOGICA E GIUSTIFICAZIONE RAZIONALE

7.1 PREMESSA

In questo capitolo, per concludere la nostra carrellata storica sui diveri modi in cui è stata considerata la nozione di conseguenza logica, intendo analizzare più da vicino la posizione di coloro che hanno avvicinato la conseguenza logica e il modo in cui ragioniamo. Questa idea è presenta in modo specifico e tecnico in pensatori contemporanei, come Prawitz, che prenderemo in considerazione, ma si ritrova anche in pensatori e logici precedenti ed ha una portata piuttosto generale. Elementi di questa concezione si ritrovano facilmente in pensatori, come Descartes, Kant e Frege, che hanno enfatizzato, come cercherò di spiegare, anche gli aspetti normativi ed epistemici della relazione di conseguenza logica.

Il caso di Descartes, che, a differenza di Kant e Frege, non ha ancora ricevuto un'attenzione specifica, mi pare significativo e mi ci si soffermerò fra poco. Egli, infatti, non era ha mai mostrato un particolare interesse per la logica (anzi, si ritrovano sue affermazini che tendono, piuttosto, a svalutarla [D]), ma teneva molto a seguire un metodo con cui scoprire più cose possiile e, soprattutto, non cadere in errore emettendo giudizi inavvertitamente e senza le dovute cautele. Questa esigenza lo ha portato ad insistere molto sul ruolo del ragionamento e sul modo di procedere nelle deduzioni per assicurarsi di non compiere passaggi *non giustificati* e giungere a conclusioni che non seguono davvero dalle premesse. Il suo caso illustra bene cosa si intende per ruolo *normativo* e per ruolo *epistemico* della nozione di conseguenza logica: ossia l'esistenza di un ragionamento che, da un lato, deve convincere chi dubita che certi enunciati seguano da certe premesse e, dall'altro, rende il ricercatore sicuro del fatto che le nuove scoperte costituiscono un genuino e corretto ampliamento delle conoscenze che aveva precedentemente acquisito.

Può sembrare il caratterizzare la nozione di conseguenza logica in termini di argomenti argomenti razionali sia subordinato al caratterizzarla in termini semantici come conservazione della verità dalle premesse alla conclusione (poste alcune condizioni, come abbiamo visto, che assicurino la formalità della conseguenza). Si può avere, infatti, l'impressione che l'unico motivo per caratterizzare la nozione di conseguenza logica in termini di argomenti razionali sia il fatto che riteniamo che tali argomenti conservino la verità delle premesse e che se ragioniamo in modo diverso, allora, accettando certe premesse, rischiamo di affermare qualcosa che non segue da esse e descrivere, quindi, la realtà in modo scorretto. In questo senso, si potrebbe avere l'impressione che la caratterizzazione della nozione di conseguenza logica in termini di ragionamento sia, in linea di principio, secondaria rispetto alla sua caratterizzazione in termini semantici.

In realtà, come l'accenno alla posizione di Descartes è già in grado di suggerire, ci sono aspetti della nozione di conseguenza logica che sono stati ritenuti importanti, come il suo carattere normativo e quello epistemico, che non possono ricevere adeguata attenzione se si descrive la conseguenza logica solo in termini semantici, come relazione tra i valori di verità delle premesse e quello della conclusione. Ciò che gli autori che prenderò in considerazione in questo intendono mostrare, descrivendo la nozione di conseguenza logica in termini di ragionamento, non è il semplice fatto che non è razionale, perché può darsi il caso in cui tutte le premesse sono vere e la conclusione falsa. Ciò essi intendono mostrare è, piuttosto, che la nozione di conseguenza logica ha anche un aspetto normativo ed epsitemico che deve essere considerato.

Il carattere normativo indica che chi non accettasse la conclusione di un argomento valido dopo averne accettate le premesse, può essere messo di fronte ad una dimostrazione in cui può controllare che, effettivamente, dopo una serie di passaggi legittimi, il ragionamento conduce a quella conclusione. Il carattere epistemico indica che a partire da certe premesse è possibile scoprire, tramite il ragionamento, alcune delle conclusioni a cui esse conducono: tali conclusioni sono vere solo sulla base delle premesse, ma il *ragionamento effettivo* è ciò che ci permette di scoprirle (ruolo epistemico) e renderle accettate dagli altri (ruolo normativo). Il ragionamento effettivo è la garanzia che ci occorre per poter affermare che qualcosa segue da qualcosa d'altro e il ragionamento, a differenza di una caratterizzazione semantica della nozione di conseguenza logica, ci offre gli *strumenti per ottenere questa garanzia*, ossia per dimostrare validamente la conclusione dalle premesse.

Ciò che con questa caratterizzazione si intende sottolineare, in altre parole è il fatto che la nozione di conseguenza logica può essere legata alla nozione di *giustificazione razionale*, ossia al sapere fornire una serie di argomenti che conducano dalle premesse alla conclusione, giustifcando, in tal modo, l'affermazione della conclusione se si sono affermate le premesse.

Questa idea, come vedremo, può essere resa, sul piano formale, per mezzo della nozione di deduzione, ossia di una successione finita di enunciati in cui l'ultimo è la conclusione e i precedenti sono o assiomi o premesse o sono ottenuti dai precedenti per mezzo delle regole di deduzione. Vedremo come ciò è avvenuto, con ulteriori dettagli, considerando soprattutto le riflessioni di Prawitz. Quel che, tuttavia, è importante sottolineare è che tale caratterizzazione della nozione di conseguenza logica in termini di ragionamento, anche se ha certamente forti connessioni con l'idea di derivazione in sistema formale, ha una portata più generale perché basata sulla nozione di giustificazione razionale.

Proprio per mostrare il carattere generale di questo punto di vista e per capire meglio la stessa proposta di caratterizzare la nozione di conseguenza logica in termini di derivazione in un sistema formale, intendo fornire anche analisi di pensatori che mostrano quali siano gli interessi su cui si basa tale caratterizzazione e che si ritrovano anche in pensatori, come Descartes, che non compiono ricerche nel campo della logica.

Va sottolineato, infine, che, come negli altri capitoli, la presentazione del pensiero degli autori trattati qui è strettamente limitata a ciò che rappresenta l'obiettivo della nostra ricerca e che svolgono solo il ruolo di esempi. Non intendo presentare, per intero, le loro riflessioni e neanche presentare per intero le loro riflessioni nel campo della logica. Ciò che mi interessa è sottolineare la presenza di certe idee nei loro scritti e mostrare come tali idee conducano ad una caratterizzazione della nozione di conseguenza logica, basata sui concetti di ragionamento e giustificazione razionale.

7.2 DESCARTES E IL PROBLEMA DI FONDARE LE ASSERZIONI

Come anticipato, possiamo inziare con Descartes la trattazione del problema di come e perché si possa caratterizzare la nozione di conseguenza logica in termini di ragionamento e argomenti razionali. I mio scopo non è, come già ricordato, quello di fornire un'analisi completa degli aspetti del pensiero di Descartes che possono essere riferiti alla nozione di conseguenza logica. Quel che mi propongo è solo illustrare, per mezzo di alcune sue idee, le motivazioni che stanno alla base dell'associazione tra conseguenza logica e ragionamento.

Come ho anticipato sopra, occorre rilevare, in primo luogo, che Descartes non si è dedicato a specifiche ricerche nel campo della logica. Egli, tuttavia ha insistito a lungo sull'importanza di guidare saldamente l'intelletto affinché pronunci sempre e solo giudizi veri e sulla necessità di astenersi dal credere ogni cosa che non sia stata provata in modo sicuro [R I, AT 359 5-7][1]. Solo ciò che è stabilito dall'intelletto per mezzo di ragionamenti affidabili può essere legittimamente professato come vero [R I, AT 359 5-7][2].

L'attenzione di Descartes, dunque, non è diretta tanto alla logica, quanto, più in generale, come indica lo stesso titolo della sua opera, alla direzione dell'intelletto e tratta pertanto, non solo di come ragionare correttamente, ma anche

[1] Il fine degli studi deve consistere nella guida dell'intelligenza perché essa pronunci giudizi saldi e veri su tutte le cose che si presentano.

[2] Solo l'intelletto è capace di scienza.

di come condurre, in generale, una buona indagine scientifica (come stabilire le premesse, come controllare i ragionamenti e le esperienze, ...). Ciò che è interessante, tuttavia, è che Descartes parla esplicitamente della possibilità di analizzare i singoli atti dell'intelletto di cui si compone un ragionamento al fine di verificare se ognuno di essi opera un passaggio legittimo [R III, AT 368 8-11][3]. Gli atti dell'intelletto che possono essere legittimamente impiegati in un ragionamento sono solo due: l'intuizione e la deduzione [R III, AT 368 8-12][4].

L'*intuizione* è il pensiero non dubbio, ossia chiaro e distinto, di una mente pura, ossia non sviata da dati che provengono dalla facoltà sensibile, dalla facoltà di immaginare o dalla facoltà ricordare, e attenta. L'intuizione nasce dal solo lume della ragione, ossia da una facoltà che Descartes ritiene propria dell'uomo e che fornisce principi evidenti e che non possono essere legittimamente posti in dubbio una volta compresi [R III, AT 368 13-17][5]. Alcuni esempi di intuizioni, per Descartes, sono, per esempio, il riconoscere che si esiste, che si pensa, che il triangolo è composto esattamente da tre linee e che la sfera è delimitata da esattamente una superficie. Si tratta, in genere, di cose facili, a detta di Descartes, da riconoscere, benché la maggior parte delle persone le trascuri, pensando che non siano neppure degne di nota [R III, AT 368 21-26][6].

Con il termine *deduzione*, invece, Descartes intende tutto ciò che viene concluso di necessità a partire da altre cose conosciute con certezza [R III, AT 369 18-22][7]. Con ciò si deve sicuramente intendere non la conclusione di un argomento ma il procedimento stesso che permette di giungere con certezza, date certe premesse, ad una certa conclusione. Descartes, infatti, dice esplicitamente che nella deduzione è sempre pensato un passaggio dalle premesse alla conclusione, laddove nell'intuizione si coglie immediatamente la verità di un certo enunciato o, comunque, la validità di una certa inferenza [R III, AT 368 8-11][8].

Non è facile comprendere in modo preciso cosa Descartes intenda con in-

[3] Ma per non incorrere in seguito nello stesso errore, vengono qui passati in rassegna tutti gli atti del nostro intelletto mediante i quali possiamo giungere alla conoscenza delle cose senza alcun timore di ingannarci.

[4] Ma per non incorrere in seguito nello stesso errore, vengono qui passati in rassegna tutti gli atti del nostro intelletto mediante i quali possiamo giungere alla conoscenza delle cose senza alcun timore di ingannarci: e ne vengono ammessi solamente due, cioè l'intuizione e la deduzione.

[5] Per *intuizione* intendo non la mutevole attestazione dei sensi, o il giudizio fallace di un'immaginazione che fa collegamenti sbagliati; ma il pensiero così pronto e distinto di una mente pura e attenta, che su ciò che comprendiamo non rimanga proprio nessun dubbio; ovvero, il che è lo stesso, il pensiero non dubbio di una mente pura e attenta, che nasce dal solo lume della ragione.

[6] Così ciascuno può intuire con la mente che esiste, che pensa, che il triangolo è delimitato da tre linee soltanto, che la sfera [è delimitata] da un'unica superficie e cose simili, le quali sono di gran lunga più numerose di quanto i più riconoscono, giacché non si degnano di volgere la mente a cose così facili.

[7] Oltre all'intuizione, abbiamo aggiunto qui un altro modo di consocere, che avviene mediante la *deduzione*: con la quale intendiamo tutto ciò che viene necessariamente concluso a partre da altre cose conosciute con certezza.

[8] Distinguiamo qui dunque l'intuizione della mente dalla deduzione certa per il fatto che in questa viene pensato un moto o una certa successione, in quella invece no; e inoltre perché a questa non è necessaria un'evidenza attuale, come lo è all'intuizione, in quanto questa trae piuttosto dalla memoria, in un certo modo, la sua certezza.

tuizione e deduzione. Egli, infatti, scrive, per esempio, che l'intuizione non si limita a riconoscere la verità di certi enunciati, ma è richiesta in ogni tipo di discorso laddove lo si dichiari chiaro ed evidente, come nel caso della conseguenza $2+2=3+1$, che è riconsciuta vera intuendo prima che $2+2=4$ e $3+1=4$ e, poi, che da ciò segue $2+2=3+1$ [R III, AT 369 11-17][9]. Ora, poiché, dall'esempio sembra, che nonostante le intenzioni, l'intuizione abbia a che fare anche in questo caso con la verità di un enunciato, ossia $2+2=3+1$, quel che intende dire Descartes si deve ricavare dal fatto che chiama questo enunciato conseguenza. Quel che egli intende dire, dunque, è che ci sono dei passaggi argomentativi i cui nessi sono colti con la medesima immediatezza con cui si coglie la verità di enunciati che, sembra di capire, non sono conseguenze, nel senso che tale termine assume in questo contesto. Gli enunciati che non sono conseguenze sono, quindi, veri di per sé e quando si riesce a coglierli con l'intuizione sono certi ed evidenti di per sé e non sulla base di altri enunciati da cui sono ricavati. Questa immediatezza riposa sulle capacità del lume naturale, che, almeno nelle *Regulae*, non sono adeguatamente spiegate.

Nel caso della deduzione, invece, non si coglie in modo immediato il fatto che un certo enunciato segua da certe premesse e, in tal caso, per poter affermare la conclusione sulla base delle premesse, si devono operare una serie di passaggi intermedi. Senza tali passaggi intermedi e senza l'intervento della memoria che ricorda come i successivi siano stati assicurati per mezzo di quelli precedenti, non è possibile affermare la conclusione dalle premesse assunte. La deduzione ci permette di conoscere con certezza, ossia di asserire in modo fondato, giudizi che non sono immediatamente conosciuti sulla base dei giudizi già noti, ma che, tuttavia, possono essere stabiliti da essi sula base di una successione di argomenti. Tale catena argomentativa consiste in una serie di atti del pensiero che ricorrono solo a asserzioni che sono già state fondate o che sono fondate sulla sulla base di quelle precedenti. Nella deduzione si considera la transizione da un giudizio ad una altro, nell'intuizione tale transizione non c'è o è secondaria perché si percepisce immediatamente, al di là di ogni dubbio, la correttezza dell'inferenza. Nel caso della deduzione, ma non in quello dell'intuizione, la certezza della conclusione è basata sulla concatenazione di diversi atti intuitivi e sulla memoria che ricorda che ciascuno di essi è legittimo [R III, AT 370 4-9][10].

Non è possibile, ovviamente, affrontare in modo adeguato le questioni poste da queste riflessioni di Descartes. Quel che intendo ricavare da esse è l'osservazione di come per Descartes sia centrale il problema del fondamento delle conoscenza. Tra i due estremi del non conoscere nulla di vero, ipotesi che compare esplicitamente con il dubbio metodico nel *Discours de la méthode* e nelle *Meditationes de prima philosophia*, e del conoscere tutti gli enunciati veri, pro-

[9] Questa certezza ed evidenza dell'intuizione non è però richiesta per i soli enunciati, ma anche per ogni specie di discorso. Si dia infatti, ad esempio, questa conseguenza: $2+2$ fanno lo stesso che $3+1$; non solo si deve intuire che $2+2$ fanno 4,e che $3+1$ fanno pure 4, ma inoltre che da queste due proposizioni quella terza viene conclusa in modo necessario.

[10] Distinguiamo qui dunque l'intuizione della mente dalla deduzine certa per il fatto che in questa viene pensato un moto o una certa successione, in quella invece no, e inoltre perché a questa non è necessaria un'evidenza attuale, come lo è all'intuizione, in quanto questa trae piuttosto dalla memoria, in un certo modo, la sua certezza.

prio dell'onniscienza divina, gli uomini devono porre la massima attenzione a non ritenere ritenere fondate asserzioni che, in effetti, non lo sono [R I, AT 361 20-1][11]. Ora, vi sono due modi per fondare l'affermazione di un enunciato [R III, AT 370 16-9][12]. Nel primo caso il fondamento per affermare tale enunciato deriva dal fatto che è intuitivamente chiaro ed evidente che sia vero, o perché è chiaro ed evidente per sé o perché deriva in modo intuitivamente chiaro ed evidente da premesse che si è legittimati ad affermare. Nel secondo caso abbiamo delle premesse che siamo legittimati ad affermare, ma, per raggiungere la condizione in cui siamo legittimati adaffermare anche la conclusione, dobbiamo compiere una serie di passaggi, collegati tra loro come anelli di una catena, che, alla fine, hanno trasformato il fondamento per affermare le premesse in un fondamento per affermare la conclusione.

L'intuizione e la deduzione, dunque, sono gli unici due mezzi a nostra disposizione per fondare le asserzioni che compiamo in modo tale da evitare di concedere fiducia ad enunciati che non sono veri. Per quanto sia limitata la nostra conoscenza, il buon uso dell'intuizione e della deduzione ci può garantire che non faremo affermazioni false, ossia che non inseriremo nella nostra conoscenza cose che non sono vere. Ogni sviluppo della nostra conoscenza, se basato sul buon uso dell'intuizione e della deduzione, porta ad acquisizioni che sono inattaccabili e che non verranno mai ritrattate. Intuizione e deduzione, dunque, sono in grado di *giustificare* le nostre affermazioni e renderle *persistenti*.

Quel che ci interessa in modo particolare, non è discutere ulteriormente le nozioni cartesiane di intuizione e deduzione e neppure capire se la distinzione cartesiana sia plausibile. Ciò che è importante, per la nostra ricerca, è notare che sia le deduzioni, nel senso con cui Descartes usa questo termine, sia gli argomenti che sono giudicati validi per mezzo dell'intuizione (come il passaggio da $2+2 = 4$ e $3+1 = 4$ a $2+2 = 3+1$) sono degli atti di pensiero che trasformano ciò che fonda l'asserzione delle premesse in qualcosa che fonda l'asserzione della conclusione. Alcune di questi passaggi sono immediati e, quindi, Descartes li considera intuizioni, altri non sono immediati e sono le deduzioni in senso stretto.

Ciò che l'intuizione e la deduzione assicurano è la fondatezza delle asserzioni e in tal modo le giustificano. La deduzione, in particolare, giustifica certe asserzioni a partire da certe premesse perché è in grado di trasformare ciò che è un fondamento per asserire le premesse in un fondamento per asserire la conclusione. La deduzione, in altre parole, assicura, in primo luogo, la *trasmissione del fondamento*, non della verità, dalle premesse alla conclusione in quanto il suo compito è quello di condurci a ciò che siamo *giustificati* ad asserire.

La deduzione, poi, non svolge solo un ruolo epistemico, ma anche, come anticipato sopra, un ruolo normativo. Essa, cioè, non è solo una garanzia, ma anche una costrizione: sarebbe contrario alla ragione, se il nostro scopo è di ampliare in modo giustificato la nostra conoscenza, [R I, AT 361 14-21][13], rifiutare

[11] In ogni singolo caso della vita l'intelletto indichi alla volontà che cosa sia da scegliere.

[12] E queste [intuizione e deduzione] sono le due vie più certe per la scienza, e non dobbiamo ammetterne di più da parte della mente, che anzi tutte le altre vanno respinte come sospette e soggette ad errori.

[13] Se dunque qualcuno vuole indagare una scienza particolare (...) pensi (...) ad aumentare

la conclusione una volta che abbiamo potuto coglierla per mezzo dell'intuizione o abbiamo potuto dedurla da premesse che abbiamo giustificamente asserito. In entrambi i casi, infatti, il lume naturale ci pone in condizioni di affermare che le cose stanno in un certo modo: o, nel caso dell'intuizione, fornendoci immediatamente il fondamento per tale affermazione o, nel caso della deduzione, perché ci mostra che il fondamento sulla cui base abbiamo asserito le premesse può essere trasformato, attraverso una serie di passaggi, in un fondamento per la conclusione. Come vedremo poco sotto, ci sono profonde affinità tra queste idee di Descartes e certe riflessioni svolte dai pensatori che aderiscono all'intuizionismo e da Prawitz in particolare, che parleranno proprio, da un lato, di fondamenti delle asserzioni e delle prove come passaggi da ciò che fonda l'asseribilità delle premesse in ciò che fonda l'asseribilità della conclusione e, dall'altro lato, di persistenza delle conoscenze raggiunte in questo modo.

7.3 KANT E FREGE

Prima di passare alla sezione dedicata a certi temi ricavabili dalle opere degli intuizionisti, occorre ricordare come Kant e Frege, a cui ho dedicato delle analisi specifiche, hanno svolto riflessioni che forniscono elementi per caratterizzare la nozione di conseguenza logica in termini di ragionamento, piuttosto che di conservazione della verità dalle premesse alla conclusione. Poiché ho dedicato delle analisi specifiche a questi pensatori, non occorre, qui, ripeterle. Ciò che mi interessa sottolineare, però, è come, in effetti, nelle loro opere si ci si richiami allo studio degli atti intellettivi e al loro collegamento necessario affinché si dia un qualsivoglia pensiero (Kant) o allo studio delle leggi dell'esser vero e alla formulazione di un sistema deduttivo che permetta di scrivere in modo del tutto rigoroso le dimostrazioni della matematica (Frege).

Ciò che queste due imprese hanno in comune e che è interessante per il nostro discorso è che fanno riferimento al passare dalle premesse alla conclusione di un argomento valido come una forma di *seguire una regola*. Ci sono certe connessioni tra gli atti dell'intelletto e certe connessioni tra gli enunciati di un sistema formale, che rappresentano la forma logica dei contenuti concettuali. Una dimostrazione, nel suo complesso, si compone di singoli passaggi argomentativi che costituiscono l'esemplificazione di certe regole che permettono di inferire una determinata conclusione da certe premesse. Il fatto che una dimostrazione non sia nulla di più che una connessione di passi argomentativi elementari è ciò che garantisce una dimostrazione non ammette salti inferenziali ingiustificati. Seguendo una regola data, in ogni passaggio della dimostrazione si ha la garanzia che si sta compiendo un'inferenza legittima e che non vi sono salti che possono sembrare corretti perché ci facciamo suggestionare da elementi contenustici ma che, in realtà, non hanno alcuna giustificazione razionale.

In tal modo, anche in Kant e in Frege sono enfatizzati sia il ruolo normativo sia quello epistemico del trarre conseguenze. Kant, come si ricorderà, sottolin-

il lume naturale della raione (...) perché in ogni singolo caso della vita l'intelletto indichi alla volontà che cosa sia da scegliere.

ea a più riprese come le leggi della logica siano una condizione che deve essere necessariamente rispettata affinché si pensi qualcosa di vero. La logica, in altre parole, fornisce un criterio negativo per la verità, nel senso che se qualcosa non rispetta le leggi della logica, allora non può essere vero. Le leggi date dai modi inferenziali validi (nelle varie categorie dei sillogismi categorici, ipotetici e disgiuntivi), poi, indicano in che modo possiamo passare, in modo sicuro ed affidabile, dalla conoscenza delle premesse alla conoscenza della conclusione. Una situazione sostanzialmente analoga, a questo proposito, si ritrova anche in Frege, come abbiamo detto. Frege, infatti, ritiene che gli assiomi del suo sistema formale siano leggi logiche e che le regole di deduzione permettano di passare, senza possibilità di errore, da premesse vere a conclusioni vere. In tal modo è possibile ricostruire e rendere rigorosi tutti i ragionamenti della matematica, mostrando la forma logica dei contenuti concettuali e le loro relazioni deduttive. Ogni dimostrazione compiuta nel sistema formale è priva di salti logici ingiustificati perché è definta come una successione di passaggi inferenziali che sono perfettamente dominati e controllati. Le conseguenze logiche del sistema sono esattamente ciò che è dimostrabile dagli assiomi per mezzo delle regole di inferenze. Ciò che manca, in Frege, è il tentativo di adeguare la sua nozione formale di dimostrabilità alle reali regole che correttamente usiamo quando ragioniamo. In altre parole, come farà notare Gentzen, più che all'analisi della deduzione, Frege è interessato alla deducibilità e non fa alcuno sforzo per adeguare la struttura degli argomenti che si svolgono nel suo calcolo con quelli reali.

Come vedremo, questo aspetto del seguire una regola sarà centrale per poter caratterizzare, come vedremo, la nozione di conseguenza logica in termini di ragionamento. Sarà proprio la nozione di seguire una regola che permetterà di spiegare come costruire dimostrazioni che, come anche Descartes richiedeva, mostrino come si possano trasformare i fondamenti per asserire le premesse in fondamenti per asserire la conclusione, enfatizzando, in tal modo, il carattere normativo ed il carattere epistemico della nozione di conseguenza logica.

7.4 RAGIONAMENTI E CONSEGUENZA LOGICA: SPUNTI DALL'INTUIZIONISMO E DAL CALCOLO DELLA DEDUZIONE NATURALE

Con l'intuizionismo, sorto dalle riflessioni, in ambito matematico, di Brouwer, si pone in primo piano il legame tra conseguenza logica e dimostrabilità, intesa come verifica di un enunciato in base a regole. Ciò avviene con particolare vigore, seppure non nel campo della logica, con Brouwer e per motivi, come cercherò di spiegare, assai diversi da quelli che avevano portato Frege a caratterizzare conseguenza logica (concetto a cui, comunque, come si è detto, Frege non riserva particolare attenzione) per mezzo della nozione di deduzione.

Come in parte vedremo, questa caratterizzazione della nozione di conseguenza logica sulla base di una certa idea di ragionamento e, soprattutto nel caso di Brouwer, di attività matematica, è stato fatto in modo diverso dai vari pensatori, che si sono richiamati ai principi dell'intuizionismo. Quel che mi propongo qui, è solo fornire un'analisi di certe riflessioni che sono state sviluppate nell'ambito dell'intuizionismo e che possono esemplificare, seppure non in modo esaustivo, in che modo essi hanno inteso avvicinare conseguenza logica, ragionamento e dimostrazione. Inizio con una breve esposizione di alcuni e selzionati aspetti della riflessione di Brouwer, per delineare ciò che è per la nostra ricerca è importante sottolineare del punto di vista dal quale egli ha preso le mosse per criticare la matematica classica e proporre, come alternativa, un nuovo tipo di matematica costruttiva in cui è centrale l'idea di attività matematica e di regole che si riscontrano in tale attività. Ciò su cui intendo soffermarmi, in modo particolare, però è la riflessione che Prawitz ha esplicitatamente dedicato al concetto di conseguenza logica partendo da un propria interpretazione dell'intuizionismo. Prawitz, come vedremo, ha posto la nozione di conseguenza logica al centro delle sue ricerche degli ultimi anni e ne ha dato una versione che, riprende i principi intuizionisti e li rende per mezzo della nozione di fondazione di un'asserzione, che ha dei punti di contatto con l'analoga nozione che abbiamo ritrovato nelle riflessioni di Descartes.

7.4.1 ATTIVITÀ E REGOLARITÀ NELLA CONCEZIONE DELLA MATEMATICA DI BROUWER

Per Brouwer, asserire che un certo enunciato matematico è vero significa che siamo in grado di compiere una *costruzione* mentale che conduce ad uno stato di cose matematico che è tale quale lo descrive tale enunciato. Asserire un enunciato matematico, in altre parole, significa esibire un metodo per fondare tale enunciato (Brouwer [1908], p. 109[14]). Quel che è fondamentale, nella concezione di Brouwer, è che questo fondamento non può essere raggiunto tramite una semplice deduzione logica, tantomeno della logica classica, che, come vedremo, si basa su principi inaffidabili. Il motivo principale per cui il fondamento di un'asserzione matematica non si può trovare in una deduzione logica è che ogni deduzione, secondo Brouwer, si svolge in un linguaggio, ossia fa riferimento a degli oggetti che sono considerati a parte dall'attività del soggetto matematico, fissati in segni linguistici, ed opera su di essi in modo indipendente dall'attività che guida tale soggetto. Secondo Brouwer, la matematica è essenzialmente un'attività costruttiva, ossia un avere l'esperienza che da una certa conoscenza si può sviluppare una nuova conoscenza. Questa esperienza non può essere considerata equivalente alle deduzioni compiute a prescindere dall'esperienza matematica del soggetto che questa matematica la sta facendo. Così, infatti, si esprime Brouwer in ciò che è chiama il *primo atto dell'intuizionismo*:

[14] Now consider the princpium *tertii exclusi*: it claims that every supposition is either true or false; in mathematics this means that for every supposed imbedding of a system into another, satisfying certain given conditions , we can either accomplish such an imbedding by a construction, or we can arrive by a construction at the arrestment of the process which would lead to the imbedding.

> Separare completamente la matematica dal linguaggi matematico e, quindi, dai fenomeni del linguaggio descritti dalla logica teorica, riconsocere che la matematica intuizionista è, essenzialmente, un'attività non linguistica della mente che ha la propria origine nella percezione di un movimento del tempo. Questa percezione di un movimento del tempo può essere descritta come il frantumarsi di un momento di vita in due cose distinte, una delle quali precede l'altra, ma è ritenuta nella memoria. Se la bi-unità sorta in questo modo è spogliata di tutte le qualità, trapassa nella forma vuota del sostrato comune di tutte le bi-unità. Ed è questo sostrato comune, questa forma vuota, che è l'intuizione fondamentale della matematica (Brouwer [1951], pp. 4-5[15], cfr. anche Brouwer [1954], p. 523[16]).

Ciò che è fondamentale, per Brouwer, in altre parole, è che la matematica è un'attività che si svolge nella mente del matematico. La matematica è essenzialmente un'esperienza che certe conoscenze possono essere costruite da altre conoscenze e non è, piuttosto, un insieme di enunciati veri di un certo tipo. Nella matematica intuizionista, quella che lui si propone di fondare, i teoremi sono provati per mezzo di costruizioni introspettive, ossia per mezzo di costruzioni che ampliano la nostra esperienza di un certo stato di cose matematico rendendola una nuova esperienza di altri stati di cose matematici (Brouwer [1948], p. 488[17]).

Se la matematica, allora, è un'attività mentale del soggetto matematico che compie certe esperienze di collegamenti tra stati di cose matematici e che si svolge senza linguaggio e se, d'altra parte, la logica è, per Brouwer, essenzialmente connessa al linguaggio, allora tra matematica e logica c'è un separazione che rende impossibile fondare la prima sulla seconda, come, invece, abbiamo visto, intendeva fare Frege. Ora, è certamente problematico capire cosa Brouwer intenda quando parla di attività alinguistica di un soggetto matematico e non è neppure scontato che la logica debba essere, per forza, un'attività linguistica.

[15] Completely separating mathematics from mathematical language and hence from the phenomena of language described by theoretical logic, recognizing that intuitionistic mathematics is an essentially languageless activity of the mind having its origin in the perception of a move of time. This perception of a move of time may be described as the falling apart of a life moment into two distinct things, one of which gives way to the other, but is retained by memory. If the twoity thus born is divested of all quality, it passes into the empty form of the common substratum of all twoities. And it is this common substratum, this empty form, which is the basic intuition of mathematics.

[16] *The first act of intuitionism* completely separates mathematics from mathematical language, in particular from the phenomena of language which are described by theoretical logic. It recognizes that mathematics is a languageless activity of the mind having its origin in the basic phenomenon of the perception of a *move of time*, which is the falling apart of a life moment into two distinct things, one of which gives way to the pther, but is retained by memory. If the two-ity thus born is divested of all quality, there remains the common substratum of all two-ities, the mental creation of the *empty two-ity*. This empty two-ity and the two unities of which it is composed, constitute the *basic mathematical systems*. And the basic operation of mathematical construction is the *mental creation of the two-ity of two mathematical systems previously acquired*, and the consideration of this two-ity as a new mathematical system.

[17] Mathematics (...) deducing theorems exclusively by means of introspective construction, is called intuitionistic mathematics.

Riguardo a questo secondo punto, per esempio, abbiamo visto come per Kant la logica fosse uno studio delle leggi del pensiero senza che egli, da nessuna parte, colleghi la logica al linguaggio. In Bolzano, poi, abbiamo visto che la logica si occupa di enti, le proposizioni in sè e le rappresentazioni in sé, che non sono linguistiche (anche se non è chiaro, come ho detto nel capitolo dedicato a Bolzano, se la definizione di conseguenza logica che egli fornisce resterebbe accettabile anche nel caso in cui il linguaggio naturale non fosse in grado di formulare tutte le espressioni corrispondenti alle proposizioni in sé ed alle rappresentazioni in sé di cui c'è bisogno). In Frege, poi, il sistema logico è, come abbiamo visto basato, su un linguaggio, ma Frege ritiene che il suo linguaggio, in quanto formale e appositamente creato, sia in grado di riprodurre ciò che in contenuto concettuale è importante per studiare la relazione di conseguenza logica. Anche in Frege, dunque, impostando la questione con termini che egli non usa, sembra di poter affermare che la relazione di conseguenza logica valga primariamente tra contenuti concettuali e solo in senso luogo tra enunciati di un certo linguaggio. Quel che Frege postula è che il sistema formale, che è linguistico, sia, per così dire, isomorfo al mondo dei contenuti concettuali e che la relazione di derivabilità nel calcolo sappia mimare ciò che di essenziale vi è nella relazione di conseguenza logica tra i contenuti concettuali. L'ideografia è grado di rappresentare la forma logica di tali contenuti concettuali e il sistema formale enl suo complesso, tramite gli assiomi e le regole di deduzione, è in grado di mostrare i rapporti di conseguenza che vigono tra di essi.

Brouwer quando parla di logica si riferisce chiaramente solo a sistemi formali, non essenzialmente dissimili da quelli di Frege, che erano stati proposti per rappresentare le deduzioni matematiche e nell'ambito del dibattito sui fondamenti della matematica. Egli ribadisce in diverse occasioni che questa logica non è altro che un tentativo di fissare delle regolarità che vi sono nelle costruzioni alinguistiche delle dimostazioni matematiche e questa logica non può fondare la matematica, perché fissando tali regolarità le snatura. La verità di un enunciato infatti, si trova solo nell'esperienza che si dà lo stato di cose di tale enunciato (Brouwer [1948], p. 488[18]). Dimostrare un teorema matematico significa costruire un'esperienza che, dall'esperienza già acquisita di certe verità matematiche, conduce ad un'esperienza della verità di tale teorema. Un'esperienza di questo tipo, per Brouwer, non può mai essere una deduzione logica che, in quanto linguistica, è qualcosa di diverso dall'esperienza della matematica ed è, al massimo, un'indicazione di come si potrebbe determinare l'esperienza richiesta che, però, non è l'esperienza stessa e neppure garantisce che l'esperienza cercata si possa davvero ottenere (Brouwer [1948], p. 488[19]).

[18] *Truth* is only in *reality*, i.e. in the present and past experiences of consciuness.

[19] Expected experiences, and experiences attributed to others are true only as anticipations and hypotheses; in their contents there is no truth. Truths often are conveyed by words or word complexes, generally borrowed from cooperation languages, in such a way that for the subject together with a certain word or word complex always a definite tuth is evoked, and that object individuals behave accordingly. Further there is a system of general rules called *logic* enabling the subject to deduce from systems of word complexes conveying truths, other word complexes generally conveying truths as well. Causal behaviour of the subject (isolated as well as cooperative) is affected by logic. And again object individuals behave accordingly.

Ora, la speculazione di Brouwer è complessa e ricca di spunti che non possono certo essere sviluppati in questo contesto. Quel che, qui, è importante notare è che Brouwer fonda la sua visione della matematica sulla convinzione che i teoremi della matematica rappresentino il resconto dell'effettuazione di atti mentali del soggetto. Sono tali atti mentali che costituiscono le esperienze che rendono vero un certo teorema, trasformando l'esperienza della verità di certi enunciati matematici nell'esperienza della verità di tale enunciato. Benché Brouwer non si ponga il problema di definire esplicitamente la noizone di conseguenza logica, è possibile trarre dai suoi scritti gli spunti teorici per associare ragionamento e conseguenza logica.

Frege proponeva di ricorrere alla deduzione in un sistema formale proprio per evitare le imperfezioni che possono annidarsi nei ragionamenti informali e negli atti mentali, che si lasciano sviare da analogie, contenuti, ricordi ed altri elementi extra-logici. Brouwer, al contrario, ritiene il passaggio dal ragionamento interiore alla logica formale una perdità di rigore, in quanto tali deduzioni possono, nel migliore dei casi, essere degli aiuti per costruire quell'esperienza in cui si sola si trova la verità di un enunciato. Ciò che si può ricavare dalla speculazione di entrambi, però, anche se nessuno dei due l'ha affermato esplicitamente, è che per ottenere le conseguenze di determinate premesse si devono seguire delle regole: le leggi di deduzione del sistema di Frege o le regolarità che si riscontrano nell'attività mentale del soggetto che costruisce l'esperienza di uno stato di cose matematico a partire dall'esperienza di uno stato di cose matematico precedentemente costruito. Questo legame tra conseguenza, costruzione di uno stato di cose matematico e trasformazione di una costruzione in un'altra suggerisce una caratterizzazione della nozione di conseguenza logica che è diversa dalla caratterizzazione semantica. Ciò su cui si richiama l'attenzione, nel caso delle costruzioni e delle trasformazioni di costruzioni, infatti, non è la trasmissione della verità, indipendente dall'esperienza del soggetto, dalle premesse alla conclusione, ma sulla capacità del soggetto di ricavare la conclusione dalle premesse, ossia sul modo di procedere della nostra ragione. La medesima enfasi si trova anche, come abbiamo visto, in Descartes e Kant, seppure in contesti diversi e in base a presupposti diversi. Descartes ha enfatizzato l'aspetto del ricavare la conclusione dalle premesse per mezzo di un ragionamento perchè era preoccupato che tra ciò che si considera di conoscere si inserissero anche enunciati che non siamo in grado di affermare. Kant, dal canto suo, riportava la

---

This does not mean that the additional word complexes in question convey truths *before* these truths have been experienced, nor that these truths *always can* be experienced. In ther words, logic is not a reliable instrument to discover truths and cannot deduce truths which would not be accessible in another way as well. Di passaggio, si può notare che passi come questo non mettono in dubbio solo la legittimità della logica classica, ma anche di ogni sistema logico che faccia ricorso in modo essenziale a derivazioni linguistiche. Anche un sistema di logica intuizionista come quello proposto da Heyting [1930], dunque, rischia di essere coinvolto dalle critiche di Brouwer. La questione è ulteriormente complicata dal fatto che ciò che attualmente è considerata la logica intuizionista è, da un certo punto di vista, un sottosistema della logica classica, ma Brouwer [1948], p. 489, afferma: there are intuionist strctures which cannot be fitted into any classical logical frame, and there are classical arguments not applying to any introspective image.

nozione di seguire da alla nozione di seguire una regola, ossia un legge necessaria dell'intelletto che, in quanto tale, era anche una condizione necessaria per il darsi della verità di un enunciato. Egli però, che pure ha influenzato in maniera diretta Brouwer (cfr., per esempio, Brouwer [1913], p. 57[20]), non univa queste convinzioni ad altre tesi, come quella del solipsismo (Brouwer [1948], p. 488[21]), che Brouwer adotta e che, nel complesso, lo portano a rifiutare la logica e, più in generale, a considerare l'impresa logica come derivata dalla matematica e le deduzioni logiche come inadeguate per determinare la scoperta di nuove verità.

7.5 DEDUZIONE NATURALE E FONDATEZZA DELLE ASSERZIONI

7.5.1 Le ricerche di Gentzen sulla deduzione logica

Gentzen pubblica, nel 1935, un articolo in cui presenta due tipi diversi di calcolo, il calcolo della deduzione naturale e il calcolo dei sequenti, in cui fornisce un'analisi delle dimostrazioni decisamente innovativa rispetto ai precedenti calcoli formali, basati su un elenco di assiomi e poche regole di deduzione (in genere non più della regola *modus ponens*, di quella di sostituzione e di quella di generalizzazione). Come nel caso di Frege, che abbiamo analizzato, l'obiettivo di questi calcoli era quello di fornire delle analisi delle dimostrazioni matematiche come enti astratti al fine di mostrare l'assenza di salti deduttivi e di permettere di ottenere come teoremi, in modo del tutto rigoroso, tutte le conseguenze logiche di una teoria elementare. Hilbert, che formulerà dei sistemi formali essenzialmente analoghi a quello proposto da Frege, aggiungerà agli obiettivi ricercati determinando in questo modo un sistema formale anche la scoperta di certi risultati metateorici, come la consistenza del sistema e la completezza (risultato che, per quella che oggi si chiama logica dei predicati del primo ordine con linguaggi al più numerabili, sarà stabilito da Gödel [1930]). Il loro obiettivo non era certo l'analisi delle dimostrazioni in sé, come processi, e secondo le modalità con cui si svolgono nella reale pratica matematica. La semplicità, maneggiabilità ed aderenza alla comune pratica deduttiva, per quanto possibile senza perdite di rigore, non erano obiettivi tenuti in grande considerazione, come Frege afferma esplicitamente.

L'obiettivo che Gentzen si propone, invece, è quello di allontanarsi dalla presentazione della deduzione logica sullo stile di quella che abbiamo visto in Frege e di fornire, piuttosto, un calcolo che segua più da vicino il modo in cui le dimostrazioni sono elaborate nella concreta prassi matematica, ossia di seguire in modo più fedele il concreto procedere del pensiero quando si elabora un di-

[20] However weak the position of intuitionism seemed to be after this period of mathematical development, it has recovered by abandoning Kant's apriority of space but adhering the more resolutely to the apriority of time.

[21] From the above report, espcially from the rejection of the plurality of mind, follows that *truth* is only (...) in the present and past experiences of consciouness.

mostrazione matematica (Gentzen [1935], p. 77[22], Gentzen [1935], p. 84[23], Gentzen [1935], p. 91[24]). A tal fine egli propone due tipi di calcoli: il calcolo della deduzione naturale e il calcolo dei sequenti. Ora, in questa sede, è opportuno prendere in considerazione solo uno di questi due tipi di calcolo. Prenderò come riferimento il calcolo della deduzione naturale, che ci permette di sottolineare tutti gli aspetti rilevanti della nuova caratterizzazione della nozione di conseguenza logica ed è stato usato, come vedremo, anche da Prawitz nel corso delle sue ricerche volte a connettere il concetto di conseguenza logica con quello di fondazione delle asserzioni.

La prima cosa da notare è che, sebbene Gentzen abbia ricevuto l'impulso per compiere le sue ricerche dall'insoddisfazione per la lontanza delle dimostrazioni svolte in calcoli analoghi a quello di Frege dalle procedure effettivamente seguite dai matematici, tali ricerche veicolano anche un'immagine di logica diversa rispetto a quella che si trovava in Frege e che lo aveva condotto alla formulazione del suo calcolo. Come abbiamo visto, Frege prendeva le mosse da una concezione assolutista della logica. La logica fonda le altre discipline fondando le proprie deduzioni su assiomi che sono veri, in quanto leggi logiche. Per mezzo di essa si garantisce il rigore delle dimostrazioni matematiche, per quanto questo rigore possa essere ottenuto a scapito della naturalità delle deduzioni. Le leggi dell'essere vero, descritte dalla logica, sono i teoremi logici e la logica è permette di scoprirli. Il calcolo è un processo, ma non è studiato in quanto processo in sé. Ciò che conta è che tale calcolo sia in grado di condurre, in modo preciso e senza alcun salto deduttivo, dagli assiomi alla scoperta dei teoremi. Ciò avviene nel passaggio dalle premesse alla conclusione importa solo nella misura in cui garantisce la validità di ogni passaggio inferenziale, non in quanto mostra lo snodarsi del pensiero lungo questo processo. Il modo naturale di pensare, inoltre, è spesso non rigoroso in quanto fuorviato da intuizioni, analogie ed altri passaggi inferenziali che mancano di rigore. Esso non deve essere considerato, così come non è importante basarsi sul linguaggio naturale in cui si svolgono le deduzioni per rappresentare i contenuti concettuali con cui si ha a che fare.

Gentzen, con la sua proposta, invece, giunge a sottolineare in modo particolare che il calcolare è un processo ed è possibile fornire un sistema formale che si concetra proprio su questo aspetto processuale del calcolo e non solo sul fatto che esso fornisca un modo rigoroso, per quanto astruso, di determinare le conseguenze logiche di una teoria. Il dimostrare è un seguire i precetti del ragionamento corretto, ossia procedere in conformità a regole che assicurano la validità di certi nessi inferenziali. A questo punto, la scelta degli assiomi è meno

[22]Il mio punto di partenza è stato questo: la formalizzazione della deduzione logica, in particolare come è stat sviluppata da Frege, Russell e Hilbert, si discosta alquanto dalle forme di deduzione usate nella pratica delle dimsotrazioni matematiche. (...) Al contrario, io ho inteso principalmente fonire un sistema formale che fosse il più vicino possibile all'effettivo ragionamento.

[23]Intendiamo proporre un formalismo che rifletta quanto più esattamente possibile i ragionamenti logici che sono realmente utilizzati nelle dimostrazioni matematiche.

[24]*Alcune note sul calcolo NJ.* (...) Una stretta affinità con il ragionamento reale, che era stato il nostro principale scopo nel proporre il calcolo. Il calcolo si presta particolarmente alla formalizzazione delle dimostrazioni matematiche.

impotrante. Ciò che conta è che le dimostrazioni procedano in accordo con i precetti validi della ragione, non quali siano i punti di partenza. Il ragionamento può essere logicamente valido anche se le premesse non sono vere e da ciò segue che si può porre l'enfasi non tanto sul *quanto* si dimostra e sulle informazioni metateoriche che si possono ricavare su un sistema formale, come accadeva con i calcoli alla Hilbert, ma sul *come* si compiono le dimostrazioni.

Una tal visione della logica contiene elementi ormai diversi da quelli che avevano ispirato il programma logicista di Frege. La logica appare, qui, come una tecnica del ragionare, più vicina al modo con cui era stata presentata da Aristotele e Kant che non a quello adottato da Frege, che, alla base del suo sistema, poneva una serie di verità logiche, senza le quali non era possibile compiere le deduzioni nel sistema. Il richiamo agli assiomi come verità logiche che era presente nell'opera di Frege era strettamente collegato alla sua visione assolutistica della logica: egli riteneva, infatti, che gli assiomi rappresentassero quelle verità prime sulle quali si fondava qualsiasi edificio deduttivo. Con Gentzen, invece, per quanto egli non lo faccia notare esplicitamente, si propone una nuova visione, che, come ho detto, per molti aspetti è, in realtà anche un ritorno ad una concezione tradizionale di logica come determinazione dei precetti con cui si conduce correttamente il pensiero. Più che l'effettiva riuscita del programma gentzeniano di modellare la reale pratica dimostrativa dei matematici, quel che ci interessa, qui, è sottolineare come, per mezzo delle sue proposte, la logica sia concepita come una tecnica della deduzione, con molte affinità, pur nelle ovvie differenze tecniche, con la tradizionale concezione della logica come arte del ragionare.

Dimostrazione come catena di inferenze atomiche

Come ho detto, mi limiterò a considerare il calcolo della deduzione naturale. Il nostro scopo, infatti, non è quello di dare un resoconto completo delle ricerche di Gentzen nell'ambito della teoria ella dimostrazione, ma solo quello di illustrare come, nei suoi scritti, si trovino spunti interessanti per caratterizzare la nozione di conseguenza logica in termini di seguire delle regole e ragionamento. Per questo motivo, non fornirò neanch una versione completa del calcolo della deduzione naturale, ma mi limiterò a porne in evidenza i concetti più rilevanti per la nostra ricerca.

In un sistema formale come quello di Frege o come quelli proposti da Hilbert (che erano i sistemi formali a cui si faceva normalmente riferimento al principio del secolo scorso) ci sono alcuni simboli che sono considerati *costanti logiche*, ossia, solitamente $\wedge$ (congiunzione), $\vee$ (disgiunzione), $\rightarrow$ (implicazione materiale), $\neg$ (negazione), $\forall$ (quantificatore universale), $\exists$ (quantificatore esistenziale). A volte compare anche un simbolo come $\perp$ che rappresenta l'enunciato assurdo. L'idea fondamentale di Gentzen è che si possono analizzare le dimostrazioni come processi in cui si compiono inferenze atomiche che vertono sull'inserimento o sull'eliminazione di uno di questi simboli. I simboli logici, in altre parole, hanno un ruolo nelle inferenze ed esso consiste nel permettere di inferire un enunciato in cui essi compaiono a partire da altri enunciati o di inferire un certo enunciato a partire da un altro enunciato in cui essi compaiono, eventualmente in connessione con altri enunciati. Gentzen, dunque, osserva che nei normali processi con cui si costruisce una dimostrazione, i passaggi inferenziali vertono sul ruolo deduttivo di simboli logici e, in particolare, sulla possibilità di inserirli unendo enunciati già accettati nella dimostrazione o di eliminarli in enunciati già accettati nella dimostrazione (Gentzen [1935], pp. 86-8).

Gentzen, dunque, riconosce che le dimostrazioni, o, più in generale, i ragionamenti, possono procedere tramite inferenze immediate in due modi: o attraverso la sintesi di certe conoscenze o attraverso l'analisi di certe conoscenze. Il primo modo di procedere è codificato da quelle che egli chiama le regole di introduzione di un simbolo logico e il secondo modo di procedere è codificato dalle cosiddette regole di eliminazione di un simbolo logico.

Vediamo qualche esempio, per spiegare le nozioni ho fatto riferimento senza spiegare in modo esaustivo, però, il calcolo della deduzione naturale presentato da Gentzen e, ovviamente, anche senza affrontare tutti i maggiori problemi e spunti che suggerisce. Concentriamoci sul connettivo $\wedge$. Le questione che devono essere considerate per determinare il suo ruolo nelle deduzione sono:

1. Quando sono legittimato ad inferire un enunciato il cui connettivo più esterno è una congiunzione?

2. Cosa sono legittimato ad inferire da un enunciato il cui connettivo più esterno è una congiunzione?

Rispondendo alla prima domanda, determiniamo la regola di introduzione del connettivo $\wedge$ e rispondendo alla seconda domanda, determiniamo le sue regole di eliminazione. In simboli, possiamo esprimerci così. Siano ϕ e ψ degli enunciati qualunque:

$$\wedge I \quad \frac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi}$$

è la regola di introduzione di $\wedge$ e

$$\wedge E \quad \frac{\phi \wedge \psi}{\phi} \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi}$$

sono le sue regole di eliminazione (Gentzen [1935], p. 88).

$\wedge I$ indica a quali condizioni è possibile inferire una congiunzione e $\wedge E$ indica cosa possiamo inferire da una congiunzione.

Allo stesso modo si procede per determinare le regole di introduzione e le regole di eliminazione degli altri simboli logici. Non occorre, qui, considerare anche le definizioni delle altre regole. Quel che è interessante per il nostro discorso è già stato evidenziato in questa breve presentazione e nell'esempio riportato sopra.

Quel che deve essere chiaro è che i calcoli della deduzione naturale di Gentzen rappresentano un modo nuovo e notevolmente diverso di affrontare il problema di come si possa caratterizzare la nozione di conseguenza logica in un sistema formale e di quale sia lo scopo per cui si formula un sistema formale. Non si concepisce, qui, infatti, la logica come il sistema delle verità che fondano le altre scienze deduttive e neppure si costruisce un sistema formale per ricavare informazioni su quanto si deduce e sull'ottenere altre informazioni metateoriche sul sistema. La logica, piuttosto, diventa qualcosa di simile alla tradizionale arte del ragionamento e si propone di caratterizzare il valore deduttivo dei simboli logici che compaiono nel linguaggio in cui si compiono le dimostrazioni.

Occorre notare, poi, che, sebbene, come vedremo fra poco, Prawitz ed altri hanno adottato con decisione i calcoli della deduzione naturale per spiegare il senso della nozione di inferenza nella prospettiva intuizionista, eventualmente legandolo a spunti tratti dal pensiero del secondo Wittgenstein (secondo lo slogan per cui il significato è l'uso), Gentzen non lega i suoi risultati a prospettive di questo genere. Il modo in cui egli presenta i calcoli della deduzione naturale lascia aperte diverse possibilità di interpretazione. Da un certo punto di vista, è possibile anche considerare tali calcoli come qualcosa che non è del tutto sintattico, ma che, piuttosto, si colloca a metà strada tra sintassi e semantica. Gli aspetti sintattici sono costituiti dal fatto che questi calcoli offrono regole per la manipolazione di simboli, ma le motivazioni che giustificaziono tali regole possono essere strettamente collegate alla semantica. Consideriamo, per esempio, il modo con cui oggi si definisce usualmente la condizione di verità delle congiunzioni. Per ogni enunciato ϕ, ψ

- $\phi \wedge \psi$ è vero se e solo se ϕ è vero e ψ è vero.

Ora, le regole $\wedge I$ ed $\wedge E$ possono essere viste, rispettivamente, come la direzione da destra a sinistra e da sinistra a destra dell'equivalenza posta sopra. Tali regole, in altre parole, sono definite sulla base di considerazioni circa la conservazione della verità dalle premesse alla conclusione, ossia sulla base di idee semantiche, anche se trasposte nella forma di un calcolo.

Ciò è sicuramente vero, ma in Gentzen c'è anche l'altro aspetto, tutto sommato preponderante, secondo cui l'analisi delle dimostrazioni per mezzo delle regole del calcolo della deduzione naturale, permette di capire come si giustificano certe inferenze, ossia quali sono le modalità di inferenza con cui usiamo le nozioni logiche per passare da certe premesse ad una certa conclusione, indipendentemente da quali siano le premesse, da quale sia la conclusione e da quali siano le leggi logiche che riconosciamo e potremmo porre come assiomi di un sistema assiomatico. Il calcolo della deduzione naturale, allora, permette di porre in luce gli aspetti processuali ed operazionali che stanno alla base del nostro costruire dimostrazioni e del nostro usare certe nozioni logiche. Enfatizzando questo aspetto, come vedremo, Prawitz fa ricorso proprio a tali calcoli per descrivere la sua nozione di conseguenza logica in termini di giustificazione e fondamento per asserire la conclusione a partire dalle premesse.

7.5.2 Prawitz e la conseguenza logica come fondamento per le asserzioni

In questo paragrafo intendo mostrare un recente tentativo di Prawitz di caratterizzare la nozione di conseguenza logica in termini di trasformazione di ciò che è un fondamento per asserire le premesse in ciò che è un fondamento per asserire la conclusione. Abbiamo già visto che la nozione di fondamento, se non il termine, ricorreva già anche nelle riflessioni di Descartes, preoccupato di giustificare ogni enunciato ammesso nella nostra conoscenza. Prawitz parla sostanzialmente della medesima idea, ricavandola, però, dalla riflessione di Brouwer sulle deduzioni come trasformazioni di una costruzione mentale delle premesse in una costruzione mentale della conclusione e approfondisce la possibilità di intendere la nozione di conseguenza logica come la trasmissione della fondatezza dell'asserzione delle premesse all'asserzione della conclusione. Per compiere la sua analisi, Prawitz riprende ed elabora l'idea di suddividere una dimostrazione in una catena di inferenze immediate che Gentzen aveva esposto definendo i calcoli della deduzione naturale.

In sintesi, trascurando alcuni dettagli che non possiamo analizzare in questa sede, possiamo dire che la proposta di Prawitz è quella di spiegare la nozione di conseguenza logica per mezzo di quella di inferenza logicamente valida (Prawitz [2007b], lezione 5, p. 4)[25], dove la seconda denota un'operazione che trasforma i fondamenti per asserire le premesse in fondamenti per asserire la conclusione (Prawitz [2007b], lezione 4, p. 7[26], Prawitz [2007a], p. 19[27], Prawitz [2007a], p. 21[28]). In tal modo egli ritiene di esprimere al medesimo tempo una necessità del pensiero (Prawitz [2007a], p. 23[29]), ma, soprattutto, l'aspetto epistemico che lega le premesse e la conclusione e permette di giungere a questa a partire da quelle (Prawitz [2007b], lezione 5, p. 7[30]).

Incominciamo con lo spiegare cosa Prawitz intende con inferenze e con trasformazione dei fondamenti per asserire le premesse in fondamenti per asserire la conclusione. Prawitz, in prim luogo, introduce la nozione di *fondamento* di

[25] ψ is a logical consequence of sentences $\phi_1, ..., \phi_n$ if an only if the inference from $\phi_1, ..., \phi_n$ to ψ is logically valid. Avviso, una volta per tutte, che nelle citazioni dai testi di Prawitz mi permetto di modificare il simbolo che egli ha usato per renderlo omogeneo a quello a cui ricorre in questo testo. Non ci si stupisca, poi, dl fatto che alcune citazioni dalle *Lezioni sulla conseguenza logica* sono in inglese ed altre in italiano, in quanto tale testo è stato solo parzialmente tradotto ed è stato reso disponibile in parte in inglese e in parte in italiano.

[26] Attuare un'inferenza è compiere un'operazione che trasforma i fondamenti per le premesse in fondamenti per la conclusione. (...) La validità è quindi da definire in modo che l'inferenza sia valida se l'operazione dà realmente un fondamento per la conclusione.

[27] An (...) inference is valid if and only if the given grounds for the premisses are grounds for them and the result of applying the given operation to these grounds is in fact a ground for the conclusion.

[28] To make an inference is to apply a certain operation to the given grounds for the premisses, and that the inference is valid is now definied just to mean that the result of applying this operation to grounds for the premisses is a ground for the conclusion. and hence it justifies the person in question in holding the conclusion true.

[29] This is a kind of necessity that can suitably be called *necessity of thought*.

[30] Ora voglio enfatzzare più l'aspetto epistemico (...) ed ho introdotto il concetto astratto di fondamento.

un'asserzione di un certo enunciato, ossia ciò di cui un soggetto deve possedere per essere giustificato a sostenere che quell'enunciato è vero (Prawitz [2007a], p. 18[31], Prawitz [2007b], lezione 5, p. 9[32]). Tale nozione, volutamente, non riceve una caratterizzazione più precisa Ciò che è importante è che si concede che vi esista qualcosa come il fondamento di un'asserzione e che vi sia una differenza fra il compiere un'asserzione senza possedere alcun fondamento per affermarla, ossia senza sapere fornire una giustificazione del fatto che la si ritiene vera, e il compiere un'asserzione possendendo un fondamento per farla, ossia essendo in grado di giustificare la propria credenza nella verità dell'enunciato asserito. Non occorre come si specifichi ulteriormente la nozione di fondamento. L'importante è che si riconosca che il fondamento di un'asserzione, qualunque cosa si intenda (esperimento, testimonianza, ...), sia ciò che ci rende in grado di fare un'asserzione giustificata.

Ora, il compito di un'inferenza, dice Prawitz, è proprio quello di farci passare da uno stato in cui siamo giustificati ad affermare le premesse ad uno stato in cui siamo giustificati ad affermare la conclusione (Prawitz [2007a], p. 18[33]), analogamente a quel che Brouwer diceva a proposito delle dimostrazioni matematiche, che ci fanno passare da un'esperienza dello uno stato di cose matematico rappresentato dalle premesse allo stato di cose matematico rappresentato dalla conclusione. Un'inferenza, in altre parole, trasforma un fondamento per asserire le premesse in un fondamento per asserire la conclusione (Prawitz [2007a], lezione 4, p. 7[34]). Un'inferenza, dunque, non è la deduzione di certi enunciati da altri enunciati assunti come premesse, ma il passaggio dalle condizioni che permettono di asserire in modo giustificato gli enunciati che costituiscono le premesse in una condizione che permette di asserire in modo giustificato l'enunciato che costituisce la conclusione. É facile avvertire, qui, come già si è notato, l'eco delle affermazioni di Brouwer su come si stabiliscono i teoremi matematici, dove il problema non è proprio quello di saper passare, tramite il ragionamento, dall'esperienza del darsi di uno stato di cose matematico all'esperienza del darsi di un altro stato di cose matematico. Sebbene Prawitz non si ponga questa questione, tuttavia, nel suo discorso si ritrova acnhe un atteggiamento simile a quello di chi sottolinea proprio il ruolo dell'inferenza per guidare in modo sicuro il tentativo di ampliare le nostre consocenze. Con i suoi concetti di intuizione e deduzione, Descartes sottolineava proprio questo ruolo del ragionamento: permetterci di ampliare la nostra conoscenza senza compiere errori che ci portino a giudicare vere enunciati che, in realtà, sono falsi. Tra i due estremi del non sapere nulla e del sapere tutto, che è proprio solo di Dio, si situa la conoscenza umana, che può essere effettivamente fondata, dice Descartes, in modo inop-

[31] I here use the term *ground for a sentence* to denote what a person needs to be in possession of in order to be justified in holding the sentence true.

[32] Un'asserzione è qualcosa che viene fatto sulla base di un fondamento.

[33] My suggestion is that (...) we should (...) regard an inferenze as an act by which we acquire a justification or ground for the conclusion by somehow operating on the already avaliable grounds for the premisses.

[34] La mia idea principale el descrivere la validità delle inferenze e nel descrivere come esse sono usate per ottenere consocenza, è che esse vanno viste essenzialmente come atti, nei quali si opera sui fondamenti dati per le premesse, per ottenere fondamenti per la conclusione.

pugnable e da lì può essere estesa, con circospezione, trasformando ciò che ci ha legittimati ad ammettere certe conoscenze in una legittimazione per ammettere anche nuove ed ulteriori conoscenze. Questo ruolo dell'inferenza, come si vedrà meglio fra poco, è facilmente avvicinabile allo spirito che anima la costituizione dei calcoli della deduzione naturale. In entrambi i casi, infatti, si pone attenzione sul processo che permette di passare dall'asserire le premesse all'asserire la conclusione. Dedurre, o inferire, nei termini di Prawitz, è un succedersi di atti che, poco per volta, conducono dall'accettazione delle premesse all'accettazione della conclusione. Abbiamo notato, sopra, che vi sono delle affinità tra la concezione che sta alla base della definizione dei calcoli della deduzione naturale e la tradizionale concezione della logica, tra le altre cose, come arte di ragionare (Prawitz [2007b], lezione 5, p. 3[35]). Allo stesso modo, è possibile sottolineare la medesima analogia tra la nozione di inferenza come trasformazione dei fondamenti per asserire le premesse in fondamenti per asserire la conclusione e quella stessa visione tradizionale della logica come arte di ragionare, ossia di ben dirigere la propria ragionare che insegna ad evitare gli errore che ci conducono ad asserire conclusioni che non sono, in verità, legittimate dalle premesse.

Chiamiamo argomento, come al solito, una coppia costituita da un insieme di enunciati, le premesse, ed un enunciato singolo, la conclusione. Dobbiamo fare attenzione a non confondere argomenti ed inferenze. Per Prawitz, un'inferenza, come ho detto, è un *atto* che prende in considerazione le premesse e un fondamento per ciascuna di esse e trasforma questi fondamenti in un fondamento per la conclusione. Per presentare in modo più agevole le idee di Prawitz, ci conviene semplificare leggermente la definzione di inferenza. Considereremo un'inferenza, quindi, come un atto in cui si passa dai fondamenti per asserire certi enunciati al fondamento per asserire un altro enunciato. Un'inferenza, quindi, è composta solo da fondamenti per asserire certi enunciati e non anche dagli enunciati medesimi.

É chiaro che ad ogni argomento è possibile associare almeno un'inferenza. Consideriamo, per esempio, l'argomento le cui premesse sono $\phi_1, ..., \phi_n$ e la cui conclusione è ψ, dove $\phi_1, ..., \phi_n, \psi$ sono enunciati. Basta associare ad ogni enunciato un fondamento che rende giustificata la sua asserzione ed otteniamo un'inferenza associata a tale argomento. Indichiamo con $f_{\phi_1}, ..., f_{\phi_n}, f_\psi$, rispettivamente, dei fondamenti per $\phi_1, ..., \phi_n, \psi$, allora possiamo indicare un'inferenza con questi elementi per mezzo dello schema

$$\frac{f_{\phi_1}, ..., f_{\phi_n}}{f_\psi}.$$

Diciamo che un'inferenza è valida se e solo trasforma *effettivamente* i fonda-

[35]Hence, if the inferenze J is valid, if (a) P makes the inference J, and if (b) P has grounds for the premisses of the inference, then by the definition of validity, P gets as a result a ground for the conclusion, i.e. (c) P has ground for the conclusion. Furthermore, it seems reasonable to say that we gain knowledge, come into position (c), by having grounds for some premisses (condition (b)) and then making an inference fromthem to a conclusion (condition (a)).

menti per asserire le premesse di quell'argomento in un fondamento per asserire la conclusione del medesimo argomento (Prawitz [2007b], lezione 5, p. 3[36]).

Un argomento è valido se e solo se gli si può associare un'inferenza valida. Ora, in questo modo, Prawitz, e vedremo meglio come, intende mostrare che si può definire la validità di un'inferenza in modo senza far ricorso alla nozione di argomento valido e, poi, di definire questo sulla base di quella.

Ora, assumiamo di aver definito un insieme di simboli logici. Prawitz spiega cosa significa dare un fondamento per un enunciato in cui compare un simbolo logico come simbolo più esterno. Prendiamo il caso, per esempio, dell'enunciato $\phi \wedge \psi$, dove ϕ e ψ sono due enunciati qualunque. Fornire un fondamento per $\phi \wedge \psi$ significa mettere insieme il fondamento per asserire ϕ e il fondamento per asserire ψ (Prawitz [2007a], p. 20[37]). Allo stesso modo, fornire un fondamento per asserire ϕ da $\phi \wedge \psi$ significa isolare il fondamento per asserire ϕ all'interno del fondamento per asserire $\phi \wedge \psi$(Prawitz [2007a], pp. 21-2[38]). É evidente l'analogia con le regole di introduzione ed eliminazione del calcolo della deduzione naturale di Gentzen, anche se qui le regole si applicano non ad enunciati, ma a fondamenti degli enunciati. Come sappiamo che in questo modo stiamo compiendo un'inferenza legittima, ossia che, per esempio, avere un fondamento per asserire ϕ e un fondamento per asserire ψ ci rende giustificati ad asserire $\phi \wedge \psi$? Prawitz difende la legittimità di un'inferenza del genere, sostenendo che è esattamente la definizione di fondamento per asserire una congiunzione, ossia che avere un fondamento per asserire una congiunzione significa avere un fondamento per asserire entrambi i congiunti. Alla base della scelta delle regole inferenziali per ogni simbolo logico, dunque, analogamente a quel che accadeva in Gentzen, sta un'ipotesi sul ruolo che tali simboli hanno nella pratica inferenziale, il che, per Prawitz, equivale a fornire il loro significato. Così come Gentzen aveva definito una serie di regole di introduzione e di eliminazione per i simboli logici, allo stesso stesso modo possiamo definire delle regole che permettono di compiere inferenze atomiche tra fondamenti che fissano il ruolo deduttivo di ogni simbolo logico. Quel che abbiamo detto, però, dovrebbe essere sufficiente a spiegare ciò che di essenziale vi è nella proposta di Prawitz e non

---

[36] An inference (...) can now be defined to be *valid* if and only if $f_{\phi_1}, ..., f_{\phi_n}$ sono fondamenti per $\phi_1, ..., \phi_n$ and (...) the result of applying the operation (...) to the grounds for the premisses, is a ground for the conclusion.

[37] Consider the simple example of conjunction introduction - the premisses are here two arbitrary sentences ϕ and ψ, and the corresponding conclusion has the form $\phi \wedge \psi$. The operation, which we may call $\wedge I$, brings together given grounds for ϕ and ψ, say f_ϕ and f_ψ. To carry out this infernce is to apply $\wedge I$ to f_ϕ and to f_ψ and to claim that the result $\wedge I(f_\phi, f_\psi)$ is a ground for $\phi \wedge \psi$.

[38] The inference form conjiunction elimination exists in two forms: the premiss is always a conjunction, say $\phi \wedge \psi$, and the conclusion is then either ϕ or ψ. Corresponding to these two forms of conjunction elimination, we have two operations, call them $\wedge E_1$ and $\wedge E_2$. They are applicable to all grounds for conjunctions, and the value of applying the operations to such a ground is given by the equations

$$\wedge E_1(\wedge I(f_\phi, f_\psi)) = f_\phi \text{ and } \wedge E_1(\wedge I(f_\phi, f_\psi)) = f_\psi,$$

respectively. That a person applies one of these operations implies that she is able to handle the equation in question.

occorre fonire tutti i dettagli formali che egli sviluppa (come la specificazione delle regole di introduzione e di eliminazione per ogni simbolo logico), cosa che richiederebbe, peraltro, di introdurre ulteriori nozioni ausiliare.

Occorre riprendere, piuttosto, il legame tra la validità di un argomento e la validità dell'inferenza corrispondente. Ora, un'inferenza è detta logicamente valida se e solo se è compiuta ricorrendo solo alle regole di introduzione e di eliminazione dei simboli logici, ossia senza tenere conto dei particolari enunciati a cui si riferiscono i fondamenti e basata solo sul significato dei simboli logici (Prawitz [2007b], lezione 5, p. 4[39]). Ora, diciamo che un argomento è logicamente valido se e solo se un'inferenza ad esso corrispondente è logicamente valida (Prawitz [2007b], lezione 5, p. 4[40]).

7.6 CONCLUSIONE

come abbiamo visto, dunque, Prawitz caratterizza la nozione di conseguenza logica tra un insieme di enunciati ed un enunciato sulla base della nozione di inferenza tra alcuni fondamenti di quegli enunciati. Come abbiamo sottolineato anche sopra, in questo modo egli fornisce un'uteriore versione della nozione di conseguenza che nasce dal dedicare particolare attenzione a quegli aspetti, presenti, tra l'altro, anche nelle riflessioni di Etchemendy, che legano la conseguenza logica alla possibilità di giustificare la conclusione sulla base delle premesse. Tale nozione non si basa su una caratterizzazione semantica della nozione di conseguenza logica, ma, piuttosto su un legame normativo ed epistemico che vige tra le premesse e la conclusione solo sulla base della forma logica degli enunciati coinvolti. In quest'ottica, si deve poter mostrare che asserire le premesse è un motivo per asserire anche la conclusione e che la concoscenza che ci rende giustificati ad affermare quelle può esser trasformata, tenendo conto solo del significato dei simboli logici, in una conoscenza che si dà anche la conclusione. In questo modo, la nozione di conseguenza logica assume un ruolo centrale in quanto è direttamente collegata alla possibilità di ampliare in modo legittimo le nostre conoscenze, ricavando dalla conoscenza delle premesse ciò che è già implicito in essa, rivestendo quel doppio, ruolo, normativo ed epistemico, di cui si è parlato nel corso di questo capitolo.

Se nella caratterizzazione semantica della nozione di conseguenza logica, ciò che conta è solo un certo rapporto i valori di verità delle premesse e della conclusione, a prescindere dal fatto che tale rapporto ci sia noto o, in linea di principio, possa essere conosciuto, in quest'altro tipo di caratterizzazione, si

[39] If we want to speak of inferences that are valid in virtue of just the logical vocabulary occurring in the senteces involved, we define an inference form to be *logicall valid* if and onlu f all inference forms of the same logical form are valid.

[40] A sentence ψ is a logical consequence of sentences $\phi_1, ..., \phi_n$ if and only if the inference from $\phi_1, ..., \phi_n$ to ψ is logically valid. Come ho avvertito sopra, ho compiuto alcune leggere modificazioni nel modo di esprimersi di Prawitz, al fine di rendere più concisa l'esposizione delle sue idee e per concetrarmi solo sugli rilevanti in questa ricerca. Per questo motivo, dove Prawitz scrive the inference from $\phi_1, ..., \phi_n$ to ψ bisogna intendere l'inferenza da $f_{\phi_1}, ..., f_{\phi_n}$ a f_ψ.

enfatizza il fatto che un argomento logicamente valido deve essere in grado di mostrare la sua validità, in quanto deve essere possibile convincere chi ne nega la validità (ruolo normativo) e deve essere possibile usarlo per ampliare la nostra conoscenza (ruolo epistemico).

I pensatori che hanno enfatizzato questi aspetti della nozione di conseguenza logica, che colgono intuizioni diverse rispetto a quelle colte dalla sua caratterizzazione semantica, hanno fornito questa cartterizzazione sulla base di posizioni diverse. Come abbiamo visto, infatti, in Decartes era centrale la preoccupazione per l'evitare ogni errore nell'impresa di ampliare la nostra conoscenza. Kant e Frege, invece, hanno basato le proprie concezini, piuttosto, sulle nozioni di regole necessarie del pensiero e di seguire una regola. Brouwer, dal canto suo, ha fondato una particolare filosofia della matematica basata sulle tesi che la verità di un enunciato matematico coincide con l'esperire un certo stato di cose da parte del soggetto e ciò lo ha condotto a porre le basi per rifiutare una caratterizzazione della nozione di conseguenza logica che faccia riferimento a valori di verità posseduti dagli enunciati indipendentemente dal soggetto. Gentzen, poi, nel tentativo di fornire un sistema formale che descrivesse fedelmente la reale pratica argomentativa dei matematici, ha definito il calcolo della deduzione naturale (e il calcolo dei sequenti, di cui, però, non ci siamo occupati qui) con cui è possibile analizzare le deduzioni come processi determinati dalle proprietà inferenziali di ciascun simbolo logico. Ciò è stato unito, in pensatori come Prawitz, a suggestioni provenienti dall'intuizionismo e, come abbiamo detto seppure solo di passaggio, dalla filosofia del linguaggio del secondo Wittgenstein, per proporre analisi della nozione di conseguenza logica che mantenessero l'attenzione sulla centralità del soggetto, come aveva fatto Brouwer. In tal modo, Prawitz studia la nozione di conseguenza logica sulla base di quelle di inferenza, che è un atto soggettivo, e fondamento per compiere un'asserzione, dove, ancora una volta, cosa sia un fondamento in tal senso è stabilito dal soggetto. Il risultato è che la caratteristica principale della nozione di conseguenza logica diviene quella di trasmettere il fondamento dell'asseribilità dalle premesse alla conclusione e non quello di trasmettere la verità, qualora questa sia pensata come indipendente dal soggetto.

Parte II

CONSEGUENZA LOGICA, SISTEMA LOGICO, VALORI DI VERITÀ

Capitolo 8

ALCUNE PROPRIETÀ DELLA CONSEGUENZA LOGICA

8.1 PREMESSA

Nella prima parte del presente lavoro, ho cercato di mostrare come la nozione di conseguenza logica, nonché, più in generale, la stessa nozione di logica, dei suoi scopi e della sua natura, siano stati intesi in modo diverso nel corso della storia. Non sempre e non fin dall'inizio della ricerca logica, con Aristotele, la nozione di conseguenza logica è stata considerata un concetto centrale dell'impresa logica. A seconda di come era concepita la natura della logica, di quali era gli obiettivi che le si attribuivano, le relazioni che si pensava avesse o dovesse avere con le altre scienze e le stesse concezioni metafisiche generali dei pensatori, la nozione di conseguenza logica è stata caratterizzata in molti modi e le sono attribuite varie caratteristiche.

In questa seconda parte, intendo offrire, innazitutto, uno studio della nozione di conseguenza logica che si basi su una sua caratterizzazione come relazione, in generale, che vale tra le premesse e la conclusione di un argomento, a prescindere dal modo particolare con cui si specifica la sua natura. La nozione di conseguenza logica, in altre parole, può essere considerata semplicemente come un relazione e chiedersi quali sono le proprietà di cui può godere e porsi a studiarla in quanto tale.

Abbiamo già visto come Tarski, con i suoi due lavori del 1930, avesse già proposto di studiare la conseguenza come in generale, a prescindere dalla sua presentazione in termini di calcolo o in termini semantici (come attraverso le tavole di verità). Tarski aveva posto come nozioni primitive la nozione di insieme di enunciati e la nozione di conseguenza, che era caratterizzata assiomaticamente come un operatore algebrico di chiusura. In questo modo era possibile dimostrare risultati generali che denotano proprietà della conseguenza che non dipendono da una sua definizione in un particolare sistema deduttivo.

Questo modo di considerare la nozione di conseguenza può essere applicato, in modo particolare, alla nozione di conseguenza logica, come hanno fatto, per esempio, Łos, Suszko, Wójcicki, Czelakowski e Malinowski in quella corrente di ricerca nota come logica algebrica e che, di fatto, ha ispirato una serie di ricerche sorte da pochi anni e note come *logica universale*, il cui esponente più noto è J.-Y. Béziau. Nonostante la dicitura *logica universale*, che è stata assegnata agli ultimi sviluppi di questo filone di ricerca, sia molto recente, essa coglie un aspetto che era già presente in questo tipo di indagine. Prendendo le mosse da una considerazione della nozione di conseguenza logica che non è legata ad alcun sistema filosofico in particolare, si intende studiarne le proprietà generali che le competono solo in quanto relazione, di un certo tipo, tra le premesse e la conclusione. Senza voler tentare una presentazione in poche righe delle ricerche che vanno sotto il nome di logica algebrica o sotto la nuova denominazione di *logica universale*, vorrei solo sottolineare il carattere di generalità che l'approccio sviluppato in questi lavori rende possibile. La caratterizzazione della conseguenza logica, infatti, avviene tramite un ristretto gruppo di assiomi (in genere molto simile, anche se non uguale a quello che aveva già fornito Tarski) che è esemplificata da numerosi sitemi logici particolari. Questo tipo di caratterizzazione, oltrettutto, può variare permettendo di studiare diverse relazioni di conseguenza, che godono di proprietà differenti. In tal modo ci si può svincolare da tanti aspetti connessi alla scelta di una presentazione specifica della conseguenza in un certo sistema e si può prescindere da certi aspetti linguistici, da una caratterizzazione secondo un certo calcolo (con specifici assiomi e regole di inferenza) o da una caratterizzazione secondo certe nozioni semantiche (specifiche matrici, condizioni di verità, ...). In questo modo si può effettuare uno studio dei sistemi logici volto non alla creazione di nuovi sistemi, ma di una *teoria generale* su di essi.

Ciò che propongo, in questa seconda parte del lavoro, è un percorso attraverso alcune delle nozioni che sono state elaborate in questo campo, prestando particolare attenzione a sottolineare il significato che rivestono certe scelte formali in sede filosofica, come, per esempio, l'adozione o il rifiuto di certe proprietà della conseguenza logica (come la monotonia) o l'interpretazione che si può fornire a certi metodi semantici, come le matrici, che possono essere usati per determinare specifici sistemi logici. Ho sempre cercato di rimarcare la molteplicità delle scelte possibili. Le proprietà che, in questo tipo di ricerche, normalmente attribuite alla relazione di conseguenza logica, per esempio, comprendono la riflessività, la monotonia, la transitività e la strutturalità. Ho cercato, per esempio, di discutere che cosa significa assumere e in quali diverse forme lo si può fare o le si possono accettare, determinando, in tal modo nuove concezioni della conseguenza logica, basate su particolari intuizioni, convinzioni o obiettivi.

Come nella prima parte intendevo mostrare la ricchezza della riflessione sulla nozione di conseguenza logica, così come questa riflessione si è configurata in diversi pensatori e in diverse scuole, usando diversi metodi ed avendo diverse convinzioni di base e diversi obiettivi, così, in questa seconda parte, intendo sottolineare sempre la pluralità dei punti di vista con cui si può caratterizzare, in modo formale, la nozione di conseguenza logica, quali diverse concezioni si collegano a queste diverse presentazioni, quali diverse informazioni possiamo ricavare da esse, quali peculiartià hanno i diversi metodi con cui si può definire un sistema logico e la relazione di conseguenza logica e quali collegamenti vi sono tra queste diverse posizioni.

Questo accento posto sulle peculiarità che si incontrano in queste ricerche si accompagna alla possibilità di fornire uno studio della nozione di conseguenza logica e della nozione di sistema logico a livello estremamente generali. Proprio questo carattere generale permette di articolare proposte alternative selezionando, per esempio, le proprietà sulle quali si vuole influire e cercando, poi, dei mezzi formali per realizzare il progetto concepito a livello generale o di mostare le connessioni tra diversi tipi di presentazione dei sistemi logici, per esempio tra i calcoli che definiscono una relazione di conseguenza logica con determinate proprietà, prescindendo dai dettagli specifici (un certo linguaggio, ...) con cui sono dati tali calcoli.

8.2 CONSEGUENZA LOGICA IN GENERALE

Abbiamo visto che Tarski, nei suoi due lavori pubblicati nel 1930, proponeva di studiare la nozione di conseguenza per mezzo di una caratterizzazione assiomatica. Assumiamo come nozioni primitive quella di enunciato e di conseguenza. Consideriamo un insieme S di enunciati e l'operazione $Cn : \wp(S) \rightarrow \wp(S)$ che chiamiamo operazione conseguenza. Tarski caratterizzava Cn con i seguenti tre assiomi. Per ogni $\Delta \subseteq S$,

1. $\Delta \subseteq Cn(\Delta)$
2. $Cn(Cn(\Delta)) \subseteq Cn(\Delta)$
3. $Cn(\Delta) = \bigcup_{\Gamma \subseteq_\omega \Delta} Cn(\Gamma)$.

Nelle ricerche contemporanee, in genere, ci si riferisce ad essi, rispettivamente, come proprietà della *riflessività*, della *transitività* e della *finitezza*. Dalla transitività e dalla finitezza, come mostra Tarski [1930b], p. 64, segue la proprietà nota come *monotonia* (o monotonicità), ossia, per ogni $\Delta, \Gamma \subseteq S$

- se $\Delta \subseteq \Gamma$, allora $Cn(\Delta) \subseteq Cn(\Gamma)$.

Ho già esposto, nel capitolo dedicato a Tarski, ciò che vi è di importante per la nostra ricerca e non occorre ripetere, ora, le medesime cose. Quel che è opportuno sottolineare ancora una volta, però, è l'estrema generalità dell'approccio tarskiano, che, prescindendo dal modo particolare (sintattico o semantico) in cui è definita l'operazione di conseguenza e prescindendo dalla struttura degli enunciati, permette di sviluppare uno studio astratto delle teorie deduttive, intese come strutture $\langle S, Cn \rangle$.

In un articolo pubblicato nel 1957, poi, Łos e Suszko, hanno inteso caratterizzare in modo analogo a quello proposta da Tarski non la nozione di conseguenza in generale, ma più specificamente quella di *conseguenza logica*, o formale. A tal fine, hanno ritenuto di dover aggiungere un assioma che assicurasse il carattere formale della conseguenza, ossia tale che se un argomento di una certa forma logica è logicamente valido, allora tutti gli altri argomenti che sono esemplificazioni della medesima forma logica sono, del pari, logicamente validi. Mi soffermerò a lungo, in diversi punti di questa seconda parte del lavoro e, in particolare, in un'apposita sezione di questo capitolo, su questi concetti per sottolinearne i vari aspetti e i punti problematici. Per ora, però, procedo solo ad illustrarli velocemente per introdurre la forma moderna in cui sono solitamente considerati oggi e in la forma in cui li studierò in quanto segue.

Per poter esprimere la nozione di formalità, Łos e Suszko devono rinunciare a parte della generalità dell'approccio tarskiano e fare assunzioni sulla struttura degli enunciati. Invece di un generico insieme S di enunciati, si considera $\mathbf{Fm}$, ossia l'algebra delle formule di un linguaggio proposizionale, che è assolutamente libera nella classe delle algebre del medesimo tipo. La nozione di formalità della conseguenza logica, richiamata sopra, è resa per mezzo del concetto di *sostituizione uniforme* (o, più semplicemente, sostituzione) di formule a formule, ossia se un argomento è logicamente valido, allora qualsiasi argomento ottenuto sostituendo uniformemente formule a formule è logicamente valido. Dal punto di vista formale, una sostituzione uniforme è descritta da un *endomorfismo* $\sigma : \mathbf{Fm} \to \mathbf{Fm}$ e la proprietà della formalità (detta, tecnicamente, proprietà della *strutturalità*) è definita nel modo seguente. Con la scrittura $\sigma(\Delta)$ indico l'insieme $\{\sigma(\phi) : \phi \in \Delta\}$. Allora, per ogni endomorfismo σ su $\mathbf{Fm}$, poniamo

- $\sigma(Cn(\Delta)) \subseteq Cn(\sigma(\Delta))$.

Come ho detto, non intendo soffermarmi, ora, a spiegare a fondo queste nozioni. Cercherò di farlo poco più avanti. Per ora, intendo solo introdurre le nozioni di cui ci occuperemo a lungo in questo capitolo.

Nelle presentazioni standard odierne, la nozione di conseguenza logica è caratterizzata in modo simile, ma non del tutto uguale. In primo luogo, nonostante, su questo aspetto, si trovino presentazioni che ricorrono alla caratterizzazione della conseguenza logica in termini di operazione sull'insieme degli enunciati, preferiscono ricorrere alla nozione di relazione binaria, definita tra una coppia di enunciati ed un enunciato. Nel seguito, quindi, parlerò di relazione di conseguenza logica e, formalmente, mi riferirà alla relazione $\vdash \subseteq \wp(Fm) \times Fm$, dove Fm è l'insieme delle formule (il dominio dell'algebra delle formule). Ora, degli assiomi di Tarski, la finitezza, per quanto importante, non è, di solito, considerata una caratteristica essenziale della nozione di conseguenza logica e, quindi, non è richiesta dalla base di assiomi. La monotonia, però, non è più derivabile dalla transitività senza la finitezza e, pertanto, è esplicitamente aggiunta. La presentazione oggi abituale della conseguenza logica, che assumerò come punto di partenza da problematizzare e per sviluppare ulteriori riflessioni, dunque, è quella che vado ora a delineare. Assumiamo la struttura $\langle \mathbf{Fm}, \vdash \rangle$, dove **Fm** e $\vdash$ sono come sopra. Diciamo che $\vdash$ è una relazione di conseguenza logica e, quindi, che $\langle \mathbf{Fm}, \vdash \rangle$ è un sistema logico (o, più brevemente, una logica), se e solo se valgono le quattro proprietà seguenti. Per ogni $\phi \in Fm$ e per ogni $\Gamma, \Delta \subseteq Fm$

1. (Riflessività) $\{\phi\} \vdash \phi$
2. (Monotonia) se $\Gamma \vdash \phi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, allora $\Delta \vdash \psi$
3. (Transitività) se $\Gamma \vdash \phi$ e, per ogni $\psi \in \Gamma$, $\Delta \vdash \psi$, allora $\Delta \vdash \psi$
4. (Strutturalità) se $\Gamma \vdash \phi$, allora, per ogni sostituzione σ, $\sigma(\Gamma) \vdash \sigma(\phi)$.

Una relazione $\vdash$ che è riflessiva, monotona e transitiva è detta *relazione di chiusura*. La conseguenza logica, quindi, in questo approccio, è caratterizzata come una relazione di chiusura strutturale su insieme di formule.

Quando parlerò di argomento, d'ora in poi, mi riferirò, più precisamente, ad una coppia $\langle \Gamma, \phi \rangle$ (indicata anche con la scrittura $\Gamma \vdash \phi$) dove $\Gamma \subseteq Fm$ e $\phi \in Fm$ e dirò che tale argomento è logicamente valido rispetto alla conseguenza logica $\vdash$ se e solo se si dà il caso che $\Gamma \vdash \phi$.

Ora, come possiamo subito notare, questa caratterizzazione di conseguenza è assai diversa da alcune nozioni di *seguire da* che abbiamo incontrato nella precedente parte storica. In primo luogo, il seguire sillogistico, come lo ha elaborato Aristotele, ovviamente, ha tutt'altra natura, in quanto si basava su argomenti rigorosamente con due premesse, ciascuna delle quali esprime un certo rapporto predicativo tra due termini.

Se in Bolzano, poi, definiamo la relazione di conseguenza logica per mezzo della deducibilità in senso lato e non per mezzo della deducibilità in senso stretto e permettiamo, quindi di formare argomenti con un numero qualsiasi di premesse e se immaginiamo di non avere a che fare con proposizioni in sé, ma con enunciati, allora abbiamo che la forma di un argomento può essere rappresentata come una coppia $\langle \Gamma, \phi \rangle$, come nel nostro caso. Neppure ora, però, la relazione di conseguenza logica che abbiamo appena definito è la stessa considerata da Bolzano. Come si è mostrato nel capitolo che lo riguarda, infatti, si è mostrato, ad esempio, che la sua relazione di conseguenza non è riflessiva, in quanto richiede che le premesse e la conclusione siano compatibili. Allora mi ero soffermato ad analizzare anche altre proprietà e i risultati mostrano che la nozione di conseguenza logica elaborata da Bolzano presenta ancora altre differenze rispetto a quella che stiamo considerando qui.

Su che base, allora, si può considerare plausibile questa caratterizzazione?

Se prendiamo come esempio, la relazione di conseguenza logica come è usata in matematica, possiamo notare che tutte queste proprietà sono soddisfatte. Se, più in generale, prescindiamo dai motivi che portano a provilegiare solo certe forme argomentative (come nel caso della teoria del sillogismo) e ci concentriamo su una nozione di seguire da in cui la conclusione si dà ogni volta che si danno le premesse o, in termini alternativi, è affermabile con certezza se si possono affermare le premesse, allora i primi tre assiomi (riflessività, monotonia e transitività) sono facilmente accettabili.

La riflessività, infatti, afferma che se si dà ciò che esprime un certo enunciato, allora si dà proprio tale fatto (analogamente, come nei casi che seguono, si può dire in termini di affermabilità). La monotonia dice che se ciò che è espresso da ϕ si dà ogni qualvolta accade ciò che è espresso da Γ, allora ciò che è espresso da ϕ si dà anche se le cose espresse da Γ accadono insieme ad altre, infatti si era accettato che Γ è una condizione sufficiente per il darsi di ϕ. La transitività, poi, afferma semplicemente che se ciò che è espresso da Γ è condizione sufficiente per il darsi di ciò che è espresso da ϕ e ciò che espresso da Γ si verifica al darsi di Δ, allora Δ, determinando il verificarsi di Γ, che implica il verificarsi di ϕ, implica il verificarsi di ϕ.

Se, in altre parole, prescindiamo da interessi epistemici, come il voler raggiungere nuova conoscenza, o interessi non relativi al semplice darsi di qualcosa sulla base di qualcos'altro (o non relativi al semplice essere affermabile qualcosa sulla base dell'essere affermabile qualcos'altro), allora le tre proprietà della riflessività, della monotonia e della transitività non sembrano porre aprticolari problemi.

Allo stesso modo, la proprietà della strutturalità, per linguaggi proposizionali, sembra essere una condizione essenziale per poter parlare di conseguenza logica, ossia formale. In tal modo, infatti, si evita, per esempio, che valga $\phi \wedge \psi \vdash \phi$, ma che non valga $\delta \wedge \phi \vdash \delta$ (per $\phi, \psi, \delta \in Fm$), che condividono la medesima forma logica.

Come è facile immaginare, però, le cose sono meno semplici di quanto possano apparire da questo veloce resoconto. Intendo dedicare ad ognuna di questa proprietà una sezione di questo capitolo per mostrare alcune concezioni della nozione di conseguenza logica alternative a quella presentata sopra, spiegando le linee generali delle motivazioni e dei punti di vista che giustificano tali proposte. Non mi propongo, ovviamente, di investigare in modo completo o anche solo particolarmente dettagliato le proposte di caratterizzazioni alternative della relazione di conseguenza logica. Quel che basta, per gli scopi di questo lavoro, è mostrare, tramite alcuni esempi ed accenni, come anche qui si annidino dei problemi e possibilità di proporre visioni alternative. Lo scopo dei paragrafi che seguono, dunque, è solo quello di problematizzare la caratterizzazione della conseguenza logica che è offerta dal concepirla come una relazione di chiusura strutturale. Gli esempi che seguono saranno dati, ovviamente, solo per sommi capi, non essendo possibile né sensato svilupparli ulteriormente in questa sede. Ciò che intendo mostrare è come le condizioni che attribuiamo alla nozione di conseguenza logica quando la trattiamo come una relazione di chiusura strutturale sono legate ad un cetro modo di intenderla, ad un modo, cioè, che non tiene conto di ciò che non riguarda in senso stretto il darsi della conclusione sulla base delle premesse. Tali prorietà possono non essere necessarie o, comunque, ragionevoli se si intende caratterizzare la nozione di conseguenza logica da un altro punto di vista.

8.3 RIFLESSIVITÀ

La proprietà della riflessività appare la più difficile da porre in discussione. Come si ricorderà, Aristotele, definiva il sillogismo come l'enunciabile in cui, poste alcune cose, ne seguono di *altre*, richiedendo, così che la conclusione non comparisse già tra le premesse, cosa che la definizione delle figure sillogistiche e la fondazione della loro validità sul processo della scomparsa del termine medio conferma ulteriormente. In termini più generali, si può ritenere che il trarre come conseguenza lo stesso enunciato che compare come premessa sia effettivamente *banale* e non produca nuova conoscenza. Pensare che si dia ciò che esprime la conclusione semplicemente sulla base del fatto che tale conclusione costituisce anche la premessa dell'argomento, sembra fornire un argomento *circolare* e, perciò, perlomeno sospetto.

Il problema è capire di cosa si intende parlare quando si fissano le caratteristiche della relazione $\vdash$ con una base di assiomi. Se con $\vdash$ ci riferiamo ad una relazione che ci permetta di dedurre la conoscenza che si dà conoscenza dalla conoscenza del darsi delle premesse, allora è facile restare perplessi di fronte a questa proprietà, perché, di fatto, non mostra alcuna derivazione, ma si limita a ripetere ciò che si è posto fin dall'inizio. Dal punto di vista epistemico, poiché il punto di arrivo della conclusione è uguale alla premessa, questa proprietà sembra essere poco desiderabile.

Abbiamo visto, però, che non è questo tipo di relazione ciò a cui pensa Tarski e neppure ciò a cui pensano i logici contemporanei che trattano la conseguenza come una relazione di chiusura. In questo caso ci si riferisce al fatto che nelle condizioni in cui si danno le premesse si dà anche la conclusione o, in altri termini, che nelle conclusioni in cui si è legittimati ad affermare le premesse si è anche legittimati ad affermare la conclusione. La proprietà della riflessività, allora, esprime, semplicemente, il fatto che una condizione in cui si dà ϕ perché ciò è quello che dice la premessa è una condizione in cui si dà ϕ. Non si tiene conto del fatto se la conclusione comporti la scoperta di una nuova verità sulla base della verità delle premesse.

8.4 MONOTONIA

Se pensiamo ai ragionamenti che sono comuni nella pratica quotidiana, ci accorgiamo che, in molti casi, non rispettiamo la proprietà della monotonia. Capita spesso, infatti, che ritrattiamo conclusioni, che avevamo precedentemente tratto, alla luce di nuove informazioni che aggiungiamo alle premesse che avevamo già considerato. Ciò avviene perché, in questi casi, le conclusioni che abbiamo tratto seguivano in maniera *non* deduttiva dalle premesse, ossia erano argomenti in cui non è necessario che la conclusione sia vera, se sono vere le premesse. Usando una denominazione tradizionale, si può dire che si tratta, in questo caso, di argomenti *induttivi* e non deduttivi, ossia argomenti in cui le premesse forniscono *buone ragioni* per ritenere che da esse segua una certa conclusione, anche se queste ragioni non sono conclusive e non escludono il fatto che non possa mai darsi il caso in cui le premesse sono vere e la conclusione falsa. Ciò che appare verosimile o probabile sulla base di certe premesse, può essere abbandonato quando si ampliano queste premesse, che aggiungengo ulteriori elementi di conoscenza, possono far sì che si escluda quel che prima si era inferito. É molto semplice immaginare un caso in cui questo può succedere. Supponiamo, per esempio, di osservare che le strade sono bagnate. Sapendo che il servizio comunale che provvede a pulirle è assai poco efficiente, ci sembra ragionevole concludere che ha piovuto da poco. Se, però, dopo poco apprendiamo che effettivamente sono appena passati gli operai del comune a pulire le strade, allora ciò che prima ci appariva una buona ragione per ritenere che avesse appena piovuto, ora non ci permette più di inferirlo e, pertando, abbandoniamo tale conclusione.

Anche dal punto di vista formale è possibile costruire logiche in cui la relazione di conseguenza non soddisfa la proprietà della monotonia e spesso (cfr. Makinson [2005] e Antonelli [2010]) questi sistemi sono giustificati come tentativi di studiare alcune forme di ragionamento non deduttivi, che sono comuni nella pratica quotidiana. Naturalmente le logiche non monotone sono state create e studiate anche per altre ragioni, come lo studio dei condizionali controfattuali (cfr. Stalnaker [1968] e D. Lewis [1973]) o la creazione di certi sistemi informatici, anche se non è importante, ora, elencare tutte queste diverse prospettive.

A titolo di esempio, fornisco un caso di come si può determinare un sistema di logica non monotona, basandomi soprattutto su Makinson [2005]. In primo luogo assumiamo una relazione di conseguenza classica, che indichiamo con $\vdash$ e che, in quanto classica, è riflessiva, monotona e transitiva. Per definire una relazione $\vdash^{NM} \subseteq \wp(Fm) \times Fm$ di conseguenza non monotona *sulla base di* $\vdash$ procediamo nel modo seguente.

Diciamo che un insieme di formula Γ è consistente con un insieme di formula Δ se e solo se, per almeno una formula ϕ, non vale $\Gamma \cup \Delta \vdash \phi$.

Definiamo $\Gamma' \subseteq \Gamma$ *massimamente consistente* con Δ se e solo Γ' è consistente con Δ e non vi è alcun $\Gamma'' \subset \Gamma'$ che è consistente con Γ.

Ora, definiamo $\vdash^{NM}$ nel modo seguente. Per ogni $\Gamma, \Delta \subseteq Fm$ e per ogni $\phi \in Fm$

- (NM1) $\Delta \vdash^{NM}_{\Gamma}$ sse, per ogni $\Gamma' \subseteq \Gamma$ consistente con Δ, $\Delta \cup \Gamma' \vdash \phi$.

Il senso di questa definizione è che la deduzione (classica) avviene a partire da un certo insieme di premesse, che sono esplicitamente assunte come date e non sono messe in discussione, e un certo insieme di assunzioni implicite, di cui però si utilizzano solo le parti consistenti con le premesse posto in modo esplicito. Il motivo per cui non si pone semplicemente che si uniscono le premesse esplicitamente poste e le assunzioni che sono considerate implicite è che non è detto che l'unione di tali insiemi sia consistente e, in tal caso, la relazione di conseguenza monotona diverrebbe banale perché si potrebbe dedurre qualsiasi formula. Per evitare questo problema, si considerano, separatamente, tutte le parti delle assunzioni implicite che sono consistenti con le premesse.

Ora, prima di mostrare che $\vdash^{NM}_{\Gamma}$ è effettivamente una relazione di conseguenza non monotona, vorrei far notare che vi è un'altra possibile definizione di conseguenza non monotona, che deriva in modo speculare da quella fornita da Makinson [2005], anche se Makinson non la considera, e che, tuttavia, descrive una situazione concettuale molto diversa. Indichiamo questa nuova relazione di conseguenza non monotona con il simbolo $\vdash^{NM2}$ e forniamo la seguente definizione. Per ogni $\Gamma, \Delta \subseteq Fm$ e per ogni $\phi \in Fm$

- (NM2) $\Delta \vdash_{\Gamma}^{NM2}$ sse, per ogni $\Delta' \subseteq \Delta$ consistente con Γ, $\Delta \cup \Gamma' \vdash \phi$.

In questo caso, invece che considerare fissate le premesse ed aggiungere solo le parti di assunzioni implicite che sono consistenti con tali premesse, si compie il lavoro contrario: si ritiene che le assunzioni implicite forniscano la conoscenza più sicura e che non è posta in discussione e si considerano i diversi modi in cui le premesse possono essere aggiunte in modo consistente a tali assunzioni implicite.

Un semplice esempio può servire ad illustrare meglio la differenza tra le due relazioni, che, comunque, dal punto di vista formale, sono entrambe non monotone. Supponiamo che un fisico stia conducendo un esperimento e assuma come conoscenza di sfondo l'insieme T di enunciati. Gli enunciati in T costituiscono, dunque, le assunzioni implicite dei suoi ragionamenti. Supponiamo che conduca un esperimento e registri quello che ha osservato per mezzo degli enunciati in O. Poniamo, ora, che il nostro scienziato voglia trarre nuove ipotesi dai dati osservativi e dalla conoscenza di sfondo che ha assunto e poniamo che T e O siano due insiemi reciprocamente inconsistenti. A questo punto, il nostro scienziato ha due possibilità: o ritiene che i dati osservativi siano stati ottenuti correttamente e, quindi, debba indebolire T (e il suo modo di procedere è modellato dalla condizione (NM1)) o ritiene che l'errore si annidi tra le osservazioni e decide, quindi, di indebolire O (e il suo modo di procedere è modellato dalla condizione (NM2)). Entrambi sono modi di procedere ragionevoli, finché non si sa dove si trovi l'errore e in entrambi i casi si conducono ragionamenti non monotoni, ossia si è pronti a rivedere le conclusioni sulla base di una nuova scoperta. Così entrambe le definizioni di una relazione di conseguenza non monotona, possono ricevere un'interpretazione naturale che si riferisce, tuttavia, a due situazioni differenti.

Vediamo, ora, un esempio che mostra come effettivamente $\vdash^{NM}$ e $\vdash^{NM2}$ siano due relazioni di conseguenza non monotone. Fornisco l'esempio solo per $\vdash^{NM}$, dal momento che è immediato adattarlo anche al secondo caso. Consideriamo i seguenti insiemi di formule: $\Gamma = \{\phi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \zeta\}$, $\Delta = \{\phi\}$ e $\Delta' = \{\phi, \psi\}$. Ora, è facile constatare che $\Delta \vdash^{NM} \psi$, ma che $\Delta' \vdash^{NM} \psi$, perché l'unico sottoinsieme di Γ che sia compatibile con Δ è $\{\psi \rightarrow \zeta\}$ e da $\Delta' \cup \{\phi \rightarrow \zeta\}$ chiaramente non segue ψ. Poichè $\Delta \subseteq \Delta'$, ciò significa, appunto, che $\vdash^{NM}$ non soddisfa la proprietà della monotonia.

Senza fornire ulteriori dimostrazioni, mi limito ad osservare che $\vdash^{NM}$ soddisfa due condizioni particolari. Per ogni $\Gamma, \Delta, \Theta Fm$ e per ogni $\phi \in Fm$

- (Sopraclassicità) se $\Delta \vdash \phi$, allora $\Delta \vdash_{\Gamma}^{NM} \psi$
- (Monotonia prudente) se se $\Delta \vdash_{\Gamma}^{NM} \phi$ e , per ogni $\psi \in \Theta$, $\Delta \vdash_{\Gamma}^{NM} \psi$, allora $\Delta \cup \Theta \vdash^{NM} \phi$.

La prima condizione afferma che la relazione di conseguenza non monotona che abbiamo definito rispetta tutti gli argomenti che sono deduttivamente validi. Ciò significa che $\vdash^{NM}$ estende $\vdash$, in quanto, infatti, la definizione di $\vdash^{NM}$ non è stata fornita per mostrare che la relazione di conseguenza deduttiva ha qualche difetto, ma per ampliare il concetto di conseguenza anche alle conseguenze non deduttive. Da questo punto di vista, è naturale ritenere induttivamente valido un argomento che è addirittura deduttivamente valido, ossia tale che la conclusione non può non darsi se si danno le premesse. Se con gli argomenti induttivi indichiamo quegli argomenti che ci permettono di trarre conclusioni pensando che le premesse siano delle buone ragioni per ritenere che si dia la conclusione se si danno le premesse, allora ciò è tanto più vero nel caso degli argomenti deduttivi.

La seconda condizione è stata posta da Gabbay [1995] e da lui nominata *monotonia prudente* (*cautios monotony*) e indica il criterio che se a Δ si aggiungono le conclusioni che seguono induttivamente da Δ rispetto a Γ, allora non si ottengono nuove conclusioni.

Prima di concludere queste brevi osservazioni, si può notare che, benché nell'esempio che ho proposto, si è definita una relazione di conseguenza non monotona sulla base di una relazione di conseguenza (deduttiva) classica, sono stati proposti anche altri sistemi in cui si sostituisce la relazione di conseguenza classica con altri tipi di relazioni di conseguenza deduttiva (cfr., per esempio, Gabbay [1982], Servi [1992] e Wansing [1995] che scelgono come punto di partenza la conseguenza intuizionista).

8.5 TRANSITIVITÀ

Consideriamo, ora, il caso della proprietà della transitività. Supponiamo di aver stabilito una base di assiomi e di voler conoscere quali altri enunciati seguono da essi. Alcune delle conseguenze sono immediatamente evidenti, ma altre non lo sono e possono, di fatto, essere colte solo passando attraverso una catena di passi argomentativi legittimi che, a poco a poco, conducono dagli assiomi alla conclusione. Se, tramite questa catena di passi argomentativi, riusciamo a giungere ad un certo enunciato ϕ, poiché supponiamo che non sia stato compiuto alcun passaggio deduttivamente illegittimo, possiamo dichiarare che ϕ segue dagli assiomi. In questo modo di procedere, assumiamo che la relazione *essere conseguenza di* sia transitiva, ossia che le conseguenze delle conseguenze di un insieme di enunciati Γ siano, semplicemente, conseguenze di Γ.

Questo modo di procedere può essere esemplificato con l'uso, in matematica, di porre degli assiomi e di dimostrare i teoremi ricorrendo a dei lemmi intermedi, ossia a delle conseguenze intermedie da cui, poi, si riesce a dimostrare un certo teorema. Un altro esempio può essere ricavato dalle osservazioni di Descartes che sono state riportate nell'ultimo capitolo della prima parte di questo lavoro. Descartes, come si ricorderà, parlava della deduzione come mezzo per ampliare la nostra consocenze facendoci passare da certe premesse a certe conclusioni che seguono da tali premesse, ma che non sono evidenti, altrimenti sarebbero colte con l'intuizione.

Ora, se la logica deve servire anche come strumento per ampliare la nostra conoscenza, come diceva Descartes (e non è stato il solo, ovviamente), deve certamente valere una certa forma di transitività. In caso contrario saremmo legittimati ad inferire logicamente solo ciò segue in modo immediato dalle nostre premesse e ci sfuggirebbero dei legami di conseguenza logica più complessi, ma non per questo meno veri, tra gli enunciati.

È stato, tuttavia, sostenuto che la transitività, nella sua forma generale che abbiamo considerato nella premessa a questo capitolo, richieda più di quanto è necessario per non privare la logica del suo valore epistemico e che, in più, tale forma generale comporti problemi, come l'ammettere che da una contraddizione segue ogni enunciato o che un enunciato valido sia conseguenza di ogni enunciato,

Tennant [1984], riprendendo alcune osservazioni di Smiley [1958-'59] propone un sistema logico, denominato *logica perfezionista* (cfr. Burgess [2009], p. 103) in cui la transitività non vale nella sua forma generale. L'obiettivo di Tennant è quello di mostrare come sia possibile restringere la proprietà della transitività quel tanto che basta per evitare di considerare valide certe forme argomentative che ritiene problematiche (come, appunto che ogni enunciato segua da premesse contraddittorie e che una legge logica sia conseguenza di qualsiasi insieme di enunciati) e, al contempo, non privare la logica della possibilità di dichiare validi argomenti in cui le conclusioni seguono in modo non immediato dalle premesse.

La proposta di Tennant può essere riassunta nel modo seguente. Per semplicità, consideriamo gli enunciati di un linguaggio enunciativo e sia $v : Fm \to 2$ una valutazione, definita nel modo. Diciamo che un insieme Δ di enunciati è soddisfacibile se e solo se esiste almeno una valutazione che rende veri tutti i suoi enunciati. Diciamo, poi, che una formula ϕ è refutabile se e solo se vi è almeno una valutazione v tale che $v(\phi) = 0$. Come sopra, sia $\sigma : \mathbf{Fm} \to \mathbf{Fm}$ una sostituzione sull'algebra delle formule $\mathbf{Fm}$. Consideriamo, ora, con una serie di definizioni. Per ogni $\Gamma, \Delta \subseteq Fm$ e per ogni $\phi \in Fm$

1. ϕ segue classicamente da Δ ($\Delta \vdash \phi$) sse, se $v(\Delta) \subseteq \{1\}$, allora $v(\phi) = 1$

2. ϕ segue perfettamente da Δ ($\Delta \vdash_p \phi$) sse $\Gamma \vdash \phi$, Γ è soddisfacibile e ϕ è refutabile

3. ϕ segue perfettibilmente da Δ ($\Delta \vdash_{pp} \phi$) sse, per almeno una sostituzione σ, per almeno un $\Delta \subseteq Fm$ e per almeno un $\phi \in Fm$, $\Delta = (\sigma\Delta')$ e $\phi = \sigma(\phi')$

La prima definizione non è altro che quella usuale di validità classica e soddisfa la proprietà della transitività nella sua forma generale che, permette di ritenere validi argomenti che Tennant non vorrebbe considerare tali, come $\{\phi, \neg\phi\} \vdash \psi$ e $\psi \vdash \phi \vee \neg\phi$. La seconda definizione ci dice che un argomento è perfettamente valido esattamente quando è valido dal punto di vista classico e, in più, non deve darsi il caso che l'insieme delle premesse sia inconsistente o che

ϕ sia una tautologia. La terza definizione ci dice che un argomento è perfettibilmente valido esattamente quando può essere ottenuto per sostituzione da una argomento che è perfettamente valido (quindi tutti gli argomenti perfettamente validi sono anche perfettibilmente validi). Ora, la logica perfezionista è un sistema $\langle \mathbf{Fm}, \vdash_{pp} \rangle$ e possiamo vedere subito che, in effetti, non si dichiarano validi gli argomenti che Tennant ha considerato problematici. Un argomento come $\{\phi, \neg\phi\} \vdash_{pp} \psi$, per esempio non è valido nella logica perfezionista. Possiamo osservare, infatti, che non vale $\{\phi, \neg\phi\} \vdash_{p} \psi$ in quanto $\{\phi, \neg\phi\}$ non è soddisfacibile e, inoltre, non vi è alcun argomento perfettamente valido da cui sia possibile ricavare, per sostituzione, $\{\phi, \neg\phi\} \vdash_{pp} \psi$.

Possiamo usare questo risultato per mostrare che non vale la proprietà della transitività per la relazione $\vdash_{pp}$ di seguire in modo perfettibile. I seguenti argomenti, infatti, sono perfettibilmente validi:

- $\{\phi, \neg\phi\} \vdash_{pp} \phi$ (si ricava, per sostituzione, dall'argomento $\langle \{\phi \wedge \psi\}, \phi \rangle$, che è perfettamente valido)
- $\{\phi\} \vdash_{pp} \phi \vee \psi$ ($\langle \{\phi\}, \phi \vee \psi \rangle$ è perfettamente valido)
- $\{\phi \vee \psi, \neg\phi\} \vdash_{pp} \psi$ ($\langle \{\phi \vee \psi, \neg\phi\}, \psi \rangle$ è perfettamente valido)

ma, come abbiamo già detto, non vale $\{\phi, \neg\phi\} \vdash_{pp} \psi$.

8.6 STRUTTURALITÀ

8.6.1 FORMA LOGICA

La proprietà della strutturalità, come si è detto sopra, intende fornire, per i linguaggi enunciativi, una caratterizzazione matematicamente utilizzabile dell'idea secondo cui la logica è una diciplina formale, ossia che un argomento è logicamente valido solo se lo è unicamente sulla base della sua forma logica e, quindi, anche tutti gli altri argomenti che condividono la medesima forma logica sono logicamente validi.

Ma che cos'è la forma logica di un argomento? Ora, il mio intento in questo paragrfo non è quello di dare una risposta compiuta a questa domanda, che richiederebbe una trattazione ben più ampia. Intendo solo indicare come si è cercato di renderla in modo tecnico, su quali presupposti si fondano tali soluzioni e in quale modo caratterizzano la nozione di formalità.

Finora, per considerare le proprietà della riflessività, della monotonia e della transitività, non è stato necessario fare alcuna assunzione sugli enunciati tra cui è definita la relazione di conseguenza. La proprietà della strutturalità, invece, come abbiamo già accennato, richiede che si consideri una struttura degli enunciati. Tale struttura è ciò che si intende con forma logica degli enunciati di un dato linguaggio formale.

Si deve, quindi, essere in grado di indicare una struttura degli enunciati tra cui intendiamo definire la relazione di conseguenza logica, ossia formale. Con la nozioie tecnica di sostituzione come endomorfismo, che presuppone il fatto che si sia definita l'algebra delle formule, si intende definire un'operazione che, dato un argomento, generi altri argomenti che hanno la medesima forma logica del primo. in questo paragrafo cercherò di spiegare alcune di queste nozioni, ma occorre far notare che alcune di esse, come la nozine di algebra delle formule, pur importanti in questo contesto, saranno trattate più a fondo nel prossimo capitolo. A partire dal prossimo capitolo, infatti, la trattazione di questi problemi sarà decisamente tecnica e formale. Per ora, tuttavia, non intendo introdurre tutte le definizioni e l'apparato formale che sarebbe necessario per trattare più a fondo queste questioni, perchùè il mio obiettivo, in questo capitolo, è solo quello di problematizzare la definizione di conseguenza logica come relazione di chiusura strutturale, da cui, invece, prenderò le mosse nel prossimo capitolo per mostrare alcune questioni che la riguardano senza, però, metterla ancora a confronto con caratterizzazioni alternative.

8.6.2 IDEE DI FORMALITÀ

Ciò che si intende indicare con la proprietà della strutturalità, dunque, è l'idea tradizionale secondo cui la logica valuta gli argomenti in modo indipendente dal loro contenuto. La determinazione di un nuovo argomento con la stessa forma logica di uno dato in precedenza deve configurarsi, dunque, come una possibile variazione del suo contenuto che rispetta la struttura del primo argomento.

Con ciò, ci si può riferire non ad una sola idea, ma ad almeno due idee diverse (e, in aggiunta, alla loro combinazione):

1. gli argomenti logicamente validi *prescindono dai particolari aspetti dei singoli oggetti considerati*[1], idea che è espressa soprattutto da una caratterizzazione della nozione di conseguenza logica come quella tarskiana;

2. gli argomenti logicamente validi costituiscono delle *leggi del pensiero* che riguardano ogni attività concettuale, a prescindere dall'oggetto di studio, come era stato detto, per esempio, da Kant.

La formalità della logica, in altre parole, potrebbe consistere nel fatto che, date, come abbiammo visto parlando di Tarski ed Etchemendy, certe assunzioni su cosa si intende per caso possibile, nulla può darsi senza rendere validi tali argomenti. Nel secondo significato indicato sopra, invece, la formalità della logica consiste nel fatto che gli argomenti logicamente validi sono validi in modo incondizionato, a prescindere dal particolare oggetto del ragionamento.

In entrambi i casi, alla fine, la logica è caratterizzata come la disciplina più formale di tutte, ossia quella le cui leggi sono sempre valide e sono sempre presupposte. La logica, per questo suo aspetto, dunque, sarebbe la disciplina presupposta in ogni altra disciplina e ammesso in ogni tipo di indagine, valevole in

[1] Per quanto, per dichiarare che un argomento è logicamente valido, non si prescinda dagli aspetti degli oggetti considerati in quanto tali e in generale, come ho detto trattando la questione del punto di vista alla base della caratterizzazione della nozione di conseguenza logica in termini di preservazione della verità dalle premesse alla conclusione e di formalità.

ogni situazioni e in ogni ragionamento. Anzi le sue stesse leggi sono considerate la condizione necessaria del darsi di ogni situazione e di ogni ragionamento.

Come si ricorderà, la nozione di formalità è stata caratterizzata in modi diversi nei vari pensatori (Aristotele, Kant, Bolzano,Frege, gli assiomatici, Tarski, ...) che abbiamo analizzato nell prima parte del lavoro. Non occorre ripetere, qui, ciò che è già stato detto nella prima, ma ritengo utile richiamare alcune riflessioni sulla nozione di formalità della logica che ci permetteranno i comprendere meglio il senso di alcune questioni che si pongono quando si cerca di determinare la nozione di forma logica dal punto di vista dei sistemi logici contemporanei.

Il carattere dela formalità della logica è stato centrale fin dal primo apparire della riflessione logica, ossia fin dall'opera di Aristotele. Lo stagirita, infatti, ha presentato la sua teoria del sillogismo facendo riferimento a schemi sillogistici e non a sillogismi concreti. Al posto dei termini determinati, egli pone delle lettere dell'alfabeto greco, che tratta come variabili che stanno per termini determinati, ma arbitrari. in ta modo egli può indicare quali siano in generale i sillogismi validi. Egli indica la struttura che, se riempita in modo opportuno con dei termini particolari, dà luogo ad un sillogismo valido. Egli stesso mostra come riempire una struttura di questo tipo, ossia rimpiazzando, in modo uniforme, tutte le lettere che funfono da variabili con certi termini. In questo modo, procede anche per mostrare, come abbiamo visto, che una certa forma sillogistica non è valida, in quanto fornisce due triplette di termini che soddisfano la conclusione, ma conducono a conclusioni diverse.

Aristotele, in altre parole, aveva già chiaramente riconocsiuto che la validità di un sillogismo è del tutto indipendente dai particolari termini che compaiono nelle premesse o nella conclusione, ossia, potremmo dire, con un termine posteriore, la materia del sillogismo. L'unica cosa che conta è, dunque, per usare un0altro termine che sarà usato in questo senso solo dopo Aristotele, la forma del sillogismo, ossia i caratteri generali delle relazioni che le copule instaurano tra i termini. La forma logica di un sillogismo, dunque, è il *modo in cui si rapportano tra loro gli elementi che compongono gli enunciati di un sillogismo.*

Abbiamo visto, quanto spazio e quanta importanza Kant dedica alla nozione di formalità, che assume un ruolo del tutto centrale. Si tratta di una delle caratteristiche che più sottolinea delle leggi logiche. In quanto la logica si occupa delle leggi necessarie del pensiero, essa non si occupa di alcun oggetto determinato. Kant afferma esplicitamente che, per il suo carattere formale, le leggi della logica valgono in ogni ambito della realtà e, quindi, sono presupposte da ogni disciplina scientifica. Ogni indagine si basa sulla logica in quanto senza il rispetto delle sue regole non è possibile che si dia alcun pensiero.

Dopo Kant, abbiamo visto come la caratteristica della formalità è stata usata da Bolzano proprio per definire la relazione di conseguenza logica e per differenziarla dalla noziione di deducibilità, che è più ampia. Abbiamo notato, a suo tempo, come in Bolzano diventi centrale il collegamento tra carattere formale della logica e variazione delle parti non logiche di una proposizione in sé, idea che si avvicina a quella che, in modo indipendente sebbene circa un secolo dopo, proporrà anche Tarski, pur in un altro contesto (facendo riferimento a nozioni, come quelle di enunciato, soddisfazione, ... che non comparivano in Bolzano).

Com Bolzano, abbiamo cominciato a parlare del problema di come si individua la forma logica di una proposizione in sé (o, se ci si riferisce alle ricerche logiche contemporanee, di un enunciato). Anche supposto di aver risolto la questione di separare con precisione le rappresentazioni logiche dalle rappresentazioni non logiche (in termini attuali, si direbbe i simboli logici dai simboli non logici), ogni proposizione in sé può essere considerata l'esemplificazione di diverse forme logiche. Supponiamo, per comodità, di muoverci nell'orizzonte della ricerca logica attuale e parliamo di enunciati invece che di proposizioni in sé e di simboli di un linguaggio formale invece che rappresentazioni in sé. Un enunciato espresso in un linguaggio del primo ordine come $\forall xPx \wedge \exists yQy$, può essere l'esemplificazione di uno schema di enunciato come $A \wedge B$, dove A e B sono metavariabili per enunciati, o di uno schema di enunciato come $\forall xXx \wedge \exists yYy$, dove X e Y sono metavariabili per simboli di predicato. Come abbiamo visto nel capitolo su Bolzano e come riprenderemo fra poco, può darsi che un enunciato risulti una verità logica se analizzato come esemplificazione di una certa forma linguistica e non risulti tale se analizzato come esemplificazione di un'altra forma linguistica.

Abbiamo già visto come era possibile porre queste questioni anche in Bolzano, sebbene egli non ne abbia fatto menzione. Essenzialmente le medesime questioni, anche per quanto riguarda la possibilità di individuare, sempre e in modo univoco, una forma logica che analizza il più possibile, nei limiti del linguaggio adottato, della forma logica di un enunciato, si pongono anche quando si muove dal punto di vista di un sistema logico espresso nel modo oggi abituale. A queste questioni, per la loro importanza, occorre dedicare alcune riflessioni, più per evidenziare. Mi limiterò, comunque, a mostrare il senso delle questioni che si pongono e il signficato di certi modi di procedere e non intendo fornire uno studio completo di questo tipo di problemi.

8.6.3 DIVERSI LIVELLI DI ANALISI LOGICA

Trattando di Bolzano, avevo già posto attenzione al fatto che individuare la forma logica di un enunciato è una questione che presenta diversi aspetti delicati e problematici. Cominciamo con qualche esempio, per evidenziare i vari modi possibili con si può individuare la forma logica di un enunciato e alcune delle loro diverse conseguenze. Per esporre le forme di certi enunciati, in quanto segue, userò le lettere minuscole dell'alfabeto greco come variabili per formule per indicare i posti rimpiazzabili da precise formule del linguaggio.

Supponiamo che Fm sia l'insieme delle formule di un linguaggio enunciativo e indichiamo con $\vdash$ la relazione di conseguenza logica classica su Fm. Ora, possiamo notare, in primo luogo, che ogni enunciato non atomico può essere considerato l'esemplificazione di più di una forma logica. Questa circostanza, fa sì che a seconda di come conduciamo l'analisi degli enunciati, è possibile attribuire in modo diverso la validità logica o la non validità logica agli argomenti. Consideriamo, per esempio, l'argomento seguente

$$(a)\ p \wedge (p \rightarrow q) \vdash q.$$

Si tratta chiaramente di un argomento valido dal punto di vista classico. Esso può essere considerato, tuttavia, l'esemplificazione di una forma argomentativa non valida, come mostro subito sotto. Una possibile forma logica di cui (a) è un'esemplificazione, infatti, è

$$(a')\ \alpha \vdash \beta$$

dove α e β, come detto sopra, sono metavariabili. Diciamo che (a) è un'esemplificazione di (a'), perché possiamo ottenere (a) da (a'), ponendo $\alpha = p \wedge (p \rightarrow q)$ e $\beta = q$. Diciamo anche che (a') è una forma argomentativa di cui l'argomento (a) è un'esemplificazione possibile. Diciamo, poi, che una forma argomentativa è logicamente valida se e solo se tutti gli argomenti che la esemplificano sono logicamente validi.

Ora, è chiaro che (a) non è una forma argomentativa logicamente valida, infatti possiamo facilmente indicare una sua esemplificazione $p \vdash q$ che non è un argomento valido.

Ciò che è interessante è che possiamo considerare (a) come l'esemplificazione anche di un'altra forma logica:

$$(a'')\ \alpha \wedge \beta \vdash \gamma.$$

Anche questa forma logica, chiaramente, non è valida.

Sappiamo, tuttavia, che (a) è un argomento logicamente valido, quindi dobbiamo notare che non è sufficiente mostrare una possibile forma logica invalida di cui un dato argomento è un'esemplificazione per dire che tale argomento non è valido. È chiaro, però, che, affinché un argomento sia logicamente valido, è sufficiente che vi sia almeno una forma argomentativa logicamente valida di cui tale argomento rappresenta un'esemplificazione.

Per approfondire questo aspetto del problema, notiamo che (a'') mostra più occorrenze di simboli logici rispetto ad (a'). È intuitivo affermare, perciò, che (a'') è un'analisi della forma logica di (a) più profonda rispetto ad (a'), perché mostra più dettagli della struttura che vige tra gli enunciati in (a). La premessa di (a), infatti è rappresentata in (a') semplicemente indicando che è un enunciato, ma non sappiamo di che tipo di enunciato si tratti (congiunzione, disgiunzione, ...). Diversamente, invece, (a'') ci informa anche che tale enunciato è una congiunzione di altri due enunciati.

Chiamo forma logica *completamente analizzata* di un argomento la forma logica più fine di tutte, ossia quella che mostra tutte le occorrenze dei simboli logici e mostra tutte le differenze che vi sono tra i vari simboli non logici che compaiono in tale argomento e le relazioni che vi sono tra essi e i simboli logici. Si ricordi che stiamo considerando, per ora, solo enunciati di un linguaggio formale, in cui la distinzione tra simboli logici e non logici è già stata effettuata. Nel caso dell'argomento (a), per esempio, la forma logica completamente analizzata sarebbe

$$(a''')\ \alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta) \vdash \beta,$$

che, infatti, comprende tutti i suoi simboli logici ($\wedge$ e $\rightarrow$) e indica con una metavariabile differente le formule atomiche differenti e con la medesima metavariabile le medesime formule atomiche. Per poter dichiarare, in ogni caso, che un argomento è valido o non valido, occorre aver controllato la sua forma logica completamente analizzata. Se, in altre parole, per controllare se un argomento è logicamente valido, lo consideriamo come un'esemplificazione di una forma logica che non è la sua forma logica completamente analizzata e troviamo che tale forma è logicamente valida, allora possiamo considerare tale argomento logicamente valido, ma se troviamo che tale forma non è logicamente valida, non siamo legittimati a considerare tale argomento logicamente valido. In questo secondo caso, infatti, potrebbe darsi che, considerando una forma logica più fine, ossia che rivela più struttura dell'argomento, si riconosca che è logicamente valido. Come già osservavamo a proposito di Bolzano, se siamo sicuri che, per ogni argomento, si può determinare, sempre e in modo univoco, la sua forma logica completamente analizzata, allora, in linea di principio, possiamo sempre definire se quell'argomento è logicamente valido o se non lo è. Questa assicurazione, nel caso dei linguaggi formali definiti per ricorsione da un insieme di formule atomiche e di simboli logici, è data da ciò che di solito si chiama Lemma di decomposizione unica e che assicura, appunto, che vi è un unico modo di scomporre una formula nei suoi componenti di base (ossia che l'albero di costruzione di una formula è unico).

Indicare diverse forme logiche

A questo punto, si può sollevare anche il problema se il sistema sintattico sia adeguato a modellare certi argomenti del linguaggio naturale o di qualche scienza particolare (come la matematica). È chiaro che il linguaggio enunciativo, per esempio, può essere adeguato per gli argomenti la cui validità dipende solo dalle connessioni tra enunciati, ma non per argomenti che richiedono di considerare, per esempio, anche termini e quantificatori. Si tratta di un problema non banale, su cui mi limito solo a svolgere qualche riflessione.

Supponiamo di considerare un argomento, formulato nel linguaggio naturale, e di ritenerlo intuitivamente valido. Consideriamo, per esempio, il seguente sillogismo, che indichiamo con (s)

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Tutti i lacedemoni sono uomini}\\ \text{Tutti gli uomini sono mammiferi}\end{array}}{\text{Tutti i lacedemoni sono mammiferi}}.$$

Se formalizziamo tale argomento nel linguaggio enunciativo otteniamo

$$p, q \vdash r$$

dove p, q e r sono formule atomiche. Chiaramente, questa non è una forma argomentativa valida. Il problema è che il linguaggio enunciativo non è in grado di rivelare i nessi logici che fanno sì che consideriamo (s) un argomento valido perché tali nessi non vigono tra enunciati, ma tra termini e copule. Se ricorriamo al linguaggio della logica dei predicati del primo ordine, possiamo formalizzare (s) così

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x(Lx \to Ux)\\ \forall x(Ux \to Mx)\end{array}}{\forall x(Lx \to Mx)}$$

dove L, U e M stanno, rispettivamente, per 'essere un lacedemone', 'essere un uomo' e 'essere un mammifero'.

Anche in questo caso, è intuitivo dire che la seconda formalizzazione rivela più struttura logica della prima, ossia è una forma logica più fine tra quelle di cui (s) è un'esemplificazione. Il problema, tuttavia, è capire quale sia il livello di analisi formale adeguato per valutare la validità logica di un argomento del linguaggio naturale e di valutare se disponiamo del linguaggio che permetta di rappresentare tale livello di analisi.

Consideriamo, per esempio, il seguente argomento, che indichiamo con (m):

$$\frac{\text{Santippe è moglie di Socrate}}{\text{Socrate è marito di Santippe}}.$$

Una possibile formalizzazione di (m) nella logica dei predicati del primo ordine è

$$\frac{Mo(a,b)}{Ma(b,a)}$$

dove a sta per Santippe, b per Socrate, Mo per la relazione 'essere moglie di' e Ma per la relazione 'essere marito di'.

Questa formalizzazione, come si nota facilmente, ha esemplificazioni che sono argomenti non logicamente validi. Tuttavia, possiamo fornirne una formalizzazione alternativa di (m). Consideriamo, infatti, un calcolo delle relazioni. Sia R una relazione binaria qualsiasi definita sull'insieme M. Indichiamo con R^{-1} la relazione conversa di R , definita in modo tale che, per ogni $x, y \in M$

$$R^{-1}(x,y) \text{ sse } R(y,x).$$

Possiamo, allora, proporre la seguente formalizzazione di (m)

$$\frac{Mo(a,b)}{Mo^{-1}(b,a)}.$$

Ebbene, nessuna esemplificazione di questo argomento ha premesse vere e conclusione falsa, quindi possiamo dire che ogni sua esemplificazione è valida. Divesamente dal linguaggio predicativo, il linguaggio del calcolo delle relazioni è in grado di descrivere il comportamento di quei predicati, come, appunto, 'essere moglie di' e 'essere marito di', la cui interpretazione non è indipendente l'una dall'altra.

Naturalmente, qui si potrebbe porre la questione (che, però, va oltre gli scopi di questo paragrafo) se l'argomento (m) è valido per motivi formali o se occorre tener conto del contenuto delle parole impiegate. In altri termini, ci si può domandare se (m) sia formalmente valido o materialmente valido. Il linguaggio del calcolo delle relazioni è pur sempre un linguaggio formale: Mo non è una predicato determinato e può ricevere qualsiasi interpretazione. Mo e Mo^{-1} sono due predicati diversi, ma l'interpretazione dell'uno dipende da quella dell'altro, in modo non dissimile da come ϕ e $\neg\phi$ sono due enunciati diversi, ma l'interpretazione dell'uno dipende da quella dell'altro. $^{-1}$ è un simbolo che si applica a predicati e potrebbe essere considerato logico perché si applica ad essi indipendentemente dal loro contenuto.

Molti altri argomenti, che fanno riferimento a determinate proprietà delle relazioni sono esprimibili nel calcolo della relazioni (per mezzo di concetti quali inclusione di relazioni, intersezione di relazioni, unione di relazioni, complemento di una relazione, ...), ma non nella logica predicativa del primo ordine se ci si limitano a rappresentare tali relazioni con un simbolo di relazione qualunque. Tali argomenti sono esrpimibili nella logica del primo ordine se li si considera come *entimemi* e li si completa in modo opportuno con altre premesse che esplicitino i rapporti tra tali relazioni (si considerino, per esempio, gli argomenti validi in virtù della transitività della relazione 'essere maggiore di').

Diversi livelli di analisi logica nel linguaggio dei predicati del primo ordine

Consideriamo, ora, un linguaggio dei predicati del primo ordine per evidenziare alcuni dei diversi possibili livelli di analisi logica degli enunciati che si possono determinare entro tale linguaggio. Assumiamo che l'insieme dei simboli logici sia $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \forall, \exists, \doteq\}$ e che tale linguaggio sia definito nel modo solito. Non occorre fornire, ora, particolari dettagli tecnici, in quanto le riflessioni che intendo proporre sono comprensibili senza fare riferimento ad una particolare presentazione tecnica.

Sia Fm l'insieme delle formule. Fissata una nozione di soddisfazione, è possibile definire la relazione di conseguenza logica. Scriviamo $\Gamma \models \phi$ per indicare che l'enunciato ϕ segue logicamente dall'insieme di enunciati in Γ. In tal caso, per distinguerlo da altri casi che considereremo fra poco, diciamo anche che $\Gamma \models \phi$ è un argomento *predicativamente* valido.

Isoliamo, ora, in Fm, l'insieme delle formule che o sono atomiche o iniziano con il simbolo $\forall$. Chiamiamo *formula prime atomiche* le formule con queste caratteristiche e indichiamo con $P \subseteq Fm$ l'insieme di tali formule. Definiamo, poi, l'insieme $F(P) \subseteq Fm$ delle formule prime per mezzo delle condizioni seguenti:

- $P \subseteq F(P)$
- se $\phi, \psi \in F(P)$, allora $\neg\phi, \phi \wedge \psi, \phi \vee \psi, \phi \rightarrow \psi \in F(P)$.

Chiamiamo $F(P)$ il frammento enunciativo di Fm.

Definiamo, ora, una valutazione $v : P \rightarrow 2$, che si estende nel solito modo a tutte le formule prime. Diciamo che v soddisfa una formula prima ϕ se e solo se $v(\phi) = 1$. Se $\Gamma \subseteq F(P)$ e $\phi \in F(P)$, allora diciamo che ϕ è *conseguenza tautologica* di Γ se e solo se ogni valutazione che soddisfa tutte le formule in Γ soddisfa anche ϕ (in simboli $\Gamma \vDash_0 \phi$).

É chiaro che se un argomento è tautologicamente valido, allora è anche predicativamente valido. L'inverso, poi, non è vero, ossia vi sono argomenti predicativamente validi e che contengono solo formule prime che non sono tautologivamente validi, come nell'esempio seguente: abbiamo che $\forall x Px \vDash Pa$, ma non si dà $\forall x Px \vDash_0 Pa$.

Ciò che ritroviamo in questi casi, non è altro che un ulteriore esemplificazione delle osservazioni che abbiamo svolto sopra. Nel caso della conseguenza tautologica, benché le formule siano scritte nel linguaggio predicativo, di fatto consideriamo solo i nessi proposizionali che si instaurano tra le proposizioni prime che non sono analizzate.

Il linguaggio predicativo che stiamo trattando, dunque, ci permette di studiare la relazione di conseguenza logica secondo diversi livelli di profondità. Consideriamo il sillogismo (s), esposto sopra. Il nostro linguaggio rende possibile analizzare (s) sia dal punto di vista proposizionale sia dal punto di vista predicativo. Possiamo, quindi, notare che (s) non è valido dal punto di vista enunciativo (non è, cioè, tautologicamente valido), ma è valido dal punto di vista predicativo (è predicativamente valido). In questo modo, possiamo comprendere ed evidenziare il fatto che non sono i rapporti tra enunciati la ragione della validità di (s).

Chiamiamo forma logica enunciativa la forma logica evidenziata da un'analisi che metta in luce solo i nessi tra enunciati (ossia che considera atomiche tutte le formule prime) e chiamiamo forma logica predicativa la forma logica che mette in luce anche i nessi tra individui e predicati. La ragione della validità logica di (s), dunque, non è evidenziata nella forma logica enunciativa, ma in quella predicativa perché la validità di (s) è fondata sui rapporti tra le estensioni dei predicati e non sui rapporti enunciativi tra le formule prime.

Possiamo dire che la forma logica enunciativa è più superficiale di quella predicativa in quanto ogni argomento tautologicamente valido è anche predicativamente valido, ma non viceversa. Chiaramente, quindi, ogni tautologia è anche una legge logica, ma non ogni legge logica è una tautologia. Consideriamo, infatti, l'enunciato $\forall x Px \rightarrow Pa$ che, come si nota facilmente, è valido dal punto di vista predicativo, ma non da quello enunciativo dove è considerato un'esemplificazione della forma $\alpha \rightarrow \beta$ che ha esemplificazioni non valide. Queste considerazioni forniscono un esempio del fatto, notato sopra in generale, che se un argomento è valido ad una certo livello di analisi è valido anche quando è analizzato in modo più profondo.

La distinzione tra argomenti predicativamente validi ed argomenti tautologicamente validi permette anche di fornire un esempio del fatto che, per dichiarare un argomento logicamente valido (ossia tale che la conclusione è vera se sono vere le premesse), basta indicare una forma logica valida, a qualsiasi livello di analisi.

Capitolo 9

CONSEGUENZA LOGICA PER SISTEMI ENUNCIATIVI

9.1 PREMESSA

Dopo aver accennato alle trattazioni formali delle nozioni di conseguenza logica e di sistema logico, in questo capitolo ne forniremo un'analisi più compiutamente formale, cercando di esplicitare il senso dei vari passaggi tecnici e delle possibili alternative. Mi concentrerò, in particolare, sui sistemi logici enunciativi, a parte alcune considerazioni, alla fine di questo capitolo, sui sistemi di logica dei predicati del primo con identità.

9.2 LINGUAGGI ENUNCIATIVI

9.2.1 Vocabolario, variabili enunciative, regole grammaticali

Un linguaggio enunciativo è determinato da tre elementi: un insieme di variabili enunciative, un insieme di connettivi di determinata arietà e un insieme di regole grammaticali che permettano di determinare l'insieme delle formule combinando le variabili enunciativi e i connettivi tra loro.

Assumiamo che l'insieme delle variabili enunciative sia della forma $P = \{p_i : i \in \mu\}$ dove μ è un ordinale. È possibile avere tanto insiemi finiti di variabili enunciative quanto insiemi infiniti di qualsiasi cardinalità. Se non si specifica nulla di particolare, comunque, sottinderò che $\mu = \omega$.

L'insieme dei connettivi è denotato da C. Assumiamo che sia un insieme non vuoto e diciamo che, con una funzione $r : C \to \omega$, costituisce il vocabolario logico, o, più semplicemente, vocabolario. Un vocabolario, dunque, è una coppia ordinata $\mathbf{C} = \langle C, r \rangle$. La funzione r assegna un numero naturale ad ogni connettivo e tale numero è la sua arietà. Solitamente, nei sistemi logici concretamente realizzati, l'arietà di un connettivo c è $r(c) \leq 2$, ma dal punto di vista astratto da cui ci poniamo ora, ciò non importa. Indichiamo con ${}_nC$ l'insieme di tutti i connettivi la cui arietà è n.

L'insieme Fm delle formule è determinato specificando un insieme G di regole grammaticali, o regole di formazione, che fanno sì che, tra tutte le parole in $(P \cup C)^*$, sia possibile determinare quelle che sono corrette, ossia quelle che sono utilizzabili nel sistema logico. In generale, le regole in G sono sempre le stesse:

- $(G1)$ $\quad P \subseteq Fm$
- $(G2)$ per ogni $n \in \omega$, se $\phi_1, ..., \phi_n \in Fm$ e $c \in nCon$, allora $c\phi_1...\phi_n \in Fm$
- $(G3)$ nulla è una formula se non ciò che è indicato da $(G1)$ e $(G2)$.

$(G2)$ implica che eventuali connettivi 0-ari, detti anche costanti, sono formule. Chiamerò gli elementi di Fm, indifferentemente, formule o enunciati.

Sulla base di quanto detto, dunque, un linguaggio enunciativo può essere indicato come una tripla $\mathbf{L} = \langle \mathbf{C}, P, G \rangle$, in cui gli insiemi Con e P non hanno elementi in comune. L'insieme delle formule corrispondente può essere indicato con $Fm_{\mathbf{L}}$. In genere, non ci sarà bisogno di essere così formali e, se non ci sono motivi particolari per prestare attenzione al linguaggio, indicherò un insieme delle formule semplicemente con Fm. Le variabili saranno denotate con le lettere minuscole $p, q, r, p_1, p_2, ..., p_n, ...$, le formule con le lettere greche minuscole maiuscole $\phi, \psi, \xi, \phi_1, ..., \phi_n, ...$ e gli insiemi di formule con le lettere greche maiuscole $\Gamma, \Delta, \Sigma, \Theta, ...$ Quando parlerò di linguaggio, intenderò sempre riferirmi ad un linguaggio enunciativo, salvo esplicite indicazioni diverse. Per rendere più agevole la lettura, poi, scriverò le formule, per esempio, così $\phi \wedge \psi$, piuttosto che così $\wedge\phi\psi$ e userò le parentesi nel modo ovvio.

9.2.2 Algebra delle formule

Possiamo, allora, considerare $\mathbf{C}$ un tipo algebrico, una classe $\Bbbk$ di algebre di questo tipo. Definiamo l'algebra $\mathbf{Fm} = \langle Fm, \mathcal{F} \rangle$, dove

$\mathcal{F} = \{f_c : c \in C\}$ è una famiglia di funzioni $f_c : Fm^{n_c} \to Fm$, tali che, per ogni $c \in C$, l'arietà di $n_c = r(c)$ e, per ogni $\phi_1, ..., \phi_n \in Fm$, $f_c(\phi_1, ..., \phi_n) = c\phi_1...\phi_n$. È facile verificare che tale definizione traduce in operazioni su Fm ciò che è prescritto dalle regole di formazione e, per $(G3)$, l'insieme Fm delle formule è liberamente generato da P per mezzo di $\mathcal{F}$. Da ciò segue che, per ogni $\mathbf{A} \in \Bbbk$, ogni funzione $v : P \to A$ può essere univocamente estesa ad un omomorfismo $h_v : \mathbf{Fm} \to \mathbf{A}$ e, all'inverso, ogni omomorfismo $h : \mathbf{Fm} \to \mathbf{A}$ è determinato dalla sua restrizione $h_{\restriction P}$. $\mathbf{Fm}$ è, allora, l'algebra *assolutamente libera* sulla classe $\Bbbk$ con P come insieme generatore.

Ogni linguaggio enunciativo $\mathbf{L}$ determina una classe di algebre di tipo $\mathbf{C}$ un'algebra $\mathbf{Fm_L} = \langle Fm_{\mathbf{L}}, \mathcal{F}\rangle$ che è assolutamente libera sulla classe delle algebre simili e il cui insieme di generatori è l'insieme P delle variabili enunciative. $\mathbf{Fm_L}$ è detta l'algebra delle formule.

9.2.3 Variabili, sottoformule, espansioni

Per ogni $A \in Fm$, indichiamo con $var(A)$ l'insieme delle variabili che occorrono in A. $var : Fm \to P$ è definito ricorsivamente:

- $var(p) = p$ per ogni $p \in P$
- $var(c\phi_1...\phi_n) = var(\phi_1) \cup ... \cup var(\phi_n)$ per ogni $\phi_1, ..., \phi_n \in Fm$.

Si può estendere questa nozioni per arbitrari sottoinsiemi Γ di Fm: $var(\Gamma) = \bigcup\{var(\phi) : \phi \in \Gamma\}$. Chiaramente $var(Fm) = P$ e, dati due linguaggi $\mathbf{L}$ e $\mathbf{L}', Fm_{\mathbf{L}} \subseteq Fm_{\mathbf{L}'}$ sse $var(Fm_{\mathbf{L}}) \subseteq var(Fm_{\mathbf{L}'})$. Scriverò $A(p_1, ..., p_n)$ quando $var(A) \subseteq \{p_1, ..., p_n\}$.

Anche la funzione $sbf : Fm \to \wp(Fm)$, che assegna ad ogni formula l'insieme delle sottoformule di cui è composta, è definita per ricorsione:

- $sbf(p) = \{p\}$ per ogni $p \in P$
- $sbf(c\phi_1...\phi_n) = \{c\phi_1...\phi_n\} \cup sbf(\phi_1) \cup ... \cup sbf(\phi_n)$ per ogni $\phi_1, ..., \phi_n \in Fm$.

Diciamo che un enunciato ϕ è una sottoformula di un enunciato ψ sse $A \in sbf(\psi)$. Chiaramente, se ϕ è una sottoformula di ψ, che è una sottoformula di ξ, allora ϕ è una sottoformula di ξ.

Dati due vocabolari $\mathbf{C} = \langle C, r\rangle$ e $\mathbf{C}' = \langle C', r'\rangle$, diciamo che $\mathbf{C}'$ è un'*espansione* di $\mathbf{C}$ (o che $\mathbf{C}$ è un *frammento* di $\mathbf{C}'$) sse $C \subseteq C'$ e $r = r'_{\restriction C}$, in simboli $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{C}'$.

Se $\mathbf{L} = \langle \mathbf{C}, P, G\rangle$, $\mathbf{L}' = \langle \mathbf{C}', P', G'\rangle$, $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{C}'$ e $P \subseteq P'$, diciamo che $\mathbf{L}'$ è un'espasione di $\mathbf{L}$ (o $\mathbf{L}$ è un frammento di $\mathbf{L}'$, in simboli $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{L}'$). Diciamo che $\mathbf{L}'$ è una $\mathbf{C}$-espansione di $\mathbf{L}$ (o $\mathbf{L}$ è un $\mathbf{C}$-frammento di $\mathbf{L}'$) sse $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{L}'$ e $C = C'$. Diciamo che $\mathbf{L}'$ (o $\mathbf{L}$ è un $\mathbf{P}$-frammento di $\mathbf{L}'$) è una P-espansione di $\mathbf{L}$ sse $\mathbf{L}' \subseteq \mathbf{L}'$ e $P = P'$.

Se $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{L}'$, allora $Fm_{\mathbf{L}} \subseteq Fm_{\mathbf{L}'}$ e $\mathbf{Fm_L}$ è una subalgebra di $\mathbf{Fm_{L'}}$.

9.2.4 Valutazioni e interpretazioni di un linguaggio in un'algebra

Siano $\mathbf{L} = \langle \mathbf{C}, P, G\rangle$ un linguaggio e $\mathbf{A}$ un'algebra di tipo $\mathbf{C}$.

Definition 1 *Chiamiamo valutazione di* $\mathbf{L}$ *in* $\mathbf{A}$ *ogni omomorfismo* $h : \mathbf{Fm} \to \mathbf{A}$.

Poiché l'algebra delle formule è assolutamente libera nella classe delle algebre dello stesso tipo, ogni valutazione è determinata dalla sua restrizione $h_{\upharpoonright P} : P \rightarrow A$, che chiamiamo assegnamento o base della valutazione h. Indicherò spesso un assegnamento da P ad A con la lettere v e con h_v l'omomorfismo da $\mathbf{Fm}$ a $\mathbf{A}$ che determina. La classe di tutte le valutazioni di un linguaggio $\mathbf{L}$ in un'algebra $\mathbf{A}$ non è altro che la classe $Hom(\mathbf{Fm}, \mathbf{A})$ di tutti gli omomorfismi dall'algebra delle formule di quel linguaggio all'algebra. Se $h \in Hom(\mathbf{Fm}, \mathbf{A})$, la valutazioni di una formula ϕ in $\mathbf{A}$ è la sua immagine $h\phi \in A$. Poiché ogni valutazioni è completamente determinata dalla sua restrizione all'insieme delle variabili enunciative, $h\phi$ è completamente determinata dai valori delle variabili che compaiono in ϕ. Perciò, se $\phi(p_1, ..., p_n)$ e $hp_i = a_i \in A$ per ogni i $(1 \leq i \leq n)$, allora è abituale scrivere $\phi(a_1, ..., a_n)$ invece di $h\phi$.

L'idea alla base di questa definizione di valutazioni è che gli enunciati di Fm sono, di per sè, privi di significato. I linguaggi di uso quotidiano, in quanto costantemente applicati alla realtà, sono sempre interpretati, nel senso che gli enunciati formulati in tali linguaggi veicolano sempre un significato. I linguaggi formali, come $\mathbf{L}$, invece sono solo segni e prescrizioni su come usare tali segni. L'insieme Fm delle formule che ne risulta è una collezione di stringhe di simboli, ma ciò che esse esprimano non è ancora deciso. È importante, però, che sussista la possibilità di determinare un loro significato, infatti i linguaggi formali hanno sempre la funzione, almeno in linea di principio, di essere dei mezzi di comunicazione. I linguaggi formali per i sistemi logici devono essere in grado di ricevere quelle interpretazioni che sono rilevanti per determinare quando un enunciato è conseguenza logica di un insieme di enunciati. Abbiamo visto, infatti, che una delle possibili nozioni pre-teoriche di conseguenza logica fa riferimento alla conservazione della verità dalle premesse alla conclusione. Per poter parlar di verità di un enunciato, è necessario fare riferimento a ciò che significa e questo motivo può servire come esempio per capire l'importanza della nozione di interpretazione di un linguaggio per studiare la nozione di conseguenza logica.

L'idea di considerare le interpretazioni come omomorfismi, poi, ha a che fare con la conservazione della forma da una struttura (il linguaggio) ad un'altra (il mondo dei significati, per ora non meglio determinati, degli enti linguistici). La richiesta di tale conservazione si basa sull'ipotesi di verificare come possono rapportarsi tra loro i significati degli enunciati di un certo linguaggio. La determinazione di un linguaggio formale segue, in genere, una previa indagine sui caratteri dei significati che si vogliono descrivere e, in questo senso, il mondo dei significati viene prima di quello del linguaggio formale e si tenta di determinare la forma del secondo sulla base della forma del primo. Quando si vuole interpretare un linguaggio formale, però, si assume tale linguaggio e la forma che lo caratterizza e si cerca di capire quali mondi di significati possono essere le interpretazioni dei suoi enunciati. Tali mondi di significati, ovviamente, devono avere la stessa forma degli enunciati. Se si accetta di caratterizzare la forma di tali enunciati per mezzo di un'algebra assolutamente libera (l'algebra delle formule), allora è facile accettare l'idea che le interpretazioni possibili del linguaggio di tali enunciati siano gli omomorfismi dall'algebra delle formule ad un algebra del medesimo tipo.

9.2.5 Sostituzioni e strutturalità

Abbiamo visto che un tratto distintivo della nozione di conseguenza logica è la formalità, ossia il fatto che gli argomenti logicamente validi restano validi qualunque sia lo specifico oggetto di discorso. Se consideriamo l'oggetto di un argomento come qualcosa che è determinato dai particolari enunciati che compaiono in tale argomento, allora è naturale pensare che se un argomento è valido, allora resta valido anche se si mutano gli enunciati che vi compaiono, purché si conservi la loro forma logica. Abbiamo già avuto modo di evidenziare quanto queste nozioni siano problematiche. La soluzione che adottiamo, qui, è quella di considerare la forma logica di un argomento come ciò che resta invariante rispetto a tutte le sostituzioni possibili di una variabile enunciativa con un enunciato qualsiasi. Un argomento formalmente valido sse è valido e ogni sostituzione di questo determina un nuovo argomento altrettanto valido.

Definition 2 *Chiamiamo sostituzione di $\phi \in Fm$ ogni endomorfismo $\sigma : \mathbf{Fm} \to \mathbf{Fm}$.*

Poiché **Fm** è un'algebra assolutamente libera, σ è completamente determinato dalla sua restrizione $\sigma_{\restriction P} : P \to Fm$. In quanto omomorfismo, σ rispetta la forma degli elementi di **Fm**. Poiché **Fm** è un algebra delle formule, ciò significa che la forma dei suoi elementi è data dalle operazioni determinate dai connettivi e dalle regole di formazione degli enunciati. Poiché si tratta, in particolare, di un endomorfismo, il risultato di tale operazioni è ancora un enunciato. Ciò che risulta è, quindi, un enunciato in cui compaiono le medesime operazioni dell'enunciato originale. L'unica differenza è che, al posto delle originali variabili enunciative, ora possono comparire altri enunciati (in modo che in corrispondenza della medesima variabile, compare il medesimo enunciato). Se si accetta l'idea che la forma logica di un enunciata è data considerando lo schema che si ottiene lasciando fissi i suoi connettivi e ammettendo ogni possibile uniforme sostituzione delle parti non logiche (variabili enunciative), allora è facile accettare la nozione di endomorfismo come controparte formale adeguata della nozione di sostituzione.

In quanto endomorfismo, una sostituzione è un caso particolare di interpretazione, per cui è possibile adottare la notazione specificata sopra per le interpretazioni. Per conoscere la sostituzione $\sigma\phi$ di una formula ϕ, è sufficiente conoscere i valori di $\sigma_{\restriction var(\phi)}$. Se $\phi(p_1, ..., p_n)$ e $\sigma p_i = \psi_i \in Fm$ per ogni$i$ $(1 \leq i \leq n)$, indichiamo con $\phi(\psi_1/p_1, ..., \psi_n/p_n)$ la sostituzione simultanea di ψ_i per la variabile p_i. $\phi(\psi_1/p_1, ..., \psi_n/p_n)$, in altre parole, è la formula $\sigma\phi$, dove $\sigma \in End(\mathbf{Fm})$ tale che $\sigma p_i = \psi_i$ se $1 \leq i \leq n$ e $\sigma p_i = p_i$ altrimenti.

Si noti che, in generale, operare la sostituzione simultanea di ψ_i al posto di p_i, per ogni i tale che $1 \leq i \leq n$, è diverso che operare la sostituzione successiva di ψ_1 a p_1, di ψ_2 a p_2, ..., di ψ_n a p_n, ossia $\phi(\psi_1/p_1, ..., \psi_n/p_n)$ $\neq ((...(\phi(\psi_1/p_1))...)\psi_n/p_n)$. Un semplice esempio può servire a chiarire la questione. Consideriamo la formula $p \vee q$ e sia σ l'endomorfismo definito da $\sigma(p) = q$, $\sigma(q) = r$ e $\sigma(t) = t$ per ogni t tale che $p \neq t \neq q$. Allora $(p \vee q)(q/p, ..., r/q) = q \vee r$ mentre $((p \vee q)(q/p))(r/q) = (q \vee q)(r/p) = r \vee r$.

Definition 3 *Per ogni* $\Gamma \subseteq Fm$*, definiamo* $St : \wp(Fm) \rightarrow \wp(Fm)$ *per mezzo di* $St(\Gamma) = \{\sigma\phi : \phi \in \Gamma\}$*:*

$$\Gamma \text{ è strutturale (o invariante) sse } \Gamma = St(\Gamma).$$

Un insieme strutturale di formule, in altri termini, è un insieme chiuso rispetto alle sostituzioni. $St(\Gamma)$ è il piccolo insieme strutturale che contiene Γ.

9.3 CONSEGUENZA LOGICA COME RELAZIONE DI CHIUSURA

Come abbiamo visto Tarski [1930a] e Tarski [1930b] propongono di studiare la nozione di conseguenza per mezzo di un operatore di chiusura finitario (o algebrico). Sia S un insieme di enunciati e $Cn : \wp(S) \rightarrow \wp(S)$. Per ogni $\Gamma, \Delta \subseteq S$

- (T1) $|S| \leq \omega$
- (T2) $\Gamma \subseteq Cn\Gamma$
- (T3) $Cn(Cn\Gamma) = Cn\Gamma$
- (T4) $Cn\Gamma = \bigcup\{Cn\Delta : \Delta \subseteq_\omega \Gamma\}$

esiste un $\perp \in S$, tale che $Cn\perp = S$.

1. Come teorema, Tarski dimostra subito che vale anche

- (T6) se $\Gamma \subseteq \Delta$, allora $Cn\Gamma \subseteq Cn\Delta$.

(T2), (T3) e (T5) sono, le proprietà degli operatori di chiusura e, seppure abbiamo visto che non è scontato che siano proprietà necessarie per definire una nozione di conseguenza, saranno riproposte nella definizione di conseguenza logica che intendo adottare. (T1) è una caratteristica che gioca un ruolo non centrale nello studio dei sistemi logici. Benché molti sistemi la soddisfano, non sarà considerata, qui, una caratteristica essenziale e si ammettono anche sistemi logici in cui l'insieme degli enunciati è più che numerabile. (T4) è una proprietà importante e soddisfatta da molti importanti sistemi logici (primo fra tutti, la logica classica). Non appare tuttavia una proprietà necessaria, soprattutto se, come farò qui, non si assumono linguaggi con connettivi infinitari. Mentre è evidentemente soddisfatta da tutti i sistemi logici definiti per mezzo di un calcolo che ammette solo regole finitarie (come il calcolo alla Hilbert per la logica classica), è una proprietà non banale per sistemi definiti, come vedremo, in termini semantici. Anche nel caso classico definito per mezzo di tavole di verità, per esempio, questa proprietà corrisponde alla dimostrazione del non banale teorema di compattezza. Non considereremo questa proprietà come necessaria per definire una relazione di conseguenza logica e considereremo anche esempi in cui non vale. (T5), infine, richiede la presenza di un enunciato che rappresenta l'enunciato assurdo. La presenza di tale elemento è utile per classificare le logiche, ma non v'è motivo per ritenere che sia una condizione necessaria per definire una logica. Lo stesso Tarski lo omette nel secondo degli scritti citati.

Łos e Suszko[1958], per definire la nozione di conseguenza, adottano molti meno assiomi di Tarski (richiedono solo (T3) e (T4)), ma aggiungono la nuova, fondamentale, proprietà della strutturalità. Consideriamo, allora, non più un insieme generico S di enunciati, ma l'algebra delle formule **Fm**, determinata come sopra. Una conseguenza è strutturale sse, per ogni $\sigma \in End(\mathbf{Fm})$, per ogni $\Gamma \subseteq Fm$,

- (SZ1) $\sigma(Cn\Gamma) \subseteq Cn(\sigma\Gamma)$.

Accettando l'idea che la nozione di endomorfismo sia adeguata per definire una controparte formale alla nozione di formalità, caratteristica della conseguenza logica, la proprietà della strutturalità permette di considerare l'operatore definito da Tarski non una qualsiasi conseguenza, ma, in particolare, la conseguenza logica.

9.3.1 Conseguenza logica e sistema logico

Piuttosto che lavorare con operazioni, senza che ciò comporti alcun cambiamento essenziale (si veda l'appendice sulle chiusure), farò ricorso alla nozione di relazione per studiare il concetto di conseguenza logica. La nozione di relazione di conseguenza si rivelerà più comoda di quella di operazione di conseguenza per sviluppare alcuni temi che mi sono proposti (come il calcolo dei sequenti e le conseguenze di Scott).

Consideriamo una relazione $\vdash \subseteq \wp(Fm) \times Fm$.

Definition 4 *Diciamo che $\vdash$ è una relazione di conseguenza sse è una relazione di chiusura ossia sse, per ogni $\Gamma, \Delta \subseteq Fm$ e per ogni $\phi \in Fm$,*

- (R) Riflessività $\phi \vdash \phi$
- (M) Monotonia se $\Gamma \vdash \phi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, allora $\Delta \vdash \phi$
- (T) Transitività se $\Gamma \vdash \phi$ e, per ogni $\psi \in Fm$, $\Delta \vdash \psi$, allora $\Gamma \vdash \phi$.

Queste tre condizioni corrispondono, rispettivamente, a (T2), a (T6) e ad una forma indebolita di (T3), ossia a (T3'): per ogni $\Gamma \subseteq S$, $Cn(Cn\Gamma) \subseteq Cn\Gamma$. Senza una condizione corrispondente a (T4), non è possibile derivare la monotonia, che pertanto, va aggiunta tra gli assiomi.

- Chiamo pre-logica la coppia $\mathcal{P} = \langle \mathbf{Fm_L}, \vdash_{\mathcal{P}} \rangle$ in cui $\vdash_{\mathcal{P}}$ è una relazione di chiusura su $Fm_{\mathbf{L}}$.

- Una teoria di $\mathcal{P}$ è un insieme di formule chiuso rispetto a $\vdash_{\mathcal{P}}$, dove $\Gamma \subseteq Fm$ è chiuso rispetto a $\vdash_{\mathcal{P}}$ sse, per ogni $\phi \in Fm$, se $\Gamma \vdash_{\mathcal{P}} \phi$, allora $\phi \in \Gamma$. Indichiamocon $Th\mathcal{P}$ l'insieme delle teorie di $\mathcal{P}$.

Come abbiamo già avuto modo di discutere, soddisfare le proprietà (R), (M) e (T) non sembra essere sufficiente per essere una relazione di conseguenza logica. In tal caso, infatti, nulla ci assicura che se un argomento $\Gamma \vdash_{\mathcal{P}} \phi$ è valido in un sistema $\mathcal{P}$, tale sistema dichiari validi anche tutti gli altri argomenti che ne condividono la forma logica (che si suppone definita dalla divisione dei simboli del linguaggio in logici, i connettivi, e non logici, le variabili enunciative).

Definition 5 *Diciamo che $\vdash$ è una relazione di conseguenza logica sse è una relazione di conseguenza e soddisfa, per ogni $\Gamma \subseteq Fm$ e per ogni $\phi \in Fm$*

- (S) Strutturalità per ogni $\sigma \in End(\mathbf{Fm})$, se $\Gamma \vdash \phi$, allora $\{\sigma\phi : \phi \in \Gamma\} \vdash \sigma\phi$.

Questa proprietà indica che ogni inferenza valida può essere considerata uno schema per ottenere altre inferenze altrettanto valide. Ciò che conta, in altre parole, non sono le specifiche variabili enunciative che compaiono in un argomento. Ciò che conta, quindi, non è la parte contenustica di un argomento, ma solo la sua forma, che, indicata dai simboli non logici e dal modo in cui si rapportano i diversi contenuti, non varia da una sostituzione all'altra.

Se $\sigma \in End(\mathbf{Fm})$ e $\Gamma \cup Fm$, con $\sigma\Gamma$ mi riferisco all'insieme $St(\Gamma) = \{\sigma\phi : \phi \in \Gamma\}$.

- Se $\vdash$ è una relazione di conseguenza su Fm, allora $\sigma(\vdash) = \{\langle\sigma\Gamma, \sigma\phi\rangle : \langle\Gamma, \phi\rangle \in\vdash\}$ è una relazione di conseguenza su Fm.

- Se $\vdash$ è una relazione di conseguenza logica su Fm, allora $\sigma(\vdash) \subseteq\vdash$.

Definition 6 *Un sistema logico è una coppia $\mathcal{L} = \langle \mathbf{Fm_L}, \vdash_{\mathcal{L}}\rangle$, in cui $\vdash_{\mathcal{L}}$ è una relazione di conseguenza strutturale, detta anche conseguenza logica di $\mathcal{L}$.*

Un sistema logico, in altre parole, è determinato da un insieme di enunciati e da una relazione di conseguenza logica che permetta di stabilire quali enunciati seguano da certe premesse. Questa definizione di sistema logico è estramemente generale, infatti non si fa riferimento a nessun modo particolare di determinare la relazione di conseguenza logica. Non si stabilisce neppure se si tratta di una relazione di derivabilità (una conseguenza definita per mezzo di un calcolo su elementi sintattici) o di implicazione (una relazione definita in termini semantici). Ciò che si considera essenziale è, dunque, solo la possibilità di stabilire che vi sono argomenti validi. Capire come questi possano essere praticamente determinati è una questione ulteriore che pertiene, in quest'ottica, al tentativo di stabilire un concreto esempio di sistema logico, ma che non riguarda la sua caratterizzazione generale.

Scriverò $\Gamma \nvdash \phi$ per indicare che non vale $\Gamma \vdash \phi$, ossia che ϕ non è conseguenza logica di Γ.

Nel seguito si devono tenere distinti con attenzione i due concetti di relazione di conseguenza e di relazione di conseguenza logica. La prima espressione non è ma da intendersi come un'abbreviazione della seconda.

Definizioni

Le definizioni che seguono stabiliscono alcune importanti nozioni.

- Un teorema di $\mathcal{L}$ è una formula ϕ tale che $\emptyset \vdash \phi$ (più semplicemente, scriveremo $\vdash \phi$). Le conseguenze di un insieme di formula Γ, invece, ossia tutte le formule ϕ tali che $\Gamma \vdash$, sono dette teoremi di Γ. Indichiamo con $Cn\Gamma$ l'insieme $\{\phi \in Fm : \Gamma \vdash \phi\}$ dei teoremi di Γ.

- Una teoria di $\mathcal{L}$ è un insieme di formule chiuso rispetto a $\vdash$, ossia un insieme $\Gamma \subseteq Fm$ tale che, se $\Gamma \vdash \phi$, allora $\phi \in \Gamma$. Chiamiamo $Th\mathcal{L}$ l'insieme di tutte le teorie di $\mathcal{L}$. Chiaramente, per ogni insieme Γ di formule, $Cn\Gamma \in Th\mathcal{L}$. $Cn\emptyset$ è l'insieme dei teoremi di $\mathcal{L}$.

- Un insieme Γ di formule è assiomatizzabile rispetto a $\vdash$ sse esiste un insieme $\Delta \subseteq \Gamma$ tale che $\Gamma = Cn\Delta$. Γ è finitamente assiomatizzabile rispetto a $\vdash$ sse vi è un $\Delta \subseteq_\omega \Gamma$ tale che $\Gamma = Cn\Delta$.

- Due insiemi di formule Γ e Δ sono equivalenti rispetto a $\vdash$ sse $\Gamma \vdash \phi$ per ogni $\phi \in \Delta$ e $\Delta \vdash \psi$ per ogni $\psi \in \Gamma$ (ossia sse $Cn\Gamma = Cn\Delta$). Due formule ϕ e ψ sono equivalenti sse $\phi \vdash \psi$ e $\psi \vdash \phi$ (ossia sse $Cn\{\phi\} = Cn\{\psi\}$).

- Un insieme Γ di formule è non-triviale sse, per almeno una formula ϕ, $\Gamma \nvdash \phi$ (ossia sse $Cn\Gamma \neq Fm$). Γ è triviale altrimenti.

- Una formule ϕ è detta inconsistente sse, per ogni $\Gamma \subseteq Fm$, $\Gamma, \phi \vdash \psi$ per ogni $\psi \in Fm$. Un insieme Γ di formule è detto inconsistente sse contiene almeno una formula inconsistente.

- Siano $\vdash$ e $\vdash'$ due relazioni di conseguenza su Fm. Diciamo che $\vdash'$ è più forte di $\vdash$ (o che $\vdash$ è più debole di $\vdash'$) sse $\vdash \subseteq \vdash'$, ossia sse, per ogni $\Gamma \subseteq Fm$ e per ogni $\phi \in Fm$, se $\Gamma \vdash' \phi$, allora $\Gamma \vdash \phi$.

- Una relazione $\vdash_{id}$ di conseguenza logica è detta identità sse, per ogni $\Gamma \subseteq Fm$ e per ogni $\phi \in Fm$, $\Gamma \vdash \phi$ sse $\phi \in \Gamma$.

- Una relazione $\vdash_{inc}$ di conseguenza logica è detta completamente triviale sse, per ogni $\Gamma \subseteq Fm$ e per ogni $\phi \in Fm$, $\Gamma \vdash \phi$ (ossia, sse, per ogni Γ, $Cn\Gamma = Fm$).

- Un relazione $\vdash_{qinc}$ di conseguenza logica è detta quasi triviale sse, per nessuna formula ϕ, $\vdash \phi$ e, per ogni non vuoto $\Gamma \subseteq Fm$ e per ogni $\phi \in Fm$, $\Gamma \vdash \phi$ (ossia, sse $Cn\emptyset = \emptyset$ e, per ogni non vuoto $\Gamma \subseteq Fm$, $Cn\Gamma = Fm$).

- Una relazione $\vdash$ di conseguenza logica è detta triviale sse è completamente triviale o quasi triviale.

- Una logica $\mathcal{L}$ è detta completamente triviale, quasi triviale o triviale sse la corrispondente relazione di conseguenza logica è, rispettivamente, completamente triviale, quasi triviale o triviale.

Remark 7 *La relazione identità $\vdash_{inc}$è la più debole di tutte le relazioni di conseguenza definibili su Fm. La relazione inconsistente $\vdash_{inc}$ è la più forte di tutte le relazioni di conseguenza definibili su Fm.*

Come abbiamo detto, Tarski richiedeva che ogni operazione di conseguenza soddisfacesse il requisito della finitezza. In questo contesto, consideriamo tale proprietà importante, ma non necessaria. Nei termini della relazione di conseguenza, la proprietà della finitezza è espressa dalla seguente definizione.

Definition 8 *Una relazione $\vdash$ di conseguenza logica è finitaria sse, per ogni $\Gamma \subseteq Fm$ e per ogni $\phi \in Fm$,*

- (F) Finitezza se $\Gamma \vdash \phi$, allora, per almeno un $\Delta \subseteq_\omega \Gamma$, $\Delta \vdash \phi$.

Per le proprietà della monotonia, da (F) segue la condizione più forte, rispettata da ogni conseguenza logica finitaria

- (F') $\Gamma \vdash \phi$ sse, per almeno un $\Delta \subseteq_\omega \Gamma$, $\Delta \vdash \phi$.

Se una relazione di conseguenza è sia strutturale sia finita diciamo che è un conseguenza standard.

Se la relazione di conseguenza di una logica $\mathcal{L}$ è finitaria, diciamo che la logica stessa è finitaria. Non si confondano gli aggettivi finitario e finito. Seguendo la definizione data per ogni struttura in generale, una logica è finita sse il suo dominio è finito. Nel nostro caso, ciò significa che una logica $\mathcal{L} = \langle \mathbf{Fm_L}, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$ è finita sse $Fm_{\mathbf{L}}$ è finito.

La definizione di finitarietà può essere agevolmente generalizzata a qualsiasi numero cardinale μ nel seguente modo.

Definition 9 *Diciamo che una relazione $\vdash$ di conseguenza ha cardinalità μ sse, per ogni $\Gamma \subseteq Fm$ e per ogni $\phi \in Fm$,*

- (μ-C) μ-cardinalità $\Gamma \vdash \phi$ sse, per almeno un $\Delta \subseteq_\mu \Gamma$, $\Delta \vdash \phi$.

Definition 10 *Data una relazione $\vdash$ di conseguenza logica su un insieme Fm di formule, per ogni $\Gamma \subseteq Fm$ e per ogni $\phi \in Fm$, possiamo definire:*

1. $\Gamma \vdash_\mu \phi$ sse , per almeno un $\Delta \subseteq_\mu \Gamma$, $\Delta \vdash \phi$
2. $\Gamma \vdash_\sigma \phi$ sse, per ogni $\sigma \in End(\mathbf{Fm})$, $\sigma(\Gamma) \vdash \sigma\phi$
3. $\Gamma \vdash_{stand} \phi$ sse $\Gamma \vdash_\omega \phi$ e $\Gamma \vdash_\sigma \phi$.

$\vdash_\omega$ è detta la compagna finita di $\vdash$ e, chiaramente, $\vdash$ è finita sse $\vdash_\omega = \vdash$.

$\vdash_\mu$ è detta la compagna di $\vdash$ cardinalità μ.

$\vdash \sigma$ è detta la compagna strutturale di $\vdash$ e, chiaramente, $\vdash$ è strutturale sse $\vdash_\sigma = \vdash$.

$\vdash_{stand}$ è detta la compagna standard di $\vdash$ e, chiaramente, $\vdash$ è strutturale sse $\vdash_{stand} = \vdash$. Ovviamente $\vdash_{stand} = (\vdash_\omega)_\sigma = (\vdash_\sigma)_\omega$.

Proposition 11 *Per ogni relazione di conseguenza $\vdash$ definita su Fm, $\vdash_\mu \subseteq \vdash$ e $\vdash_\mu$ è la relazione di conseguenza di cardinalità μ più forte tra quelle definite su Fm (ossia, se $\vdash'_\mu$ è un'altra relazione di conseguenza definita su Fm, allora $\vdash'_\mu \subseteq \vdash_\mu$). Inoltre $\vdash_\mu = \vdash_{\restriction \wp_\mu(Fm)}$.*

Da ciò segue, come caso particolare, che, se $\vdash$ è una relazione di conseguenza su Fm, $\vdash_\omega$ è la più forte relazione di conseguenza finitaria definita su Fm.

Come è possibile parlare di espansione tra linguaggio, così è possibile definire un ordine anche tra sistemi logici. Se $\mathcal{L} = \langle \mathbf{Fm_L}, \vdash_\mathcal{L} \rangle$ è una logica e $\mathbf{Fm_L}$ e un'algebra di tipo $\mathbf{C}$, ossia $\mathbf{Fm_L} = \langle \mathbf{C}, P, G \rangle$, diciamo, più semplicemente, che $\mathcal{L}$ è di tipo $\mathbf{C}$.

Definition 12 *Consideriamo i sistemi logici $\mathcal{L}$, di tipo $\mathbf{C}$, e $\mathcal{L}'$, di tipo $\mathbf{C}'$. Diciamo che $\mathcal{L}'$ è un'estensione di $\mathcal{L}$ (equivalentemente: $\mathcal{L}$ è un frammento di $\mathcal{L}'$) sse $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{C}'$, $P \subseteq P'$, e $\vdash_\mathcal{L} \subseteq \vdash_{\mathcal{L}'}$. In simboli: $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$. Un'estensione è detta conservativa sse è un'espansione e, per ogni $\Gamma \subseteq Fm$ e per ogni $\phi \in Fm$, $\Gamma \vdash_\mathcal{L} \phi$ sse $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}'} \phi$.*

Proprietà

Da queste definizioni seguono alcuni risultati interessanti.

Remark 13 *$\langle Th\mathcal{L}, \subseteq \rangle$ è un reticolo completo. La sua base è $Cn\emptyset$ e la sua testa Fm.*

Proposition 14 *Sia $\mathcal{L} = \langle \mathbf{Fm}, \vdash \rangle$ una logica. Allora $\mathcal{C}_\vdash = Th\mathcal{L} = \{\Gamma \subseteq Fm :$ se $\Gamma \vdash_\mathcal{L} \phi$, allora $\phi \in \Gamma\}$ è un sistema di chiusura. Sia $\mathcal{C}$ un sistema di chiusura su Fm. Allora definiamo $\vdash_\mathcal{C} \subseteq \wp(Fm) \times Fm$ per mezzo della condizione: per ogni $\Gamma \subseteq Fm$ e per ogni $\phi \in Fm$, $\Gamma \vdash_\mathcal{C} \phi$ sse, per ogni $A \in \mathcal{C}$, se $\Gamma \subseteq A$, allora $\phi \in A$. $\vdash_\mathcal{C}$ è una relazione di conseguenza su Fm.*

Proof. 1. Dimostriamo che $\mathcal{C}_\vdash$ è un sistema di chiusura. $\mathcal{C}_\vdash = Th\mathcal{L} \subseteq \wp(Fm)$ ogni interesezione di un insieme chiuso rispetto a $\vdash$ è una teoria di $\mathcal{L}$. Sia $X = \bigcap_{i \in I} A_i$, dove $\{A_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{C}_\vdash$. Se X non fosse una teoria, infatti, dovrebbe esserci una formula ϕ tale che, per almeno un insieme $\Gamma \subseteq X$, $X \vdash \phi$ e $\phi \notin X$. Ma, allora, per almeno un $A_i \in \{A_i : i \in I\}$, $\Gamma \subseteq A_i$ e $\phi \notin A_i$, il che è impossibile perché tutti gli insiemi in $\mathcal{C}_\vdash$ sono chiusi rispetto a $\vdash$.

2. Dimostriamo che $\vdash_\mathcal{C}$ è una relazione di conseguenza logica. Chiaramente soddisfa (R) perché, per ogni formula ϕ, $\phi \in \{\phi\}$. Soddisfa anche (M) perché se $\phi \in A$ per ogni $A \supseteq \Gamma$, allora $\phi \in B$ per ogni $B \supseteq \Delta \supseteq \Gamma$. Soddisfa anche (T) perché se $\phi \in A$ per ogni $A \supseteq \Gamma$, allora $\phi \in B$ per ogni $B \supseteq \Delta \supseteq \Gamma$. ■

Proposition 15 *Sia $\vdash$ una relazione di conseguenza su Fm. Allora $\vdash$ è strutturale sse $Th\mathcal{L}$ è chiuso rispetto all'inverso delle sostituzioni, ossia, per ogni $\sigma \in End(\mathbf{Fm})$, se $T \in Th\mathcal{L}$, allora $\sigma^{-1}T \in Th\mathcal{L}$.*

Proposition 16 *Siano $\mathcal{P} = \langle \mathbf{Fm}, \vdash \rangle$ e $\mathcal{P}' = \langle \mathbf{Fm}, \vdash' \rangle$. Allora $\vdash \subseteq \vdash'$ sse $Th\mathcal{P}' \subseteq Th\mathcal{P}$.*

Indichiamo con $RCon_{\mathbf{Fm}}$ l'insieme delle relazioni di conseguenza $\vdash$ definibili su Fm (ossia delle conseguenze che insieme con $\mathbf{Fm}$ determinano una prelogica). Sia $RCon^{\sigma}_{\mathbf{Fm}} \subseteq RCon_{\mathbf{Fm}}$ l'insieme delle conseguenze logiche $\vdash$ definibili su Fm. Sia $RCon^{\omega}_{\mathbf{Fm}} \subseteq RCon_{\mathbf{Fm}}$ l'insieme delle conseguenze finitarie $\vdash$ definibili su Fm. Sia $RCon^{stand}_{\mathbf{Fm}} \subseteq RCon_{\mathbf{Fm}}$ l'insieme delle conseguenze standard $\vdash$ definibili su Fm.

Questa proposizione mostra come esista una corrispondenza biunioca tra la famiglia della relazioni di conseguenza $\vdash_{\mathcal{P}}$ su un certo (arbitrario, ma fissato) insieme di formule e la famiglia dei sistemi di chiusura $Th\mathcal{P}$. Questa corrispondenza è, in realtà, un caso particolare di un teorema più generale sulle relazioni di chiusura e i sistemi di chiusura (si veda cap. *Nozioni preliminari*).

I teoremi seguenti mostrano che l'insieme delle relazioni di conseguenza su un insieme di formule Fm è un reticolo completo, quindi è sempre posssibile indicare la relazione più forte e quella più debole all'interno di un insieme di relazioni di conseguenza su Fm. Abbiamo già visto, poi, (Remark 7) che la relazione identità e la relazione inconsistente sono, rispettivamente, la base e la testa di $RCon_{\mathbf{Fm}}$.

Theorem 17 *Sia $\{\vdash_i : i \in I\} \subseteq RCon_{\mathbf{Fm}}$ un insieme di relazioni di conseguenza su Fm. Definiamo $\vdash_{\inf I}$ per mezzo della seguente condizione: per ogni $\Gamma \subseteq Fm$ e per ogni $\phi \in Fm$, $\Gamma \vdash_{\inf I} \phi$ sse, per ogni $i \in I$, $\Gamma \vdash_i \phi$. Allora:*

1. $\vdash_{\inf I}$ è una relazione di conseguenza su Fm
2. $\vdash_{\inf I} = \bigcap\{\vdash_i : i \in I\} = \inf\{\vdash_i : i \in I\}$.

Proof. 1. È chiaro che $\vdash_{\inf I}$ soddisfa (R), (M) e (T) perché tali proprietà sono soddisfatte da ogni $\vdash_i$.

2. È chiaro, anche, che $\vdash_{\inf I} \subseteq \vdash_i$ per ogni $i \in I$, perché, per definizione, se $\langle \Gamma, \phi \rangle \in \vdash_{\inf I}$, allora $\langle \Gamma, \phi \rangle \in \vdash_i$, per ogni $i \in I$. ■

Theorem 18 *Sia $\{\vdash_i : i \in I\}$ come sopra. Definiamo $\vdash_{\sup I}$ per mezzo della seguente condizione: per ogni $\Gamma \subseteq Fm$ e per ogni $\phi \in Fm$, $\Gamma \vdash_{\sup I} \phi$ sse, per almeno un $i \in I$, $\Gamma \vdash_i \phi$. Allora:*

1. $\vdash_{\sup I}$ è una relazione di conseguenza su Fm
2. $\vdash_{\sup I} = \bigcup\{\vdash_i : i \in I\} = \sup\{\vdash_i : i \in I\}$.

Proof. Analoga a quella del teorema precedente. ■

Corollary 19 *$\langle RCon_{\mathbf{Fm}}, \subseteq\rangle$ è un reticolo completo.*

Theorem 20 *$\langle RCon^{\sigma}_{\mathbf{Fm}}, \subseteq\rangle$ è un sottoreticolo completo di $\langle Con_{\mathbf{Fm}}, \subseteq\rangle$.*

Proof. Sia $\{\vdash_i : i \in I\} \subseteq RCon_{\mathbf{Fm}}$ un insieme di relazioni di conseguenza logica su Fm. Dobbiamo dimostrare che $\vdash_{\inf I}$ e $\vdash_{\sup I}$, sono strutturali. Per il teorema 17, $\Gamma \vdash_{\inf I} \phi$ sse, per ogni $i \in I$, $\Gamma \vdash_i \phi$. Quindi, per ogni $\sigma \in End(\mathbf{Fm})$, $\sigma\Gamma \vdash_{\inf I} \sigma\phi$ sse , per ogni $i \in I$, $\sigma\Gamma \vdash_i \sigma\phi$. Ma, per ogni $\sigma \in End(\mathbf{Fm})$ e per ogni $i \in I$, $\sigma\Gamma \vdash_i \sigma\phi$ se $\Gamma \vdash_i \phi$. Quindi per ogni $\sigma \in End(\mathbf{Fm})$, $\sigma\Gamma \vdash_{\inf I} \sigma\phi$ se $\Gamma \vdash_{\inf i} \phi$. Ciò siginifica che $\vdash_{\inf i}$ è strutturale. In modo analogo si dimostra che $\vdash_{\sup i}$ è strutturale. ■

Theorem 21 *$\langle RCon^{\omega}_{\mathbf{Fm}}, \subseteq\rangle$ è un sottoreticolo di $\langle Con_{\mathbf{Fm}}, \subseteq\rangle$.*

Wójcicki [1971], p. 29 fornisce un esempio che mostra che $\langle RCon^{\omega}_{\mathbf{Fm}}, \subseteq\rangle$ non è un sottoreticolo completo di $\langle RCon_{\mathbf{Fm}}, \subseteq\rangle$ (inserire l'esempio). Di conseguenza, neppure $\left\langle RCon^{stand}_{\mathbf{Fm}}, \subseteq\right\rangle$ è un sottoreticolo completo di $\langle RCon_{\mathbf{Fm}}, \subseteq\rangle$ e né $\langle RCon^{\omega}_{\mathbf{Fm}}, \subseteq\rangle$ né $\left\langle RCon^{stand}_{\mathbf{Fm}}, \subseteq\right\rangle$ sono un sottoreticolo completo di $\langle RCon^{\sigma}_{\mathbf{Fm}}, \subseteq\rangle$. [Controllare l'esempio di Wójcicki: contiene un passaggio non chiaro]

L'importanza di questi teoremi sta nel fatto che, dato un qualsiasi insieme $\{\vdash_i : i \in I\} \subseteq RCon_{\mathbf{Fm}}$ di conseguenze, è sempre possibile indicare $\vdash_{\inf I}$, la conseguenza più debole tra quelle in $\{\vdash_i : i \in I\}$, e $\vdash_{\sup I}$, la conseguenza più forte tra quelle in $\{\vdash_i : i \in I\}$. Tutte le altre conseguenze in $\{\vdash_i : i \in I\}$ si situano tra $\vdash_{\inf I}$ e $\vdash_{\sup I}$, perciò ogni argomento valido rispetto a $\vdash_{\inf I}$ è valido per ogni altra conseguenza in $\{\vdash_i : i \in I\}$ e ogni teoria di $\vdash_{\sup I}$ è una teoria di ogni altra conseguenza in $\{\vdash_i : i \in I\}$.

Nella prossima proposizione, è espressa una condizione necessaria e sufficiente per determinare se una relazione di conseguenza è finita. Per esprimere tale risultato, occorre introdurre alcune nuove nozioni. Una famiglia di insiemi $\mathcal{A}$ è detta diretta all'insù sse per ogni $X, Y \in \mathcal{A}$ c'è un $Z \in \mathcal{A}$ tale che $X \subseteq Z$ e $Y \subseteq Z$. Una famiglia di insiemi $\mathcal{B}$ è induttiva sse è chiusa rispetto all'unione delle sue sottofamiglie non vuote e dirette all'insù. In altre parole, $\mathcal{B}$ è una famiglia induttiva sse per ogni $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, se $\mathcal{A}$ è diretto all'insù, allora $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{B}$.

Theorem 22 *(Schmidt) Una relazione di chiusura $\vdash_{\mathcal{L}}$ è finita sse il suo sistema di chiusura associato $Th\mathcal{L}$ è induttivo.*

Massimalità

- Sia $\mathcal{P} = \langle \mathbf{Fm}, \vdash_{\mathcal{P}}\rangle$ una pre-logica. Un insieme $\Gamma \subseteq Fm$ è detto massimale relativamente a $\phi \in Fm$ sse Γ è massimale rispetto alle teorie di $\mathcal{P}$ che non contengono ϕ, ossia sse $\phi \notin \Gamma$ e, per ogni $\psi \notin \Gamma$, $\Gamma, \psi \vdash \phi$.

- Sia $\mathcal{P} = \langle \mathbf{Fm}, \vdash_{\mathcal{P}}\rangle$ una pre-logica. Un insieme $\Gamma \subseteq Fm$ è detto massimale di $\vdash_{\mathcal{P}}$ sse è un elemento massimale in $\langle Th\mathcal{P}\backslash\{Fm\}, \subseteq\rangle$.

- Sia $\mathcal{L} = \langle \mathbf{Fm}, \vdash_{\mathcal{L}}\rangle$ una logica. Un insieme $\Gamma \subseteq Fm$ è detto logicamente completo (o, semplicemente, completo) sse è un elemento massimale in $\langle Th\mathcal{L}\backslash\{Fm\}, \subseteq\rangle$.

- Sia $\mathcal{L} = \langle \mathbf{Fm}, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$ una logica. Un insieme $\Gamma \subseteq Fm$ è detto massimale relativamente a $\phi \in Fm$ sse Γ è massimale rispetto alle teorie di $\mathcal{L}$ che non contengono ϕ, ossia sse $\phi \notin \Gamma$ e, per ogni $\psi \notin \Gamma$, $\Gamma, \psi \vdash \phi$.

Proposition 23 *$\Gamma \subseteq Fm$ è massimale rispetto a $\vdash_{\mathcal{P}}$ sse Γ è non-triviale ed è massimale rispetto ad ogni formula $\phi \notin \Gamma$.*

Proposition 24 *(Lemma di Lindenbaum) Sia $\vdash$ una relazione di conseguenza finitaria su Fm, Γ sia una teoria non-triviale rispetto a $\vdash$ e sia $\phi \notin \Gamma$.Allora c'è un insieme $\Gamma' \supseteq \Gamma$ che è una teoria consistente rispetto a $\vdash$ ed è massimale rispetto a ϕ.*

Corollary 25 *Se $\vdash_{\mathcal{L}}$ è una relazione finita di chiusura con un elemento incosistente, allora, per ogni $X \in Th\mathcal{L}$, se $X \neq Fm$, allora c'è un insieme $X' \supseteq X$ che è massimale in $Th\mathcal{L}$.*

Operazioni di conseguenza logica Come ho detto, è preferibile studiare la conseguenza logica per mezzo di una *relazione* di chiusura, piuttosto che ricorrere alla nozione di *operazione* di chiusura. Nell'appendice è mostrato come i due approcci siano equivalenti e ad essa rimando per ulteriori dettagli. Poiché, tuttavia, è stata usata da molti e importanti autori (Tarski, Wójcicki, Czelakowski,....) e, senza averlo fatto notare ne ho fatto un certo uso nelle righe precedenti, ritengo utile far notare alcuni fatti basilari.

Un'operazione di chiusura sull'insieme Fm (l'unico che ci interessa ora) delle formula è una funzione $Cn : \wp(Fm) \to \wp(Fm)$ tale che, per ogni $\Gamma, \Delta \subseteq Fm$

- (R) $\Gamma \subseteq Cn\Gamma$
- (M) se $\Gamma \subseteq \Delta$, allora $Cn\Gamma \subseteq Cn\Delta$
- (T) $Cn(Cn\Gamma) = Cn\Gamma$.

Il collegamento tra la nozione di relazione di chiusura e quella di operazione di chiusura è data dal seguente teorema. Indichiamo con $OCon_{\mathbf{Fm}}$ l'insieme delle operazioni di conseguenza definibili su Fm.

1. Sia $\vdash$ una relazione di chiusura su Fm. Definiamo la funzione $Cn : \wp(Fm) \to \wp(Fm)$ per mezzo della condizione: per rogni $\Gamma \subseteq Fm$, $Cn_{\vdash}(\Gamma) = \{\phi \in Fm : \Gamma \vdash \phi\}$. $Cn_{\vdash}$ è un'operazione di chiusura su Fm.

2. Sia Cn un'operazione di chiusura su Fm. Definiamo la relazione $\vdash_{Cn} \subseteq \wp(Fm) \times Fm$ per mezzo della condizione: per ogni $\Gamma \subseteq Fm$ e per ogni $\phi \in Fm$, $\Gamma \vdash_{Cn} \phi$ sse $\phi \in Cn\Gamma$. $\vdash_{Cn}$ è una relazione di chiusura su Fm.

3. Siano $RCon_{\mathbf{Fm}}$ e $OCon_{\mathbf{Fm}}$ come sopra. Le funzioni $f :\vdash \longmapsto Cn_{\vdash}$ e $f' : Cn \longmapsto \vdash_{Cn}$ sono biiezioni, rispettavamente, da $RCon_{\mathbf{Fm}}$ a $OCon_{\mathbf{Fm}}$ e da $OCon_{\mathbf{Fm}}$ a $RCon_{\mathbf{Fm}}$ e sono l'una l'inverso dell'altra, ossia $\vdash_{Cn_{\vdash}} = \vdash$ e $Cn_{\vdash_{Cn}} = Cn$.

Proof. 1. e 2. valgono perché, rispettivamente, $Cn_{\vdash}$ e $\vdash_{Cn}$ sono definite sulla base di una relazione di chiusura e di un'operazione di chiusura. Mostro, per esempio, che, per ogni $\Gamma \subseteq Fm$, $\Gamma \subseteq Cn_{\vdash}\Gamma$. Sappiamo che $Cn_{\vdash}\Gamma = \{\phi \in Fm : \Gamma \vdash \phi\}$. Per la proprietà riflessiva, $\Gamma \vdash \phi$ per ogni $\phi \in \Gamma$ quindi $\phi \in Cn_{\vdash}\Gamma$ per ogni $\phi \in \Gamma$, ossia $\Gamma \subseteq Cn_{\vdash}$. Similmente si procede negli altri casi.

Per mostrare che vale 3. procediamo nel modo seguente. Mostro che $f :\vdash\longmapsto Cn_{\vdash}$ è una biiezione da $RCon_{\mathbf{Fm}}$ a $OCon_{\mathbf{Fm}}$. È chiaro che se $Cn_{\vdash}$ e $Cn'_{\vdash}$ sono due operazioni di chiusura definite dalla medesima relazione $\vdash$ per mezzo della condizione in 1. sono uguali, infatti, la condizione che le definisce è la medesima. Similmente si procede per f'.

Mostro, infine, che $\vdash_{Cn_{\vdash}} = \vdash$. Per le condizioni stabilite in 1. e 2., per ogni $\Gamma \subseteq Fm$ e $\phi \in Fm$, $\Gamma \vdash_{Cn_{\vdash}} \phi$ sse $\phi \in Cn_{\vdash}$ sse $\Gamma \vdash \phi$. Similmente si procede nell'altro caso. ■

Un operatore di chiusura Cn è una conseguenza logica sse soddisfa la condizione della strutturalità, analogamente al caso delle relazioni di chiusura. Nel caso delle operazioni di chiusura, la strutturalità è fomrmulata nel modo seguente. Per ogni $\Gamma \subseteq Fm$, per ogni $\sigma \in End(\mathbf{Fm})$

- (S) $\quad \sigma(Cn\Gamma) \subseteq Cn(\sigma\Gamma)$.

La proprietà della strutturalità indica che se $\phi \in \sigma(Cn\Gamma)$, allora $\phi \in Cn(\sigma\Gamma)$. Fare le sostituzioni delle conseguenze di Γ, in altre parole, non aggiunge nulla al fare le conseguenze delle sostituzioni di Γ. Ciò indica che Cn è invariante rispetto alle sostituzioni, infatti, da (S) segue che se $\phi \in Cn(\Gamma)$, allora $\sigma\phi \in Cn(\sigma\Gamma)$, il che (fatte salve le assunzioni di cui si è parlato a proposito della strutturalità) è ciò che è richiesto affinchè siano validi tutti gli argomenti della medesima forma di un argomento valido.

La proprietà della strutturalità si può esprimere, in modo equivalente, anche con la seguente proprietà (S'). Per ogni $\Gamma \subseteq Fm$, per ogni $\sigma \in End(\mathbf{Fm})$

- (S') $\quad Cn(\ \sigma(Cn\Gamma)) = Cn(\sigma\Gamma)$.

Nelle definizioni formulate sopra, si è già fatto uso della notazione $Cn\Gamma$, per indicare la chiusura di Γ rispetto alla relazione di conseguenza $\vdash$. Ora siamo in grado di comprendere meglio il significato di tale notazione e abbiamo visto che i due concetti, relazione di conseguenza ed operatore di conseguenza, così come relazione di conseguenza logica ed operatore di conseguenza logica, sono essenzialmente la stessa cosa. Le definizioni date sopra in termini di relazione di conseguenza possono essere riformulate in termini di operazione di conseguenza. Le più importanti sono:

- ϕ è un teorema della logica $\mathcal{L}$ sse $\phi \in Cn_{\mathcal{L}}(\emptyset)$, l'insieme dei teoremi di $\mathcal{L}$
- ϕ segue da Γ sse $\phi \in Cn\Gamma$
- ϕ segue logicamente da Γ sse $\phi \in Cn\Gamma$ e Cn soddisfa (S)
- $Cn\Gamma$ è l'insieme delle conseguenze di Γ

- un insieme Γ è una teoria di Cn (o di $\mathcal{L}$, dove $\mathcal{L} = \langle \mathbf{Fm}, Cn \rangle$), chiuso rispetto a Cn sse $\Gamma = Cn\Gamma$ e $Th\mathcal{L} = \{Cn\Gamma : \Gamma \subseteq Fm\}$.

Anche le proprietà formulate sopra per mezzo della nozione di conseguenza possono essere espressi per mezzo della nozione di operatore di conseguenza. Le più importante riguardano la cardinalità e la consistenza:

- Cn è detta finitaria sse, per ogni $\Gamma \subseteq Fm$, $Cn\Gamma = \bigcup\{Cn\Delta : \Delta \subseteq_\omega \Gamma\}$ e, più in generale, è detta di cardinalità μ sse $Cn\Gamma = \bigcup\{Cn\Delta : \Delta \subseteq_\mu \Gamma\}$
- un insieme $\Gamma \subseteq Fm$ è consistente rispetto a Cn sse $Cn\Gamma \neq Fm$, altrimenti Γ è inconsistente
- una formula ϕ è una contraddizione (o assurda) rispetto a Cn sse $Cn\{\phi\} = Fm$.

Stabiliamo una relazione $\leq OCon_{\mathbf{Fm}} \times OCon_{\mathbf{Fm}}$ per mezzo della condizione, per ogni $Cn_1, Cn_2 \in OCon_{\mathbf{Fm}}$, $Cn_1 \leq Cn_2$ sse, per ogni $\Gamma \subseteq Fm$, $Cn_1\Gamma \subseteq Cn_2\Gamma$. $\langle OCon_{\mathbf{Fm}}, \leq \rangle$ è un insieme parzialmente ordinato.

1. Per ogni $Cn_1, Cn_2 \in OCon_{\mathbf{Fm}}$ e per ogni $\vdash_1, \vdash_2 \in RCon_{\mathbf{Fm}}$, $\vdash_1 \subseteq \vdash_2$ sse $Cn_1 \leq Cn_2$.
2. Siano $\mathcal{L}_1 = \langle \mathbf{Fm}, Cn_1 \rangle$ e $\mathcal{L}_2 = \langle \mathbf{Fm}, Cn_2 \rangle$ due logiche, per ogni $Cn_1, Cn_2 \in OCon_{\mathbf{Fm}}$ e per ogni $Th\mathcal{L}_1, Th\mathcal{L}_2 \in RCon_{\mathbf{Fm}}$, $\vdash_1 \subseteq \vdash_2$ sse $Cn_1 \leq Cn_2$ (ciò segue dalla proposizione 16).

Definition 26 *Data una famiglia $\mathcal{A}$ di insiemi di formule ($\mathcal{A} \subseteq \wp(Fm)$), definiamo una funzione $Cn_{\mathcal{A}} : \wp(Fm) \to \wp(Fm)$ per mezzo della seguente condizione: per ogni $\Gamma \subseteq Fm$, $Cn_{\mathcal{A}}(\Gamma) = \bigcap\{\Delta \in A : \Gamma \subseteq \Delta\}$.*

- $Cn\mathcal{A}$ è un operatore di conseguenza su Fm
- $Th\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$, dove $\mathcal{P}_{\mathcal{A}} = \langle \mathbf{Fm}, Cn_{\mathcal{A}} \rangle$, è il più piccolo sistema di chiusura che contiene $\mathcal{A}$
- se $\mathcal{A}$ è un sistema di chiusura, allora $Th\mathcal{L}_{\mathcal{A}}, = \mathcal{A}$.

L'operazione di conseguenza $Cn_{\mathcal{A}}$ è la conseguenza determinata da $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}$ è detta la base di chiusura di $Cn_{\mathcal{A}}$.

Proposition 27 *Sia Cn un'operazione di conseguenza su Fm. L'insieme delle teorie relativamente massimali di Cn è una base di chiusura per Cn ed è la più piccola base di chiusura (rispetto a $\subseteq$) per Cn.*

Analogamente a $\langle RCon_{\mathbf{Fm}}, \subseteq \rangle$ e $\langle OCon_{\mathbf{Fm}}, \subseteq \rangle$, anche $\langle Th\mathcal{P}, \subseteq \rangle$ è un reticolo completo. Per ogni famiglia $\mathcal{A}$ di insiemi chiusi rispetto a $\vdash$, conenuta in $\langle Th\mathcal{P}, \subseteq \rangle$, $\inf \mathcal{A} = \bigcap \mathcal{A}$ e $\sup \mathcal{A} = \{\phi \in Fm : \bigcup \mathcal{A} \vdash \phi\}$, ossia la chiusura di $\bigcup \mathcal{A}$ rispetto a $\vdash$. Usando la più comoda notazione $Cn\Gamma$, possiamo affermare i seguenti teoremi.

1. Sia Cn un operatore di chiusura su Fm e sia $Th\mathcal{P} = \langle \mathbf{Fm}, Cn\rangle$. Allora, per ogni $\Gamma \subseteq Fm$, $Cn\Gamma = \bigcap\{T \in Th\mathcal{P} : \Gamma \subseteq T\}$.

2. Sia $\mathcal{C}$ un sistema di chiusura su Fm. Definiamo $Cn : \wp(Fm) \to \wp(Fm)$ come al punto 1 (ossia, per ogni $\Gamma \subseteq Fm$, $Cn\Gamma = \bigcap\{T \in Th\mathcal{P} : \Gamma \subseteq T\}$). Allora $\mathcal{C}$ è l'insieme degli teorie di Fm rispetto a Cn (ossia $\mathcal{C} = Th\mathcal{P}$, dove $\mathcal{P} = \langle \mathbf{Fm}, Cn\rangle$).

Proof. 1. Per definizione $Cn\Gamma \in Th\mathcal{P}$. Per (R), $\Gamma \subseteq Cn\Gamma$, quindi $Cn\Gamma \in \{T \in Th\mathcal{P} : \Gamma \subseteq T\}$. Per ogni $T \in Th\mathcal{P}$, se $\Gamma \subseteq T$, allora $Cn\Gamma \subseteq T = CT$, quindi $Cn\Gamma$ è il più piccolo insieme in $\{T \in Th\mathcal{P} : \Gamma \subseteq T\}$. Segue $Cn\Gamma = \bigcap\{T \in Th\mathcal{P} : \Gamma \subseteq T\}$.

2. Per definizione di sistema chiuso, $Cn\Gamma = \bigcap\{T \in Th\mathcal{P} : \Gamma \subseteq T\} \in \mathcal{C}$, quindi $Cn(Cn\Gamma) = Cn\Gamma$ (Cn soddisfa la proprietà transitiva). È chiaro, poi, che, per ogni $\Gamma, \Delta \in Fm$, $\Gamma \subseteq C\Gamma$ (Cn soddisfa la proprietà riflessiva) e $Cn\Gamma \subseteq Cn\Delta$ se $\Gamma \subseteq \Delta$ (Cn soddisfa la proprietà della monotonia). ■

Theorem 28 *$\langle Th\mathcal{P}, \subseteq\rangle$ è un reticolo completo. Sia $\{Cn\Gamma_i : i \in I\} \subseteq Th\mathcal{P}$. Allora* $\inf Cn\Gamma_i = \bigcap_{i\in I} Cn\Gamma_i$ *e* $\sup Cn\Gamma_i = Cn \bigcup_{i\in I} \Gamma_i$.

Proof. È chiaro che $\langle Th\mathcal{P}, \subseteq\rangle$ sia un insieme parzialmente ordinato. Per definizione di sistema di chiusura, se $\{Cn\Gamma_i : i \in I\} \subseteq Th\mathcal{P}$, allora $\bigcap_{i\in I} Cn\Gamma_i \in Th\mathcal{P}$ ed è, chiaramente, il più grande insieme T tale che $T \in Th\mathcal{P}$ e $T \subseteq Cn\Gamma_i$ per ogni $\Gamma_i \in Th\mathcal{P}$. Da ciò segue $\inf Cn\Gamma_i = \bigcap_{i\in I} Cn\Gamma_i$. Per la definizione 9.3.1, il più piccolo $Z \in Th\mathcal{P}$ tale che, per ogni $i \in I$, $Cn\Gamma_i \subseteq Z$ è $Cn \bigcup_{i\in I} \Gamma_i$. Un tale insieme Z esiste sempre perché Fm è in $Th\mathcal{P}$. Quindi $\sup Cn\Gamma_i = Cn \bigcup_{i\in I} \Gamma_i$. ■

Theorem 29 *Se Cn è un operatore di chiusura finitario, allora $\langle Th\mathcal{P}, \subseteq\rangle$ è un reticolo algebrico e gli elementi compatti di $Th\mathcal{P}$ sono esattamente gli insiemi $Cn\Gamma$ per ogni $\Gamma \subseteq_\omega Fm$.*

9.3.2 Conseguenza logica definita per mezzo di un calcolo sintattico o per mezzo di una semantica

Tradizionalmente, come si è detto, una relazione di conseguenza logica può essere definita per mezzo di un calcolo di natura sintattica, ossia, di assiomi e di un insieme di regole che permettono di trasformare elementi linguistici in altri elementi linguistici. Per definire la nozione di conseguenza logica, in questo caso, si usa la nozione di derivazione (o dimostrazione o deduzione) in un certo calcolo. Come sappiamo, tali calcoli possono essere molto diversi tra loro. Le due tipologie che saranno considerate, sotto, con maggiore attenzione, sono i cosiddetti calcoli alla Hilbert e i calcoli di deduzione naturale. Il carattere comune è che, in entrambi i casi, si manipolano oggetti di natura sintattica, costruiti dagli enunciati del linguaggio (sequenti del tipo $\Gamma \rhd \phi$, dove Γ è un insieme di enunciati e ϕ un enunciato, da non confondere, come vedremo, con ciò che solitamente si intende per sequente e che è spiegato poco sotto) o gli enunciati stessi (calcolo alla Hilbert), e tale manipolazione è di tipo combinatorio, ossia si prendono in considerazione solo tali oggetti linguistici e le loro caratteristiche sintattiche senza considerare oggetti di altra natura.

Occorre almeno ricordare che Gentzen ha proposto anche un altro tipo di calcolo oltre a quello di deduzione naturale e, cioè, il calcolo dei sequenti, dove per sequente, ora, secondo l'uso più comune, si intendono oggetti del tipo $\Gamma \rhd \Delta$, dove Γ e Δ sono entrambi insiemi di enunciati. Dovendo operare una scelta per motivi di spazio, ho deciso di trattare il calcolo della deduzione naturale, che è già stato richiamato anche nell'ultimo capitolo della prima parte di questo lavoro e, per esigenze formali, ho deciso di trattarlo mediante oggetti che sono sequenti di un tipo particolare, ossia con un'unica formula a destra del simbolo $\rhd$. Avrò modo, più avanti, comunque, di spiegare meglio queste nozioni. A questo proposito, prima di proseguire, vorrei almeno accennare alla proposta di D. Scott (cfr. Scott [1974]) di definire la relazione di conseguenza prendendo spunto dai lavori sul calcolo dei sequenti di Getnzen. In quest'ottica la nozione di conseguenza non è più del tipo $\vdash \subseteq \wp()Fm \times Fm$, bensì del tipo $\vdash_S \subseteq \wp(Fm) \times \wp(Fm)$, dove sia compaiono insiemi di formule sia dalla parte delle premesse sia dalla parte della conclusione.

Una relazione di conseguenza logica, però, può anche essere definita per mezzo di una semantica: in tal caso si usa la nozione di interpretazione degli enunciati in *oggetti esterni al linguaggio* e si definisce una nozione di verità che permette di dividere gli enunciati in veri e non veri rispetto ad un'interpretazione in modo da definire la conseguenza logica per mezzo della conservazione della verità dalle premesse alla conclusione. La nozione di interpretazione può fare ricorso ad oggetti non linguistici diversi tra loro: strutture algebriche, strutture in generale (algebre arricchite con relazioni definite sul dominio, per esempio, come nel caso, che vedremo, delle matrici), strutture topologiche, ...

Questa prima caratterizzazione non deve dare l'impressione che la divisione tra i due modi di definire la relazione di conseguenza logica sia sempre netta. In genere, è facile riconoscere quando una presentazione della conseguenza logica è di natura semantica, per il fatto che sono considerati oggetti non lingusitici e che i rapporti tra formule sono definiti in funzione di rapporti tra formule e oggetti di tipo semantico (valori di verità, ...). Non è sempre facile, però, ritenere di natura puramente sintattica certi calcoli, come il metodo dei tableaux, il metodo di risoluzione e il calcolo dei sequenti etichettato (considereremo alcuni esempi di questo tipo). Da un lato sono presentati come calcoli che operano su oggetti ricavati dal linguaggio, ma le loro motivazioni sono chiaramente semantiche e spesso operano su linguaggi estesi, in cui sono stati aggiunti elementi sintattici che fanno le veci di elementi di natura semantica.

Nel seguito assumiamo, per comodità, che l'insieme delle variabili abbia sempre la forma $P = \{p_i : i \in \omega\}$. Non mi soffermerò, poi, a specificare la cardinalità dei simboli in L, quando sono quelli usuali. In questi casi, infatti, anche la cardinalità è quella solita.

Calcoli sintattici

Calcoli alla Hilbert Consideriamo un calcolo $\mathcal{H}_c$ alla Hilbert per la logica enunciativa classica. La nozione di conseguenza logica (ϕ segue logicamente da Γ) è defìnta ricorrendo ad una nozione di derivazione in $\mathcal{H}_c$, definita come una serie S di formle l'ultima della quale è la conclusione della prova. Ogni formula della serie, poi, deve essere giustificata in uno dei tre modi seguenti: o è un assioma o è un'assunzione, ossia una formula nell'insieme Γ delle premesse, o è ottenuta da n formule precedenti per mezzo di una formula n-aria. Un assioma è una formula che è permesso usare in qualsiasi prova in qualsiasi momento, in quanto è considerata una legge logica, dunque valida senza restrizione. Le formule contenute nelle premesse sono, invece, per così dire, assiomi temporanei, in quanto possono essere usate senza restrizioni all'interno della prova in cui valgono come assunzioni.

Il calcolo $\mathcal{H}_c$ è la coppia $\langle Ax, R\rangle$, dove

$Ax \subseteq Fm_{\mathbf{L}_0}$ è l'insieme degli assiomi, ossia di tutte le formule aventi la forma

- $(Ax1)$ $\quad \alpha \to (\beta \to \alpha)$
- $(Ax2)$ $\quad (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$
- $(Ax3)$ $\quad (\neg\beta \to \neg\alpha) \to ((\neg\beta \to \alpha) \to \alpha)$

e R è una regola di deduzione, ossia

- (MP) Modus ponens da α e $\alpha \to \beta$, puoi inferire β

dove α, β e γ sono metavariabili per enunciati .

Definition 30 *Una derivazione (talvolta detta anche prova) in $\mathcal{H}_c$ di una formula ϕ da un insieme Γ di formule è una sequenza finita $\langle \phi_1, ..., \phi_n\rangle$ di formule in cui*

- $\phi_n = \phi$
- per ogni ϕ_i $(1 \leq i \leq n)$, o $\phi_i \in Ax$ o $\phi_i \in \Gamma$ o, per qualche $j, k < i$, ϕ_i è ottenuta da ϕ_j ϕ_k per mezzo di (MP).

Definition 31 *Diciamo che ϕ è derivabile (o provabile) in $\mathcal{H}_c$ da Γ sse esiste una derivazione di ϕ da Γ secondo le modalità stabilite sopra.*

Una prova di $\vdash \phi$, allora è una derivazione in cui tutte le formule della derivazione o sono assiomi o sono ottenuti da formule precedenti per mezzo di (MP). Se esiste una derivazione $\vdash_{\mathcal{H}_c} \phi$, allora, ϕ è detta legge logica rispetto a $\vdash_{\mathcal{H}_c}$.

$\vdash_{\mathcal{H}_c}$ è una relazione di conseguenza, infatti, sono leggi logiche (R), (M) e (T).

Logica come calcolo Lo scopo di questo paragrafo non è quello di fornire un panorama di tutti o i maggiori modi con cui si può definire un calcolo sintattico per la logica enunciativa. Neppure si tratta di fornire un'analisi approfondita dei calcoli che si presentano. Il mio interesse, qui, consiste nel mostrare qualche esempio di questo tipo di formulazioni, mostrando la varietà che si può incontrare in questo campo. In previsione dell'ultimo argomento che intendo trattare, sono più rilevanti i metodi semantici (trattati nel prossimo paragrafo) con cui si può definire una sistema logico.

Abbiamo visto che la definizione di sistema logico data sopra astrae da qualsiasi modo determinato di presentare la relazione di conseguenza logica. Uno di questi modi è, appunto, quello di fornire un calcolo che, prendendo le mosse dagli enti linguistici, definisce una procedura che, gradualmente, conduce dalle premesse alla conclusione. Ci siamo già soffermati, nei capitoli precedenti, a sottolineare la pregnananza di tale approccio e il suo stretto legame, almeno per certi calcoli, con il carattere normativo solitamente attribuito alla logica.

L'esempio riportato sopra mostra un modo paradigmatico di presentare un sistema logico: si definisce una classe di assiomi e si stabiliscono delle operazioni che trasformano alcuni enunciati in un altro enunciato. In tal modo, si affermano delle relazioni tra enunciati, come, per esempio, che da due enunciati della forma α e $\alpha \to \beta$ si può ricavare β. Quete relazioni sono codificate, nell'esempio fornito sopra, sia dagli assiomi sia dalla regola di inferenza. Gli assiomi godono della proprietà di essere legge logica e da essi, per mezzo delle leggi di deduzione, è possibile determinare tutte le formule che gonod della proprietà di essere teorema. La regola del modus ponens, invece, mostra che una certa forma inferenziale è legittima, ossia rappresenta un passaggio dimostrativo valido. Questo metodo, che è stato applicato in un modo esemplare in Frege (1879) e Hilbert-Benays (1934), solitamente, è detto calcolo alla Hilbert. La definizione che fornirò sotto di calcolo alla Hilbert, tuttavia, si discosta in alcuni punti dai sistemi definiti in tali libri. Considererò essenziale il fatto che le regole di deduzione sono regole che permettono di dedurre un enunciato ϕ da un insieme di enunciati Γ, ma ammetterò più regole di quelle che sono state considerate da tali autori e, soprattutto, ammetterò la possibilità di definire regole di inferenza in cui Γ può anche non essere finito.

Il secondo esempio di calcolo che prenderò in considerazione è noto come calcolo di deduzione naturale (che chiamerò anche calcolo alla Getnzen). In tal caso non si considerano formule, ma coppie ordinate $\langle \Gamma, \phi \rangle$, in cui Γ è un insieme di formule e ϕ è una formula. Per chiarezza, scriverò tali coppie usando la medesima notazione usata per le relazioni di conseguenza, ossia $\Gamma \vdash \phi$, e le chiamerò argomenti. Nei calcoli alla Gentzen, invece di manipolare formule come nel caso dei calcoli alla Hilbert, si manipolano coppie di questo tipo e le regole del calcolo permettono di passare da un argomento ad un altro argomento. Un argomento del tipo $\Gamma \vdash \phi$ è logicamente valido sse esiste una successione di argomenti, determinata secondo le regole del calcolo, che si conclude con $\Gamma \vdash \phi$.

Calcoli alla Hilbert Vediamo di definire con più precisione ciò che intendiamo con un calcolo alla Hilbert.

Scopo comune ad ogni calcolo è quello di fornire delle regole che determinino se un certo enunciato ϕ è conseguenza logica di un insieme di enunciati Γ. Uno degli scopi di un calcolo, in altre parole, è quello di fornire delle regole di manipolazione di enti sintattici tali che sia possibile dire se sussiste $\Gamma \vdash \phi$, ossia se è possibile generare ϕ dagli enunciati in Γ per mezzo delle modificazioni strutturali ammesse dalle regole di deduzione. In tal modo, la relazione di conseguenza logica $\vdash$ è specificata dalle regole del calcolo stesso. La realizzazione di un processo che, secondo le regole del calcolo, determina quando $\Gamma \vdash \phi$ è o non è un argomento valido è una prova (altre denominazioni equivalenti sono: dimostrazione, derivazione, inferenza).

Una regola di inferenza alla Hilbert è, allora, una insieme di coppie ordinate $\langle \Gamma, \phi \rangle$ il cui primo membro è un insieme di formule e il cui secondo membro è una formula.

Definition 32 *Una regola di inferenza alla Hilbert è un insieme $R \subseteq \wp(Fm) \times Fm$. Una regola di inferenza alla Hilbert è detta di cardinalità μ sse $R \subseteq \wp_\mu(Fm) \times Fm$ ed è detta finitaria sse $\mu = \omega$, ossia sse $R \subseteq \wp_\omega(Fm) \times Fm$.*

Gli elementi di una regola di inferenza alla Hilbert sono detti inferenze o sequenti e li indico con $\langle \Gamma, \phi \rangle$ oppure, anticipando una notazione che sarà utile soprattutto quando illustrerò le regole dei calcoli naturali, della forma $\Gamma \rhd \phi$. Per affermare che una certa inferenza $\langle \Gamma, \phi \rangle$ appartiene ad una certa regola R, scriverò $\langle \Gamma, \phi \rangle \in R$. Per indicare che la regola R è composta da tutte le esemplicazioni di un certo *schema* di inferenza, scriverò

$$(R): \ \frac{X}{\alpha}$$

dove X e α sono metavariabili per determinati oggetti (non solo formule in generale, ma anche funzioni o particolari tipi di formule, come le variabili proposizionali).

È ammessa anche la possibilità che alcune inferenza in R siano della forma $\langle \emptyset, \phi \rangle$. Inferenze di questo tipo sono dette *inferenze assiomatiche* o *assiomi* e possono essere considerate, in modo più semplice, come insiemi di formule. Talvolta indicherò con Ax una regola di inferenza le cui inferenze siano solo di tipo assiomatico.

Consideriamo l'insieme delle formule Fm generato da $C = \{\rightarrow\}$ e dall'insieme P delle variabili enunciative. Un esempio di regola di inferenza è *modus ponens*:

$MP = \{\langle\{\phi, \phi \to \psi\}, \psi\rangle : \phi, \psi \in Fm\}$.

Un esempio della stessa regola di inferenza definita per mezzo di una schema inferenziale è

$$(MP): \ \frac{\alpha, \alpha \to \beta}{\beta}$$

dove α e β stanno per formule di Fm in generale.

La lettura intuitiva di un'inferenza $\langle\Gamma, \phi\rangle$ contenuta da una regola alla Hilbert è un'istruzione che indica che è possibile inferire ϕ se si dà Γ. Gli elementi di Γ sono le premesse dell'inferenza e ϕ è la conclusione dell'inferenza. Nel caso di MP, tale istruzione consiste nel permettere di derivare una formula β se prima sono stati affermati α e $\alpha \to \beta$. Una regola R può essere considerata, quindi, come un insieme di istruzioni. Possiamo usare queste istruzioni per determinare una relazione di conseguenza logica.

Definition 33 *Sia R una regola. Diciamo che un insieme Γ di formule è chiuso rispetto a R (in simboli $R\Gamma$) sse, per ogni $\Delta \subseteq Fm$ e per ogni $\phi \in Fm$, se $\langle\Delta, \phi\rangle \in R$ e $\Delta \subseteq \Gamma$, allora $\phi \in \Gamma$.*

Proposition 34 *Possiamo definire un operatore di conseguenza per mezzo della seguente condizione: per ogni $\Gamma \subseteq Fm$ e per ogni regola R, $Cn_R(\Gamma) = \bigcap\{\Delta \subseteq Fm : \Gamma \subseteq \Delta$ e $R\Delta\}$.*

Proposition 35 *In modo equivalente possiamo definire $\vdash_R \subseteq \wp(Fm) \times Fm$ come la più piccola relazione di conseguenza su Fm tale che $R \subseteq \vdash$, ossia $\vdash_R = \bigcap\{\vdash \in RCon_{\mathbf{Fm}} : R \subseteq \vdash\}$.*

La definizione 33 e le proposizioni 34 e 35, possono essere generalizzate facilmente al caso in cui, invece di una sola regola R si considera un insieme H di regole alla Hilbert.

Definition 36 *Sia $H = \{R_i : i \in I\}$ e sia, per ogni $i \in I$, R_i una regola. $H \subseteq Fm$ è chiuso rispetto a H (in simboli $H\Gamma$) sse, per ogni $\Gamma \subseteq Fm$ e per ogni $\phi \in Fm$, se, per qualche $R_i \in H$, $\langle\Delta, \phi\rangle \in R_i$ e $\Delta \subseteq \Gamma$, allora $\phi \in \Gamma$.*

Proposition 37 *Per ogni $\Gamma \subseteq Fm$ e per ogni insieme di regole $H = \{R_i : i \in I\}$, $Cn_H(\Gamma) = \bigcap\{\Delta \subseteq Fm : \Gamma \subseteq \Delta$ e $H\Delta\}$. Cn_H è un operatore di conseguenza su Fm.*

$Cn_H\Gamma$ indica, così, il più piccolo insieme che contiene Γ e che è chiuso rispetto a tutte le regole in H.

Proposition 38 *Per ogni $\Gamma \subseteq Fm$, per ogni $\phi \in Fm$ e per ogni insieme di regole $H = \{R_i : i \in I\}$, definiamo $\vdash_H = \bigcap\{\vdash \in RCon_{\mathbf{Fm}} : \bigcup H \subseteq \vdash\}$. $\vdash_H$ è una relazione di conseguenza su Fm e, per ogni $\Gamma \subseteq Fm$ e per ogni $\phi \in Fm$, $\Gamma \vdash_H \phi$ sse $\phi \in Cn_H\Gamma$.*

Se H è un insieme di regole alla Hilbert e $\vdash_H$ è la relazione di conseguenza determinata da H come nella proposizione 38, allora H è detta una base inferenziale per $\vdash_H$ e $\vdash_H$ è detta una relazione di derivabilità. Se $\Gamma \vdash_H \phi$, allora la formula ϕ è detta derivabile dall'insieme di premesse Γ per mezzo di H.

Si noti che ogni insieme di regole H determina univocamente una relazione di conseguenza $\vdash_H$, ma, data una relazione di conseguenza $\vdash$, è possibile trovare differenti insiemi di regole H_i tali che $\vdash = \vdash_{H_i}$. Un esempio è dato dai molteplici modi di definire la logica per mezzo di assiomi e regole. Una possibile base inferenziale è quella fornita nell'esempio sopra e un'altra sarà data sotto.

Definition 39 *Sia H un insieme di regole di inferenza. Siano $\Gamma \subseteq Fm$ e $\phi \in Fm$. Una derivazione di ϕ da Γ per mezzo di H è una una sequenza $\left\langle \phi_1, ..., \phi_\mu \right\rangle$ di formule in cui $\phi_\mu = \phi$ e per ogni ϕ_i ($i \in \mu$) vale uno dei seguenti casi:*

1. $\phi_i \in \Gamma$
2. $\langle \Delta, \phi_i \rangle \in R$ per qualche $R \in H$ e $\Delta \subseteq \{\phi_j : j < i\}$.

Per indicare che vi è una certa derivazione di ϕ da Γ per mezzo di H scriviamo $\Pi_{\mathcal{H}}(\Gamma, \phi)$. $\Pi_{\mathcal{H}}$, quindi, induce una relazione binaria, che indichiamo allo stesso modo ($\Pi_{\mathcal{H}} \subseteq \wp(Fm) \times Fm$) su Fm. Vediamo che $\Pi_H \subseteq \wp(Fm) \times Fm$ è una relazione di conseguenza su Fm.

Definition 40 *Indico con $\mathcal{H}$ il sistema costituito dall'insieme di regole H e dalla relazione $\Pi_{\mathcal{H}}$ di prova per mezzo di H, in simboli $\mathcal{H} = \langle H, \Pi_H \rangle$. $\mathcal{H}$ è un calcolo alla Hilbert.*

Per mostrare l'analogia tra i sistemi logici definiti per mezzo di un calcolo alla Hilbert e la nozione di pre-logica definita sopra, si potrebbe adottare la notazione $\mathcal{H} = \langle \mathbf{Fm}, \Pi_{\mathcal{H}} \rangle$, ma, in pratica, è più utile indicare esplicitamente l'insieme di regole H e lasciare sottointeso l'insieme delle formule (e l'algebra delle formule). Come mostrerò, ad ogni modo, il sistema $\mathcal{H} = \langle \mathbf{Fm}, \Pi_{\mathcal{H}} \rangle$ definisce una pre-logica.

Un'altra notazione che, in pratica, si rivelerà utile è quella in cui si indicano con due insiemi separati gli assiomi (Ax) e le regole non assiomatiche (Inf) e un sistema alla Hilbert è definito come una tripla $\mathcal{H} = \langle Ax, Inf, \Pi_{\mathcal{H}} \rangle$. Nell'esempio di calcolo alla Hilbert dato sopra, per esempio, si sono indicati questi tre elementi in modo distinto.

Si noti che la nozione di calcolo alla Hilbert adottata qui è assai liberale. Non si richiede, per esempio, che l'insieme delle regole (neppure il sottoinsieme degli assiomi) siano ricorsivi, ossia che vi sia un algoritmo che permeta di decidere se una formula è o non è un assioma o se una sequenza di formule è o non è una regola di inferenza. Non si richiede neppure che gli assiomi o le regole di inferenza non assiomatiche siano determinate per sostituzione da insiemi finiti. Queste nozioni non saranno ulteriormente approfondite in questo contesto.

É facile verificare che

Theorem 41 *$\Pi_{\mathcal{H}}$ è una relazione di conseguenza su Fm.*

Vediamo, ora, che la relazione di conseguenza $\vdash_H$ determinata dalla base inferenziale H è equivalente alla relazione di conseguenza determinata dalla nozione di prova.

Theorem 42 *Per ogni $\Gamma \subseteq Fm$ e per ogni $\phi \in Fm$, $\Pi_H(\Gamma, \phi)$ sse $\Gamma \vdash_H \phi$ (ossia $\Pi_H = \vdash_H$).*

Proof. $\Longleftarrow$) Supponiamo $\Gamma \vdash_{\mathcal{H}} \phi$. Per il teorema 41, $\Pi_{\mathcal{H}}$ è una relazione di conseguenza su Fm. Chiaramente $\bigcup H \subseteq \Pi_{\mathcal{H}}$. Per la proposizione 38, quindi, $\vdash_H \subseteq \Pi_{\mathcal{H}}$, ossia, per ogni $\Gamma \subseteq Fm$ e per ogni $\phi \in Fm$, se $\Pi_H(\Gamma, \phi)$, allora $\Gamma \vdash_{\mathcal{H}} \phi$.

$\Longrightarrow$) Supponiamo $\Pi_H(\Gamma, \phi)$. Ogni passaggio in Π_H giustificato per mezzo della condizione 1 della definizione 39, è un argomento valido rispetto a $\vdash_H$ perché $\vdash_H$ soddisfa la proprietà riflessiva. Ogni passaggio in Π_H giustificato per mezzo della condizione 2 della definizione 39, è un argomento valido rispetto a $\vdash_H$ perché $\bigcup H \subseteq \vdash_H$. Ogni successione di passaggi ottenuti per mezzo della condizione 1 o della condizione 2 nella definizione 39 è un argomento valido rispetto a $\vdash_H$ perché $\vdash_H$ soddisfa le proprietà della monotonia e della transitività. ■

Corollary 43 *Sia Γ un insieme di formule. $Cn_H(\Gamma)$ è il più piccolo insieme chiuso rispetto a R che contiene Γ e lo chiamiamo l'insieme chiuso rispetto a H generato da Γ.*

Proof. Segue dal teorema precedente e dalla proposizione 38. ■

Lemma 44 *$Cn_H(\Gamma) = \Gamma$ sse $H\Gamma$.*

Alla luce di questi teoremi non farò differenza tra $\Pi_{\mathcal{H}}$ e $\vdash_H$ e userò la notazione $\Gamma \vdash_H \phi$ per indicare che ϕ è provabile da Γ secondo le regole in H. sulla base di questi risultati è anche possibile affermare, come anticipato sopra, che il sistema $\mathcal{H} = \langle \mathbf{Fm}, \Pi_{\mathcal{H}} \rangle$, equivalente a $\mathcal{L}_H = \langle \mathbf{Fm}, \vdash_H \rangle$ è una logica.

Abbiamo anche il seguente risultato.

Theorem 45 *Per ogni relazione di conseguenza $\vdash$ su un insieme Fm di formule, $\vdash = \vdash_H$ per qualche insieme di regole H.*

Proof. Sia $\vdash$ una relazione di conseguenza su Fm. Definiamo H come l'insieme di tutte le coppie $\langle \emptyset, \phi \rangle$ per ogni $\phi \in Fm$ tale che $\vdash \phi$ e $\langle \Gamma, \phi \rangle$ per ogni $\Gamma \subseteq Fm$ e per ogni $\phi \in Fm$ tale che $\Gamma \vdash \phi$. Sia $\vdash_H$ la relazione di conseguenza su Fm determinata da H. Chiaramente $\vdash = \vdash_H$. ■

Una formulazione equivalente è affermare che ogni calcolo alla Hilbert $\mathcal{H} = \langle \mathbf{Fm}, \Pi_{\mathcal{H}} \rangle$ definisce una pre-logica e che ogni pre-logica $\mathcal{L} = \langle \mathbf{Fm}, \vdash \rangle$ può essere definita come un calcolo alla Hilbert ponendo $\vdash = \vdash_H$.

È possibile, poi, riformulare in un calcolo alla Hilbert $\mathcal{H}$ le nozioni definite nella definizione 9.3.1. Un formula è detta $\mathcal{H}$-inconsistente sse da essa si possono provare, per mezzo di di $\mathcal{H}$, tutte le formule. Un insieme di formule Γ è $\mathcal{H}$-inconsistente sse contiene una formual $\mathcal{H}$-inconsistente. Un insieme Γ di formule è $\mathcal{H}$-triviale sse ogni formula è provabile, per mezzo di $\mathcal{H}$, da $-$. Un calcolo $\mathcal{H}$ è completamente triviale sse permette di derivare ogni formula da ogni insieme di formule ed è detto quasi triviale sse permette di derivare ogni formula da ogni insieme non vuoto. Un calcolo $\mathcal{H}$ è triviale sse è completamente triviale o quasi triviale.

Calcoli alla Hilbert finitari Le definizioni date sopra possono essere relativizzate a quel particolare tipo di calcolo alla Hilbert in cui si considerano solo regole finitarie e in cui le prove sono sequenze finite di formule.

Assumiamo, in altre parole, che tutte le regole $R \in H$ siano del tipo $R \subseteq \wp_\omega(Fm) \times Fm$.

Poniamo, come sopra: per ogni $\Gamma \subseteq Fm$, per ogni $\phi \in Fm$ e per ogni insieme di regole $H = \{R_i : i \in I\}$, $\vdash_H = \bigcap\{\vdash \in RCon_{\mathbf{Fm}} : \bigcup H \subseteq \vdash\}$.

Le seguenti proposizioni si dimostrano in modo analogo alla proposizione 38, al teorema 41 e al teorema 42.

Proposition 46 *Sia H una base inferenziale finitaria. $\vdash_H$ è una relazione di conseguenza finitaria su Fm.*

Definiamo una prova finita nel modo seguente. Sia $\mathcal{H}$ una base inferenziale per $\vdash_H$. Siano $\Gamma \subseteq Fm$ e$\phi \in Fm$. Una prova di ϕ da Γ per mezzo di H è una una sequenza $\left\langle \phi_1, ..., \phi_\mu \right\rangle$ di formule in cui $\phi_\mu = \phi$ e per ogni ϕ_i $(i \in \mu)$ vale uno dei seguenti casi:

1. $\phi_i \in \Gamma$
2. $\langle \Delta, \phi_i \rangle \in R$ per qualche $R \in H$ e $\Delta \subseteq \{\phi_j : j < i\}$.

Per indicare una prova di ϕ da Γ per mezzo di $\mathcal{H}$ scriviamo $\Pi_{\mathcal{H}}(\Gamma, \phi)$. Π_H, quindi, è una relazione binaria tra $\wp(Fm)$ e Fm.

Proposition 47 $\Pi_{\mathcal{H}} \subseteq \wp(Fm) \times Fm$ *è una relazione di conseguenza finitaria su Fm.*

Proposition 48 $\vdash_H = \Pi_{\mathcal{H}}$.

Storicamente, i calcoli che qui sono stati chiamati calcoli alla Hilbert, sono stati calcoli finitari (cfr. Frege 1879, Hilbert-Bernays 1934, Gentzen 1934). Una dei motivi principali di interesse era proprio il fatto che fornivano una nozione di conseguenza dominabile proprio perché finita. Poiché ogni prova è un ente finito, in linea di principio è sempre possibile costruirla e, nel caso vi sia, mostrare che una certa formula ϕ segue dalle premesse in Γ. Se si abbandona la richiesta che tali calcoli siano finiti, si perde questa importante caratteristica.

Strutturalità Per poter definire non solo una relazione di conseguenza su Fm, ma anche una relazione di conseguenza logica, occorre garantire che, data una base inferenziale H, la relazione $\vdash_H$, determinata da H, goda anche della proprietà della strutturalità.

- Sia R una regola di inferenza su Fm. R è *strutturale* (in simboli R^σ) sse, per ogni $\sigma \in End(\mathbf{Fm})$, se $\langle \Gamma, \phi \rangle \in R$, allora $\langle \sigma\Gamma, \sigma\phi \rangle \in R$.
- Sia H un insieme di regole di inferenza. H è strutturale (in simboli H^σ) se ogni $R \in H$ è strutturale (si noti che non si tratta di un bi-implicazione e si confronti la definizione per completare la definizione).
- Un calcolo $\mathcal{H} = \langle H, \Pi_H \rangle$ è strutturale (in simboli $\mathcal{H}^\sigma$) sse H è strutturale.

Lemma 49 *Supponiamo che H^σ sia strutturale. Quindi, se $\Pi_{H^\sigma}(\Gamma, \phi)$, allora $\Pi_{H^\sigma}(\sigma\Gamma, \sigma\phi)$.*

Proposition 50 *Sia H^σ una base inferenziale strutturale. Allora $\vdash_{H^\sigma}$ è una relazione di conseguenza logica.*

Definition 51 *Sia R una regola di inferenza su Fm. R è standard sse, è finitaria e strutturale (in simboli H^σ_ω). In modo analogo, diciamo che H è standard (in simboli R^σ_ω) sse ogni $R \in H$ standard e diciamo che un calcolo $\mathcal{H} = \langle H, \Pi_H \rangle$ è standard ((in simboli $\mathcal{H}^\sigma_\omega$)) sse H è standard.*

Proposition 52 *Sia H una base inferenziale standard. Allora $\vdash_H$ è una relazione di conseguenza logica finitaria.*

Definition 53 *Una regola di inferenza R è detta basica sse, per qualche $R' \subseteq_\omega \wp(Fm) \times Fm$, $R = \{\langle \sigma\Gamma, \sigma\phi \rangle : \sigma \in End(\mathbf{Fm})$ e $\langle \Gamma, \phi \rangle \in R'\}$. in tal caso R' è detto base di R.*

Una regola di inferenza, in altre parole, è detta *basica* sse è determinata da un insieme finito di inferenze e dalle sostituzioni su Fm. L'insieme $\{p, p \to q\}$, dove $p, q \in P$, per esempio, è una base per la regola del modus ponens.

Per ottenere un insieme di inferenze strutturale si può procedere in due modi. Nel primo modo si assume esplicitamente che tutte regole di inferenza siano strutturali, come, per esempio, si è fatto nell'esempio di calcolo alla Hilbert per la logica classica dato sopra. In quel caso ho specificato, di fatto, degli schemi di assiomi e uno schema di regola del modus ponens e ho assunto che ogni esemplificazione di tali schemi era, rispettivamente, un'assioma o una regola di inferenza. Nel secondo modo, invece, si definisce una regola particolare, la regola di sostituzione che afferma che se, i una prova si è dimostrata una formula ϕ, allora si può inferire anche $\sigma\phi$, per ogni $\sigma \in End(\mathbf{Fm})$.

Definition 54 *Chiamiamo regola di sostituzione su Fm, la regola $Sost = \{\langle \phi, \sigma\phi \rangle : \phi \in Fm$ e $\sigma \in End(\mathbf{Fm})\}$.*

Sopra ho definito un insieme di regole di inferenza H strutturale se ogni $R \in H$ è strutturale e ho fatto notare che la condizione affermata non era un bi-implicazione e che, quindi, a rigore, la definizione non era completa. In effetti, ai fini di determinare una relazione di coseguenza logica da una base inferenziale H è indifferente se H contiene solo regole strutturali o se contiene *Sost* tra le sue regole.

Ogni insieme di regole H che contiene *Sost* è, dunque, strutturale.

Definition 55 *Sia H un insieme di regole di inferenza. H è strutturale sse o ogni $R \in H$ è strutturale o $Sost \in H$.*

Mostriamo, riprendendo la dimostrazione di $\phi \to \phi$, data nell'esempio sopra, come è possibile dimostrare $\neg p \to \neg p$ usando una base inferenziale in cui le abbiamo una base di assiomi, una base per il modus ponens e la regola di sostituzione. Più precisamente, sia $\mathcal{H}' = \langle Ax, MP, Sost\rangle$.

Ax è l'insieme composto da:

- $(Ax1)$ $\quad p \to (q \to p)$
- $(Ax2)$ $\quad (p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$
- $(Ax3)$ $\quad (\neg q \to \neg p) \to ((\neg q \to p) \to p)$.

$MP = \{\langle\{p, p \to q\}, q\rangle\}$ e $Sost = \{\langle\phi, \sigma\phi\rangle : \phi \in F \in \sigma \in End(\mathbf{Fm})\}$.

Ecco, per esempio, la derivazione di $\vdash_{\mathcal{H}'} \neg p \to \neg p$. Scrivo prima la regola applicata e le eventuali sostituzioni effettuata nello schema d'assiomi indicato e sotto la formula.

1. (Ax1$(\neg p/p, (\neg p \to \neg p) \to \neg p/q)$)

- $\neg p \to (((\neg p \to \neg p) \to \neg p) \to \neg p)$
2. (Ax2$(\neg p/p, (\neg p \to \neg p) \to \neg p/q, \neg p/r)$)
- $(\neg p \to (((\neg p \to \neg p) \to \neg p) \to \neg p)) \to$
$(\neg p \to (((\neg p \to \neg p) \to \neg p) \to (\neg p \to \neg p)))$

3. (MP 1,2)
- $(\neg p \to ((\neg p \to \neg p) \to \neg p)) \to (\neg p \to \neg p)$

4. (Ax1$(\neg p/p, \neg p \to \neg p/q)$)
- $\neg p \to ((\neg p \to \neg p) \to \neg p)$

5. (MP4,3)
- $\neg p \to \neg p$

Allo stesso modo è possibile dimostrare qualsiasi altro enunciato della forma $\phi \to \phi$. Più in generale, i due sistemi $\mathcal{H}$ (definito nell'esempio) e $\mathcal{H}'$, sono equivalenti dal punto di vista della derivabilità, ossia $\vdash_{\mathcal{H}} = \vdash_{\mathcal{H}'}$. Le formule derivabili per mezzo di $\mathcal{H}$ sono anche derivabili per mezzo di $\mathcal{H}'$ e viceversa.

Esempi di logiche definite per mezzo di un calcolo alla Hilbert Passiamo, ora, a fornire qualche esempio delle nozioni che sono state introdotte sopra[1].

Logica intuizionista Assumiamo i connettivi in $C = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg\}$ e un insieme di variabili proposizionali $P = \{p_i : i \in \omega\}$. Chiamiamo Fm_p l'insieme delle formule generato da P per mezzo di C secondo le usuali regole di formazione.

Sia Ax^{σ}_{I} l'insieme dei seguenti schemi di assiomi (per facilitare la lettura, riducendo le parentesi, si assume che $\wedge$ e $\vee$ leghino più fortemente di $\rightarrow$ e che $\neg$ leghi più fortemente di $\wedge$ e $\vee$):

1. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
2. $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$
3. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$
4. $\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$
5. $\beta \rightarrow \alpha \vee \beta$
6. $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma))$
7. $\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$
8. $\alpha \wedge \beta \rightarrow \beta$
9. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta \wedge \gamma))$
10. $\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)$
11. $(\alpha \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha$.

Poiché ho esposto degli schemi di assiomi, l'insieme Ax^{σ}_{I} è chiuso rispetto alle sostituzioni in Fm_p.

Assumiamo lo schema di regola del modus ponens e lo indichiamo con MP^{σ}. Il sistema $\mathcal{H}_I = \langle Ax^{\sigma}_{I}, MP^{\sigma}\rangle$ è un calcolo della logica intuizionista. La corrispondente relazione di conseguenza $\vdash_{\mathcal{H}_I}$ (nel seguito, più semplicemente, $\vdash_I$) è la relazione di conseguenza logica intuizionista e il corrispondente sistema logico $\mathcal{I} = \langle \mathbf{Fm}_p, \vdash_I\rangle$ è detto logica intuizionista.

Una delle proprietà più importanti della logica intuizionista è il teorema seguente.

Theorem 56 *Per ogni* $\Gamma \subseteq Fm_p$ *e per ogni* $\phi, \psi \in Fm_p$, $\Gamma, \phi \vdash_I \psi$ *sse* $\Gamma \vdash_I \phi \rightarrow \psi$.

[1] Cfr. Pogorzelski, Wojtylak [2008] per una presentazione analoga di questi sistemi.

Chiamiamo *Teorema di deduzione* la direzione $\Longrightarrow$ e *Teorema di distaccamento* la direzione $\Longleftarrow$. Mi riferirò, percio, al teorema 56 come al *Teorema di deduzione e distaccamento* (DDT).

Altre proprietà fondamentali dei connettivi sono espressi dai seguenti teoremi.

Theorem 57 *Per ogni* $\Gamma \subseteq Fm_p$ *e per ogni* $\phi, \psi, \xi \in Fm_p$*:*

1. $\Gamma, \phi, \psi \vdash_I \xi$ sse $\Gamma, \phi \wedge \psi \vdash_I \xi$

2. $\Gamma, \phi \vee \psi \vdash_I \xi$ sse $\Gamma, \phi \vdash_I \xi$ e $\Gamma, \psi \vdash_I \xi$.

Theorem 58 *Per ogni* $\Gamma \subseteq Fm_p$ *e per ogni* $\phi, \psi \in Fm_p$*:*

1. $\Gamma \vdash_I \phi \to \psi$ sse, per ogni $\xi \in Fm_p$, se $\Gamma, \phi \vdash_I \xi$, allora $\Gamma, \psi \vdash_I \xi$

2. $\Gamma \vdash_I \phi \vee \psi$ sse, per ogni $\xi \in Fm_p$, se $\Gamma, \phi \vdash_I \xi$ e $\Gamma, \psi \vdash_I \xi$, allora $\Gamma \vdash_I \xi$

3. $\Gamma \vdash_I \phi \wedge \psi$ sse, per ogni $\xi \in Fm_p$, se $\Gamma, \phi \vdash_I \xi$ o $\Gamma, \psi \vdash_I \xi$, allora $\Gamma \vdash_I \xi$.

Chiamiamo il seguente teorema *Ex falso quodlibet* e lo indichiamo con EFQ.

Theorem 59 *Per ogni* $\Gamma \subseteq Fm_p$ *e per ogni* $\phi \in Fm_p$, $\Gamma \vdash_I \neg\phi$ *sse* $\Gamma, \phi \vdash_I \psi$ *per ogni* $\psi \in Fm_p$.

I teoremi 58 e 59 sono stati formulati come assiomi per detrminare certe proprietà dei simboli logici in Tarski (1930a, pp. 31-32).

È stato dimostrato in Pogorzelski, Słupecki (1960), citato in Pogorzelski, Wojtylak (2008), che la logica intuizonista è il sistema logico su Fm_p più debole che soddisfa i teoremi 58 e 59, ossia, per ogni relazione di conseguenza logica $\vdash$ su Fm_p che soddisfa i teoremi 58 e 59, $\vdash_I \subseteq \vdash$.

Logica classica Assumiamo il medesimo linguaggio della logica intuizionsta e, quindi, il medesimo insieme Fm_p di formule. Definiamo il calcolo $\mathcal{H}_C$ per la logica intuizionsta ponendo $Ax_C = Ax_I \cup \{\neg\neg\alpha \to \alpha\}$ e assumendo, come prima, MP^σ. Sia $\mathcal{H}_C = \langle Ax_I^\sigma, MP^\sigma \rangle$ un calcolo per la logica classica $\mathcal{C} = \langle \mathbf{Fm}_p, \vdash_C \rangle$.

Dalla definizione è immediatamente chiaro che $\vdash_I \subseteq \vdash_C$ e, quindi, valgono tutti i metateoremi dimostrati a proposito della logica intuizionista. Oltre a ciò, la logica classica soddisfa altre importanti proprietà. La più notevole, non soddisfatta dalla logica intuizionsita, è il cosidetto principio del terzo escluso (PTE).

Theorem 60 *Per ogni* $\Gamma \subseteq Fm_p$ *e per ogni* $\phi \in Fm_p$, $\Gamma \vdash_C \phi$ *sse* $\Gamma, \neg\phi \vdash_C \psi$ *per ogni* $\psi \in Fm_p$.

Pogorzelski (1969), citato in Pogorzelski, Wojtylak (2008), ha mostrato che la relazione di conseguenza logica $\vdash_C$ è la più forte tra le relazioni di conseguenza logica su Fm_p che sono consistenti e soddisfano i teoremi 58, 59 e 60. In altre parole, per ogni relazione di conseguenza logica $\vdash$ su Fm_p che soddisfa i teoremi 58, 59 e 60 ed è consistente, $\vdash \subseteq \vdash$. D'altro lato $\vdash_C$ è anche la più piccola relazione di conseguenza logica su Fm_p per cui valgono i teoremi 58, 59 e 60, che, quindi, caratterizzano in modo univoco il sistema $\mathcal{C} = \langle \mathbf{Fm}_p, \vdash_C \rangle$.

È, poi, possibile mostrare che dati i tre calcoli alla Hilbert $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}'$ e $\mathcal{H}_C$ definiscono, in modi alternativi, la medesima relazione di conseguenza logica su un dato insieme di formule, ossia $\vdash_{\mathcal{H}} = \vdash_{\mathcal{H}'} = \vdash_C$.

Logiche modali Avendo definito un calcolo alla Hilbert per la logica intuizionista e un calcolo alla Hilbert per la logica classica, abbiamo già visto come sia possibile passare da un sistema logico ad un altro più forte, aggiungendo uno o più assiomi. Un passaggio del genere è possibile anche aggiungendo regole non assiomatiche, come è facile immaginare. Un tipico esempio in cui si possono definire, in questo modo, sistemi logici progressivamente più potenti riguarda il campo delle logiche modali. Accenno, di seguito, ai tratti essenziali di tali definizioni.

Assumiamo un insieme di connettivi $C = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \Box\}$ e un insieme di variabili proposizionali $P = \{p_i : i \in \omega\}$. Chiamiamo $Fm_\Box$ l'insieme delle formule generato da P per mezzo di C secondo le seguenti regole[2]:

1. $P \subseteq Fm_\Box$
2. se $\phi, \psi \in Fm$, allora $\phi \wedge \psi$, $\phi \vee \psi$, $\phi \rightarrow \psi$, $\neg\phi$, $\Box\phi \in Fm_\Box$.

Sia $Ax^\sigma_\Box$ il seguente insiemi di schemi di assiomi:

1. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
2. $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$
3. $(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow ((\neg\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)$
4. $\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)$.

Sia $H^\sigma_\Box$ l'insieme delle regole, date in forma schematica, che comprede MP e la regola di necessitazione:

$$(Nec)\ \frac{\alpha}{\Box\alpha}.$$

Sia $\mathcal{H}_K = \left\langle Ax^\sigma_\Box, MP^\sigma, Nec, \Pi_{\mathcal{H}_\mathcal{K}} \right\rangle$ un calcolo alla Hilbert e $\vdash_K$ la relazione di conseguenza determinata. Chiamiamo K il sistema logico $\langle \mathbf{Fm}_\Box, \vdash_K \rangle$. Dal punto di vista intuitivo, la lettura di $\Box\phi$ è è necessario che ϕ. Sotto questa assunzione, la lettura intuitiva di $\neg\Box\neg\phi$ è non è necessario che non ϕ che,

[2]Cfr. Sider (2010) per una presentazione analoga dei sistemi di logica modale.

solitamente, si considera equivalente a è possibile che ϕ. Poniamo $\Box =_{def.} \neg\Box\neg$ e consideriamo formule in $Fm_\Box$ anche enunciati della forma $\Diamond\phi$. Ciò non pone alcun problema e facilita di molto l'esposizione.

Proposition 61 *Sia $\vdash_C$ la relazione di conseguenza logica classica definita sopra. Allora $\vdash_C = \vdash_K \cap Fm_p$ e $\vdash_K \Box\phi$ per ogni $\phi \in Fm_p$ tale che $\vdash_C \phi$.*

In K possiamo provare, cioè, che tutte le tautologie classiche sono necessarie. K, tuttavia, è un sistema molto debole, in quanto non possiamo neppure provare che la necessità di un enunciato implica che quell'enunciato è possibile, ossia non possiamo dimostrare $\Box\phi \rightarrow \Diamond\phi$.

Definiamo il calcolo $\mathcal{H}_D$ i cui assiomi sono in $Ax^\sigma_\Box \cup \{\Box\alpha \rightarrow \Diamond\alpha\}^\sigma$ e le cui regole sono MP^σ, Nec. Sia $\vdash_D$ la relazione di conseguenza determinata da $\mathcal{H}_D$. Chiamiamo D il sistema logico $\langle \mathbf{Fm}_\Box, \vdash_T \rangle$. Chiaramente $\vdash_K \subseteq \vdash_D$.

Proposition 62 *Sia $\vdash_C$ la relazione di conseguenza logica classica definita sopra. Allora $\vdash_D \Diamond\phi$ per ogni $\phi \in Fm_p$ tale che $\vdash_C \phi$ e $\vdash_D \neg\Box\phi$ per ogni $\phi \in Fm_p$ tale che $\vdash_C \neg\phi$.*

In D, in altre parole, possiamo mostrare che tutte le tautologie classiche sono possibili e che tutte le contraddizioni classiche non sono necessarie. In D, però, non si può dimsotrare che se un enunciato è necessario, allora è vero, ossia $\Box\phi \rightarrow \phi$. Se lo aggiungiamo agli assiomi di D, otteniamo il sistema T.

Definiamo il calcolo $\mathcal{H}_T$ i cui assiomi sono in $Ax^\sigma_\Box \cup \{\Box\alpha \rightarrow \alpha\}^\sigma$ e le cui regole sono MP^σ, Nec. Sia $\vdash_T$ la relazione di conseguenza determinata da $\mathcal{H}_T$. Chiamiamo T il sistema logico $\langle \mathbf{Fm}_\Box, \vdash_T \rangle$. Chiaramente $\vdash_K \subseteq \vdash_T$ e, benché, dalla definizione, non sia subito chiaro, vale anche $\vdash_D \subseteq \vdash_T$. Tra i teoremi di T, abbiamo $\vdash_T \phi \rightarrow \Diamond\phi$ e $\vdash_T \Box\phi \rightarrow \Diamond\phi$. Finchè lavoriamo con il sistema T non possiamo dire cose particolarmente significative sulle iterazioni degli operatori modali.

Definiamo il calcolo $\mathcal{H}_B$ i cui assiomi sono in $Ax^\sigma_\Box \cup \{\Box\alpha \rightarrow \Diamond\alpha\}^\sigma \cup \{\Box\alpha \rightarrow \alpha\}^\sigma \cup \{\Diamond\Box\phi \rightarrow \phi\}^\sigma$ e le cui regole sono MP^σ, Nec. Sia $\vdash_B$ la relazione di conseguenza determinata da $\mathcal{H}_B$. Chiamiamo B il sistema logico $\langle \mathbf{Fm}_\Box, \vdash_B \rangle$. Chiaramente $\vdash_T \subseteq \vdash_B$. Tra i teoremi significativi di B, cito, come esempio, $\vdash_B \phi \rightarrow \Box\Diamond\phi$.

Definiamo, ora, il sistema $S4$ che, come B, estende T, ma né $S4$ è un'estensione di B nè B è un'estensione di $S4$. Definiamo il calcolo $\mathcal{H}_{S4}$ i cui assiomi sono in $Ax^\sigma_\Box \cup \{\Box\alpha \rightarrow \Diamond\alpha\}^\sigma \cup \{\Box\alpha \rightarrow \alpha\}^\sigma \cup \{\Box\phi \rightarrow \Box\Box\phi\}^\sigma$ e le cui regole sono MP^σ, Nec. Sia $\vdash_{S4}$ la relazione di conseguenza determinata da $\mathcal{H}_{S4}$. Chiamiamo $S4$ il sistema logico $\langle \mathbf{Fm}_\Box, \vdash_{S4} \rangle$. Chiaramente $\vdash_T \subseteq \vdash_{S4}$. Tra i teoremi significativi di $S4$, cito, come esempio, $\vdash_{S4} \Diamond\Diamond\phi \rightarrow \Diamond\phi$.

L'ultimo sistema che espongo è un'estensione di tutti quelli precedenti, anche se, dalla definizione non è immediatamente chiaro che sia un'estensione anche di B e di $S4$ in quanto non ammette tra i suoi assiomi gli assiomi caratteristici, rispettivamente, di B e di $S4$. È, invece, subito chiaro che $S5$ è un'estensione di K, D e T perché assume i loro assiomi.

Definiamo il calcolo $\mathcal{H}_{S5}$ i cui assiomi sono $Ax^{\sigma}_{\Box} \cup \{\Box\alpha \to \alpha\}^{\sigma} \cup \{\Diamond\Box\phi \to \Box\phi\}$ e le cui regole sono MP^{σ}, Nec. Sia $\vdash_{S5}$ la relazione di conseguenza determinata da $\mathcal{H}_{S5}$. Chiamiamo $S5$ il sistema logico $\langle \mathbf{Fm}_{\Box}, \vdash_{S5} \rangle$.

Logiche di Łukasiewicz Assumiamo i connettivi in $C = \{\wedge, \vee, \to, \neg\}$ e un insieme di variabili proposizionali $P = \{p_i : i \in \omega\}$. Chiamiamo Fm l'insieme delle formule generato da P per mezzo di C secondo le usuali regole di formazione.

Fornisco una definizione sintattica di due sistemi di logica, spesso chiamati logiche di Łukasiewicz. Si tratta della logica a infiniti valori di verità, indicata con $\mathcal{L}_{\infty} = \langle \mathbf{Fm}, \vdash_{\infty} \rangle$, e della logica a n-valori, dove $2 \leq n$ di verità, indicata con $\mathcal{L}_n = \langle \mathbf{Fm}, \vdash_n \rangle$[3].

La logica ad infiniti valori di verità è determinata da una calcolo $\mathcal{H}_{\infty}$ la cui regola di inferenza, data in modo schematico, è MP e il cui insieme di assiomi Ax_{∞} comprende esattamente i seguenti schemi di assiomi:

1. $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
2. $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta))$
3. $((\alpha \to \beta) \to \beta) \to ((\beta \to \alpha) \to \alpha)$
4. $\alpha \wedge \beta \to \alpha$
5. $\beta \to \alpha \vee \beta$
6. $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to \beta \wedge \gamma))$
7. $\alpha \to \alpha \vee \beta$
8. $\beta \to \alpha \vee \beta$
9. $(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma))$
10. $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha)$.

Per esporre gli schemi di assiomi della logica ad n-valori, usiamo le seguenti abbreviazioni: (a) $\alpha \to^0 \beta = \beta$ e $\alpha \to^k \beta = \alpha \to (\alpha \to^{k-1} \beta)$, (b) $\alpha \equiv \beta = (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$.

La logica ad n-valori è determinata da un calcolo $\mathcal{H}_n$ a cui regola di inferenza, data in modo schematico, è MP e il cui insieme di assiomi Ax_n, per $2 \leq n$, comprende esattamente gli schemi di assiomi in Ax_{∞} e i seguenti schemi di assiomi:

1. $(\alpha \to^n \beta) \to (\alpha \to^{n-1} \beta)$
2. $(\alpha \equiv (\alpha \to^k \neg\beta)) \to^{n-1} \beta$, per ogni $k \leq n$ take che $\frac{n-1}{k+2} \notin \omega$ ($k + 2$ non è un divisore di $n - 1$ nel campo dei numeri naturali).

[3] Cfr. Pogorzelski, Wojtylak (2008) per una presentazione analoga di questi sistemi.

Proposition 63 $\vdash_\infty = \bigcap\{\vdash_n : 2 \leq n\}$.

Mentre le prprietà della disgiunzione e della congiunzione sono analoghe a quelle dimostrate per la logica classica, le proprietà del connettivo $\rightarrow$ sono particolari.

Proposition 64 *Per ogni* $\Gamma \subseteq Fm$ *e per ogni* $\phi, \psi \in Fm$*:*

1. $\Gamma, \phi \vdash_n \psi$ sse $\Gamma \vdash_n \phi \rightarrow^{n-1} \psi$

2. $\Gamma, \phi \vdash_\infty \psi$ sse, per almeno un $n \in \omega$, $\Gamma \vdash_\infty \phi \rightarrow^n \psi$.

Corollary 65 *Per ogni* $\Gamma \subseteq Fm$ *e per ogni* $\phi, \psi \in Fm$*:*

1. $\Gamma, \phi \vdash_n \psi$ per ogni $\psi \in Fm$, sse $\Gamma \vdash_n \phi \rightarrow^{n-2} \neg\phi$

2. $\Gamma, \phi \vdash_\infty \psi$ per ogni $\psi \in Fm$, sse, per almeno un $n \in \omega$, $\Gamma \vdash_\infty \phi \rightarrow^n \neg\phi$.

Calcoli di deduzione naturale Il tipo di calcolo presentato in questa sezione è stato proposto, per la prima volta, da Jaśkowski [1934] e Gentzen [1935]. Si noti che, qui, con il termine sequente, in maniera differente dall'uso più diffuso, intendiamo semplicemente una coppia ordinata il cui primo membro è un insieme di formule e il cui secondo membro è una formula. Un sequente è, dunque, in questa accezione, un oggetto del tipo $\langle \Gamma, \phi \rangle$, dove $\Gamma \subseteq Fm$ e $\phi \in Fm$, ed è naturale interpretare sequenti di questo tipo come l'affermazione che da Γ segue logicamente ϕ (l'argomento le cui premesso sono gli enunciati in Γ e la cui conclusione è ϕ è logicamente valido). Un sequente $\langle \Gamma, \phi \rangle$ sarà rappresentato così $\Gamma \rhd \phi$. Quel che è importante tenere presente è che ogni coppia rappresenta semplicemente un'esemplificazione di una regola di inferenza. Data una regola di inferenza R, possiamo intendere un sequente come un elemento di tale regola.

Una regola di un calcolo alla Gentzen è una coppia del tipo $R_G = \langle S, \Gamma \rhd \phi \rangle$ in cui S è un insieme di sequenti e $\Gamma \rhd \phi$ è un sequente. Il suo significato intuitivo è che se sono stati affermati i sequenti in S, allora si può affermare il sequente $\Gamma \rhd \phi$. Tenendo presente il legame stabilito sopra con le regole di inferenza, possiamo affermare che una regola di un calcolo della deduzione naturale è un'istruzione per derivare non più formule da insiemi di formule, ma inferenze da insiemi di inferenze precedentemente stabiliti. Il significato di affermare $\Gamma \rhd \phi$ dopo aver affermato le inferenze in S che se si accettano come valide le inferenze in S, allora si deve accettare come valida anche l'inferenza rappresentata da $\Gamma \rhd \phi$. L'obiettivo delle regole di un calcolo della deduzione naturale, comunque, è il medesimo delle regole di un calcolo alla Hilbert: determinare quali inferenze debbono essere considerate corrette. Nel caso di calcoli alla Hilbert si procede passando da insiemi di formule a formule, mentre nel caso di calcoli della deduzione naturale si manipolano direttamente le inferenze. Le inferenze valide sono quelle che sono asserite sulla base delle regole assunte. Le regole di un calcolo della deduzione naturale possono essere viste come regole di un livello superiore a quelle di un calcolo alla Hilbert, nel senso che quelle manipolano queste. Data un insieme H di regole R_H di un calcolo alla Hilbert, una regola R_G, infatti, può essere definita come $R_G \subseteq \wp(\bigcup H) \times H$. Più in generale, formule, regole di un calcolo alla Hilbert e regole di un calcolo della deduzione naturale possono essere viste come gli oggetti iniziale di una gerarchia in cui gli oggetti di un certo livello successivo al primo (le formule) sono ottenuti costruendo da quelli del livello precedente determinando una coppia ordinata il cui primo membro è un insieme di tali oggetti e il cui secondo membro è uno di quegli oggetti. Se le regole di un calcolo alla Hilbert determinano inferenze permettono di trasformare insiemi di formule in nuove formule e le regole di un calcolo alla Gentzen permettono di trasformare insiemi di inferenze in nuove inferenze. Formule, inferenze e sequenti sarebbero, rispettivamente, oggetti di tipo 0, 1 e 2. Oggetti di tipo 3 sarebbero sottoinsiemi di $\wp(\bigcup G) \times G$, dove G è un insieme di regole R_G di un calcolo della deduzione naturale. In questa sede, non mi occuperò oltre di questa possibilità (si veda Moisil (1958) e Moisil (1968), richiamati in Wójcicki (1988, p. 80)).

Un primo esempio di regola di un calcolo della deduzione naturale può essere fornito riformulando il teorema di deduzione, esposto sopra. Chiamiamo regola di deduzione (D) la regola determinata dallo schema

$$(D)\ \frac{X, \alpha \rhd \beta}{X \rhd \alpha \to \beta}$$

dove X rappresenta un generico insieme di enunciati e, come al solito, α e β rappresentano enunciati qualsiasi.

Definition 66 *Sia Fm un insieme di formule. Un sequente è una coppia $\langle X, \alpha \rangle$, dove X è un insieme di formule e α una formula in generale. Una regola R_G di un calcolo della deduzione naturale è un insieme di coppie $\langle S, \langle X, \alpha \rangle \rangle$ un cui $S \subseteq \wp(Fm) \times Fm$ e $\langle X, \alpha \rangle$ sta per un oggetto in $\wp(Fm) \times Fm$. In simboli $R_G = \{\langle S, \langle \Gamma, \phi \rangle \rangle : S \subseteq \wp(Fm) \times Fm, \Gamma \subseteq Fm, \phi \in Fm\}$.*

Come ho già detto, per rappresentare i sequenti scriverò $X \rhd \alpha$ piuttosto che $\langle X, \alpha \rangle$.

Analogamente a quel che abbiamo visto nel caso dei calcoli alla Hilbert, anche ora possiamo avere delle regole in cui S è l'insieme vuoto. Si tratta di regole della forma

$$\frac{\emptyset}{X \rhd \alpha} \text{ o, più semplicemente, } \frac{}{X \rhd \alpha}.$$

Regole di questo tipo sono dette *regole assiomatiche*, o *assiomi*, e indicano che è sempre possibile affermare l'inferenza $X \rhd \alpha$. L'inferenza $X \rhd \alpha$, in altre parole, non è subordinata ad alcuna assunzione di altre inferenze ed è sempre considerata corretta. A volte può essere utile distinguere tali regole da quelle in cui $S \neq \emptyset$. A tale scopo userò l'insieme Ax per raggruppare le regole assiomatiche.

In modo analogo a quel che si è fatto nel caso dei calcoli alla Hilbert, poi, se $\langle S, X \rhd \alpha \rangle$ appartiene ad una regola di un calcolo alla Hilbert, chiamerò gli elementi in S le premesse e $X \rhd \alpha$ la conclusione della regola.

Sia G un insieme di regole R_G. Per definire una relazione di conseguenza $\vdash_G$ su Fm per mezzo di G ricorriamo alla nozione di derivazione per mezzo delle regole in G. Dal punto di vista informale, possiamo dire che, mentre una prova in un calcolo alla Hilbert era una successione di formule determinata per mezzo delle regole che definivano la derivazione e le regole di inferenza, una derivazione in un calcolo della deduzione naturale è una successione di sequenti e, come prima, tale successione deve vincolare certe costrizioni che vedremo subito sotto. Diciamo che un argomento $\Gamma \vdash_{\mathcal{G}} \phi$ è valido sse l'ultimo sequente di una derivazione è $\Gamma \rhd \phi$.

Per rendere più semplice la seguente definizione, usiamo s come abbreviazione per un sequente.

Definition 67 *Sia G un insieme di regole R_G e siano $\Gamma \subseteq Fm$ e $\phi \in Fm$. Una prova di $\Gamma \rhd \phi$ dall'insieme di sequenti Σ per mezzo di G è una successione $\langle s_1, ..., s_\mu \rangle$ di sequenti in cui $s_\mu = \Gamma \rhd \phi$ e, per ogni s_i $(i \in \mu)$,*

1. $s_i \in \Sigma$
2. $\langle S_i, s_i \rangle \in R_G$ per qualche $R_G \in G$ e per qualche $S_i \subseteq \{s_j : j < i\}$.

Per indicare che vi è una certa prova di $\Gamma \rhd \phi$ da Σ per mezzo di G, scriviamo $\Pi_{\mathcal{G}}(\Sigma, \Gamma \rhd \phi)$. Per indicare una prova di $\Gamma \rhd \phi$ per mezzo di G quando Σ è vuoto, scriviamo $\Pi_{\mathcal{G}}(\Gamma \rhd \phi)$. Se $\Pi_{\mathcal{G}}(\Sigma, \Gamma \rhd \phi)$, diciamo che Σ sono le assunzioni della prova $\Pi_{\mathcal{G}}$ e $\Gamma \rhd \phi$ la sua conclusione.

Definition 68 *Indico con $\mathcal{G}$ il sistema cosituito dall'insieme di regole G e dalla nozione $\Pi_{\mathcal{G}}$ di derivazione per mezzo di G, in simboli $\mathcal{G} = \langle G, \Pi_{\mathcal{G}} \rangle$. Chiamiamo $\mathcal{G}$ un calcolo della deduzione naturale.*

Come nel caso del calcolo alla Hilbert, la nozione di calcolo della deduzione naturale qui adottata è assai liberale per gli stessi motivi di prima. Il motivo principale è che non si postula nulla sugli insiemi che compongono le regole: non si richiede che siano regole finitarie, nè che tali regole siano determinate per sostituzione da insiemi finiti e neppure che tali insiemi (sia gli assiomi sia le regole non assiomatiche) siano ricorsivi.

La definizione data sopra è così generale che questa volta non basta per i nostri scopi, ossia per arrivare a definire una relazione di conseguenza logica. Occorre specificare ulteriormente la nozione di calcolo che ci interessa.

Nel seguito userò la notazione $\Gamma, \phi \rhd \psi$ (che ho già sporadicamente usato) come abbreviazione per $\Gamma \cup \{\phi\} \rhd \psi$ e $\Gamma, \Delta \rhd \alpha$ come abbreviazione per $\Gamma \cup \Delta \rhd \alpha$. Seguendo un suggerimento di Wójcicki [1988], pp. 95 sg., formuliamo la seguente definizione.

Definition 69 *Un insieme G di regole è regolare sse tra le sue regole vi sono anche le tre seguenti (date in forma schematica):*

1. (R) Riflessivitià

$$X, \alpha \rhd \alpha$$

2. (M) Monotonia

$$\frac{X \rhd \alpha}{X, Y \rhd \alpha}$$

3. (T) Transitività

$$\frac{\begin{array}{c} X, \beta \rhd \alpha \\ Y \rhd \beta \end{array}}{X, Y}$$

Definition 70 *Un calcolo della deduzione naturale $\mathcal{G} = \langle G, \Pi_{\mathcal{G}} \rangle$ è detto regolare sse il suo insieme G di regole è regolare.*

Definition 71 *Definiamo $\vdash_{\mathcal{G}} \subseteq \wp(Fm) \times Fm)$ per mezzo della condizione: per ogni $\Gamma \subseteq Fm$ e per ogni $\phi \in Fm$, $\Gamma \vdash_{\mathcal{G}} \phi$ sse $\Pi_{\mathcal{G}}(\Gamma \rhd \phi)$.*

Proposition 72 *Sia $\mathcal{G}$ un calcolo alla Gentzen regolare. Allora $\vdash_{\mathcal{G}}$ è una relazione di conseguenza su Fm.*

Nel seguito considererò solo calcoli della deduzione naturale regolari e ometterò di specificarlo ogni volta. Questa scelta deriva dal fatto, come vedremo, di voler assicurare che la relazione di conseguenza definita per mezzo di tali calcoli sia una relazione di chiusura, ossia soddisfi (R), (M) e (T).

Analogamente a quel che accade nel caso del calcolo alla Hilbert, anche con un calcolo alla Gentzen è possibile definire, in modo triviale, qualsiasi relazione di conseguenza $\vdash$. É sufficiente, infatti assumere come regole assiomatiche tutti gli argomenti validi secondo $\vdash$.

Si noti, inoltre, che al di là delle evidenti analogie e delle ovvie differenze tra la definizione di calcolo alla Hilbert e quella di calcolo della deduzione naturale, vi è un'altra importante differenza. Nella definizione 40, il sistema $\mathcal{H} = \langle H, \Pi_{\mathcal{H}} \rangle$ è una pre-logica, in quanto $\Pi_{\mathcal{H}}$ è una relazione di conseguenza sull'insieme delle formule. Il sistema $\mathcal{G} = \langle G, \Pi_{\mathcal{G}} \rangle$, definito sopra, invece, non è una prelogica perché, lavorando con insiemi di sequenti e non con inferenze, non è possibile seguire agevolmente la strada percorsa nel caso del calcolo alla Hilbert. Questo ci ha condotto a dare un'altra definizione di conseguenza.

Calcolo della deduzione naturale finitario La definizione di regola finitaria è più complessa per i calcoli di deduzione naturale rispetto ai calcoli alla Hilbert.

Definition 73 *Una regola R_G è detta finitaria (in simboli R_G^{ω}) sse sono soddisfatte le condizioni seguenti:*

1. $S \subseteq_{\omega} Fm$ per ogni S tale che, per qualche $\Gamma \subseteq Fm$ e per qualche $\phi \in Fm$, $\langle S, \Gamma \rhd \phi \rangle \in R_G$

2. se $\langle\{\Delta_1 \rhd \psi_1, ..., \Delta_n \rhd \psi_n\}, \Gamma \rhd \phi\rangle \in R_G$, allora ci sono $\Delta'_1 \subseteq_\omega \Delta_1, ..., \Delta'_n \subseteq_\omega \Delta_n$ tali che, per ogni $\Delta''_1 \subseteq_\omega \Delta_1, ..., \Delta''_n \subseteq_\omega \Delta_n$, c'è un $\Gamma'' \subseteq_\omega \Gamma$ tale che $\langle\{\Delta'_1 \cup \Delta''_1 \rhd \psi_1, ..., \Delta'_n \cup \Delta''_n \rhd \psi_n\}, \Gamma' \cup \Gamma'' \rhd \phi\rangle \in R_G$.

Un insieme di regole è detto finitario (in simboli G^ω) sse ogni sua regola è finitaria.

Definition 74 *Sia G un insieme di regole R_G e siano $\Gamma \subseteq Fm$ e $\phi \in Fm$. Una prova finita di $\Gamma \rhd \phi$ da Σ per mezzo di G è una successione finita $\langle s_1, ..., s_n\rangle$ di sequenti in cui $s_n = \Gamma \rhd \phi$ e, per ogni s_i $(i < \omega)$,*

1. $s_i \in \Sigma$
2. $\langle S_i, s_i\rangle \in R_G$ per qualche $R_G \in G$ e per qualche $S_i \subseteq \{s_j : j < i\}$.

Indico con $\Pi^\omega_{\mathcal{G}}(\Gamma \rhd \phi)$ il fatto che vi è una prova finita di $\Gamma \rhd \phi$.

Definition 75 *Un calcolo $\mathcal{G} = \langle G, \Pi_{\mathcal{G}}\rangle$ è finitario (in simboli $\mathcal{G}^\omega$) sse ogni regola in G finitaria e $\Pi_{\mathcal{G}}$ è definito come nella definizione 74.*

Proposition 76 *Sia $\mathcal{G}$ un calcolo alla Gentzen regolare. Allora $\vdash_{\mathcal{G}}$ è una relazione di conseguenza finitaria su Fm.*

Strutturalità Per definire la nozione di regola stutturale, occorre fissare alcune notazioni. Se σ è un endomorfismo sull'algebra delle formule **Fm**, allora stabiliamo $\sigma(\Gamma \rhd \phi) = \sigma\Gamma \rhd \sigma\phi$ per ogni $\Gamma \subseteq Fm$ e per ogni $\phi \in Fm$ e $\sigma S = \{\sigma(\Gamma \rhd \phi) : (\Gamma \rhd \phi) \in S\}$. Poniamo, altresì, $\sigma(\langle S, \Gamma \rhd \phi\rangle) = \langle\sigma S, \sigma(\Gamma \rhd \phi)\rangle$.

Definition 77 *Una regola $R_G = \{\langle S_i, \Gamma_i \rhd \phi_i\rangle : i \in \mu\}$ è detta strutturale (in simboli R^σ_G) sse, se $\langle S_i, \Gamma_i \rhd \phi_i\rangle \in R_G$, allora $\langle\sigma S_i, \sigma(\Gamma_i \rhd \phi_i)\rangle \in R_G$. Un insieme di regole è detto strutturale (in simboli G^σ) sse ogni sua regola è strutturale.*

Definition 78 *Una regola R_G è detta standard sse è strutturale e finitaria. Un insieme G di regole è detto standard (in simboli G^s) sse ogni sua regola è standard.*

Definition 79 *La regola di sostituzione (data in forma schematica), nel calcolo dei sequenti, assume la seguente forma*

$$(S): \ \frac{X \rhd \alpha}{\sigma X \rhd \sigma\alpha}$$

Definition 80 *Un calcolo $\mathcal{G}^\sigma = \langle G, \Pi_{\mathcal{G}}\rangle$ è strutturale sse ogni regola in G è strutturale o se la regola di sostituzione è in G.*

Proposition 81 *Sia $\mathcal{G}$ un calcolo alla Gentzen regolare e strutturale. Allora $\vdash_{\mathcal{G}}$ è una relazione di conseguenza logica su Fm.*

Definition 82 *Un calcolo $\mathcal{G} = \langle G, \Pi_{\mathcal{G}}\rangle$ è standard (in simboli $\mathcal{G}^s$) sse G è un insieme standard di regole e $\Pi_{\mathcal{G}}$ è definita come nella definizione 74.*

Proposition 83 *Sia $\mathcal{G}$ un calcolo alla Gentzen regolare e standard. Allora $\vdash_{\mathcal{G}}$ è una relazione di conseguenza logica finitaria su Fm.*

Esempi di logiche definite per mezzo di un calcolo di deduzione naturale Come nel paragrafo precedente, è opportuno fornire alcuni esempi di logiche definite per mezzo di un calcolo di deduzione naturale regolare. Di fatto, poiché sono i sistemi più diffusi, mi limiterò a calcoli regolari e standard. La formulazione dei seguenti esempi è suggerita dalla presentazione di questi calcoli contenuta in Galvan [1997].

Logica enunciativa minimale Assumiamo i connettivi in $C = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg\}$ e un insieme di variabili proposizionali $P = \{p_i : i \in \omega\}$. Chiamiamo Fm l'insieme delle formule generato da P per mezzo di C secondo le usuali regole di formazione[4].

L'insieme J delle regole di derivazione contiente esattamente tutte le esemplificazioni degli schemi delle regole (R), (M) e (T) della definizione 69 e dei seguenti schemi di regole:

1. (I$\wedge$) Introduzione di $\wedge$
$$\frac{\begin{array}{c} X \rhd \alpha \\ Y \rhd \beta \end{array}}{X, Y \rhd \alpha \wedge \beta}$$

2. (E$\wedge$) Eliminazione di $\wedge$
$$\frac{X \rhd \alpha \wedge \beta}{X \rhd \alpha}$$
$$\frac{X \rhd \alpha \wedge \beta}{X \rhd \beta}$$

3. (I$\vee$) Introduzione di $\vee$ nel conseguente
$$\frac{X \rhd \alpha}{X \rhd \alpha \vee \beta}$$
$$\frac{X \rhd \alpha}{X \rhd \beta \vee \alpha}$$

4. ($\vee$I) Introduzione di $\vee$ nell'antecedente
$$\frac{\begin{array}{c} X, \alpha \rhd \gamma \\ Y, \beta \rhd \gamma \end{array}}{X, Y, \alpha \vee \beta \rhd \gamma}$$

5. (I$\rightarrow$) Introduzione di $\rightarrow$
$$\frac{X, \alpha \rhd \beta}{X \rhd \alpha \rightarrow \beta}$$

[4] Cfr. Galvan (1997) per la presentazione di questo insieme di regole.

6. (MP) Modus Ponens

$$\frac{\begin{array}{c} X \rhd \alpha \\ Y \rhd \alpha \to \beta \end{array}}{X, Y \rhd \beta}$$

7. ($J\neg$) Negazione minimale

$$\frac{\begin{array}{c} X, \alpha \rhd \beta \\ Y, \alpha \rhd \neg\beta \end{array}}{X, Y \rhd \neg\alpha}$$

Alcuni derivazioni valide che si possono ottenere per mezzo di J sono le seguenti.

A. (RF) Rafforzamento

$$\beta \rhd \alpha \to \beta$$

Prova

1. $\beta \rhd \beta$	R
2. $\beta, \alpha \rhd \beta$	M
3. $\beta \rhd \alpha \to \beta$	I$\to$

B. (M) Monotonia

$$\frac{X \rhd \beta}{X, \alpha \rhd \beta}$$

Prova

1. $X \rhd \beta$	Assunzione
2. $\alpha \rhd \alpha$	R
3. $X, \alpha \rhd \beta \wedge \alpha$	1,2 - I$\wedge$
4. $X, \alpha \rhd \beta$	3 - E$\wedge$

C. (T) Transitività

$$\frac{\begin{array}{c} X \rhd \alpha \\ X, \alpha \rhd \beta \end{array}}{X, Y \rhd \beta}$$

Prova

1. $Y, \alpha \rhd \beta$	Assunzione
2. $X \rhd \alpha \to \beta$	1 - I$\to$
3. $X \rhd \alpha$	Assunzione
4. $X, Y \rhd \beta$	2,3 - MP

Queste ultime due prove mostrano che l'insieme di regole J', uguale a J tranne per il fatto che non contiene le esemplificazioni di (M) e (T) è equivalente a J, nel senso che tutto ciò che può essere provato usando J può essere provato usando J' e viceversa. Le regole (M) e (T), infatti, possono essere derivate per mezzo delle regole in J'. Al di là di questo accenno, tuttavia, non affronterò il problema di definire in modo rigoroso la nozione di regola derivata.

Mi limito a notare che le regole derivate possono essere usate senza problemi all'interno di una derivazione. Ciò comporterebbe il dovere di modificare opportunamente la nozione di prova, ma, per i nostri scopi, si può considerare il concetto sufficientemente chiaro.

Ciò che mi sembra più istruttivo, ora, è mostrare come, modificando l'insieme delle regole si possano ottenere la logica intuizionista e la logica classica, definite sopra per mezzo di un calcolo alla Hilbert. Per mostrare le differenze tra questi sistemi è utile mostrare, prima, altre due derivazioni.

D. (JDN) Doppia negazione minimale

$$\frac{X \rhd \alpha}{X \rhd \neg\neg\alpha}$$

Prova
1. $X \rhd \alpha$ Assunzione
2. $X, \neg\alpha \rhd \alpha$ M
3. $\neg\alpha \rhd \neg\alpha$ R
4. $X \rhd \neg\neg\alpha$ 2,3 - $J\neg$

E. (PNC) Non contraddizione

$$\rhd \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$$

Prova
1. $\alpha \wedge \neg\alpha \rhd \alpha \wedge \neg\alpha$ R
2. $\alpha \wedge \neg\alpha \rhd \alpha$ 1 - E$\wedge$
3. $\alpha \wedge \neg\alpha \rhd \neg\alpha$ 1 - E$\wedge$
4. $\rhd \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ $J\neg$

Logica intuizionista Assumiamo C, P e Fm come sopra e definiamo l'insieme di regole I. I contiene tutte le regole in J ($J \subseteq I$) e, in più, contiene tutte le esemplificazioni del seguente schema di regola:

1. ($I\neg$) Negazione intuizionista

$$\frac{\begin{array}{c} X \rhd \alpha \\ Y \rhd \neg\alpha \end{array}}{X, Y \rhd \beta}$$

La regola della negazione intuizionista è detta anche Ex falso quodlibet o Regola dello Pseudo-Scoto. La sua presenza marca un netta differenza tra il calcolo minimale e quello intuizionista. Nel secondo, infatti, ma non nel primo, se si derivano due enunciati contraddittori, allora si può inferire qualsiasi altro enunciato. Ciò banalizza teorie inconsistenti perché ogni enunciato diventa conseguenza di quelle teorie. La logica minimale, al contrario è non scotiana o, come più spesso si dice, paraconsistente.

Poiché ogni regola di J è anche una regola di I, chiaramente tutto ciò che è dimostrabile in J è anche dimostrabile in I.

Logica classica Assumiamo C, P e Fm come sopra e definiamo l'insieme di regole C. C contiene tutte le regole in I ($I \subseteq C$) e, in più, contiene tutte le esemplificazioni del seguente schema di regola:

1. ($C\neg$) Negazione classica

$$\frac{\begin{array}{c} X, \neg\alpha \rhd \beta \\ Y, \neg\alpha \rhd \neg\beta \end{array}}{X, Y \rhd \alpha}$$

A. (CDN) Doppia negazione classica

$$\frac{X \rhd \neg\neg\alpha}{X \rhd \alpha}$$

Prova
1. $X \rhd \neg\neg\alpha$ Assunzione
2. $X, \neg\alpha \rhd \neg\neg\alpha$ M
3. $\neg\alpha \rhd \neg\alpha$ R
4. $X \rhd \alpha$ 2,3 - $C\neg$

Anche in questo caso, la definizione del calcolo è ridondante, infatti, potremmo derivare $J\neg$.

B. $J\neg$

$$\frac{\begin{array}{c} X, \alpha \rhd \beta \\ Y, \alpha \rhd \neg\beta \end{array}}{X, Y \rhd \neg\alpha}$$

Prova
1. $X, \alpha \rhd \beta$ Assunzione
2. $\neg\neg\alpha \rhd \neg\neg\alpha$ R
3. $\neg\neg\alpha \rhd \alpha$ 2 - CDN
4. $X, \neg\neg\alpha \rhd \beta$ 1,3 - T
5. $Y, \alpha \rhd \neg\beta$ Assunzione
7. $Y, \neg\neg\alpha \rhd \neg\beta$ 3,5 - T
8. $X, Y \rhd \neg\alpha$ CDN

Per dimostrare agevolmente il principio del terzo escluso, che non vale nella logica intuizionista, occorrono le due seguenti regole derivate:

C. (C) Contrapposizione

$$\frac{X, \alpha \rhd \beta}{X, \neg\beta \rhd \neg\alpha}$$

Prova
1. $X, \alpha \rhd \beta$ Assunzione

2. $\neg\beta \rhd \neg\beta$ R
3. $\alpha, \neg\beta \rhd \neg\beta$ M
4. $X, \neg\beta \rhd \neg\alpha$ 2,3 - $J\neg$

Si noti che la dimostrazione della validità della regola di contrapposizione è valida anche nella logica minimale, infatti per essa si sono usate solo regole presenti anche in J. Le due derivazioni seguenti, invece, valgono nella logica classica, ma non in quella minimale e neppure in quella intuizionista.

D. (E) Esaustione

$$\frac{\begin{array}{c} X, \alpha \rhd \beta \\ X, \neg\alpha \rhd \beta \end{array}}{X, Y \rhd \beta}$$

Prova
1. $X, \alpha \rhd \beta$ Assunzione
2. $X, \neg\beta \rhd \neg\alpha$ 1 - C
3. $Y, \neg\alpha \rhd \beta$ Assunzione
4. $Y, \neg\beta \rhd \neg\neg\alpha$ 3 - C
5. $X, Y \rhd \beta$ 2,4 - $C\neg$

E. (PTE) Terzo escluso

$$\alpha \vee \neg\alpha$$

Prova
1. $\alpha \rhd \alpha$ R
2. $\alpha \rhd \alpha \vee \neg\alpha$ 1 - I$\vee$
3. $\neg\alpha \rhd \neg\alpha$ R
4. $\neg\alpha \rhd \alpha \vee \neg\alpha$ 3 - I$\vee$
5. $\rhd \alpha \vee \neg\alpha$ 2,4 - E

Approccio semantico alla logica

Anche nel campo della semantica, come in quello del calcolo, è difficile fornire delle coordinate che siano, allo stesso tempo, informative e generali. La semantica non è una disciplina uniforme e, come nel precedente paragrafo, il mio scopo è solo quello di indicare alcune situazioni paradigmatiche, soprattutto per mezzo di esempi. Ho detto che la definizione di logica adottata, come coppia che comprende un'algebra delle formule ed una relazione di conseguenza strutturale definita sull'insieme delle formule, astrae dai modi particolari in cui tale relazione è determinata. É possibile distinguere, seppure con le incertezze spiegate sopra, individuare due grandi metodi per definire la relazione di conseguenza logica: un calcolo che manipola elementi sintattici ed una semantica che fa riferimenti ad oggetti al di fuori del linguaggio.

Dal punto di vista semantico, la relazione di conseguenza logica è definita ricorrendo alla nozione di valore di verità e a quella di preservazione dei valori di verità designati dalle premesse alla conclusione. Si definisce un modo per assegnare un valore di verità ad una formula e si definisce la conseguenza logica tra un insieme di enunciati ed un enunciati implementando l'idea che se le premesse godono di un valore di verità designato, allora anche la conclusione gode di uno di tali valori di verità.

Nel caso classico i valori di verità sono due, vero e falso, e il valore designato è solo il vero. In tal modo si cerca di determinare l'idea, che abbiamo già visto sviluppata, tra gli altri, da Bolzano e Tarski, secondo cui se un enunciato segue logicamente da un insieme di enunciati, allora non si dà mai il caso in cui le premesse sono vere e la conclusione falsa. Come vedremo, però, la situazione può essere più complessa e contemplare più di due valori di verità e più di un solo valore designato.

Il modo in cui si giunge, poi, a determinare il valore di verità di una formula può essere molto diverso.

Alla base di molti approcci semantici, tuttavia, si può affermare che vi sia un'impostazione, in senso lato, realista. Intendo dire che l'idea che si sviluppa è che non è sufficiente fermarsi al livello linguistico per determinare il sussistere o meno della relazione di conseguenza logica tra certe premesse ed una certa formula. Occorre, invece, sfruttare il fatto che un linguaggio è uno strumento per comunicare e considerare i significati delle formule coinvolte. Occorre controllare quali sono i significati possibili che queste formule possono ricevere e verificare come si attribuiscono, in tutti questi casi, i valori di verità. Per assegnare un valore di verità alle formule, dopo aver determinato ciò che dicono, occorre confrontare il loro contenuto con la realtà che ospita, tra le altre cose, i contenuti espressi da tali formule.

Quando abbiamo fissato il linguaggio, abbiamo diviso i suoi simboli in logici e non logici. Quando assegniamo un contenuto alle formule, in modo analogo, distinguiamo tra il loro contenuto non logico e loro contenuto logico. Il primo è considerato qualcosa che può e deve cambiare in tutti i modi possibili perché la validità logica di un argomento non deve essere influenzata da questi elementi, considerati non formali. Il secondo, invece, non è influenzato dai cambiamenti e rimane sempre lo stesso in ogni interpretazione.

Dopo aver fissato un linguaggio e l'insieme delle formule, da un lato, e un mondo popolato dai contenuti potenziali di tali formule, occorre specificare come si determina il valore di verità delle formule rispetto a tale mondo e come sia possibile controllare non una situazione sola, ossia un solo assegnamento di contenuto alle formule (e, quindi, una sola determinazione di valore di verità alle formule) rispetto ad un solo mondo che ospita quel contenuto, ma considerare tutti i casi possibili, ossia tutti i contenuti non logici che possono essere attribuiti alla formula e tutti i mondi diversi che possono ospitare tali contenuti.

Abbiamo visto che l'insieme delle formule possiede una struttura determinata: i suoi elementi sono definiti ricorsivamente da elementi primitivi. Poiché il mondo è popolato dai contenuti potenziali delle formule del linguaggio che stiamo esaminando, deve essere possibile, considerando esattamente tali contenuti potenziali, rintracciare in esso la medesima struttura che caratterizza l'insieme delle formule. Nel caso dei linguaggi enunciativi, infatti, vedremo che si procede assegnando un valore di verità alle variabili enunciative e si stabilisce un algoritmo per determinare il valore di verità delle formule complesse. Tale algoritmo, per così dire, ripercorre il processo di generazione sintattico di una formula dalle variabili e lo trasforma in un processo di generazione del valore di verità della formula complessa. Le clausole dell'algoritmo fanno sì che la forma logica determinata dagli elementi del linguaggio sia conservata dal processo di valutazione semantica in modo che ad ogni connettivo del linguaggio corrisponde un'operazione su valori di verità.

Abbiamo già avuto modo, sopra, di evidenziare l'utilità e la naturalità di ricorrere, a questo punto, al concetto di omomorfismo dall'algebra delle formule ad un'algebra dei valori di verità. Il ricorrere alla nozione di omomorfismo, come spiegato sopra, è naturale in quanto quel che si vuole operare, valutando semanticamente le formule, è esattamente trasferire la forma linguistica nel mondo dei valori di verità (o, più in generale, dei contenuti possibili delle formule).

Lo stesso ragionamento si applica anche ai linguaggi predicativi. Consideriamo, per esempio, un linguaggio del primo ordine in cui compaiano, come simboli non logici, costanti, funzioni di varia arietà e relazioni di varia arietà e, come simboli logici, gli usuali connettivi, il simbolo per l'identità e i gli usuali quantificatori. Vedremo in dettaglio una definizione di semantica per tale linguaggio, ma si può notare già ora che alla forma linguistica corrispondono dei modelli che hanno un contenuto per ogni elemento sintattico: alle costanti del linguaggio corrispondono elementi di un dominio, alle funzioni n-arie corrispondono operazioni n-arie sul dominio e così via.

Abbiamo già avuto modo di discutere (soprattutto quando abbiamo considerato le critiche di Etchemendy a Tarski) i problemi filosofici posti da questa impostazione. Quel che mi interessa, ora, è richiamare gli aspetti che la caratterizzano e mostrare come si riflettono nelle scelte tecniche che si compiono per dare una veste formale a questo concezione.

L'idea alla base di molte caratterizzazioni formali della relazione di conseguenza logica è che il valore di verità di una formula, dunque, sia determinato da due fattori: il contenuto di quella formula e un certo rapporto (non sempre di adeguazione) tra quel contenuto e il mondo che lo ospita. Il contenuto di una formula, ossia ciò che dice, è, a sua volta, determinato da elementi considerati logici ed elementi considerati non logici. Per valutare il sussistere o meno della relazione di conseguenza logica tra le premesse e la conclusione, occorre, osservare come si attribuiscono i valori di verità alle premesse e alla conclusione al variare sia dei possibili contenuti non logici della formula sia del mondo che li ospita.

Diversi modi, in pratica, di distinguere i simboli logici da quelli non logici, di determinare quali sono i possibili contenuti che possono essere attribuiti ai simboli non logici, qual è il contenuto fisso dei simboli logici, quali sono i diversi modi in cui si può presentare un mondo che ospita i possibili contenuti delle formule e quale sia il criterio con cui si devono attribuire i valori di verità alle formule dopo aver determinato il loro contenuto e il mondo rispetto a cui compiere la valutazione, daranno vita a sistemi semantici anche assai differenti tra loro.

In questo modo, si tenta di fornire un sistema che precisi ciò che si intende dire quando si afferma che un enunciato è conseguenza logica di un insieme di enunciati sse è vero (o, più in generale, ha un valore designato), ogniqualvolta le premesse sono vere (o hanno un valore designato). Il sistema semantico, infatti, permette un'esatta determinazione di ciò che si intende per contenuto e per variazione di contenuto, per mondo che ospita tale contenuto e per variazione di tale mondo e di come si attribuisce un valore di verità. I contenuti degli enunciati, il mondo che li ospita e le loro rispettive variazioni ricevono una presentazione matematica che rende esplicite le scelte (e, quindi, anche i limiti di tali scelte) che si adottano.

Un esempio, di tali scelte e di limiti ad esse collegate, è quell'aspetto fondamentale della logica classica secondo cui, adottando la terminologia di Frege, il senso di un enunciato non è preso considerazione, mentre ci si concentra sul significato di tale enunciato. Si dice anche, che la logica classica non si curi dell'intensione, ossia del pensiero espresso, di un enunciato e che consideri solo la sua estensione, ossia il suo valore di verità. Il processo inferenziale, quindi, è spiegato solo nei termini delle estensioni degli enunciati. A livello enunciativo, ciò comporta che due enunciati che esprimono pensieri diversi, come 8 è un numero pari e Milano è in Italia, sono equivalenti (nel senso che il loro contributo al processo inferenziale è il medesimo) se hanno il medesimo valore di verità. Non è, qui, il caso di discutere a fondo specifiche scelte di certe semantiche. Ho solo voluto richiamare alcuni aspetti caratteristici di molte imprese volte a determinare semanticamente la relazione di conseguenza logica.

Ritengo opportuno fornire con un cospicuo numero di esempi, relativi non solo a linguaggi enunciativi.

Logica enunciativa classica Assumiamo i connettivi in $C = \{\wedge, \vee, \neg, \bot, \top\}$ e un insieme di variabili enunciative $P = \{p_i : i \in \omega\}$. Chiamiamo Fm l'insieme delle formule generato da P per mezzo di C secondo le usuali regole di formazione.

Possiamo definire la semantica della logica enunciativa classica in molti modi.

Algebra dei valori di verità Come è già stato anticipato, nella logica classica, l'unico aspetto considerato rilevante per studiare il processo argomentativo è l'estensione di un enunciato, ossia il suo valore di verità e i valori di verità sono due, il vero e il falso. Possiamo, dunque, immaginare che le variabili proposizionali, dal punto di vista semantico, siano identificate con dei valori di verità. I connettivi in C possono essere considerati come operazioni su sui valori di verità, dette anche funzioni di verità. É possibile formalizzare tutte queste operazioni per mezzo di un'algebra, detta algebra dei valori di verità. Sia $\mathbf{2} = \langle 2, \wedge^{\mathbf{2}}, \vee^{\mathbf{2}}, \neg^{\mathbf{2}}, 0, 1 \rangle$ un'algebra di tipo C. $2 = \{0, 1\}$ è il dominio dell'algebra e 0 e 1 sono i valori di verità: 0 rappresenta il falso e 1 il vero. Le funzioni di $\mathbf{2}$ sono definite dalle seguenti tabelle ($t, t' \in 2$):

t	t'	$t \wedge^{\mathbf{2}} t'$	$t \vee^{\mathbf{2}} t'$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

t	$\neg^{\mathbf{2}} t$
1	0
0	1

2 è un'algebra di Boole.

Un *assegnamento* è una funzione $\nu : P \to 2$ che attribuisce un valore di verità ad ogni variabile enunciativa. Poiché $\mathbf{Fm}$ è un'algebra libera di tipo C, ogni assegnamento può essere esteso in modo univoco ad un omomorfismo $h : \mathbf{Fm} \to \mathbf{2}$, che chiamiamo *valutazione*, nel seguente modo. Per ogni $p \in P$ e per ogni $\phi \in Fm$:

- $h(p) = \nu(p)$
- $h(\bot) = 0$
- $h(\top) = 1$
- $h(\neg\phi) = \neg^{\mathbf{2}} h(\phi)$
- $h(\phi \wedge \psi) = h(\phi) \wedge^{\mathbf{2}} h(\psi)$
- $h(\phi \vee \psi) = h(\phi) \vee^{\mathbf{2}} h(\psi)$.

h può essere esteso ad insiemi Δ di formule nel modo solito: $h(\Delta) = \{h(\phi) : \phi \in \Delta\}$. Diciamo che ϕ è vera rispetto a h e che h è modello di ϕ (in simboli, $h \Vdash \phi$) sse $h(\phi) = \{1\}$. Se $h(\Delta) \subseteq 1$ diciamo che h è modello di Δ o, in modo equivalente, che h soddisfa Δ (ossia $h \Vdash \psi$ per ogni $\psi \in \Delta$).

Diciamo che una formula ϕ è valida (in simboli, $\models_{\mathbf{2}} \phi$) sse, per ogni $h \in Hom(\mathbf{Fm}, \mathbf{2})$, $h(\phi) = 1$. Una formula ϕ è una contraddizione sse, per ogni $h \in Hom(\mathbf{Fm}, \mathbf{2})$, $h(\phi) \neq 1$. Due formule ϕ e ψ sono equivalenti sse $h(\phi) = h(\psi)$ per ogni $h \in Hom(\mathbf{Fm}, \mathbf{2})$. Due formule ϕ e ψ sono equivalenti rispetto ad un insieme Δ di enunciati sse $h(\Delta \cup \{\phi\}) = h(\Delta \cup \{\psi\})$ per ogni $h \in Hom(\mathbf{Fm}, \mathbf{2})$.

Una formula ϕ è conseguenza logica di un insieme di formule Δ (in simboli, $\Delta \models_{\mathbf{2}} \phi$) sse, se $h(\Delta) \subseteq 1$, allora $h(\phi) = 1$. Una definizione equivalente di conseguenza logica, che sarà utile per trattare le logiche a più valori di verità, è la seguente:ϕ è conseguenza logica di Δ sse, se $\bigwedge h(\Delta) \leq h(\phi)$.

Definiamo, ora, la funzione $Mod : Fm \to \wp(Hom(\mathbf{Fm}, \mathbf{2}))$ tale che $Mod(\phi) = \{h \in Hom(\mathbf{Fm}, \mathbf{2}) : h \Vdash \phi\}$.

Mod è estesa ad insiemi Δ di formule per mezzo della condizione $Mod(\Delta) = \{h \in Hom(\mathbf{Fm}, \mathbf{2}) : h(\Delta) \subseteq 1\}$.

É immediato verificare che, per ogni $p \in P$ e per ogni $\phi \in Fm$, valgono:

- $Mod(\bot) = \emptyset$
- $Mod(\top) = Hom(\mathbf{Fm}, \mathbf{2})$
- $Mod(\neg\phi) = (Mod(\phi))'$

- $Mod(\phi \wedge \psi) = Mod(\phi) \cap Mod(\psi)$
- $Mod(\phi \vee \psi) = Mod(\phi) \cup Mod(\psi)$.

Algebra dei modelli Possiamo dare una presentazione equivalente della semantica della logica manipolando non valori di verità, ma direttamente i modelli. Questa presentazione, che non è altro che la precedente procedura rovesciata, è poco usuale per la logica classica, ma anticipa elementi che sono usati per definire la semantica dei linguaggi modali e dei linguaggi del primo ordine e svilupparla ora permette di avanzare alcune osservazioni.

Consideriamo l'algebra $\mathbf{Mod} = \langle \wp(Hom(\mathbf{Fm}, \mathbf{2})), \cap, \cup, ', \emptyset, Hom(\mathbf{Fm}, \mathbf{2})\rangle$. $\mathbf{Mod}$ è un'algebra di Boole.

Sia $Mod : P \to \wp(Hom(\mathbf{Fm}, \mathbf{2}))$ tale che $Mod(p) = \{h \in Hom(\mathbf{Fm}, \mathbf{2}) : h(p) = 1\}$. Estendiamo tale funzione all'omomorfismo (indicato nello stesso modo) $Mod : \mathbf{Fm} \to \mathbf{Mod}$ nel modo seguente. Per ogni $p \in P$ e per ogni $\phi \in Fm$:

- $Mod(p) = g(p)$
- $Mod(\bot) = \emptyset$
- $Mod(\top) = Hom(\mathbf{Fm}, \mathbf{2})$
- $Mod(\neg\phi) = (Mod(\phi))'$
- $Mod(\phi \wedge \psi) = Mod(\phi) \cap Mod(\psi)$
- $Mod(\phi \vee \psi) = Mod(\phi) \cup Mod(\psi)$.

Diciamo che una formula ϕ è vera rispetto ad un omomorfismo h sse $h \in Mod(\phi)$.

Una formula ϕ è valida sse $Mod(\phi) = Hom(\mathbf{Fm}, \mathbf{2})$. Una formula ϕ è un contraddizione sse $Mod(\phi) = \emptyset$. Due formule ϕ e ψ sono equivalenti sse $Mod(\phi) = Mod(\psi)$. Due formule ϕ e ψ sono equivalenti rispetto ad un insieme Δ di enunciati sse $Mod(\Delta \cup \{\phi\}) = Mod(\Delta \cup \{\psi\})$.

Diciamo, poi, che una formula ϕ è *conseguenza logica* di un insieme di formule Δ sse $Mod(\Delta) \subseteq Mod(\phi)$.

Le condizioni che, nell'esempio precedente, erano derivate dalla nozione di omomorfismo dall'algebra delle formule all'algebra dei valori di verità, qui sono assunte come primitive. Poiché questa costruzione è il converso della precedente, è, ora, possibile ricavare la nozione di valutazione.

Per ogni $h \in Hom(\mathbf{Fm}, \mathbf{2})$ e per ogni $\phi \in Fm$, $h(\phi) = 1$ sse $h \in Mod(\phi)$. É immediato verificare che, per ogni $p \in P$ e per ogni $\phi \in Fm$, valgono:

- $h(\bot) = 0$
- $h(\top) = 1$
- $h(\neg\phi) = \neg^{\mathbf{2}} h(\phi)$

- $h(\phi \wedge \psi) = h(\phi) \wedge^{\mathbf{2}} h(\psi)$
- $h(\phi \vee \psi) = h(\phi) \vee^{\mathbf{2}} h(\psi)$.

Enunciare la semantica della logica enunciativa classica in termini di algebra dei modelli non è usuale e sembra solo un modo meno intuitivo di trattare ciò che si può dire, in modo equivalente, con l'algebra dei valori di verità. Questa seconda presentazione, però, suggerisce la seguente generalizzazione.

Invece di considerare come possibili modelli gli omomorfismi dall'algebra delle formule all'algebra dei valori di verità, consideriamo un insieme S di stati possibili. Gli stati possibili rappresentano le situazioni che rendono vero o falso un enunciato. Consideriamo, ora, l'algebra $\wp(\mathbf{S}) = \langle \wp(S), \cap, \cup, ', \emptyset, S \rangle$. Chiamiamo $\wp(\mathbf{S})$ l'algebra degli stati possibili e assumiamo una funzione $g_S : P \rightarrow \wp(S)$, detta assegnamento in S, che attribuisce ad una variabile enunciativa un insieme di stati in S. La funzione assegnamento, intuitivamente, attribuisce ad ogni variabile enunciativa l'insieme di stati in S in cui è vera. Chiamiamo sistema di stati possibili la struttura $\langle \wp(\mathbf{S}), g_s \rangle$.

Possiamo definire, come sopra, una funzione $Mod_{g_S} : \mathbf{Fm} \rightarrow \wp(\mathbf{S})$, detta valutazione in S. Mod_{g_S} è un omomorfismo dall'algebra delle formule all'algebra degli stati possibili $\wp(S)$. Per ogni $p \in P$ e per ogni $\phi \in Fm$:

- $Mod_{g_S}(p) = g_S(p)$
- $Mod_{g_S}(\bot) = \emptyset$
- $Mod_{g_S}(\top) = S$
- $Mod_{g_S}(\neg\phi) = (Mod_{g_S}(\phi))'$
- $Mod_{g_S}(\phi \wedge \psi) = Mod_{g_S}(\phi) \cap Mod_{g_S}(\psi)$
- $Mod_{g_S}(\phi \vee \psi) = Mod_{g_S}(\phi) \cup Mod_{g_S}(\psi)$.

Diciamo che una formula ϕ è vera in uno stato $s \in S$ rispetto a g sse $s \in Mod_{g_S}(\phi)$ e scriviamo $s \Vdash_g \phi$. Estendiamo Mod_{g_S} a insiemi di formule nel modo solito: $Mod_{g_S}(\Delta) = \{Mod_{g_S}\phi : \phi \in \Delta\}$.

Una formula ϕ è valida in $\langle \wp(\mathbf{S}), g_s \rangle$ sse $Mod_{g_S}(\phi) = S$. Una formula ϕ è un contraddizione in $\langle \wp(\mathbf{S}), g_s \rangle$ sse $Mod_{g_S}(\phi) = \emptyset$. Due formule ϕ e ψ sono equivalenti in $\langle \wp(\mathbf{S}), g_s \rangle$ sse $Mod_{g_S}(\phi) = Mod_{g_S}(\psi)$. Due formule ϕ e ψ sono equivalenti in $\langle \wp(\mathbf{S}), g_s \rangle$ rispetto ad un insieme Δ di enunciati sse $Mod_{g_S}(\Delta \cup \{\phi\}) = Mod_{g_S}(\Delta \cup \{\psi\})$.

Sia $\Bbbk$ la classe di tutte le strutture $\langle \wp(\mathbf{S}), g_s \rangle$. Diciamo che una formula ϕ è valida sse $Mod_{g_S}(\phi) = S$ per ogni struttura $\langle \wp(\mathbf{S}), g_s \rangle \in \Bbbk$. Una formula ϕ è un contraddizione sse $Mod_{g_S}(\phi) = \emptyset$ per ogni struttura $\langle \wp(\mathbf{S}), g_s \rangle \in \Bbbk$. Due formule ϕ e ψ sono equivalenti sse $Mod_{g_S}(\phi) = Mod_{g_S}(\psi)$ per ogni struttura $\langle \wp(\mathbf{S}), g_s \rangle \in \Bbbk$. Due formule ϕ e ψ sono equivalenti sse $Mod_{g_S}(\Delta \cup \{\phi\}) = Mod_{g_S}(\Delta \cup \{\psi\})$ per ogni struttura $\langle \wp(\mathbf{S}), g_s \rangle \in \Bbbk$.

Diciamo che un formula ϕ è conseguenza logica di un insieme di formule Δ sse $Mod_{g_S}(\Delta) \subseteq Mod_{g_S}(\phi)$ per ogni struttura $\langle \wp(\mathbf{S}), g_s \rangle \in \Bbbk$.

É facile comprendere come tutti e tre i sistemi semantici definiscano la medesima relazione di conseguenza logica (e le medesime nozioni di validità, contraddittorietà ed equivalenza).

Stati possibili Consideriamo ancora una quarta presentazione[5], che è una variazione della precedente, perché ci permette di esporre alcune tecniche sulle quali svolgerò alcune considerazioni poco sotto.

Sia $C = \{\neg, \wedge\}$ l'insieme dei connettivi e $P = \{p_i : i \in \omega\}$ l'insieme delle variabili enunciative. Chiamiamo Fm l'insieme delle formule generato da P per mezzo di C secondo le usuali regole di formazione.

Uno stato possibile è una coppia $\langle S, g\rangle$, dove S è un insieme non vuoto e $g_S : P \to \wp(S)$ è una funzione, detta assegnamento in S, che attribuisce insiemi di mondi alle variabili enunciative. La classe dei sistemi di stati possibili è $\mathbf{S} = \{\langle S, g\rangle : S \neq \emptyset \text{ e } g : P \to \wp(S)\}$. Sia $\langle S, g\rangle \in \mathbf{S}$, $s \in S$ e $\phi, \psi \in Fm$. Per ogni $\langle S, g\rangle \in \mathbf{S}$, definiamo la relazione $\Vdash_{g_s} \subseteq S \times Fm$ nel modo seguente. Per ogni $s \in S$, per ogni $p \in P$ e per ogni $\phi \in Fm$:

- $s \Vdash_{g_s} p$ sse $s \in g(p)$
- $s \Vdash_{g_s} \neg\phi$ sse $s \nVdash_{g_s} \phi$
- $s \Vdash_{g_s} \phi \wedge \psi$ sse $s \Vdash_{g_s} \phi$ e $\Vdash_{g_s} \psi$.

Come è noto, gli altri connettivi si possono definire sulla base dei precedenti e non occorre soffermarsi, qui, su ognuno di essi.

Diciamo che una formula ϕ è vera in uno stato $s \in S$ rispetto ad un assegnamento g sse $s \Vdash_g \phi$. In tal caso, diciamo che s è modello di ϕ rispetto a g_S.

Come sopra, definiamo $Mod_{g_s}(\phi) = \{s \in S : s \Vdash_{g_s} \phi\}$.

Una formula ϕ è valida in $\langle S, g\rangle$ sse $Mod_{g_s}(\phi) = S$.

Una formula ϕ è valida in S sse $Mod_{g_s}(\phi) = S$ per ogni $g : P \to \wp(S)$.

Una formula ϕ è valida(in simboli $\models_{\mathbf{S}} \phi$) sse è valida in ogni sistema di stati possibili $\langle S, g\rangle \in \mathbf{S}$. In modo analogo si definiscono contraddittorietà, equivalenza ed equivalenza rispetto ad un insieme di formule.

Una formula ϕ è conseguenza logica di un insieme Δ di formule (in simboli $\Delta \models_{\mathbf{S}} \phi$) sse, per ogni sistema di stati possibili $\langle S, g\rangle \in \mathbf{S}$ e per ogni $s \in S$, se $s \Vdash_{g_S} \psi$ per ogni $\psi \in \Delta$, allora $s \Vdash_{g_W} \phi$. In modo equivalente, possiamo dire che ϕ è conseguenza logica di Δ sse, per ogni $\langle S, g\rangle \in \mathbf{S}$ e per ogni $s \in S$, $Mod_{g_s}(\Delta) \subseteq Mod_{g_s}(\phi)$.

Logica modale enunciativa Gli esempi, appena forniti, di semantiche per la logica enunciativa classica, possono essere adattati anche ad altri sistemi logici.

Cominciano dalle semantiche per le logiche modali. Sia $C_\Diamond = \{\wedge, \neg, \Diamond, \}$ l'insieme dei connettivi modali e $P = \{p_i : i \in \omega\}$ l'insieme delle variabili

[5] Cfr. Nèmeti, Andréka, 1994, pp. 401 sg.

enunciative. Chiamiamo $Fm_\Diamond$ l'insieme delle formule generato da P per mezzo di $C_\Diamond$ secondo le usuali regole di formazione.

Consideriamo un insieme W di mondi possibili ed una relazione $R \subseteq W^2$ di accessibilità tra mondi. Sia $g_W : P \to \wp(W)$ un assegnamento in W. Chiamiamo sistema di mondi possibili la struttura $\langle W, R, g_W \rangle$. La classe dei sistemi di mondi possibili è $\mathbf{W} = \{\langle W, R, g_W \rangle : W \neq \emptyset \text{ e } g : P \to \wp(W)\}$. Per ogni $\langle W, g_W \rangle \in \mathbf{W}$, definiamo la relazione $\Vdash_{g_W} \subseteq W \times Fm$ come nel caso classico immediatamente precedente e aggiungiamo la seguente clausola. Per ogni $w \in W$ e per ogni $\phi \in Fm$:

- $w \Vdash_{g_W} \Diamond\phi$ sse, per almeno un w', wRw' e $w' \Vdash_{g_W} \phi$.

Possiamo definire $\Box\phi := \neg\Diamond\neg\phi$. Da ciò, otteniamo, che per ogni $w \in W$ e per ogni $\phi \in Fm$:

- $w \Vdash_{g_W} \Box\phi$ sse, per ogni $w' \in W$, wRw' e $w' \Vdash_{g_W} \phi$.

Sia $Mod_{g_W}(\phi) = \{w \in W : w \Vdash_{g_W} \phi\}$. Le definizioni dei vari concetti di validità, contraddittorietà, equivalenza e conseguenza logica è data come sopra. I casi più notevoli sono i seguenti.

Una formula ϕ è valida in $\langle W, g_W \rangle$ (in simboli $\vDash_{\langle W, g_W \rangle} \phi$) sse $Mod_{g_W}(\phi) = W$. Una formula ϕ è valida (in simboli $\vDash_{\mathbf{W}} \phi$) sse è valida in ogni sistema di mondi possibili $\langle W, g_W \rangle \in \mathbf{W}$. Una formula ϕ è conseguenza logica di un insieme Δ di formule (in simboli $\Delta \vDash_{\mathbf{W}} \phi$) sse, per ogni $\langle W, g_W \rangle \in \mathbf{W}$ e per ogni $w \in W$, $Mod_{g_W}(\Delta) \subseteq Mod_{g_W}(\phi)$.

Si noti che questa definizione di sistema di logica modale è neutrale rispetto alle possibili specificazioni delle proprietà della relazione di accessibilità tra mondi, quindi è neutrale rispetto alla determinazione dei diversi sistemi di logica modale che si possono ottenere in questo modo.

Some-Other-Time Logic Questa logica è una modificazione del sistema modale S5[6].

Sia $C_O = \{\wedge, \neg, O\}$ l'insieme dei connettivi modali e $P = \{p_i : i \in \omega\}$ l'insieme delle variabili enunciative. Chiamiamo Fm_O l'insieme delle formule generato da P per mezzo di C_O secondo le usuali regole di formazione. La lettura intuitiva di $O\phi$ è in qualche altro istante ϕ.

Consideriamo un insieme T di istanti possibili (non è necessario considerare la relazione di accessibilità, perché sarebbe una relazione di equivalenza su T). Sia $g_T : P \to \wp(T)$ un assegnamento in T. Sia $\langle T, g_T \rangle$ un sistema di istanti possibili e $\mathbf{T}$ classe dei sistemi di istanti possibili . Per ogni $\langle T, g_T \rangle \in \mathbf{T}$, definiamo la relazione $\Vdash_{g_T} \subseteq T \times Fm$ come nel caso classico immediatamente precedente e aggiungiamo la seguente clausola. Per ogni $t \in T$ e per ogni $\phi \in Fm$:

- $t \Vdash_{g_T} O\phi$ sse, per almeno un $t' \in T \backslash \{t\}$, $t' \Vdash_{g_T} \phi$.

[6] Cfr. Sain, 1988. Cfr. anche Nèmeti, Andréka (1994), pp. 403 sg.

Sia $Mod_{g_T}(\phi) = \{t \in T : t \Vdash_{g_T} \phi\}$. Una formula ϕ è valida in $\langle T, g_T\rangle$ sse $Mod_{g_T}(\phi) = T$. Una formula ϕ è conseguenza logica di un insieme Δ di formule (in simboli $\Delta \vDash_{\mathbf{T}} \phi$) sse, per ogni $\langle T, g_T\rangle \in \mathbf{T}$ e per ogni $t \in T$, $Mod_{g_T}(\Delta) \subseteq Mod_{g_T}(\phi)$.

Logiche polivalenti L'approccio basato sui valori di verità, illustrato per primo nel paragrafo dedicato alla logica classica, può essere facilmente impiegato per costruire la semantica delle logiche polivalenti.

Assumiamo i connettivi in $C = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg\}$ e un insieme di variabili enunciative $P = \{p_i : i \in \omega\}$. Chiamiamo Fm l'insieme delle formule generato da P per mezzo di C secondo le usuali regole di formazione.

Logica trivalente di Łukasiewicz Determiniamo un sistema semantico per la logica trivalente di Łukasiewicz. Sia $\mathbf{Ł_3} = \left\langle \{0, \frac{1}{2}, 1\}, \wedge^{\mathbf{Ł_3}}, \vee^{\mathbf{Ł_3}}, \rightarrow^{\mathbf{Ł_3}}, \neg^{\mathbf{Ł_3}} \right\rangle$ un'algebra di tipo C e in cui l'insieme $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ è l'insieme dei valori di verità. le operazioni di $\mathbf{Ł_3}$ sono definite dalle seguenti tabelle:

$\wedge^{\mathbf{Ł_3}}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	0	0	0

$\vee^{\mathbf{Ł_3}}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

e

$\rightarrow^{\mathbf{Ł_3}}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$
0	1	1	1

$\neg^{\mathbf{Ł_3}}$	
1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1

Sia $\nu : P \rightarrow \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ un assegnamento di valori di verità alle variabili enunciative. Sia $h \in Hom(\mathbf{Fm}, \mathbf{Ł_3})$, detta valutazione, l'estensione di ν a tutte le formule in Fm determinata dalla seguente condizione. Per ogni $\phi, \psi \in Fm$:

- $h(p) = \nu(p)$
- $h(\neg\phi) = \neg^{\mathbf{Ł_3}} h(\phi)$
- $h(\phi \wedge \psi) = h(\phi) \wedge^{\mathbf{Ł_3}} h(\psi)$
- $h(\phi \vee \psi) = h(\phi) \vee^{\mathbf{Ł_3}} h(\psi)$
- $h(\phi \rightarrow \psi) = h(\phi) \rightarrow^{\mathbf{Ł_3}} h(\psi)$.

Diciamo che una formula ϕ è vera rispetto ad un valutazione h sse $h(\phi) = 1$. In tal caso diciamo che h soddisfa ϕ e scriviamo $h \Vdash_{\mathbf{Ł_3}} \phi$. Definiamo la funzione $Mod_{\mathbf{Ł_3}} : Fm \rightarrow \wp(Hom(\mathbf{Fm}, \mathbf{Ł_3}))$ tale che $Mod_{\mathbf{Ł_3}}(\phi) = \{h \in Hom(\mathbf{Fm}, \mathbf{Ł_3}) : h \Vdash_{\mathbf{Ł_3}} \phi\}$, estesa ad insiemi di formule nel solito modo. Una formula ϕ è valida in $\mathbf{Ł_3}$[7] (in simboli, $\vDash_{\mathbf{Ł_3}} \phi$) sse $Mod_{\mathbf{Ł_3}}(\phi) = Hom(\mathbf{Fm}, \mathbf{Ł_3})$. Una formula ϕ è

[7] In questo paragrafo, per non appesantire la notazione, uso gli stessi nomi sia per una certa algebra dei valori di verità, sia per il sistema logico corrispondente. $\mathbf{Ł_3}$, ad esempio, indica sia l'algebra $\left\langle \{0, \frac{1}{2}, 1\}, \wedge^{\mathbf{Ł_3}}, \vee^{\mathbf{Ł_3}}, \rightarrow^{\mathbf{Ł_3}}, \neg^{\mathbf{Ł_3}} \right\rangle$, sia il sistema logico $\langle Fm, \vDash_{\mathbf{Ł_3}} \rangle$. Il contesto dovrebbe essere sempre sufficiente a chiarire quale sia il riferimento corretto.

una contraddizione in $\mathbf{Ł_3}$ sse $Mod_{\mathbf{Ł_3}}(\phi) = Hom(\mathbf{Fm},\mathbf{Ł_3})$. Una formula ϕ è conseguenza logica in $\mathbf{Ł_3}$di un insieme di formule Δ (in simboli, $\Delta \models_{\mathbf{Ł_3}} \phi$) sse $Mod_{\mathbf{Ł_3}}(\Delta) \subseteq Mod_{\mathbf{Ł_3}}(\phi)$.

In $\mathbf{Ł_3}$, 1 rappresenta il valore di verità Vero e 0 il valore di verità Falso. $\frac{1}{2}$ rappresenta un valore di verità che non coincide né con Vero né con Falso. Possiamo interpretarlo in vari modi: contingente, indeterminato, sconosciuto, ...

Un esempio di formula valida è $\phi \to \phi$. Quel che conta osservare, comunque, è che $\mathbf{Ł_3}$ si discosta radicalmente dalla logica classica. Non valgono, per esempio, né il principio di non contraddizione né il principio del terzo escluso: $h(\neg(\phi \wedge \neg\phi)) \neq 1$ e $h(\phi \vee \neg\phi) \neq 1$ per $h(\phi) = \frac{1}{2}$. É ancora più importante notare che, mentre nella logica classica, la validità, definita come verità in ogni modello, implica la non falsità in ogni modello, in $\mathbf{Ł_3}$ ciò non è più vero per il fatto che non essere falso può significare sia avere valore di verità 1 sia avere valore di verità $\frac{1}{2}$. Definire la validità come verità in ogni modello o come non falsità in ogni modello è equivalente nella logica. Le due definizioni, invece, non sono equivalenti in $\mathbf{Ł_3}$. Due esempi sono forniti dal principio di non contraddizione e dal principio del terzo escluso, citate poco sopra. Allo stesso modo, invece di definire, come in $\mathbf{Ł_3}$, la nozione di conseguenza logica in termini di preservazione della verità, è possibile definirla in termini di preservazione della non-falsità.

Una concezione di questo tipo della validità logica e della conseguenza logica potrebbe essere difesa, sostenendo che avere un valore di verità vicino al vero, nel contesto in cui si intende applicare $\mathbf{Ł_3^F}$, è equivalente ad essere pienamente vero e che non essere falso significa avere un valore di verità vicino al vero. Naturalmente, se pure vi è qualcosa di buono in questa idea, occorrerebbe approfondirlo e giustificarlo in ben altro, ma il mio obiettivo, ora, è solo fornire un esempio che serva ad illustrare certe proprietà dei sistemi semantici, perciò assumerò, senza argomentare oltre, che tale idea sia accettabile. Supponiamo, allora, di definire una logica $\mathbf{Ł_3^F}$, in cui tutte le definizioni date per $\mathbf{Ł_3}$ restano valide ad eccezione di quelle relative alla validità logica ed alla conseguenza logica che sono, rispettivamente, rimpiazzate dalle seguenti: una formula ϕ è valida in $\mathbf{Ł_3^F}$ (in simboli, $\models_{\mathbf{Ł_3^F}} \phi$) sse, per ogni $h \in Hom(\mathbf{Fm}, \mathbf{Ł_3^F})$, $h(\phi) \neq 0$; una formula ϕ è conseguenza logica in $\mathbf{Ł_3^F}$ di un insieme di formule Δ (in simboli, $\Delta \models_{\mathbf{Ł_3^F}} \phi$) sse, se $h(\Delta) \neq 0$, allora $h(\phi) \neq 0$. Per ogni valutazione h, $h(\neg(\phi \wedge \neg\phi)) \neq 0$ e $h(\phi \vee \neg\phi) \neq 0$, per cui entrambe sono formule valide in $\mathbf{Ł_3^F}$, a differenza di quel che accade in $\mathbf{Ł_3}$[8].

Questo esempio rende chiaro un aspetto centrale, e di cui mi occuperò meglio sotto, della definizione di un sistema logico per mezzo di un'algebra dei valori di verità. Tale problema consiste nella scelta dei valori di verità designati, ossia di quei valori di verità, tra tutti quelli disponibili, che svolgono la funzione che nella logica classica e in $\mathbf{Ł_3}$ è svolta dal valore di verità Vero. É sul valore di

[8]Il sistema $\mathbf{Ł_3^F}$ è simile alla logica del paradosso, elaborata in Priest (1979), che si basa, però, su una versione della logica trivalente data da Kleene e sull'interpretazione informale del valore di verità $\frac{1}{2}$ come sia vero sia falso. La logica del paradosso è stata esposta nel paragrafo dedicato alla proprietà della transitività della relazione di conseguenza logica.

verità Vero che si è concentrata la nostra attenzione quando abbiamo definito la validità e la conseguenza logica nella logica classica e in $\mathbf{Ł_3}$. L'esempio di $\mathbf{Ł_3^F}$ mostra che possiamo essere più generali e dire che una formula ϕ è valida sse ogni valutazione le assegna un valore designato e che ϕ è conseguenza logica di Δ sse ogni valutazione che assegna un valore designato a tutte le formule in Δ assegna un valore designato anche a ϕ. Nel caso della logica classica, l'insieme dei valori di verità è $T_C = \{0, 1\}$ e l'insieme dei valori designati è $D_C = \{1\}$. In $\mathbf{Ł_3}$, invece, l'insieme dei valori di verità è $T_{\mathbf{Ł_3}} = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ e l'insieme dei valori designati è $D_{\mathbf{Ł_3}} = \{1\}$ (come nella logica classica). In $\mathbf{Ł_3^F}$, poi, l'insieme dei valori di verità è $T_{\mathbf{Ł_3^F}} = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, come in $\mathbf{Ł_3}$, e l'insieme dei valori designati è $D_{\mathbf{Ł_3^F}} = \{\frac{1}{2}, 1\}$.

Questo scenario, che, per ora, è solo un'anticipazione e un'esemplificazione di temi che saranno trattati meglio sotto, può essere ulteriormente complicato, prendendo in considerazione anche la struttura soggiacente all'insieme dei valori di verità e dei valori designati. Partiamo da $\mathbf{Ł_3^F}$ e dagli insiemi che le abbiamo attribuito: $T_{\mathbf{Ł_3^F}} = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ e $D_{\mathbf{Ł_3^F}} = \{\frac{1}{2}, 1\}$. Determiniamo una nuova logica $\mathbf{Ł_3^{F\leq}}$ modificando la definizione di conseguenza logica in $\mathbf{Ł_3^F}$ in questo modo: una formula ϕ è conseguenza logica in $\mathbf{Ł_3^{F\leq}}$ di un insieme di formule Γ (in simboli, $\Gamma \vDash_{\mathbf{Ł_3^{F\leq}}} \phi$) sse, se $\bigwedge h(\Gamma) \leq h(\phi)$.

Logica parziale La logica parziale[9] intende descrivere quelle situazioni inferenziali in cui non tutti gli enunciati sono sempre dotati di significato determinato. Un esempio di enunciato di questo tipo potrebbe essere 0 è alto.

Sia $C = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, N\}$ l'insieme dei connettivi e sia $P = \{p_i : i \in \omega\}$ l'insieme delle variabili enunciative. Chiamiamo Fm l'insieme delle formule generato da P per mezzo di C secondo le usuali regole di formazione a cui si aggiunge:

- se $\phi \in Fm$, allora $N\phi \in Fm$.

La lettura intuitiva di $N\phi$ è non si dà ϕ o ϕ è senza senso.

Sia $\mathbf{P} = \left\langle \{0, \frac{1}{2}, 1\}, \wedge^{\mathbf{P}}, \vee^{\mathbf{P}}, \rightarrow^{\mathbf{P}}, \neg^{\mathbf{P}}, N^{\mathbf{P}} \right\rangle$ un'algebra e $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ l'insieme dei valori di verità, che, informalmente, sono considerati, rispettivamente, Falso, Insensato e Vero. Le operazioni di $\mathbf{P}$ sono definite dalle seguenti tabelle:

$\wedge^{\mathbf{P}}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	$\frac{1}{2}$	0

$\vee^{\mathbf{P}}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

e

$\rightarrow^{\mathbf{P}}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	1

$\neg^{\mathbf{P}}$	
1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1

$N^{\mathbf{P}}$	
1	0
$\frac{1}{2}$	1
0	1

[9] Cfr. Nèmeti, Andréka (1994), pp. 414 sg.

Queste operazioni si comportano come le corrispondenti operazioni in **2** (ossia nel caso classico), quando si applicano a valori classici (0,1) e danno come risultato $\frac{1}{2}$ quando almeno uno dei valori a cui si applicano è $\frac{1}{2}$. Dal punto di vista informale, ciò significa che è insensato se una sua parte è insensata e che si comporta classicamente negli altri casi.

Sia $\nu : P \to \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ un assegnamento di valori di verità alle variabiali enunciative e $h_\nu : \mathbf{Fm} \to \mathbf{P}$ la sua estensione ad un omomorfismo dall'algebra delle formule all'algebra $\mathbf{P}$ tale che, per ogni $p \in P$ e per ogni $\phi \in Fm$:

- $h(p) = \nu(p)$
- $h(\neg\phi) = \neg^{\mathbf{P}} h(\phi)$
- $h(\neg\phi) = N^{\mathbf{P}} h(\phi)$
- $h(\phi \wedge \psi) = h(\phi) \wedge^{\mathbf{P}} h(\psi)$
- $h(\phi \vee \psi) = h(\phi) \vee^{\mathbf{P}} h(\psi)$
- $h(\phi \to \psi) = h(\phi) \to^{\mathbf{P}} h(\psi)$.

Sia $h \Vdash \phi$ sse $h(\phi) = 1$. Definiamo $Mod_{\mathbf{P}} : Fm \to \wp(Hom(\mathbf{Fm}, \mathbf{P}))$ tale che $Mod_{\mathbf{P}}(\phi) = \{h \in Hom(\mathbf{Fm}, \mathbf{P}) : h \Vdash_{\mathbf{P}} \phi\}$, estesa ad insiemi di formule nel solito modo. Una formula ϕ è valida in $\mathbf{P}$ (in simboli, $\vDash_{\mathbf{P}} \phi$) sse $Mod_{\mathbf{P}}(\phi) = Hom(\mathbf{Fm}, \mathbf{P})$. Una formula ϕ è conseguenza logica in $\mathbf{P}$ di un insieme di formule Δ (in simboli, $\Delta \vDash_{\mathbf{P}} \phi$) sse $Mod_{\mathbf{P}}(\Delta) \subseteq Mod_{\mathbf{P}}(\phi)$.

Logica ad infiniti valori di verità Assumiamo il medesimo linguaggio degli esempi precedenti. Sia $[0, 1]$ l'intervallo chiuso dei numeri reali compresi tra 0 e 1. Sia $[\mathbf{0}, \mathbf{1}] = \langle [0, 1], \wedge^{[\mathbf{0},\mathbf{1}]}, \vee^{[\mathbf{0},\mathbf{1}]}, \to^{[\mathbf{0},\mathbf{1}]}, \neg^{[\mathbf{0},\mathbf{1}]} \rangle$ l'algebra di tipo C le cui operazioni sono definite dalle seguenti condizioni. Per ogni $x, y \in [0, 1]$

- $\neg^{[\mathbf{0},\mathbf{1}]} x = 1 - x$
- $x \wedge^{[\mathbf{0},\mathbf{1}]} y = \bigwedge\{x, y\}$
- $x \vee^{[\mathbf{0},\mathbf{1}]} y = \bigvee\{x, y\}$
- $x \to^{[\mathbf{0},\mathbf{1}]} y = \bigwedge\{1 - x + y, 1\}$ (in modo equivalente: $x \to^{[\mathbf{0},\mathbf{1}]} y = 1$ se $x \leq y$ e $x \to^{[\mathbf{0},\mathbf{1}]} y = 1 - (x - y)$ altrimenti).

Assumiamo che $[0, 1]$ sia l'insieme dei valori di verità. Sia $\nu : P \to [0, 1]$ un assegnamento di un valore di verità alle variabili enunciative. Sia $h_\nu : \mathbf{Fm} \to [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ l'estensione di ν ad un omomorfismo dall'algebra delle formule a $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ tale che, per ogni $p \in P$ e per ogni $\phi \in Fm$:

- $h(p) = \nu(p)$
- $h(\neg\phi) = \neg^{[\mathbf{0},\mathbf{1}]} h(\phi)$

- $h(\phi \wedge \psi) = h(\phi) \wedge^{[\mathbf{0},\mathbf{1}]} h(\psi)$
- $h(\phi \vee \psi) = h(\phi) \vee^{[\mathbf{0},\mathbf{1}]} h(\psi)$
- $h(\phi \to \psi) = h(\phi) \to^{[\mathbf{0},\mathbf{1}]} h(\psi)$.

Per ogni formula ϕ, diciamo che $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$ soddisfa ϕ rispetto a h_ν (in simboli, $[\mathbf{0},\mathbf{1}] \Vdash \phi[h_\nu]$) sse $h(\phi) = 1$. Definiamo $Mod_\nu(\phi) = \{h_\nu \in Hom(\mathbf{Fm}, [\mathbf{0},\mathbf{1}]) : h_\nu(\phi) = 1\}$.

Una formula ϕ è valida (in simboli, $\vDash_\infty$) sse $Mod_\nu(\phi) = Hom(\mathbf{Fm}, [\mathbf{0},\mathbf{1}])$ (ossia, sse $h(\phi) = 1$ per ogni $h \in Hom(\mathbf{Fm}, [\mathbf{0},\mathbf{1}])$). Una formula ϕ è conseguenza logica di un insieme Δ di formule (in simboli, $\Delta \vDash_\infty \phi$) sse $Mod_\nu(\Delta) \subseteq Mod_\nu(\phi)$ (ossia, sse, se $h(\Delta) \subseteq \{1\}$, allora $h(\phi) = 1$).

Notiamo che $\vDash_\infty$ è una relazione di conseguenza logica infinitaria, mentre $\vDash^f_\infty$ è una relazione di conseguenza logica finitaria e, più precisamente, $\vDash^f_\infty$ è la compagna finitaria di $\vDash_\infty$.

L'aver definito una relazione di conseguenza non finitaria merita qualche riflessione. Quando si definisce la relazione di conseguenza logica per mezzo di un calcolo sintattico, benché non sia necessario, è naturale fornire una definizione che preveda formule di lunghezza finita, regole di inferenza finitarie e prove di lunghezza finita. Tutto ciò comporta che la relazione di conseguenza logica che ne risulta è finitaria, come si è detto nel paragrafo dedicato ai calcoli sintattici. Le cose stanno in maniera molto diversa per quanto riguarda le relazioni di conseguenza logica definite in termini semantici. Qui non c'è, in generale, alcuna motivo evidente per supporre che la relazione di conseguenza logica che risulta da un dato sistema semantico sia finitaria. Anche nel caso della logica enunciativa classica, dimostrare che la relazione di conseguenza logica definita semanticamente è finitaria corrisponde a dimostrare il non banale teorema di compattezza. Il fatto è che nelle definizioni di carattere semantico non si fa alcun riferimento a processi inferenziali, che è naturale concepire come finiti e dominabili, ma soltanto a relazioni tra oggetti che, in quanto tali, non dicono nulla sul carattere finitario o meno della relazione di conseguenza logica che ne risulta.

Linguaggi predicativi Definire una semantica per linguaggi predicativi comporta problemi nuovi rispetto al caso enunciativo. Qui ce ne occupiamo perché, anche se il nostro discorso è per lo più limitato ai linguaggi enunciativi, è opportuno avere, su questo punto, una prospettiva più ampia, altrimenti le noste riflessioni sul significato di definire un sistema logico per mezzo di una semantica risulterebbe fortemente incomplete. La differenza che passa tra l'impresa di definire una semantica per linguaggi enunciativi e l'impresa di definire una semantica per linguaggi predicativi è, in genere, maggiore di quella che passa tra l'impresa di fornire un calcolo per linguaggi enunciativi e l'impresa di fornire un calcolo per linguaggi predicativi. Mentre nel secondo caso si rimane al livello di manipolazione di segni linguistici, nel primo caso occorre specificare denotazioni assai diverse per i simboli non logici di un linguaggio enunciativo e per i simboli non logici di un linguaggio predicativo.

Uno degli obiettivi per cui si specifica una semantica è quello di poter attribuire un valore di verità alle formule del linguaggio. Nel caso dei linguaggi predicativi, i valori di verità stessi sono le unità semantiche di base e, una volta attribuiti alle formule atomiche, non resta che specificare una procedura ricorsiva per attribuirli ad ogni formula. Nel caso dei linguaggi predicativi, la situazione è più complessa. Una volta attribuito un valore di verità agli enunciati atomici, lo si attribuisce a tutte le formule per ricorsione, come nel caso enunciativo, ma per assegnare un valore di verità agli enunciati atomici occorre ricorrere a enti diversi dai valori di verità. I valori di verità degli enunciati atomici sono calcolati sulla base di altri enti che fungono da controparte semantica degli enti linguistici elementari, che, qui, non sono più enunciati. La situazione (o il mondo o la realtà) rispetto a cui valutare il valore di verità di una formula in un linguaggio enunciativo era semplicemente un'attribuzione di valori di verità agli enunciati atomici. Nel contesto predicativo, invece, una situazione rispetto a cui valutare il valore di verità degli enunciati atomici è un complesso che risulta dai rapporti che intercorrono tra determinatori semantici più elementari. Determinare una semantica per i linguaggi predicativi, dunque, richiede mostrare come si colleghino le unità linguistiche di base, che non sono enunciati, a tali determinatori semantici, che non sono valori di verità, in modo da poter calcolare, per mezzo di queste combinazioni, il valore di verità degli enunciati.

Ciò che è un modello e ciò che rende vera o falsa una formula è la stessa cosa nella semantica dei linguaggi enunciativi. Le cose non stanno così, invece, nel caso dei linguaggi predicativi. In questo caso, infatti, possiamo distinguere, da un lato, gli enti che rendono vera o falsa una formula (le sequenze di oggetti, come vedremo, che stanno o non stanno fra loro in una certa relazione) e, dall'altro lato, i modelli che comprendono l'insieme di tutti gli oggetti disponibili per verificare se sussiste una sequenza di oggetti che soddisfa una formula e l'interpretazione dei simboli non logici nel dominio. I modelli, insomma, sono strutture in cui si ha un dominio di oggetti e l'interpretazione di costanti, simboli di funzione e simboli di relazione dl linguaggio predicativo considerato. Gli enti che soddisfano una formula, invece, sono particolare sequenze di oggetti messi a disposizione dalla struttura e che godono delle caratteristiche attribuite loro dalla struttura (godere o meno di una certa relazione, ...).

Abbiamo visto che i linguaggi enunciativi non sono in grado di distinguere tra loro due formule che hanno il medesimo valore di verità. Nell'esempio proposto sopra, 2 è un numero pari e Milano è in Italia sono due enunciati veri e, quindi, del tutto equivalenti nell'ambito dell'analisi dei processi deduttivi che fornisce la logica enunciativa. Dal punto di vista simbolico, l'unica differenza che si può ammettere tra questi enunciati è quella di usare variabili proposizionali diverse, come p e q, ma non si ha alcuna possibilità di capire, a priori, cosa si intenda dire con l'una o con l'altra. Il motivo è che i linguaggi enunciativi non si curano di come sono composti gli enunciati al loro interno, ma solo di come si collegano gli uni con gli altri. Il linguaggio enunciativo trova gli enunciati già fatti, mentre il linguaggio predicativo fornisce gli strumenti per costruirli con elementi più semplici. Enunciati con il medesimo valore di verità possono essere il risultato di processi di composizione diversi e, quindi, possono essere distinti. Con un linguaggio predicativo, infatti, i due enunciati citati sopra, potrebbero essere, rispettivamente, formalizzati come $P4$ e Im, dove P è il simbolo del predicato essere pari, 4 la costante che indica il numero 4, I il simbolo del predicato essere in Italia e m la costante che indica Milano.

La realtà a cui si riferiscono i linguaggi predicativi non è più riducibile a un assegnamento di valori di verità, ma, ora, è un complesso di enti le cui caratteristiche determinano il valore di verità delle formule. Per essere più precisi, tale realtà è costituita da strutture, domini di oggetti su cui sono definite funzioni e relazioni. Per interpretare una formula di un linguaggio predicativo, dunque, non le assegneremo una valutazione enunciativa, ma una struttura su cui interpretare, come elementi del dominio, funzioni o relazioni, i simboli che compaiono nella formula. Se vogliamo interpretare la formula Im, per esempio, dobbiamo individuare una struttura in cui interpretare m come un elemento del dominio e I come un predicato unario, ossia come un sottoinsieme del dominio. Possiamo dire, intuitivamente, che Im è vera in tutte e sole quelle strutture in cui m gode della proprietà I, ossia m appartiene all'insieme determinato da I.

Come nel caso enunciativo, poi, le formule, di per sè, sono enti privi di significato e ne ricevono uno solo per mezzo di un assegnamento enunciativo, così le formule di un linguaggio predicativo non dicono nulla e non hanno un significato prima di essere interpretate in una struttura. Ogni linguaggio predicativo, poi, e, quindi, ogni formula di un linguaggio predicativo, può essere interpretate su strutture diverse e, quindi, esprimere pensieri diversi ed ottenere diversi significati. Consideriamo, per esempio, l'enunciato $P4$. Possiamo interpretarlo in una struttura $\mathbb{N} = \langle \omega, P^{\mathbb{N}}, 4^{\mathbb{N}} \rangle$ dove ω è l'insieme dei numeri naturali, $P^{\mathbb{N}}$ è l'insieme dei numeri pari e $4^{\mathbb{N}} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\} \in \omega$. In tal caso, $P4$ esprime il pensiero che $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\} \in P^{\mathbb{N}}$ ed è un enunciato vero. Potremmo, però, interpretare $P2$ sulla struttura $\mathbb{N}' = \langle \omega, Pr^{\mathbb{N}}, 2^{\mathbb{N}} \rangle$ dove $Pr^{\mathbb{N}}$ è l'insieme dei numeri primi e tutto il resto è come prima. In tal caso, $P4$ esprime il pensiero che $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\} \in Pr^{\mathbb{N}}$ ed è un enunciato falso.

Fino a questo punto, ho accennato a come si interpreta un linguaggio con una struttura. Ma un aspetto importante e fecondo dei linguaggi predicativi è che permettono di compiere anche il percorso inverso. É possibile, infatti, partire da una struttura e definire i suoi elementi e le loro caratteristiche per mezzo di un linguaggio. Una struttura è caratterizzata, come è detto nell'appendice, da un tipo, che indica esplicitamente alcuni elementi, operazioni e relazioni che vivono nel dominio. In una struttura, però, ci sono, in genere, anche diversi altri elementi, operazioni e relazioni che non sono esplicitamente indicati dal tipo e che possono essere messi in luce da un linguaggio in grado di definirli. Non è questa la sede, comunque, per sviluppare tutti questi aspetti, che, comunque, mostrano le peculiarità delle definizioni semantiche per i linguaggi predicativi rispetto a quelle per i linguaggi enunciativi e giustificano il fatto di darne menzione. Nel seguito svilupperò solo le riflessioni che ci interessano più da vicino.

Logica dei predicati del primo ordine con identità Fornisco una succinta definizione della semantica per la logica classica dei predicati del primo ordine con identità (abbreviata in $L_p^{\approx}$), per esemplificare quanto detto sopra e permettere ulteriori considerazioni.

I simboli logici del nostro linguaggio sono:

- connettivi: $\rightarrow$, $\neg$
- quantificatore universale: $\forall$
- simbolo di uguaglianza: $\approx$
- variabili individuali: $Var = \{x, y, ...\}$.

I simboli non logici sono:

- costanti individuali: $c_1, c_2, ...$
- simboli di funzione di diversa arietà finita: $f_1, f_2, ...$
- simboli di relazione di diversa arietà finita: R_1 , $R_2, ...$

Chiamiamo Tm l'insieme dei termini, definito esattamente dalle seguenti condizioni:

- ogni variabile ed ogni costante è un termine
- se $t_1, ..., t_n$ sono termini e f è un simbolo di funzione n-ario, allora $ft_1, ..., t_n$ è un termine.

Chiamiamo At l'insieme delle formule atomiche, definito esattamente dalla seguente condizione:

- se t_1, t_2 sono termini, allora $t_1 \approx t_2$ è una formula atomica
- se $t_1, ..., t_n$ sono termini e R è un simbolo di relazione n-ario, allora $Rt_1, ..., t_n$ è una formula atomica.

Chiamiamo Fm l'insieme delle formule, definito esattamente dalle seguenti condizioni:

- ogni formula atomica è una formula
- se ϕ, ψ sono formule, allora $\neg\phi$ e $\phi \rightarrow \psi$ sono formule
- se ϕ è una formula e x è una variabile individuale, allora $\forall x\phi$ è una formula.

Per comprendere le definizioni che seguono occorre presentare le definizioni date sopra in una veste più formale. Diciamo che il linguaggio di L_p è la sequenza $\langle Cos, Fun, Rel, \{\rightarrow, \neg\}, \{\forall\}, \{\approx\}, Var, r\rangle$ dove tutti gli insiemi sono a due a due disgiunti e Cos, Fun e Rel sono, rispettivamente, gli insiemi delle costanti, dei simboli di funzione e dei simboli di relazione e $r : Fun \cup Rel \rightarrow \omega$ è una funzione che attribuisce un numero naturale, la sua arietà, ad ogni simbolo in $Fun \cup Rel$.

Definition 84 *L'insieme dei termini è l'insieme delle parole su* $Var \cup Cos$ *liberamente generato dalla famiglia* $\mathcal{F}_{Tm} = \{F_f : f \in Fun\}$ *di funzioni tali che, se* $f \in Fun$ *è* n*-aria, allora* $F_f : ((Var \cup Cos\ )^*)^n \to (Var \cup Cos\ )^*$ *ed è definita dalla condizione seguente. Per ogni* $f \in Fun$ *e per ogni* $w_1, ..., w_n \in (Var \cup Cos\ )^*$

- $F_f(w_1, ..., w_n) = fw_1, ..., w_n$.

Chiamiamo insieme dei termini l'insieme $Tm = [Var \cup Cos]_{\mathcal{F}_{Tm}}$ liberamente generato da $Var \cup Cos$ per mezzo delle funzioni in $\mathcal{F}_{Tm}$. Uso i simboli $t_1, t_2, ...$ per denotare elementi di Tm.

Definition 85 *L'insieme delle formule è l'insieme delle parole su* At *per mezzo delle operazioni in* $\mathcal{F}_{Fm} = \{f_\to, f_\neg\} \cup \{\ f_x : x \in Var\}$*, dove* $f_\to : At^* \times At^* \to At^*$*,* $f_\neg : At^* \to At^*$ *e* $f_i : At^* \to At^*$ *e sono definite dalle seguenti condizioni. Per ogni* $w, w_1, ..., w_n \in At^*$

- $f_\to(w_1, w_2) = w_1 \to w_2$
- $f_\neg(w) = \neg w$
- $f_x(w) = \forall xw$

Chiamiamo insieme delle formule l'insieme $Fm = [At]_{\mathcal{F}_{Fm}}$ liberamente generato da At per mezzo delle funzioni in $\mathcal{F}_{Fm}$.

Definition 86 *Una struttura per il linguaggio* $L_p^{\approx}$ *è una coppia* $\mathbf{A} = \langle A, I_\mathbf{A} \rangle$ *dove* A *è un insieme non vuoto, il dominio della struttura e* $I_\mathbf{A}$ *è una funzione, detta interpretazione, definita su* A *tale che.*

- per ogni costante c, $I_\mathbf{A}(c)$ è un elemento $c^\mathbf{A}$ di A
- per ogni simbolo di funzione n-ario f, $I_\mathbf{A}(f)$ è un'operazione n-aria $f^\mathbf{A}$ su A
- per ogni simbolo di relazione n-ario R, $I_\mathbf{A}(R)$ è un sottoinsieme $R^\mathbf{A}$ di A^n.

In questo paragrafo, quando parlerò di struttura, intenderò sempre struttura per L_p.

Definition 87 *Sia* $g : Var \to A$ *una funzione, detta assegnamento, che attribuisce ad ogni variabile un elemento del dominio. Con* g_x^a*, dove* $a \in A$ *e* $x \in Var$*, indichiamo l'assegnamento tale che* $g_x^a(x) = a$ *e* $g_x^a(y) = g(y)$ *per ogni altra variabile* $y \neq x$*.*

Definition 88 *La notazione di un termine* t *rispetto ad un modello* $\mathbf{A}$ *e all'assegnamento* s *è indicata da* $[t]_{\mathbf{A},s}$ *e definita dalle condizioni:*

- $[x]_{A,s} = s(x)$ se $x \in Var$

- $[c]_{A,s} = I(c)$ se $c \in Cos$
- $[ft_1, ..., t_n]_{A,s} = I_{\mathbf{A}}(f)([t_1]_{A,s}, ..., [t_1]_{A,s})$ se $f \in Fun$ e $r(f) = n$.

A questo punto, siamo in grado di definire l'interpretazione delle formule perché possediamo una funzione I che interpreta i simboli non logici del linguaggio e un assegnamento g che interpreta le variabili individuali. Gli unici elementi che ancora non hanno ricevuto un'interpretazione sono i connettivi, il quantificatore universale e il simbolo di uguaglianza (nonostante sia una relazione il simbolo di uguaglianza non fa parte del tipo di $\mathbf{A}$, altrimenti non sarebbe un simbolo logico perché la sua interpretazione potrebbe variare al variare della struttura). Come nel caso dei linguaggi enunciativi, il significato dei simboli logici (almeno per quel che concerne gli aspetti considerati rilevanti per i processi deduttivi che si intendono modellare e ad eccezione delle variabili, a cui è riservato il ruolo particolare che si è detto) è determinato specificando le condizioni di verità delle formule.

Come si vedrà fra poco, stabilita una struttura $\mathbf{A}$, è possibile che vi siano più assegnamenti alle variabili che rendono vera una formula. Al limite, è possibile che tutti gli assegnamenti rendano vera una formula o che nessun assegnamento la renda vera. Qui c'è una somiglianza con le valutazione nel caso dei linguaggi enunciativi, dove, pure, è possibile avere più valutazioni (al limite, tutte o nessuna) che rendono vera una formula. La differenza è che, nel caso dei linguaggi enunciativi, le valutazioni attribuiscono direttamente un valore di verità alle formule. Nel caso dei linguaggi predicativi, invece, gli assegnamenti permettono di attribuire dei valori di verità alle formule, ma non lo fanno essi stessi. Quel che fanno è solo specificare il riferimento delle variabili individuali che possono essere presenti nelle formule. Si rivelerà importante distinguere gli assegnamenti che determinano l'attribuzione del valore di verità vero alle formule da quelli che non lo fanno. Nel caso enunciativo, abbiamo chiamato modelli le attribuzioni che rendono vera una formula. In questo contesto, però, la parola modello sarà riservata, come spiegato meglio sotto, alle coppie che contengono una struttura per L_p e un assegnamento quando rendono vera una formula. Occorre, dunque, trovare un altro termine. Sia ${}^{Var}A$ l'insieme di tutti gli assegnamenti da Var all'insieme A. Chiamerò *riferimento* di una formula ϕ in una struttura $\mathbf{A}$ l'insieme degli assegnamenti su A che rendono vera ϕ[10].

Sia 2 l'insieme dei valori di verità. Ora si possono seguire due strade. Possiamo definire una funzione valutazione $Val_{\mathbf{A}} : Fm \times {}^{Var} A \to 2$ in modo tale da associare, prima, ad ogni coppia (ϕ, s) un valore di verità e definire, poi, il riferimento di ϕ in $\mathbf{A}$ come l'insieme di tutti gli assegnamenti s tali che $Val_{\mathbf{A}}(\phi, s) = 1$. La seconda possibilità è quella di definire, in primo luogo, una

[10] Si noti che, qui, mi discosti dal modo in cui è solitamente usato il termine *riferimento* in filosofia del linguaggio. Questo termine è stato usato come la traduzione del tedesco *Bedeutung*, letteralmente *significato*, usato da Frege per indicare, tra le altre cose, il valore di verità di un enunciato. Per riferirmi, al valore di verità di un enunciato e, più in generale, di una formula, uso il termine *significato* e riservo il termine *riferimento* per l'impiego specificato sopra.

funzione $h_{\mathbf{A}} : Fm \to \wp({}^{Var}A)$ che attribuisce ad ogni formula ϕ l'insieme di assegnamenti $h(\phi)$ che costituisce il riferimento di ϕ e, poi, definire la valutazione $Val_{\mathbf{A}}(\phi, s) = 1$ sse $s \in h(\phi)$.

Vediamo, brevemente, entrambi gli approcci.

Il primo approccio è di solito espresso ricorrendo alla notazione $\mathbf{A} \vDash \phi[s]$, che leggiamo come ϕ è vera nella struttura $\mathbf{A}$ rispetto all'assegnamento s (o: $\mathbf{A}$ soddisfa ϕ rispetto ad s). Chiamiamo $\vDash$ la relazione di soddisfazione tra formule ed assegnamenti in $\mathbf{A}$. Per rispettare con precisazione l'indicazione data sopra, per seguire la prima via dovremmo definire una funzione $Val_{\mathbf{A}} : Fm \times {}^{Var}A \to 2$, ma è più usuale trovare un'equivalente presentazione in termini di relazione di equivalenza. Del resto, è facile passare da una presentazione all'altra, ricorrendo all'equivalenza: $\mathbf{A} \vDash \phi[s]$ sse $Val_{\mathbf{A}}(\phi, s) = 1$.

Definition 89 *Per ogni simbolo di relazione n-ario R, per ogni termine $t_1, ..., t_n$, per ogni formula $\phi, \psi \in Fm$ e per ogni variabile x:*

- $\mathbf{A} \vDash t_1 \approx t_2$ sse $[t_1]_{A,s} = [t_2]_{A,s}$
- $\mathbf{A} \vDash Rt_1, ..., t_n[s]$ sse $\langle [t_1]_{A,s}, ..., [t_n]_{A,s} \rangle \in I_{\mathbf{A}}(R)$
- $\mathbf{A} \vDash \neg\phi[s]$ sse $\mathbf{A} \nvDash \phi[s]$
- $\mathbf{A} \vDash \phi \wedge \psi[s]$ sse $\mathbf{A} \vDash \phi[s]$ e $\mathbf{A} \vDash \psi[s]$
- $\mathbf{A} \vDash \forall x\phi[s]$ sse, per ogni $a \in A$, $\mathbf{A} \vDash \phi[s^a_x]$.

A questo punto definiamo l'insieme $rfm_{\mathbf{A}}(\phi) = \{s \in^{Var} A : \mathbf{A} \vDash \phi[s]\}$. Diciamo che il riferimento della formula ϕ rispetto alla struttura $\mathbf{A}$ è l'insieme di tutti gli assegnamenti che lo rendono vera in $\mathbf{A}$. Estendiamo rfm ad insiemi di formule nel solito modo: $rfm_{\mathbf{A}}(\Gamma) = \bigcap_{\gamma \in \Delta} \{s \in^{Var} A : \mathbf{A} \vDash \gamma[s]\} = \{s \in^{Var} A : \mathbf{A} \vDash \gamma[s]$ per ogni $\gamma \in \Gamma\}$.

L'insieme delle formule è liberamente generato dall'insieme delle formule atomiche per mezzo delle operazioni $f_{\to}$, $f_{\neg}$ e f_x (per ogni $x \in Var$). $\mathbf{Fm} =$

$\langle Fm, f_{\to}, f_{\neg}, \{f_x : x \in Var\rangle$, quindi, è un'algebra assolutamente libera (l'algebra delle formule). Definiamo l'algebra $\wp({}^{Var}\mathbf{A}) = \left\langle \wp({}^{Var}A), \implies, ', \{om_x : x \in Var\} \right\rangle$ del medesimo tipo (l'algebra dei riferimenti). Siano $X, Y \subseteq A$. $'$ è l'usuale operazione di complementazione insiemistica e $\implies (X, Y) = X' \cup Y$. Per definire om_x occorre definire, prima, l'insieme $C_x(s) = \{f \in^{Var} A :$ per ogni $y \neq x$, $s(y) = f(y)\}$ per ogni $s \in^{Var} A$. Definiamo $om_x(X) = \{f \in C_x(s) : s \in^{Var} A$ e $im(f) \subseteq X\ )\}$.

Definition 90 *Sia $rf_{\mathbf{A}} : At \to \wp({}^{Var}A)$ una funzione, detta riferimento delle formule atomiche, tale che*

- $rf_{\mathbf{A}}(t_1 \approx t_2) = \{s : [t_1]_{A,s} = [t_2]_{A,s}\}$
- $rf_{\mathbf{A}}(Rt_1, ..., t_n) = \{s : \langle [t_1]_{A,s}, ..., [t_n]_{A,s} \rangle \in I(R)\}$.

Dal punto di vista informale, possiamo dire che $rf_{\mathbf{A}}$ assegna ad ogni formula atomica il suo riferimento. Per ricorsione, possiamo estenderla univocamente ad un omomorfismo $rfm_{\mathbf{A}}$ dall'algebra delle formule all'algebra dei riferimenti.

Definition 91 *Estendiamo $rf_{\mathbf{A}}$ ad una funzione $rfm_{\mathbf{A}} : \mathbf{Fm} \to \wp({}^{Var}\mathbf{A})$, detta riferimento delle formule, tale che:*

- $rfm_{\mathbf{A}}(\neg\phi) = (rfm_{\mathbf{A}}(\phi))'$
- $rfm_{\mathbf{A}}(\phi \to \psi) = rfm_{\mathbf{A}}(\phi) \implies rfm_{\mathbf{A}}(\psi)$
- $rfm_{\mathbf{A}}(\forall x\phi) = om_x(rfm_{\mathbf{A}}(\phi))$.

Come è facile immaginare, estendiamo rfm ad insiemi di formule nel solito modo: $rfm_{\mathbf{A}}(\Gamma) = \bigcap_{\gamma\in\Delta}\{s \in^{Var} A : \mathbf{A} \vDash \gamma[s]\} = \{s \in^{Var} A : \mathbf{A} \vDash \gamma[s]$ per ogni $\gamma \in \Gamma\}$.

A questo punto, come anticipato sopra, è immediato definire la valutazione $Val_{\mathbf{A}}(\phi, s) = 1$ sse $s \in rfm_{\mathbf{A}}(\phi)$.

Definition 92 *Diciamo che $s \in^{Var} A$ soddisfa una formula ϕ in $\mathbf{A}$ sse $s \in rfm_{\mathbf{A}}(\phi)$. In tal caso diciamo che $\langle \mathbf{A}, s\rangle$ è modello di ϕ.*

Definition 93 *Una formula ϕ è vera in $\mathbf{A}$ sse $rfm_{\mathbf{A}}(\phi) =^{Var} A$, ossia, sse ogni assegnamento $s \in^{Var} A$ la rende vera in $\mathbf{A}$. Una formula ϕ è falsa in $\mathbf{A}$ sse $rfm_{\mathbf{A}}(\phi) = \emptyset$. Una formula ϕ è soddisfabile sse $rfm_{\mathbf{A}}(\phi) \neq \emptyset$.*

Definition 94 *Una sottoformula di una formula ϕ è una sottoparola*[11] *ψ di ϕ che è, a sua volta, una formula.*

Definition 95 *Un'occorrenza*[12] *di una variabile x in una formula ϕ è detta vincolata sse appartiene ad una sottoformula di ϕ del tipo $\forall x\psi$. In caso contrario diciamo che tale occorrenza è libera.*

Lemma 96 *(Lemma di coincidenza)*

1. Siano $s, s' \in {}^{Var}A$ e $t \in Tm$. Se s e s' concordano su tutte le variabili che occorrono in t, allora $[t]_{A,s} = [t_1]_{A,s'}$.
2. Siano $s, s' \in {}^{Var}A$ e $\phi \in Fm$. Se s e s' concordano su tutte le variabili che occorrono in ϕ, allora $s \in rfm_{\mathbf{A}}(\phi)$ sse $s' \in rfm_{\mathbf{A}}(\phi)$.

Corollary 97 *Se ϕ è una formula chiusa, allora $rfm_{\mathbf{A}}(\phi) =^{Var} A$ o $rfm_{\mathbf{A}}(\phi) = \emptyset$.*

[11] Per la definizione di sottoparola, si veda l'appendice sui termini e sui concetti matematici, §1.3.

[12] Per la definizione di occorrenza, si veda l'appendice sui termini e sui concetti matematici, §1.3.

Ciò significa che una formula chiusa è o vera o falsa in una struttura $\mathbf{A}$, a differenza di quel che accade per le formule aperte, che possono essere soddisfatte da alcuni assegnamenti, ma non da altri.

Definition 98 *Siano* $\mathbf{A} = \langle A, I_{\mathbf{A}} \rangle$ *una struttura per un linguaggio* $L_p^{\approx}$ *e* $s \in^{Var} A$. *Chiamiamo rappresentazione per* $L_p^{\approx}$ *la coppia* $\langle \mathbf{A}, s \rangle$ *e indichiamo con* $S_p^{\approx}$ *la classe di tutte le rappresentazioni per* $L_p^{\approx}$.

In questo paragrafo, tutte le volte che parlerò di rappresentazione, intenderò sempre rappresentazione per $L_p^{\approx}$.

Definition 99 *Sia* Γ *un insieme di formule. Definiamo* $Mod_p^{\approx}(\phi) = \{\langle \mathbf{A}, s \rangle \in S_p^{\approx} : Val_{\mathbf{A}}(\phi, s) = 1\}$.

Estendiamo questa definizione ad un insieme di formule Γ nel solito modo: $Mod_p^{\approx}(\Gamma) = \{\langle \mathbf{A}, s \rangle \in S_p^{\approx} : Val_{\mathbf{A}}(\gamma, s) = 1$ per ogni $\gamma \in \Gamma\}$.

Definition 100 *Una formula* ϕ *è valida sse ogni struttura è modello di* ϕ *(in simboli* $\vDash \phi$*).*

Definition 101 *Una formula* ϕ *è conseguenza logica di un insieme di formule* Γ *sse* $Mod_p^{\approx}(\Gamma) \subseteq Mod_p^{\approx}(\phi)$.

Remark 102 *In modo equivalente, possiamo dire che una formula* ϕ *è conseguenza logica di un insieme di formule* Γ *sse vale una delle seguenti definizioni (che sono equivalenti tra loro).*

- per ogni struttura $\mathbf{A} = \langle A, I_{\mathbf{A}} \rangle$, $rfm_{\mathbf{A}}(\Gamma) \subseteq rfm_{\mathbf{A}}(\phi)$
- per ogni rappresentazione $\langle \mathbf{A}, s \rangle$, $\bigwedge Val_{\mathbf{A}}(\Gamma, s) \leq Val_{\mathbf{A}}(\phi, s)$.

Considerazioni La presentazione di diversi sistemi semantici data sopra, benché non esaustiva, permette di individuare alcune caratteristiche che, se non universali, sono comunque condivise da un gran numero di semantiche.

Fissato un insieme di formule Fm occorre stabilire una connessione tra formule ed alcuni elementi che vivono in una struttura le cui operazioni e relazioni permettono di assegnare, dopo alcuni passaggi, un certo ordine alle formule. Occorre distinguere le formule in base ai valori extra-linguistici che gli sono assegnati e attribuire loro delle proprietà che permettano di stabilire tra di esse delle relazioni di carattere deduttivo. Si stabilisce, così una classe di strutture, ciascuna delle quali è una realtà che accoglie ciò che diventerà il riferimento delle formule. Chiamiamo tale classe $\mathcal{S}$ e indichiamo con $\mathbf{S}$ una struttura in $\mathcal{S}$. Per assegnare ad ogni formula il suo riferimento in una certa struttura, poi, occorre stabilire una o più funzioni che stabiliscano ciò a cui una certa formula si riferisce in una certa struttura. Nel caso predicativo, questo compito è svolto dalla funzione interpretazione I e dalla funzione assegnamento s. Poiché le formule di un linguaggio predicativo, sono ottenute da elementi che non sono, a loro volta, formule, occorre trovare una descrizione in **S** per ognuno di questi elementi. A questo punto, occorre definire una relazione, detta relazione di soddisfazione, tra formule, strutture e funzioni che attribuiscono una descrizione nella struttura ad ogni formula che valga sse tale formula è vera in quella struttura quando è interpretata in quel modo. Con una variazione solo formale, possiamo stabilire un insieme di valori di verità e definire una funzione, detta valutazione, che prenda come argomenti formule, strutture e l'apparato che fornisca alle formule una descrizione (o che prenda come argomenti le formule e sia indiciata dalle strutture e dall'apparato che fornisce una descrizione alle formule) nelle strutture e stabilire quale sia il valore di verità attribuita ad una certa formula rispetto ad una certa struttura e ad una certa interpretazione in quella struttura. Il modo con cui si definisce la relazione di soddisfazione o la funzione valutazione esprime la caratterizzazione che intendiamo dare delle nozioni logiche. Tale modo di valutare una formula, infatti, è sottratto alla variabilità delle interpretazioni (che caratterizza, invece, le nozioni non logiche, il cui riferimento è determinato ogni volta in un modo diverso) e rimane invariata per qualsiasi formula, struttura ed interpretazioni si considerino.

Ciò che è essenziale è che vi sia una connessione tra il modo in cui è interpretata una formula in una struttura e la valutazione che quella formula riceve. Lo scopo dell'interpretazione, infatti, è proprio quello di fornire il materiale necessario per capire quale sia il valore di verità di una formula in una struttura. La relazione di soddisfazione o l'equivalente funzione valutazione, in altre parole, devono essere definibili dall'interpretazione che le formule ricevono in una struttura. Una volta che l'interpretazione ha assegnato alle formule certi valori nella struttura, il nostro interesse si concentra solo su ciò che la struttura ci dice a proposito di tali valori. Interpretando una formula ci trasferiamo dal linguaggio ad una certa realtà e, a questo punto, ci possiamo disinteressare delle caratteristiche sintattiche della formula da cui siamo partiti. Se due formule hanno una diversa presentazione sintattica, ma ricevono i medesimi valori nella struttura, infatti, sono indistinguibili per la relazione di soddisfazione (e, di conseguenza per la relazione di conseguenza logica definita da tale relazione di soddisfazione).

Quando si è determinato il valore di verità di una formula, poi, come appena anticipato, si procede a definire la relazione di conseguenza logica in modo uniforme. Si individuano le strutture e le interpretazioni in una certa struttura che rendono vera una formula. Una struttura e un apparato che permetta di interpretare una formula in quella struttura costituiscono un complesso, chiamiamolo *rappresentazione*, che è in grado di giudicare se una formula è vera o falsa rispetto a quel complesso. Quando una formula ϕ è giudicata vera in una rappresentazione R diciamo che R è modello di ϕ. La relazione di conseguenza è definita considerando i modelli delle premesse e i modelli della conclusione. L'idea di conservazione necessaria della verità (o, come nei casi delle logiche polivalenti, dei valori designati o simile) per motivi formali è resa stabilendo che una formula ϕ è conseguenza logica di un insieme Γ di formule sse ogni modello di Γ è anche modello di ϕ.

É facile notare come la relazione $\models \subseteq \wp(Fm) \times Fm$, definita dalla condizione

- per ogni $\Gamma \subseteq Fm$ e per ogni $\phi \in Fm$, $\Gamma \vDash \phi$ sse $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\phi)$,

dove Fm è l'insieme delle formule di volta in volta adeguato alla logica che si sta trattando e Mod indica l'insieme dei modelli di una formula o di un insieme di formule secondo la semantica definita di volta in volta, è una relazione di conseguenza, ossia è una relazione di chiusura. Infatti, per ogni per ogni $\Gamma, \Delta \subseteq Fm$ e per ogni $\phi \in Fm$

- (R) $Mod(\phi) \subseteq Mod(\phi)$
- (M) se $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\phi)$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, allora $Mod(\Delta) \subseteq Mod(\phi)$ (ciò segue dal fatto che, se $\Gamma \subseteq \Delta$, allora $Mod(\Delta) \subseteq Mod(\Gamma)$)
- (T) se $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\phi)$ e $Mod(\Delta) \subseteq Mod(\Gamma)$, allora $Mod(\Delta) \subseteq Mod(\phi)$.

Per quanto riguarda la proprietà della strutturalità, invece, la situazione è meno semplice. Di fatto tutte le relazioni definite $\vDash$ definite sopra sono effettivamente relazioni di conseguenza logica e, quindi, soddisfano anche la proprietà della strutturalità, ma, in generale, occorre richiedere esplicitamente che sia soddisfatta. Occorre richiedere, in altre parole, che, se esiste un modello per una formula ϕ, allora esiste un modello anche per tutte le formule ottenute per sostituzione da ϕ e viceversa. [Problema: come definire la strutturalità per i linguaggi predicativi?] Supponiamo che σ sia un processo che assegna ad ogni formula in Fm una formula $\sigma(\phi)$ ottenuta da ϕ per sostituzione. Allora, la relazione $\vDash$ è strutturale sse, per ogni rappresentazione R , per almeno una rappresentazione R'

- $R \in Mod(\phi)$ sse $R' \in Mod(\sigma\phi)$.

Se vi è un modello che soddisfa una formula ϕ, in altre parole, affinchè la relazione di conseguenza logica definita in termini di soddisfazione sia strutturale, deve sempre esserci anche un modello che soddisfi una formula ottenuta da ϕ per sostituzione.

Applicazione alla semantica dei linguaggi predicativi Vediamo di chiarire questi pensieri alla luce degli esempi forniti sopra.

Consideriamo, in primo luogo, la semantica per i linguaggi predicativi, perché è quella più articolata.

In questo caso, il linguaggio presenta costanti, simboli di funzioni, simbolo di relazione e variabili individuali a cui le interpretazioni attribuiscono un significato variabile a seconda del caso che si considera. Abbiamo fornito una funzione I, detta interpretazione[13], che assegna un riferimento a costanti, simboli di funzione e simboli di relazione e una funzione s, detta assegnamento, che assegna un riferimento ad ogni variabile.

[13] Non si confonda la nozione tecnica di interpretazione (che è la funzione I, descritta sopra, che, dato un insieme non vuoto A, assegna un individuo di A ad ogni costante, un'operazione n-aria su A ad ogni simbolo di funzione n-aria e una relazione n-aria su A ad ogni simbolo di relazione) con la nozione più generale a cui ho fatto riferimento poco sopra. Tale nozione

Possiamo notare che le variabili, nonostante, come è usuale fare, siano state elencate tra i simboli logici, hanno uno statuto, per certi versi, più simile a quello di simboli non logici. Le variabili, infatti, non hanno un valore fissato in tutte le strutture, anzi non hanno un valore fissato neanche in una singola struttura (questa è proprio la loro funzione). Si tratta di simboli descrittivi, nel senso che ricevono dei valori che appartengono alla struttura (nel caso delle variabili individuali, l'unico considerato qui, il loro valore è un elemento del dominio della struttura).

Proprio il fatto di avere a che fare con variabili, rende possibile avere a che fare con formule che, data una struttura, possono essere vere oppure false. Secondo alcuni assegnamenti sono vere e secondo altri sono false. Le formule con tale caratteristiche sono formule in cui compaiono variabili libere e sono dette formule aperte. Le formule aperte sono condizioni che determinano insiemi. Possiamo, infatti, raccogliere in un insieme gli oggetti che, quando sono attribuiti alle variabili libere in tali formule, le rendono vere. Individuare gli assegnamenti che rendono vere le formule, significa individuare gli assegnamenti che attribuiscono gli oggetti che godono delle caratteristiche espresse da tale formule, ossia degli oggetti che la soddisfano. Sulla base dell'insieme degli assegnamenti che soddisfano una formula, poi, abbiamo potuto definire il valore di verità di una formula, data una certa interpretazione in una struttura.

Quando un complesso costituito da una struttura ed un assegnamento, ossia una rappresentazione, rendono vere una formula diciamo che tale rappresentazione è modello di questa formula e, a questo punto, siamo stati in grado di definire quando vige la relazione di conseguenza logica tra un insieme di formule e una formula.

Tale definizione, basata sulla nozione di modello e, quindi, di soddisfazione, si riferisce solo ai valori attribuiti da I e da s alla formula. Se due formule hanno gli stessi valori, sono indistinguibili rispetto alle nozioni di soddisfazione, modello e conseguenza logica. Come risultato, nella logica predicativa esposta sopra (ciò vale, come vedremo, anche negli altri sistemi che ho descritto), ogni legge logica è equivalente ad ogni altra legge logica ed ogni contraddizione è equivalente ad ogni altra contraddizione, nel senso che sono vere esattamente nelle stesse rappresentazioni (rispettivamente, tutte e nessuna). Ciò è un caso particolare di una situazione più generale. Se per due formule ϕ e ψ si ha $rfm(\phi) = rfm(\psi)$, allora $Mod_p^{\approx}(\phi) = Mod_p^{\approx}(\psi)$.

La funzione che assegna ad ogni formula l'insieme dei suoi riferimenti in una struttura è un omomorfismo. Da ciò segue che se, all'interno di una formula ϕ, si sostituisce una sottoformula ψ di ϕ con un'altra formula ψ' in modo che $rfm(\psi) = rfm(\psi')$, si ottiene una nuova formula ϕ' tale che $rfm(\phi) = rfm(\phi')$ e, quindi $Mod_p^{\approx}(\phi) = Mod_p^{\approx}(\phi')$. Ciò corrisponde a quel che Frege aveva chiam-

---

generica si riferisce ad ogni procedura che assegni oggetti di una struttura ai simboli che rappresentano nozioni non logiche nel linguaggio e, nel caso della semantica per un linguaggio predicativo descritta nel paragrafo precedente, comprende tanto l'interpretazione in senso tecnico, la funzione I, quanto la funzione assegnamento s, che attribuisce un elemento di A ad ogni variabile.

ato *principio di composizionalità*[14] ed indica, precisamente, il valore del fornire una semantica per interpretare un linguaggio: gli elementi linguistici diventano segni che stanno per oggetti non lingusitici e sono tali oggetti e la realtà in cui vivono le cose che contano per definire la nozione di conseguenza logica.

Dopo aver individuato quali sono gli oggetti che soddisfano una certa formula, poi, è semplice comprendere i passaggi concettuali che conducono alla definizione di validità logica e conseguenza logica. Ci sono formule che non sono soddisfatte da alcun oggetto e queste sono le contraddizioni. Ci sono le formule che sono soddisfatte da tutti gli oggetti e queste sono le leggi logiche. Alcune formule sono soddisfatte da alcuni oggetti, ma non da altri. In questo caso, abbiamo a che fare con formule che, una volta interpretate, esprimono enunciati contingentemente veri o contingentemente falsi. La loro verità o falsità non dipende dalle caratteristiche della formula stessa, ma dal tipo di interpretazione o assegnamento che gli sono attribuiti e questi variano al variare della struttura di riferimento.

Applicazione alla semantica dei linguaggi enunciativi I linguaggi predicativi sono linguaggi ricchi, in quanto i loro simboli linguistici sono in grado di indicare oggetti individuali, operazioni e predicati. Il sistema semantico definito per un linguaggio predicativo, di conseguenza, deve essere altrettanto ricco e spiegare in che modo si giunge, considerando le combinazioni degli oggetti attribuiti ai vari simboli, a determinare ilv alore di verità di una formula. Un aspetto importante, che emerge nella semantica per i linguaggi predicativi, ma che non emerge nella semantica dei linguaggi enunciativi, è la distinzione tra oggetti che rendono vera o falsa una formula e i valori di verità medesimi. Nel caso della semantica dei linguaggi enunciativi, infatti, non vi sono altri oggetti da interpretare se non le formule medesime e queste possono essere interpretate solo attribuendole un valore di verità.

Nella semantica dei linguaggi predicativi, distinguiamo una funzione riferimento rfm, che, per ogni struttura, attribuisce ad ogni formula l'insieme degli oggetti che rendono vera tale formula, e una funzione valutazione Val che, per ogni struttura, data una formula ed una sequenza di oggetti, riconosce se tale fomula è vera o falsa rispetto a tale sequenza di oggetti (rispetto, naturalmente, alla struttura che, di volta in volta, funge da riferimento). Le due funzioni sono distinte, così come distinti sono i concetti di rendere vero o falso e di attribuire un valore di verità. Ciò che, data una definizione di verità, rende vero qualcosa, infatti, è il motivo per cui, se si verifica, si attribuisce il valore di verità vero ad una formula e si attribuisce il valore di verità falso in caso contrario. Nella semantica dei linguaggi predicativi, invece, non c'è altro modo che determinare fin dall'inizio il valore di verità delle formule (procedendo, per ricorsione, dalle variabili enunciative). In tal modo non si spiega cosa motivi l'attribuzione di un certo valore di verità ad una formula, ma semplicemente lo si attribuisce. Ciò riflette il minor potere espressivo del linguaggio enunciativo, che parte assumendo

[14] Nèmeti e Andréka (cfr. Nèmeti, Andréka (1994)) forniscono uno studio della semantica dei sistemi logici che lo mette in particolare risalto.

che certe proposizioni siano già date e a disposizione per formarne altre, mentre il linguaggio predicativo prende le mosse da oggetti che non sono formule, ma che, assemblati in un certo modo, sono in grado di trasformarsi in espressioni sensate e permette, quindi, di tenere conto di come si formi il senso delle sue formule. Questa carenza espressiva dei linguaggi enunciativi, si traduce in una carenza dei sistemi semantici definiti per essi in quanto in tali sistemi non si fa alcuna differenza tra il rendere vera una formula e l'attribuire un valore di verità a tale formula. Il primo aspetto è assente o, comunque, assorbito dalla funzione valutazione che, senza basarsi su una costruzione della situazione che renda vera o falsa (o altro ancora, nel caso di logiche polivalenti), le assegna un valore di verità.

Le unità semantiche fondamentali della semantica dei linguaggi predicativi sono gli elementi che concorrono a costituire una situazione che renda vera o falsa una formula. Le unità semantiche fondamentali della semantica dei linguaggi enunciativi, invece, sono direttamente i valori di verità.

Le strutture elaborate per la semantica dei linguaggi enunciativi assumono il minimo indispensabile per determinare una relazione di conseguenza (secondo la concezione che definisce la conseguenza in rapprto ai valori di verità degli enunciati coinvolti). Le strutture di tale semantica, infatti, trattano direttamente i valori di verità. Tutto ciò che fa sì che una certa formula abbia un dato valore di verità non è considerato. Si astrae da come sono fatte le situazioni e si considera solo ciò che è assolutamente indispensabile, ossia qual è il valore di verità che una situazione, a prescindere da come sia costituita, determina per una formula.

In questo caso, definire una funzione riferimento rfm, che, come nel caso predicativo, assegni ciò che soddisfa una formula significherebbe semplicemente definire un duplicato della funzione Mod, che assegna ad una formula le valutazioni che la rendono vera e, a differenza di quel che accade nel caso predicativo, non è possibile definirla prima e indipendentemente dalla funzione Mod (che, poi, sarebbe definita proprio sulla base della funzione riferimento).

Ciò che resta comunque fondamentale, anche nelle semantiche per i linguaggi enucniativi, è, innanzitutto, che la nozione di conseguenza logica è definita escluviamente ricorrendo ai mezzi messi a disposizione dalla realtà in cui si interpretano le formule. É la realtà, in altre parole, e non il ragionamento, la manipolazione di enti linguistici o altro relativo al linguaggio che determina se una formula segue o non segue logicamente da certe premesse. Due formule che si riferiscono ai medesimi valori nella realtà di riferimento non sono distinguibili nel sistema semantico in quanto sono, in tutto e per tutto, equivalenti tra loro. Se due enunciati, infatti, assumono lo stesso valore di verità, possono essere sostituiti in qualsiasi contesto senza modificare alcun rapporto definito in termini semantici e senza modificare, in particolare, la valutazione della validità logica degli argomenti. Ciò soddisfa, come sopra, il cosiddetto principio di composizionalità freghiano, nel senso che il significato di una formul non cambia se una sua sottoformula è rimpiazzata da un'altra formula dotata del medesimo significato.

Relazioni tra calcoli e semantiche

Abbiamo visto, dunque, che una relazione di conseguenza logica può essere definita in modi diversi e le due grandi strade (non sempre ben distinguibili tra loro) che si possono percorrere consistono nel ricorrere alla nozione di calcolo sintattico o alla nozione di semantica. Nel corso della tesi, ho già esposto considerazioni più dettagliate sul senso rivestito da queste due strategie che si possono seguire per definire la conseguenza logica.

Il calcolo, per esempio, può assumere forme che rendono interpretabile come l'espressione rigorosa e formale delle procedure argomentative valide e dell'idea che la logica sia una disciplina dal carattere normativo. Per mezzo di un calcolo, infatti, si mostrano chiaramente tutti i passaggi che permettono di derivare una conseguenza dalle sue premesse e, quindi, obbligano ogni essere razionale ad accettare la conclusione se ha accettato le premesse. Una diversa idea su quali siano i passaggi razionali validi e su quale sia il modo di ragionare correttamente, ovviamente, si riflettono nella determinazione di calcoli e, quindi, di logiche, diverse tra loro. Naturalmente, poi, non è detto ogni calcolo nasca da una certa idea pre-teorica di ragionamento né, a maggior ragione, che sia sempre interpretabile come la controparte formale di una certa visione di quali siano i ragionamenti corretti. Un calcolo, infatti, potrebbe essere presentato in forme tali da rendere implausibile o, addirittura, impossibile interpretarlo come l'espressione rigorosa di passaggi inferenziali validi. In tal caso, sarebbe una procedura algoritmica di natura puramente matematica. Un esempio del primo tipo di calcoli, di quelli aderenti ad una certa idea di ragionamento valido, è rappresentata dai calcoli della deduzione naturale, sviluppati in Gentzen [1936]. Gentzen afferma esplicitamente che uno dei suoi obiettivi è quello di mimare, più di quanto avveniva con i calcoli assiomatici, il reale modo di procedere dei matematici nelle dimostrazioni. Esempi di calcoli che non intendono riflettere alcuna idea di razionalità, invece, ma sono guidati da altre esigenze (efficienza, facilità di implementazione in un calcolatore, ...) possono essere trovati nel campo dei calcoli sviluppati dai logici con interessi nel campo delle applicazioni pratiche e, in particolar modo, nel campo dell'informatica. Un esempio in tal senso è fornito dai calcoli di risoluzione.

Certi sistemi semantici, d'altro canto, possono essere considerati come la controparte formale di porzioni di realtà. Si tratta di un'impresa affine a quella di altre scienze, come la fisica, in cui si elaborano modelli formali per studiare fenomeni concreti. L'adozione di una certa idea su quali siano le caratteristiche della realtà da studiare, conduce alla creazione di modelli formali diversi. La scelta di rappresentare una determinata realtà per mezzo di una struttura della semantica per i linguaggi predicativi, per esempio, presuppone l'ipotesi la rappresentazione di come stanno le cose in quella realtà si possa determinare per mezzo di una struttura. Ciò implica il ritenere che la realtà da modellare contenga individui (logicamente indistinguibili, come hanno mostrato Tarski e Lindendbaum in Tarski-Lindenbaum [1935]) e funzioni che denotano individui operando su altri individui e che tali individui godono di determinate proprietà che sono semplicemente insiemi di n-uple di individui. Come ogni ipotesi che legittima la creazione di un modello formale, anche questa comporta certe semplificazioni, ma, al contempo, può mostrarsi feconda in quanto in grado di fornire un metodo per controllare e rappresentare una grande molteplicità di aspetti e di notare caratteristiche tra questi aspetti che, altrimenti, sarebbero rimaste sconosciute. Come abbiamo notato, tentando di rispondere a certe osservazioni di Etchemendy, può darsi che tale modello si riveli buono per certi aspetti e meno buono per altri o che le nostre intuizioni pre-teoriche che ci hanno spinto ad elaborarlo siano a loro volta, circolarmente, raffinate dal modello stesso che rivela proprietà su aspetti della realtà che non sono per noi intuitivamente oscuri e che ci spinge ad accettare tali conclusioni sulla base della fiducia che gli abbiamo accordato per essersi rivelato uno strumento di lavoro adeguato nelle situazioni più familiari[15].

Come nel caso dei calcoli, che a volte sono interpretabili come la controparte formale di un'idea pre-teorica di ragionamento valido e in altri casi sono algoritmi formali indipendenti da tali idee, anche nel caso delle semantiche si verifica una situazione analoga. I sistemi semantici sono, a volte, determinati da una certa idea di realtà e tentanto di catturarne gli aspetti ritenuti essenziali. In altri casi, però, derivano solo, o prevalentemente, da esigenze di adeguatezza a criteri diversi (capacità di implementazione algoritmica, ...) e, se si applicano ad un sistema logico già esistente, possono essere lontani dall'impostazione originaria che aveva dato origine a tale sistema (come nel caso della semantica di Kripke per la logica intuizionista). Alcuni esempi di sistemi semantici di questo tipo, sviluppatisi soprattuto sulla base di motivazioni di carattere tecnico, sono la già citata semantica di Kripke per la logica intuizionista e la logica operazionale proposta da in Martin, Meyer (1982) per certi sistemi di logica rilevante[16].

Dato un insieme Fm di formule, poi, è possibile definire una relazione di conseguenza logica sia in termini sintattici sia in termini semantici. Questo caso è assai frequente e i rapporti tra le due relazioni sono chiariti, dal punto di vista estensionale, dall'esistenza o meno dei teoremi di correttezza e completezza. Siano $\vdash \subseteq \wp(Fm) \times Fm$ e $\vDash \subseteq \wp(Fm) \times Fm$, rispettivamente, una relazione di conseguenza logica definita per mezzo di un calcolo sintattico e una relazione di conseguenza logica definita per mezzo di una semantica. Diciamo che $\vdash$ è corretta rispetto a $\vDash$ sse $\vdash \subseteq \vDash$ e $\vdash$ è completa rispetto a $\vDash$ sse $\vDash \subseteq \vdash$. In termini equivalenti, si può dire che $\vdash$ è corretta rispetto a $\vDash$ sse, per ogni $\Gamma \subseteq Fm$ e per ogni $\phi \in Fm$, se $\Gamma \vdash \phi$, allora $\Gamma \vDash \phi$ ed è completa rispetto a $\vDash$ sse per ogni $\Gamma \subseteq Fm$ e per ogni $\phi \in Fm$, se $\Gamma \vDash \phi$, allora $\Gamma \vdash \phi$. É chiaro che se $\vdash$ è completa rispetto a $\vDash$, allora teorema del calcolo è una formula valida nella semantica, ossia, per ogni $\phi \in Fm$, se $\vdash \phi$, allora $\vDash \phi$ e viceversa se $\vdash$ è completa rispetto a $\vDash$. Se è vero che ogni teorema del calcolo è anche una formula valida della semantica, allora diciamo che $\vdash$ è debolmente corretta rispetto a $\vDash$. Chiaramente la correttezza, implica la correttezza debole, ma non viceversa. Discorso analogo vale per il caso della completezza. Se ogni formula valida rispetto a $\vDash$ è anche un

[15] Esempi in tal senso possono essere trovati nel campo dedicato alla semantica modellistica.

[16] Ho descritto tale semantica nel capitolo dedicato alla presentazione delle proprietà della relazione di conseguenza logica, più precisamente nel paragrafo dedicato alla proprietà della riflessività.

teorema rispetto a $\vdash$, allora diciamo che $\vdash$ è debolmente completa rispetto a $\models$. Come sopra, la completezza implica la completezza debole, ma non viceversa.

Più in generale, possiamo dire che se abbiamo una logica $\mathcal{L} = \langle \mathbf{Fm}, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$, dove $\vdash_{\mathcal{L}}$ è la relazione di conseguenza logica del sistema $\mathcal{L}$ (non importa in che modo sia stato definito), allora una relazione di conseguenza logica $\vdash_C$ definita per mezzo di un calcolo C è corretta per $\mathcal{L}$ (o, in modo equivalente, rispetto a $\vdash_{\mathcal{L}}$)sse $\vdash_C \subseteq \vdash_{\mathcal{L}}$ ed è completa sse $\vdash_{\mathcal{L}} \subseteq \vdash_C$. Allo stesso modo, diciamo che una relazione di conseguenza logica definita $\models_S$ per mezzo di una semantica S è corretta per $\mathcal{L}$ (o, in modo equivalente, rispetto a $\vdash_{\mathcal{L}}$) sse $\models_S \subseteq \vdash_{\mathcal{L}}$ ed è completa sse $\vdash_{\mathcal{L}} \subseteq \models_S$. In modo analogo a prima, si possono riformulare, in questo contesto, le proprietà della correttezza debole e della completezza debole, sulle quali, comunque, non occorre soffermarsi oltre.

Si può notare, a titolo di esempio, che le relazioni di conseguenza logica definite dai calcoli forniti sopra per la logica classica sono corrette e complete per la relazione di conseguenza logica definita dalla semantica basata sull'algebra **2** data sopra. Allo stesso modo la conseguenza logica definita dal calcolo alla Hilbert definito sopra per la logica ad infiniti valori di verità è corretta e completa per la relazione di conseguenza logica basata sull'algebra $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ data sopra.

Capitolo 10

MATRICI

In questo capitolo mi interessa approfondire alcuni temi connessi ad un modo particolare di fornire la semantica di una logica. Si tratta del metodo delle matrici. Non è mia intenzione, ovviamente, affrontare in modo esaustivo le maggiori tematiche connesse a questo campo di ricerca, quanto quello di mostare come il metodo possa essere considerato un modo generale con cui fornire una semantica applicabile ad ogni sistema logico enunciativo. Il metodo delle matrici potrebbe essere considerato, quindi, come uno schema generale che per costruire semantiche per sistemi logici enucniativi, a prescindere dal modo particolare in cui sono definiti. É interessante osservare, poi, come tale metodo possa fornire anche semantiche più speciifiche ed intuitivamente più perspicue ed informative a seconda delle caratteristiche del sistema logica a cui lo si applica.

10.1 Semantica algebrica

10.1.1 Interpretazioni

Assumiamo un linguaggio enunciativo $\mathbf{L} = \langle \mathbf{C}, Var, G \rangle$ il cui vocabolario è $\mathbf{C} = \langle C, r \rangle$ e, come nel capitolo precedente, Var è l'insieme delle variabili enunciative e G un insieme di regole d formazione. Abbiamo già visto, nel precedente capitolo, che possiamo considerare $\mathbf{C}$ un tipo algebrico e determinare, quindi, cosa intendiamo con un'algebra $\mathbf{A}$ di tipo $\mathbf{C}$. Un'algebra $\mathbf{A}$ di tipo $\mathbf{C}$ è un'algebra $\left\langle A, \{f_c \in^{A^{n_c}} A : c \in C\} \right\rangle$ dove, ad ogni simbolo di funzione $c \in C$ tale che $ar(c) = n$, corrisponde un'operazione n-aria f_c su A. Se vi sono alcuni simboli di funzione 0-ari in C, allora la corrispondente operazione in $\mathbf{A}$ sarà un elemento del dominio, ossia, nel nostro caso, una constante enunciativa. Dal momento che $\mathbf{C}$ e, quindi, i simboli in C sono i connettivi di $\mathbf{L}$, consideriamo l'algebra $\mathbf{A}$ come l'insieme dei valori semantici di $Fm\mathbf{L}$ e le operazioni 0-arie in $\mathbf{A}$ saranno i valori semantici delle costanti in $\mathbf{L}$ e le operazioni n-arie, cone $n > 0$, saranno le interpretazioni dei connettivi in $\mathbf{A}$, ossia le funzioni dei valori semantici. Chiamiamo un'algebra con queste caratteristiche *interpretazione* di $\mathbf{L}$.

Nel capitolo precedente, sono stati forniti vari esempi di interpretazioni di un certo linguaggio, come l'algebra $\mathbf{2}$ per il linguaggio i cui connettivi sono $\{\wedge, \vee, \neg, \bot, \top\}$ o l'algebra $\mathbf{Ł_3}$ per il linguaggio i cui connettivi sono $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \}$ o, ancora, l'algebra $\mathbf{P}$ per il linguaggio i cui connettivi sono $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, N\}$.

10.1.2 Valutazioni

Abbiamo già spiegato che l'algebra delle formule $\mathbf{Fm_L}$ è libera nella classe delle algebre di tipo $\mathbf{C}$. Questo permette di considerare le attribuzioni di un valore semantico alle formule come omomorfismi dall'algebra delle formule ad un'algebra $\mathbf{A}$ di tipo $\mathbf{C}$, univocamente determinate dagli assegnamenti di valori alle variabili enunciative. Il valore di una formula è un elemento dell'algebra e il valore di una formula complessa è completamente determinato dal valore delle formule da cui è composto e, in ultima analisi, trattandosi di omomorfismi, dal valore delle formule atomiche. Affermare che la valutazione assegna lo stesso valore a due formule diverse, significa che gli attribuisce il medesimo elemento dell'algebra e, perciò, formule con lo stesso valore sono indistinguibili nella semantica. La semantica algebrica, in altre parole, determina un processo di astrazione che unifica certe unità linguistiche. Formule diverse possono ricevere lo stesso valore semantico ed essere, in tal modo, identificate dalla semantica. Formule diverse possono essere presentazioni linguistiche differenti del medesimo fatto semantico. Nel caso in cui si intende definire o, comunque, studiare, la relazione di conseguenza logica dal punto di vista semantico, dunque, si opera, come abbiamo già detto nel capitolo precedente, con oggetti non linguistici che possono essere meno di quelli linguistici. Le modalità espressive sono considerate un carattere accidentale e non importante, una semplice veste degli oggetti di un certo mondo che costituiscono i significati delle espressioni linguisitiche e che determinano i rapporti di conseguenza tra di esse. La relazione di conseguenza logica non vale, in altre parole, per certe proprietà linguistiche degli enti considerati (come, invece, avviene nel calcolo), ma per i significati a cui essi si riferiscono. Il mondo dei significati contiene i valori possibili che possono essere attribuiti alle formule e le valutazioni permettono di specificare tali attribuzioni di significato in modi diversi e opportuni, in modo da verificare quali sono le differenti combinazioni di valori semantici possibili per gli enti linguistici e considerare come queste combinazioni determinano o meno una situazione in cui un certo enunciato è conseguenza logica di un insieme di enunciati.

Se indichiamo con $Val_{\mathbf{A}}$ l'insieme delle valutazioni delle formule nell'algebra $\mathbf{A}$, allora, abbiamo che $Val_{\mathbf{A}} \subseteq Hom(\mathbf{Fm_L}, \mathbf{A})$, ossia, come si è detto, che le valutazioni sono omomorfismi dall'algebra delle formula all'algebra $\mathbf{A}$, che costituisce la nostra interpretazione. Negli esempi dati nei capitoli precedenti, si è sempre dato il caso $Val_{\mathbf{A}} = Hom(\mathbf{Fm_L}, \mathbf{A})$, che è la situazione di gran lunga più comune. Chiaramente, se assumiamo solo $Val_{\mathbf{A}} \subset Hom(\mathbf{Fm_L}, \mathbf{A})$, per poter definire una relazione di conseguenza logica, ossia una relazione di chiusura che sia strutturale, occorre che la classe delle valutazioni in $\mathbf{A}$ sia chiusa rispetto alla composizione di un omomorfismo in $Val_{\mathbf{A}}$ con le sostituzioni, ossia con ogni $\sigma \in End(\mathbf{Fm_L})$. Questa richiesta è sempre soddisfatta se si considera la classe di tutti gli omomorfismi dall'algebra delle formule all'interpretazione, perché la composizione di un omomorfismo con una sostituzione è ancora un omomorfismo, ma deve essere esplicitamente richiesta nel caso in cui la classe delle valutazioni sia una sottoclasse propria di $Hom(\mathbf{Fm_L}, \mathbf{A})$.

10.1.3 Valori algebrici e valori di verità

I valori semantici, ossia gli elementi di un'algebra, sono considerati, in genere valori di verità. Wójcicki [1988], pp. 191 sg., tuttavia, fa notare che l'interpretazione in termini di valori di verità non è l'unica possibile. Certamente è la più diffusa e, infatti, gli esempi di semantiche algebriche dati finora e, in particolare, quelli richiamati sopra, hanno seguito questa impostazione. In $2 = \{0, 1\}$, per esempio, 1 è stato considerato il rappresentante del valore di verità *Vero* e 0 del valore di verità *Falso*. In altri casi, come in $\mathbf{Ł_3}$, in $\mathbf{Ł_3^F}$, abbiamo introdotto $\frac{1}{2}$, un valore intermedio tra 1 e 0, che ha ricevuto diverse interpretazioni: nè vero nè falso o vero e falso insieme. Anche quando si intende mantenere un rapporto con i valori di verità, non sempre l'interpretazione intesa dei valori algebrici è immediatamente ricondubicibile a quella dei valori di verità. Nella logica parziale, infatti, abbiamo definito l'algebra $\mathbf{P}$, il cui dominio era costituito da $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$. 0 e 1 sono stati considerati, come di consueto, rispettivamente, il *Falso* e il *Vero*. $\frac{1}{2}$ è stato interpretato come il valore *Insensato*. Ora, *Insensato* ha sicuramente un riferimento ai valori di verità, poichè indica che non è possibile considerare l'enunciato insensato nè come vero nè come falso. Non è chiaro, però, che *Insensato* sia esso stesso un valore di verità e non un valore di altro tipo che è attribuito agli enunciati che non possono ricevere un valore di verità.

La questione su cosa sia un valore di verità è, naturalmente, importante e complessa. Non me nè occuperò ora (per alcuni riferimenti, cfr. Young [2008]) e continuerò a usare questo concetto nel modo, per lo più intuitivo, in cui lo usa nella letteratura di riferimento. Quel che si può, comunque, fare notare, riprendendo Wójcicki [1988], pp. 191 sg., è che vi sono altre possibilità per interpretare il significato dei valori algebrici che, intuitivamente, non sono di sicuro dei valori di verità. In primo luogo, i valori algebrici possono essere considerati come i rappresentanti degli stessi enunciati. In tal caso l'algebra considerata è la stessa algebra delle formule alcune formule possono essere isolate dalle altre perché ritenute valide, secondo una certa nozione di validità, o altro. Questo caso, che può sembrare strano. In effetti, da un certo punto di vista, si procede in un modo contrario a quello solito. Invece di avere una nozione di validità e di veritificare quali sono le formule che sono validità, si decide che alcune formule sono valide senza che si comprenda come sia possibile giustificare tale scelta in modo non arbitrario. Non approfondisco, ora, la questione, di cui, tuttavia, ci occuperemo più a lungo sotto, trattando dei cosiddetti blocchi di Lindenbau. Un'altra possibilità, per esempio, è considerare gli elementi del dominio dell'interpretazione come eventi o come fatti. Ad ogni enunciato corrisponde un evento ed enunciati diversi possono esprimere il medesimo evento. La relazione di soddisfazione è definita considerando alcuni valori come rappresentanti degli eventi che accadono ed altri come quelli che non accadono. Per un breve approfondimento di questo argomento, si veda l'appendice in fondo al capitolo.

In fondo al capitolo, si trova un'appendice in cui svolgo alcune osservazioni su una possibile interpretazione dei valori algebrici non come valori di verità. Nel resto del capitolo, però, tratterò i valori algebrici come rappresentati di valori di verità, anche se, come non si avrà difficoltà a riconoscere, molti discorsi sono indipendenti da tali considerazioni.

10.2 Matrici

Un'idea implicita nelle semantiche algebriche considerate finora è quella secondo cui i valori algebrici non sono tutti uguali e vi è almeno una netta differenza tra quelli che, data una formula, rendono la rendono valida e quelli che non la rendono valida. Nelle algebre $\mathbf{2}$ e $\mathbf{Ł_3}$, i cui insiemi di valori di verità sono, rispettivamente, $\{0, 1\}$ e $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ abbiamo visto che una formula è soddisfatta da una valutazione se e solo se tale valutazione le assegna il valore 1. In $\mathbf{Ł_3^F}$, il cui insieme di valori div erità è $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$, invece, una formula è soddisfatta da una valutazione se e solo tale valutazione le assegna un valore diverso da 0, ossia un valore in $\{\frac{1}{2}, 1\}$. In tal modo, in tutti questi casi, si è isolato un insieme di valori che si riteneva rappresentassero la verità (in $\mathbf{Ł_3^F}$, il valore $\frac{1}{2}$ rappresenta la condizione di essere vero e falso insieme) e lo si è usato per distinguere i casi in cui una valutazione soddisfa una formula in una certa algebra e quando non la soddisfa.

Questa idea era implicita anche nei lavori di Łukasiewicz [1910], Post [1921], Heyting [1930] e altri, che hanno fatto ricorso alla nozione di tavola di verità, per definire sistemi di logiche non classiche (Łukasiewicz e Post) o per mostrare l'indipendenza di certi assiomi da altri assiomi (Heyting). La prima formulazione esplicita di questa impostazione, però, si deve a Łukasiewicz-Tarski (1930), che definiscono il concetto di matrice.

Definition 103 *Sia* $\mathbf{C}$ *un vocabolario e* $\mathbf{A}$ *un'algebra di tipo* $\mathbf{C}$*. Una matrice di tipo* $\mathbf{C}$ *è una coppia* $M = \langle \mathbf{A}_M, D \rangle$*, dove* D *è un sottoinsieme di* A*, detto l'insieme dei valori designati.*

Si noti che non richiediamo alcunché sul modo in cui D deve essere definito (tramite equazioni, ...) nè si escludono i casi in cui $D = \emptyset$ e $D = A$. Nel primo caso, la matrice è detta *nulla* e nel secondo caso è detta *triviale*. Con l'espressione *elemento* (o valore) *di una matrice* mi riferisco ad un elemento del dominio dell'algebra. L'insieme delle valutazioni delle formule in una matrice M è l'insieme $Hom(\mathbf{Fm_L}, \mathbf{A}_M)$ degli omomorfismi dall'algebra delle formule all'algebra $\mathbf{A}_M$ di M.

Stabiliamo che ogni volta che parlo di un'algebra mi riferisco ad un algebra del medesimo tipo di un'algebra delle formule, arbitraria, ma fissata per tutto il capitolo. Le eventuali eccezioni, saranno debitamente segnalate.

Definition 104 *Diciamo che una valutazione* $h_{\mathbf{A}_M}$ *soddisfa una formula* ϕ *nella matrice* M *(in simboli,* $M \Vdash \phi[h_{\mathbf{A}_M}]$ *o* $\langle \mathbf{A}_M, D \rangle \Vdash \phi[h_{\mathbf{A}_M}]$*) sse* $h_{\mathbf{A}_M}(\phi) \in D$*.*

ϕ è soddisfabile in M sse esiste una valutazione $h_{\mathbf{A}_M}$ tale che $M \Vdash \phi[h_{\mathbf{A}_M}]$. ϕ è valida in M, o, in modo equivalente, è un teorema di M, (in simboli, $M \Vdash \phi$) sse $M \Vdash \phi[h_{\mathbf{A}_M}]$ per ogni $h_{\mathbf{A}_M} \in Hom(\mathbf{Fm_L}, \mathbf{A}_M)$.

Come è ovvio, i concetti della precedente definizione si possono estendere ad insiemi di formule. Diciamo che $\mathbf{A}_M$ soddisfa l'insieme Γ di formule in M (in simboli, $M \Vdash \Gamma[h_{\mathbf{A}_M}]$) sse $h_{\mathbf{A}_M}(\gamma) \in D$ per ogni $\gamma \in \Gamma$. Γ è soddisfabile sse esiste una vatazione $h_{\mathbf{A}_M}$ tale che $M \Vdash \Gamma[h_{\mathbf{A}_M}]$. Γ è valido in M sse ogni formula in Γ è un teorema di M.

Analogamente ai casi precedenti, definiamo $Mod_M(\phi) = \{h_{\mathbf{A}_M} \in Hom(\mathbf{Fm_L}, \mathbf{A}_M) : M \Vdash \phi[h_{\mathbf{A}_M}]\}$ e $Mod_M(\Gamma) = \{h_{\mathbf{A}_M} \in Hom(\mathbf{Fm_L}, \mathbf{A}_M) : M \Vdash \Gamma[h_{\mathbf{A}_M}]\}$ per ogni $\phi \in Fm$ e per ogni $\Gamma \subseteq Fm$. É chiaro, allora, che una formula ϕ è valida in un matrice M sse $Mod_M(\phi) = Hom(\mathbf{Fm_L}, \mathbf{A}_M)$ ed è soddisfabile in M sse $Mod_M(\phi) \neq \emptyset$. In modo analogo, Γ è un insieme di teoremi sse $Mod_M(\Gamma) = Hom(\mathbf{Fm_L}, \mathbf{A}_M)$ e Γ è soddisfabile in M sse $Mod_M(\Gamma) \neq \emptyset$.

Definition 105 *Sia $\mathcal{L} = \langle Fm, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$ una logica. Diciamo che M è modello di $\mathcal{L}$ sse, per ogni $\phi \in Fm$ e per ogni $\Gamma \subseteq Fm$, $Mod_M(\Gamma) \subseteq Mod_M(\phi)$ se $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \phi$. Con $Md_{\mathcal{L}}$ indichiamo la classe delle matrici che sono modello di $\mathcal{L}$.*

Definition 106 *Siano $\mathbf{A}$ un'algebra di tipo $\mathbf{C}$ e F un sottoinsieme di A. Sia $\mathcal{L} = \langle Fm, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$ e $\mathbf{C}$ la base di connettivi di Fm. Diciamo che F è un filtro deduttivo per $\mathcal{L}$ sse, se $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \phi$ e $h_{\mathbf{A}} \in Hom(\mathbf{Fm_L}, \mathbf{A})$, allora, $h_{\mathbf{A}}(\phi) \in F$ se $h_{\mathbf{A}}(\gamma) \in F$ per ogni $\gamma \in \Gamma$. Indichiamo con $Fi^{\mathbf{A}}_{\mathcal{L}}$ l'insieme dei filtri deduttivi di $\mathbf{A}$ per $\mathcal{L}$.*

Lemma 107 *Una matrice M è modello di $\mathcal{L}$ sse D è un filtro deduttivo per $\mathcal{L}$.*

Proposition 108 *L'insieme vuoto è un filtro deduttivo per $\mathcal{L}$ sse $\mathcal{L}$ non ha teoremi.*

Example 109 *Un esempio di logica senza teoremi è $\mathcal{L}_{\mathbf{K_3}}$. Assumiamo l'algebra $\boldsymbol{K_3} = \left\langle \{0, \frac{1}{2}, 1\}, \wedge^{\boldsymbol{k_3}}, \vee^{\boldsymbol{k_3}}, \rightarrow^{\boldsymbol{k_3}}, \neg^{\boldsymbol{k_3}} \right\rangle$. Le operazioni di $\boldsymbol{K_3}$ sono definite come in $\boldsymbol{Ł_3}$ (si veda il capitolo precedente) tranne che per il seguente caso:*

$\rightarrow^{\mathbf{K_3}}$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	1	1

Sia $Hom(\mathbf{Fm_L}, \mathbf{K_3})$ l'insieme delle valutazioni in $\mathbf{K_3}$. Una formula ϕ è soddisfatta da una valutazione $h_{\mathbf{K_3}}$ in $\mathbf{K_3}$ (in simboli, $\mathbf{K_3} \Vdash \Gamma[h_{\mathbf{K_3}}]$) sse $h_{\mathbf{K_3}}(\phi) = 1$. Definiamo $Mod_{\mathbf{K_3}}(\phi)$ e $Mod_{\mathbf{K_3}}(\Gamma)$ nel modo solito (si veda il capitolo precedente). $\mathbf{K_3}$ determina una logica $\mathcal{L}_{\mathbf{K_3}} = \left\langle Fm, \vDash_{\mathcal{L}_{\mathbf{K_3}}} \right\rangle$ per mezzo della seguente definizione: per ogni $\Gamma \subseteq Fm$ e per ogni $\phi \in Fm$, $\Gamma \vDash_{\mathcal{L}_{\mathbf{K_3}}} \phi$ sse $Mod_{\mathcal{L}_{\mathbf{K_3}}}(\Gamma) \subseteq Mod_{\mathcal{L}_{\mathbf{K_3}}}(\phi)$. Diciamo che una formula ϕ è un teorema di $\mathcal{L}_{\mathbf{K_3}}$ ($\vDash_{\mathbf{K_3}} \phi$) sse $h_{\mathbf{K_3}}(\phi) = 1$ per ogni $h_{\mathbf{K_3}} \in Hom(\mathbf{Fm_L}, \mathbf{K_3})$, ossia sse $Mod_{\mathbf{K_3}}(\phi) = Hom(\mathbf{Fm_L}, \mathbf{K_3})$. Un rapido controllo delle tavole di verità, però, mostra che non esiste nessuna formula valida. Ogni formula, infatti, prende valore $\frac{1}{2}$ quando tutte le variabili enuciative che vi compaiono prendono valore $\frac{1}{2}$. In altri termini, la valutazione $h_{\mathbf{K_3}}(p) = \frac{1}{2}$ per ogni $p \in Var$ è un contro-modello per ogni formula.

Definition 110 *Una classe* $\mathbf{M}$ *di matrici è detta debolmente completa per una logica* $\mathcal{L}$ *sse, per ogni* $\Gamma \subseteq Fm$ *e per ogni* $\phi \in Fm$*,*

$$\vdash_{\mathcal{L}} \phi \text{ sse, per ogni } M \in \mathbf{M},\ Mod_M(\phi) = Hom(\mathbf{Fm_L}, \mathbf{A}_M).$$

Definition 111 *Una classe* $\mathbf{M}$ *di matrici è detta completa per una logica* $\mathcal{L}$ *sse, per ogni* $\Gamma \subseteq Fm$ *e per ogni* $\phi \in Fm$*,*

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \phi \text{ sse, per ogni } M \in \mathbf{M},\ Mod_M(\Gamma) \subseteq Mod_M(\phi).$$

A volte si scinde questa definizione in due parti, distinguendo il concetto di correttezza (l'implicazione da sinistra a destra nella definizione) da quello di completezza (l'implicazione da destra a sinistra nella definizione). Non occorre sofferemarsi, qui, su questa distinzione. Quel che ci dice questa definizione è che una classe $\mathbf{M}$ di matrici è completa per una logica $\mathcal{L}$ sse ogni matrice in $\mathbf{M}$ è un modello di $\mathcal{L}$ e per ogni argomento non valido $\Gamma \nvdash_{\mathcal{L}} \phi$ c'è una matrice in $\langle \mathbf{A}, D \rangle \in \mathbf{M}$ e una valutazione in tale matrice che testimonia il fatto che tutti gli enunciati in Γ possono ricevere un valore designato senza che lo riceva anche ϕ.

Per mezzo di una matrice è possibile anche definire una logica, procedendo dal punto di vista semantico. In realtà, questo è quel che abbiamo già implicitamente fatto quando abbiamo usato le algebre $\mathbf{2}$, $\mathbf{Ł_3}$, $\mathbf{Ł_3^F}$, $\mathbf{K_3}$ e $\mathbf{P}$ per definire le rispettive logiche sopra e nel precedente capitolo.

Definition 112 *Sia* M *una matrice.* $\vDash_M \subseteq \wp(Fm) \times Fm$ *è una relazione tale che, per ogni* $\Gamma \subseteq Fm$ *e per ogni* $\phi \in Fm$

$$\Gamma \vDash_M \phi \text{ sse } Mod_M(\Gamma) \subseteq Mod_M(\phi).$$

Proposition 113 $\vDash_M$ *è una relazione di conseguenza logica su* Fm*.*

Proof. (a) $\vDash_M$ è riflessiva. Infatti, $Mod_M(\phi) \subseteq Mod_M(\phi)$, quindi, per la definizione 112, $\phi \vDash_M \phi$ per ogni formula ϕ. (b) $\vDash_M$ è monotona. Supponiamo $\Gamma \vDash_M \phi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, allora $Mod_M(\Gamma) \subseteq Mod_M(\phi)$ e $Mod_M(\Delta) \subseteq Mod_M(\Gamma)$. Ne segue che $Mod_M(\Delta) \subseteq Mod_M(\phi)$ e, quindi, per la definizione 112, $\Delta \vDash_M \phi$. (c) $\vDash_M$ è transitiva. Supponiamo $\Gamma \vDash_M \phi$ e $\Delta \vDash_M \gamma$ per ogni $\gamma \in \Gamma$. Allora, abbiamo che $Mod_M(\Gamma) \subseteq Mod_M(\phi)$ e $Mod_M(\Delta) \subseteq Mod_M(\Gamma)$, quindi $Mod_M(\Delta) \subseteq Mod_M(\phi)$. Per la definizione 112, concludiamo $\Delta \vDash_M \phi$. (d) $\vDash_M$ è strutturale. Ciò segue dal fatto che la classe delle valutazioni coincide con la classe degli omomorfismi dall'algebra delle formule ad $\mathbf{A}_M$ e dal fatto che la composizione di un omomorfismo con un endomorfismo è un omomorfismo. ■

Corollary 114 *$\langle Fm, \vDash_M \rangle$ è una logica.*

In modo analogo, possiamo definire una relazione di conseguenza per mezzo di una classe $\mathbf{M}$ di matrici (sostanzialmente riprendendo la definizione 111).

Definition 115 *$\vDash_{\mathbf{M}} \subseteq \wp(Fm) \times Fm$ è una relazione tale che, per ogni $\Gamma \subseteq Fm$ e per ogni $\phi \in Fm$*

$$\Gamma \vDash_{\mathbf{M}} \phi \text{ sse, per ogni } M \in \mathbf{M},\ Mod_M(\Gamma) \subseteq Mod_M(\phi).$$

Un modo equivalente di definire $\vDash_{\mathbf{M}}$ è porre $\vDash_{\mathbf{M}} = \bigcap \{\vDash_M : M \in \mathbf{M}\}$[1]. Come nel caso precedente, è facile verificare che $\vDash_{\mathbf{M}}$ è una relazione di conseguenza logica su Fm. $\langle Fm, \vDash_{\mathbf{M}} \rangle$, quindi, è una logica.

Corollary 116 *Le precedenti definizioni di modello, completezza debole e completezza possono essere riformulate come segue:*

- la matrice M è un modello della logica $\mathcal{L}$ ($M \in Md_{\mathcal{L}}$) sse $\vdash_{\mathcal{L}} \subseteq \vDash_M$
- la classe $\mathbf{M}$ di matrici è debolmente completa per $\mathcal{L}$ sse $\vdash_{\mathcal{L}} \phi$ sse $\vDash_{\mathbf{M}} \phi$ per ogni $\phi \in Fm$
- la classe $\mathbf{M}$ di matrici è completa per $\mathcal{L}$ sse $\vdash_{\mathcal{L}} = \vDash_{\mathbf{M}}$.

Lemma 117 *Sia $\mathbf{M}$ una classe di matrici e $\mathcal{L}$ una logica. Se $\mathbf{M} \subseteq Md_{\mathcal{L}}$, allora $\vDash_{Md_{\mathcal{L}}} \vDash_{\mathbf{M}}$.*

10.2.1 Finitarietà

Quando ci rifieriamo ad $M = \langle \mathbf{A}_M, D \rangle$ come ad una matrice finita, intendiamo che la cardinalità di A è finita.

Theorem 118 *Se M è una matrice finita, allora $\vDash_M$ è finitaria.*

Theorem 119 *Se M è una matrice finita, allora un insieme Γ di formule è soddisfabile in M sse ogni suo sottoinsieme Δ finito è soddisfabile in M.*

Theorem 120 *Se $\mathbf{M}$ è una classe finita di matrici finite, allora $\vDash_{\mathbf{M}}$ è finitaria.*

Consideriamo, ora, una matrice Sia $M = \langle \mathbf{A}_M, D \rangle$ una matrice. $\wp(\mathbf{Hom}(\mathbf{Fm_L}, \mathbf{A})) = \langle \wp(Hom(\mathbf{Fm_L}, \mathbf{A})), \cap, \cup, ', \emptyset, Hom(\mathbf{Fm_L}, \mathbf{A}) \rangle$ è un'algebra di Boole. Sia U un ultrafiltro in $\wp(\mathbf{Hom}(\mathbf{Fm_L}, \mathbf{A}))$. Allora, possiamo enunciare il seguente teorema.

Theorem 121 *$\vDash_M$ è finitaria sse, per ogni $p \in Var$, per almeno un $a \in A$, $\{h_{\mathbf{A}} \in Hom(\mathbf{Fm_L}, \mathbf{A}) : h_{\mathbf{A}}(p) = a\} \in U$.*

[1] Cfr. Wójcicki, 1988, pp. 194 sg.

Nel caso delle logiche definite per mezzo di un calcolo, a meno che si ammettano regole di derivazione non finitarie, la finitarietà della relazione di conseguenza logica è una proprietà evidente dalla definizione della relazione di conseguenza logica stessa. Le cose, invece, stanno in modo diverso nel caso di logiche definite per mezzo di una semantica. In questo caso, infatti, non si fa riferimento a manipolazioni controllabili di oggetti linguistici, ma a relazioni tra oggetti che vivono in una certa struttura. Nulla garantisce che le loro relazioni debbano essere tali da definire una relazione di conseguenza finitaria.

Example 122 *Consideriamo l'algebra* $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$*, definita nel capitolo precedente, e definiamo la matrice* $\boldsymbol{Ł}_\infty = \langle [\mathbf{0},\mathbf{1}], \{1\}\rangle$*. Definiamo la relazione di conseguenza logica* $\vDash_{L_\infty}$ *nel modo seguente. Sia* $Hom(\mathbf{Fm}, [\mathbf{0},\mathbf{1}])$*. Per ogni* $\Gamma \subseteq Fm$ *e per ogni* $\phi \in Fm$

$$\Gamma \vDash_{\mathbf{Ł}_\infty} \phi \text{ sse, se } h_{\mathbf{Ł}_\infty}(\Gamma) \subseteq \{1\}, \text{ allora } h_{\mathbf{Ł}_\infty}(\phi) \in \{1\}.$$

$\vDash_{\mathbf{Ł}_\infty}$ è una relazione di conseguenza logica infinitaria (di fatto, coincide con la relazione $\vDash_\infty$ definita nel capitolo precedente).

10.2.2 Congruenze

Consideriamo la matrice $M = \langle \mathbf{A}_M, D\rangle$.

Definition 123 *Una congruenza* θ *su* $\mathbf{A}_M$ *è compatibile con* D *se e solo se, per ogni* $a, b \in A$,

$$\text{se } a\theta b \text{ e } \alpha \in D, \text{ allora } b \in D.$$

In tal caso diciamo anche che θ è una congruenza sulla matrice M. Le congruenze matriciali non rendono mai equivalenti elementi designati con elementi non designati.

Denotiamo con $Co\,\langle \mathbf{A}_M, D\rangle$ l'insieme delle congruenze su $M = \langle \mathbf{A}_M, D\rangle$.

É importante osservare che ogni congruenza su M determina una nuova matrice $[M]_\theta = \langle [\mathbf{A}_M]_\theta, [D]_\theta\rangle$, dove $[\mathbf{A}_M]_\theta$ è il quoziente dell'algebra $\mathbf{A}_M$ e $[D]_\theta = \{[a]_\theta : a \in D\}$.

Definition 124 *Sia* $M = \langle \mathbf{A}_M, D\rangle$ *una matrice.* $[M]_\theta = \langle [\mathbf{A}_M]_\theta, [D]_\theta\rangle$ *è detta matrice quoziente di* M*.*

Lemma 125 *Siano* $M = \langle \mathbf{A}_M, D\rangle$ *un matrice e* θ *una congruenza su* M*. Allora, per ogni* $a \in A$*,* $a \in D$ *sse* $[a]_\theta \in [D]_\theta$*.*

Proof. ($\Longrightarrow$) Assumiamo $a \in D$. Supponiamo $[a]_\theta \notin [D]_\theta$. Da ciò e dalle definizione 123 segue che $[a]_\theta \nsubseteq D$. Dalla definizione 123 segue che se $b \notin D$ e $a\theta b$, allora $a \notin D$. Dunque $[a]_\theta \subseteq D$, che contraddice $[a]_\theta \nsubseteq D$. Concludiamo, quindi, $[a]_\theta \in [D]_\theta$.

($\Longleftarrow$) Assumiamo $[a]_\theta \in [D]_\theta$. Supponiamo $a \notin D$. Dall'assunzione e dalla definizione 123, segue $[a]_\theta \subseteq D$. Quindi, $a \in D$, che contraddice $a \notin D$. Concludiamo $a \in D$. ■

Osserviamo che la funzione naturale $\pi : A \to [A]_\theta$, ossia la funzione tale che $\pi(a) = [a]_\theta$ per ogni $a \in A$, è un omomofismo suriettivo su $\mathbf{A}_M$, in quanto, per ogni operazione n-aria su $\mathbf{A}_M$ e per ogni $a_1, ..., a_n \in A_M$, possiamo definire

$$\pi(f^{\mathbf{A}_M}(a_1, ..., a_n)) = f^{\mathbf{A}_M}(\pi(a_1), ..., \pi(a_n)).$$

Per questo motivo, chiameremo π anche *omomorfismo naturale*.

Dal lemma 125, segue facilmente il successivo corollario.

Corollary 126 *Sia $M = \langle \mathbf{A}_M, D \rangle$ una matrice. Sia $\pi : A \to [A]_\theta$ l'omomorfismo naturale (ossia, $\pi(a) = [a]_\theta$ per ogni $a \in A$). Allora $D = \pi^{-1}\pi D$.*

Theorem 127 *Se θ è una congruenza sulla matrice $M = \langle \mathbf{A}_M, D \rangle$, allora $\vDash_M = \vDash_{[M]_\theta}$.*

Proof. ($\subseteq$) Assumiamo $\Gamma \vDash_M \phi$. Per la definizione 112, ciò significa $Mod_M(\Gamma) \subseteq Mod_M(\phi)$. Supponiamo $\Gamma \nvDash_{[M]_\theta} \phi$. Allora, per almeno un $h_{[M]_\theta} \in Hom(\mathbf{Fm}, [\mathbf{A}_M]_\theta)$, $h_{[M]_\theta}(\Gamma) \subseteq D$ e $h_{[M]_\theta}(\phi) \notin D$. Definiamo una base di valutazione $\nu_M : Var \to A$ tale che $\nu(p) \in h_{[M]_\theta}(p)$ per ogni $p \in Var$ (se Var è infinito, occorre usare l'assioma di scelta). Sia $h^{\nu}_{M} : \mathbf{Fm} \to \mathbf{A}_M$ l'omomorfismo che estende ν_M. Abbiamo $h^{\nu}_{M}(\phi) \in h_{[M]_\theta}(\phi)$ per ogni $\phi \in Fm$. Da ciò segue che $h^{\nu}_{M}(\Gamma) \in D$ e $h^{\nu}_{M}(\phi) \notin D$, ossia $Mod_M(\Gamma) \nsubseteq Mod_M(\phi)$, contro l'assunzione. Concludiamo $\Gamma \vDash_{[M]_\theta} \phi$.

($\supseteq$) Assumiamo $\Gamma \vDash_{[M]_\theta} \phi$, ossia $Mod_{[M]_\theta}(\Gamma) \subseteq Mod_{[M]_\theta}(\phi)$. Supponiamo $\Gamma \nvDash_M \phi$. Allora, per almeno una valutazione $h : \mathbf{Fm} \to \mathbf{A}_M$, $h(\gamma) \in D$ per ogni $\gamma \in \Gamma$ e $h(\phi) \notin D$. Per il lemma 125, abbiamo $\pi \circ h(\gamma) \in [D]_\theta$ per ogni $\gamma \in \Gamma$ e $\pi \circ h(\phi) \notin [D]_\theta$. Ma π è un omomorfismo e la composizione di un omomorfismo è un omomorfismo, quindi $\pi \circ h$ è una valutazione su $[M]_\theta$ e $Mod_{[M]_\theta}(\Gamma) \nsubseteq Mod_{[M]_\theta}(\phi)$ contro l'assunzione. Concludiamo $\Gamma \vDash_M \phi$. ■

Lemma 128 *L'insieme $Co \langle \mathbf{A}_M, D \rangle$ delle congruenze su M è un sottoreticolo completo dell'insieme $Co\mathbf{A}_M$ delle congruenze su $\mathbf{A}_M$ e l'infimo di $Co \langle \mathbf{A}_M, D \rangle$ è la relazione identità.*

Poiché $Co \langle \mathbf{A}_M, D \rangle$ è un reticolo completo, ha senso considerare la congruenza più grande, in senso insiemistico, tra quelle su una certa matrice M.

Definition 129 *Chiamiamo congruenza di Leibniz della matrice $M = \langle \mathbf{A}_M, D \rangle$ la più grande congruenza su $\mathbf{A}_M$ compatibile con D e la indichiamo con $\Omega_{\langle \mathbf{A}_M, D \rangle}$. In simboli:*

$$\Omega_M = \max(Co \langle \mathbf{A}_M, D \rangle).$$

Per esporre il prossimo, importante, risultato, occorre fissare l'uso di un nuovo simbolo. Se $\phi(p, q_1, ..., q_n)$ è una formula le cui variabili proposizionali sono comprese in $\{p, q_1, ..., q_n\}$ e h è una valutazione che tale che $h(p) = a$, $h(q_1) = c_1$, ..., $h(q_n) = c_n$, allora indichiamo con $\phi^{\mathbf{A}}[a, c_1, ..., c_n]$ il valore di ϕ nell'algebra $\mathbf{A}$ rispetto alla valutazione h.

Se $h_M \in Hom(\mathbf{Fm}, \mathbf{A})$, $a \in A$ e $p \in Var$, allora con $h_{M(a/p)}$ ci riferiamo all'omomorfismo dall'algebra delle formule ad $\mathbf{A}$ che differisce rispetto a h_M al massimo per p, a cui assegna a. In simboli, diciamo che, per ogni $q \in Var$, $h_{M(a/p)}(q) = h_M(q)$ se $p \neq q$ e $h_{M(a/p)}(q) = a$ altrimenti.

Theorem 130 *Consideriamo un matrice $M = \langle \mathbf{A}_M, D \rangle$ e una logica $\mathcal{L} = \langle Fm, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$ tali che M è modello di $\mathcal{L}$. Per ogni $a, b, c_1, ..., c_n \in A$, $a\Omega_M b$ sse, per ogni $p, q_1, ..., q_n \in Var$, per ogni $\phi \in Fm$ e per ogni $h_M \in Hom(\mathbf{Fm}, \mathbf{A}_M)$*

$$(*)\ \phi^{\mathbf{A}_M}[a, c_1, ..., c_n] \in D \text{ sse } \phi^{\mathbf{A}_M}[b, c_1, ..., c_n] \in D.$$

Proof. ($\Longleftarrow$) É chiaro che la relazione definita da (*) è una relazione di congruenza su $\mathbf{A}_M$.

($\Longrightarrow$) Indichiamo tale relazione con $*$. Supponiamo che $\phi = p$ per qualche $p \in Var$ e supponiamo $a * b$ per qualche $a, b \in A_M$. Allora $\phi^{\mathbf{A}_M}[a] \in D$ sse $\phi^{\mathbf{A}_M}[b] \in D$ e, quindi, $a \in D$ sse $b \in D$. Ciò indica che $*$ è compatibile con D. Mostriamo, ora, che $*$ è la più grande relazione di congruenza su $\mathbf{A}_M$ compatibile con D. Supponiamo che $*'$ sia una congruenza su $\mathbf{A}_M$ compatibile con D. Segue che, per ogni formula $\phi(p, q_1, ..., q_n)$ e per ogni $c_1, ..., c_n \in A_M$, $\phi^{\mathbf{A}_M}[a, c_1, ..., c_n] *' \phi^{\mathbf{A}_M}[b, c_1, ..., c_n]$. Poiché $*'$ è compatibile con D, abbiamo che $\phi^{\mathbf{A}_M}[a, c_1, ..., c_n] \in D$ sse $\phi^{\mathbf{A}_M}[b, c_1, ..., c_n] \in D$. ■

Questo teorema ci dice che due elementi sono equivalenti rispetto alla congruenza di Leibniz se e solo se si comportano allo stesso modo rispetto al determinare se ad una formula è attribuito o meno un valore designato. La congruenza di Leibniz, in altre parole, non mette in relazione elementi designati con elementi non designati.

Da ogni matrice M se ne può ottenere un'altra tale, detta ridotta di M, identificando gli elementi che sono posti in relazione dalla congruenza di Leibniz. Come vedremo fra poco, una matrice e la sua ridotta definiscono la medesima relazione di conseguenza logica, ma la matrice ridotta non contiene alcun elemento ridondante. Se la matrice M non è essa stessa ridotta, si può dire che contiene degli elementi che potrebbero essere identificati senza modificare alcunché dei sistemi logici definiti per mezzo di tale matrici. Questi elementi che potrebbero essere unificati e sono invece distinti in M, se non è ridotta, non giocano alcun ruolo effettivo nel determinare la relazione di conseguenza logica e, in tal senso, sono ridondanti.

Definition 131 *Una matrice $M = \langle \mathbf{A}_M, D \rangle$ è detta ridotta sse l'identità è l'unico elemento in $Co\langle \mathbf{A}_M, D \rangle$.*

Definition 132 *Data una qualunque matrice $M = \langle \mathbf{A}_M, D \rangle$, possiamo definire il suo quoziente rispetto alla relazione di Leibniz, ossia $[M]_{\Omega_M} = \langle [\mathbf{A}_M]_{\Omega_M}, [D]_{\Omega_M} \rangle$. Chiamiamo $[M]_{\Omega_M}$ la matrice ridotta di M.*

La denominazione di matrice ridotta è giustificata dal fatto che, chiaramente, ogni matrice della forma $[M]_{\Omega_M}$ è ridotta.

Definition 133 *Siano $M = \langle \mathbf{A}_M, D_M \rangle$ e $N = \langle \mathbf{A}_N, D_N \rangle$ due matrici dello stesso tipo. Una funzione $h \in Hom(\mathbf{A}_M, \mathbf{A}_N)$ è un omomorfismo matriciale da M a N sse $D_M = h^{-1}D_N$. h è detto un omomorfismo matriciale suriettivo sse è un anche un omomorfismo suriettivo da $\mathbf{A}_M$ a $\mathbf{A}_N$. Se, in più, h è un isomorfismo da $\mathbf{A}_M$ a $\mathbf{A}_N$, diciamo che h è un isomorfismo matriciale*

Lemma 134 *Una matrice $M = \langle \mathbf{A}_M, D \rangle$ è ridotta sse vi è un isomorfismo matriciale da M a $[M]_{\Omega_M}$.*

Theorem 135 *Siano $M = \langle \mathbf{A}_M, D_M \rangle$ e $N = \langle \mathbf{A}_N, D_N \rangle$ due matrici dello stesso tipo. Se vi è un'omomorfismo matriciale suriettivo da M a N, allora $\models_M = \models_N$.*

Proof. Assumiamo che h_{MN} sia l'omomorfismo matriciale suriettivo da M a N e consideriamo un insieme Γ di formule e un insieme ϕ di formule.

($\subseteq$) Assumiamo $\Gamma \models_M \phi$. Siano $\nu'_M : \mathbf{Fm} \to \mathbf{A}_M$ e $\nu'_N : \mathbf{Fm} \to \mathbf{A}_N$ due valutazioni dall'algebra delle formule a, rispettivamente, $\mathbf{A}_M$ e $\mathbf{A}_N$. Poiché h_{MN} è suriettivo, possiamo dire che ogni valutazione $\mathbf{A}_N$ è equivalente $h_{MN} \circ \nu'_M$ per qualche valutazone ν'_M. Per assunzione, se $\nu'_M(\Gamma) \subseteq D_M$, allora $\nu'_M(\phi) \in D_M$. Poiché h_{MN} è un omomorfismo matriciale, $D_M = \{a \in A_M : h(a) \in D_N\}$. Ne segue che se $h_{MN} \circ \nu'_M(\Gamma) \subseteq D_N$, allora $h_{MN} \circ \nu'_M(\phi) \in D_N$. Poichè $h_{MN} \circ \nu'_M = \nu_N$ per qualche ν'_M, allora vale $\Gamma \models_N \phi$.

($\supseteq$) Assumiamo $\Gamma \models_N \phi$. Consideriamo una valutazione ν'_M tale che $\nu'_M(\Gamma) \subseteq D_M$. Come abbiamo già visto, $h_{MN} \circ \nu'_M$ è una valutazione su $\mathbf{A}_N$ e, per assunzione, è tale che se $h_{MN} \circ \nu'_M(\Gamma) \subseteq D_N$, allora $h_{MN} \circ \nu'_M(\phi) \in D_N$. Ma $D_M = h^{-1}_{MN} D_N$. Quindi $\nu'_M(\phi) \in D_M$. ■

Corollary 136 *Per ogni matrice M, $\models_M = \models_{[M]_{\Omega_M}}$.*

Corollary 137 *Siano $M = \langle \mathbf{A}_M, D_M \rangle$ e $N = \langle \mathbf{A}_N, D_N \rangle$ due matrici dello stesso tipo. Se vi è un'omomorfismo matriciale suriettivo da M a N, allora vi è un isomorfismo matriciale da $[M]_\theta$ a $[N]_\theta$.*

Corollary 138 *Siano $M = \langle \mathbf{A}_M, D_M \rangle$ e $N = \langle \mathbf{A}_N, D_N \rangle$ due matrici dello stesso tipo e sia θ una matrice su M. Allora:*

1. D_M è un filtro deduttivo per la logica $\mathcal{L}$ in $\mathbf{A}_M$ sse D_N è un filtro deduttivo per $\mathcal{L}$ in $\mathbf{A}_N$

2. D_M è un filtro deduttivo per la logica $\mathcal{L}$ in $\mathbf{A}_M$ sse $[D_M]_\theta$ è un filtro deduttivo per $\mathcal{L}$ in $[\mathbf{A}_M]_\theta$ (in particolare D_M è un filtro deduttivo per la logica $\mathcal{L}$ in $\mathbf{A}_M$ sse $[D_M]_{\Omega_M}$ è un filtro deduttivo per $\mathcal{L}$ in $[\mathbf{A}_M]_{\Omega_M}$).

10.2.3 Blocco di matrici

Si ricordi la definizione della relazione di conseguenza logica per mezzo di una classe di matrici (definizione 115). Una classe di matrici di particolare interesse è il cosidetto blocco di matrici, ossia una classe di matrici che condividono la medesima algebra e i cui insiemi di elementi designati costituiscono una sottoclasse della potenza del dominio dell'algebra.

Definition 139 *Sia $\mathcal{B} \in \wp(A)$. Un blocco di matrici è una classe di matrici della forma $\mathbf{B} = \{\langle \mathbf{A}, D \rangle : D \in \mathcal{B}\}$.*

Proposition 140 *Siano $\mathbf{B} = \{\langle \mathbf{A}, D \rangle : D \in \mathcal{B}\}$ un blocco di matrici e $\mathcal{L} = \langle \mathbf{Fm}, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$ una logica. Allora $\mathbf{B}$ è un modello di $\mathcal{L}$ ($\vdash_{\mathcal{L}} \subseteq \vDash_{\mathbf{B}}$) se $\mathbf{B} \subseteq Fi^{\mathbf{A}}_{\mathcal{L}}$.*

Tale proposizione segue facilmente dalla definizione di filtro deduttivo e, in effetti, non fa che ripetere il fatto che un filtro deduttivo per una logica $\mathcal{L}$ rispetta gli argomenti validi in $\mathcal{L}$.

Prima di procedere, è opportuno compiere alcune osservazioni. Cominciamo con il caso in cui si parte dalle matrici per definire una relazione di conseguenza logica.

Abbiamo visto che una relazione di conseguenza logica può essere definita per mezzo di una singola matrice il cui insieme di valori designati contiene un solo elemento, da una matrice il cui insieme di valori designati contiene più di un elemento, da una classe di matrici in generale oppure da un blocco di matrici. In ognuno di questi casi è all'opera un principio diverso e non è sempre chiaro, dal punto di vista intuitivo, quali siano le giustificazioni per tali definizioni. Qui considero soprattutto l'interpretazione delle matrici in termini di valori di verità, anche se, come ho avvisato sopra, sono possibili anche interpretazioni alternative e un esempio è fornito nell'appendice al capitolo.

Il caso in cui la relazione di conseguenza logica è definta per mezzo di una singola matrice in cui un solo valore è individuato come designato, è facile interpretare tale valore designato come il rappresentante del valore di verità Vero. Secondo questo principio tutti gli enunciati veri lo sono nel medesimo grado e il fatto di avere un solo elemento che rappresenta il Vero indica, appunto, che, da questo punto di vsita, non vi sono differenze tra enunciati diversi che sono tutti veri. Questo modo di interpretare le matrici è usuale, per esempio, quando si presenta la logica classica per mezzo della matrice $\langle \mathbf{2}, \{1\} \rangle$ quando si presenta la logica a tre valori di Łukasiewicz per mezzo della matrice $\langle \text{Ł}_{\mathbf{3}}, \{1\} \rangle$. Questo modo di interpretare le matrici definiti per mezzo di un solo valore designato non è, però, necessario. Si tratta, senza dubbio, dell'interpretazione più diffusa, ma ve n'è almeno un'altra possibile. Si potrebbe pensare che la proprietà di essere vero ammetta gradazioni, ossia che gli enunciati possono essere del tutto veri, quasi del tutto veri, abbastanza veri, ... Ammettiamo che sia possibile determinare una scala di maggiore o minore vicinanza alla verità. Per determinati scopi, potremmo ritenere che per sostenere un enunciato non sia necessario che esso sia del tutto vero, ma potremmo accontentarci del fatto che è abbastanza vero e ritenere che l'unico valore algebrico individuato come valore designato sia il rappresentante, allo stesso momento, di tutti i valori di verità maggiori o uguali al valore Abbastanza vero. É possibile compiere questa identificazione, perché in questo sistema logico si ritiene che l'essere abbastanza vero, l'essere vero ed eventuali altri valori intermedi siano equivalenti per definire la relazione di conseguenza logica.

Tale interpretazione, tuttavia, è più naturale nel secondo caso, in cui si definisce una relazione di conseguenza logica ricorrendo ad una singola matrice in cui l'insieme di valori designati contiene più di un elemento. In tali casi è facile pensare che ad ogni valore di verità corrisponda un valore algebrico e che i valori designati rappresentino quelli che, quando sono attribuiti ad un enunciato, rendono lecito sostenerlo.

Nel caso delle relazioni di conseguenza definite per mezzo di classi di matrici in generale o per mezzo di blocchi di matrici, è più difficile trovare un significato intuitivo che spieghi cosa si intende trattare con tali strumenti formali. É possibile, tuttavia, tentare di fornire loro un'interpretazione che non abbandoni il ricorso alla nozione di valore di verità. In tal caso, le diverse matrici possono essere considerate come rappresentanti di altrettante concezioni su quali siano i valori di verità da prendere in considerazioni e su quali siano i valori di verità che, se attribuiti ad un enunciato, rendono lecito l'affermarlo. Si può immaginare il caso in cui non si abbia motivo di privilegiare nessuna di queste nozioni rispetto alle altre e, quindi, di voler prendere tutte in considerazione. Il risultato è quello di definire una relazione di conseguenza che è la più piccola tra tutte quelle determinate da ogni matrice considerata da sola.

Un'altra interpretazione possibile, che ci condurrà ad approfondire il prossimo argomento, i blocchi di Lindenbaum, è quello di considerare i valori algebrici come i rappresentanti delle formule e i valori designati come insiemi di formule chiusi rispetto ad un nozione di conseguenza logica. In questo modo, i valori designati non sono più valori di verità, ma teorie deduttive. La relazione di conseguenza logica, quindi, è definita come quella relazione che determina certe teorie e non come quella che rispetta certe attribuzioni di valori di verità (o, più in generale, di valori algebrici). Il concetto considerato primitivo è il concetto di chiusura e non quello di valore di verità e la conseguenza logica deriva da esso.

10.3 Matrici di Lindenbaum e blocco di Lindenbaum

Abbiamo visto che, data una logica $\mathcal{L} = \langle \mathbf{Fm}, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$, una matrice $M = \langle \mathbf{A}_M, D \rangle$ dello stesso tipo di $\mathbf{Fm}$ è un modello di $\mathcal{L}$ sse D è un filtro deduttivo per $\mathcal{L}$ in $\mathbf{A}_M$. Abbiamo chiamato $Fi_{\mathcal{L}}^{\mathbf{A}}$ la classe di tutti i filtri deduttivi per $\mathcal{L}$ in $\mathbf{A}_M$.

Lemma 141 *$Fi_{\mathcal{L}}^{\mathbf{A}}$ è reticolo completo.*

Corollary 142 *Per ogni insieme $X \in A_M$, c'è il più piccolo filtro deduttivo per $\mathcal{L}$ in $\mathbf{A}_M$ che contiene X.*

Indichiamo tale filtro deduttivo con $Fi_{\mathcal{L}}^{\mathbf{A}}(X)$.

Lemma 143 *I filtri deduttivi per $\mathcal{L}$ nell'algebra delle formule* $\mathbf{Fm}$ *sono esattamente le teorie di $\mathcal{L}$. In simboli, per ogni $\Gamma \subseteq Fm$, $Fi_{\mathcal{L}}^{\mathbf{Fm}}(\Gamma) = Cn\Gamma$.*

Definition 144 *Sia $\mathcal{L} = \langle \mathbf{Fm}, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$ una logica. Consideriamo il blocco di matrici costituito dalla classe $\mathcal{L}_{\vdash_{\mathcal{L}}} = \{\langle \mathbf{Fm}, Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma \rangle : \Gamma \subseteq Fm\}$. Le matrici della forma $\langle \mathbf{Fm}, Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma \rangle$ per ogni $\Gamma \subseteq Fm$ sono dette matrici di Lindenbaum e la classe $\{\langle \mathbf{Fm}, Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma \rangle : \Gamma \subseteq Fm\}$ che le raggruppa è detto blocco di Lindenbaum.*

Le valutazioni delle formule, in questo caso, sono endomorfismi sull'algebra delle formule, ossia coincidono con le sostituzioni.

Theorem 145 *Siano $\mathcal{L} = \langle \mathbf{Fm}, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$ una logica e $\Gamma \subseteq Fm$. $\langle \mathbf{Fm}, Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma \rangle$ è modello di $\mathcal{L}$, ossia $\vdash_{\mathcal{L}} \subseteq \vDash_{\mathcal{L}_{\vdash_{\mathcal{L}}}}$.*

Proof. Assumiamo $\Delta \vdash_{\mathcal{L}} \psi$, dove $\Delta \subseteq Fm$ e $\psi \in Fm$. É chiaro che, per ogni valutazione $\sigma \in End(\mathbf{Fm})$, se $\sigma(\Delta) \subseteq Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma$, allora $\sigma(\psi) \in Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma$, perché $Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma$ è chiuso rispetto a $\vdash_{\mathcal{L}}$. Quindi $\Delta \vDash_{\mathcal{L}_{\vdash_{\mathcal{L}}}} \psi$.

Theorem 146 *$\mathcal{L}$ è debolmente completa rispetto alla matrice di Lindenbaum $\mathcal{TL} = \langle \mathbf{Fm}, Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\emptyset \rangle$, ossia $\vdash_{\mathcal{L}} \phi$ sse $\vDash_{\mathcal{TL}} \phi$ per ogni $\phi \in Fm$.*

Proof. ($\Longleftarrow$) Supponiamo $\nvdash_{\mathcal{L}} \phi$. Allora $\phi \notin Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\emptyset$. Ne concludiamo che $\nvDash_{\mathcal{TL}} \phi$.

($\Longrightarrow$) Supponiamo $\nvDash_{\mathcal{TL}} \phi$. Allora $\phi \notin Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\emptyset$. Poiché $Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\emptyset = \{\phi \in Fm : \vdash_{\mathcal{L}} \phi\}$, concludiamo che $\nvdash_{\mathcal{L}} \phi$. ■ ■

Possiamo, poi, dire che ogni logica $\mathcal{L}$ è completa rispetto al blocco di Lindenbaum determinato dalle teorie di $\mathcal{L}$, ossia $\vDash_{\mathcal{L}_{\vdash_{\mathcal{L}}}} = \vdash_{\mathcal{L}}$ per ogni logica $\mathcal{L}$. In questo senso, ogni logica ha una semantica rispetto a cui è completa.

Theorem 147 *Ogni logica $\mathcal{L}$ è completa rispetto al suo blocco di Lindenbaum $\mathcal{L}_{\vdash_{\mathcal{L}}}$, ossia $\vdash_{\mathcal{L}} \subseteq \vDash_{\mathcal{L}_{\vdash_{\mathcal{L}}}}$.*

Proof. ($\subseteq$) Segue dalla proposizione 140.

($\supseteq$) Assumiamo $\Gamma \vDash_{\mathcal{L}_{\vdash_{\mathcal{L}}}} \phi$ per qualche $\Gamma \subseteq Fm$ e per qualche $\phi \in Fm$. Supponiamo $\Gamma \nvdash_{\mathcal{L}} \phi$. Allora vi è una teoria $Cn\Gamma$ tale che $\phi \notin Cn\Gamma$. Ma per la definizione di $\vDash_{\mathcal{L}_{\vdash_{\mathcal{L}}}}$, ϕ è in ogni teoria che contiene Γ, dunque $\phi \in Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma$. Concludiamo $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \phi$. ■

Corollary 148 *Siano $\mathcal{L} = \langle \mathbf{Fm}, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$ e $\mathcal{L}' = \langle \mathbf{Fm}, \vdash'_{\mathcal{L}} \rangle$ due logiche. Allora $\vdash_{\mathcal{L}} \subseteq \vdash'_{\mathcal{L}}$ sse $\mathcal{L}_{\vdash_{\mathcal{L}}} \subseteq \mathcal{L}_{\vdash'_{\mathcal{L}}}$ sse $Md_{\mathcal{L}} \subseteq Md_{\mathcal{L}'}$.*

Theorem 149 *Ogni logica $\mathcal{L}$ è completa rispetto alla classe $Md_{\mathcal{L}}$ dei suoi modelli.*

Proof. Per la definizione di classe dei modelli di $\mathcal{L}$, è chiaro che $\vdash_{\mathcal{L}} \subseteq \vdash_{Md_{\mathcal{L}}}$. Dobbiamo, quindi, mostrare $\vdash_{Md_{\mathcal{L}}} \subseteq \vdash_{\mathcal{L}}$. Ma anche questo è chiaro perché $\mathcal{L}$ è completa rispetto a $\mathcal{L}_{\vdash_{\mathcal{L}}}$ e $\mathcal{L}_{\vdash_{\mathcal{L}}} \subseteq Md_{\mathcal{L}}$. ■

Corollary 150 *Ogni logica $\mathcal{L}$ è completa rispetto ad classe* $\mathbf{M}$ *tale che* $\mathcal{L}_{\vdash_{\mathcal{L}}} \subseteq \mathbf{M} \subseteq Md_{\mathcal{L}}$.

Come abbiamo detto, per mezzo del blocco di Lindenbaum siamo in grado di fornire una semantica completa ad ogni logica. Tale semantica, però, si limita a riprodurre gli argomenti validi della logica da cui siamo partiti. In altre parole, offre una controparte semantica in cui i valori semantici sono le stesse formule e gli insiemi di valori designati sono le teorie determinate dalla logica. Con questo tipo di matrici si può giungere a dare una semantica alla logica, ma solo perché siamo partiti da un sistema logico già dato. Non ne abbiamo dato, in tal modo, una caratterizzazione semantica basata su nozioni indipendenti da quelle della logica di partenza.

Il blocco di Lindenbaum, tuttavia, unito alla nozione di congruenza, fornisce la possibilità di determinare delle semantiche matriciali con caratteristiche interessanti e che permettono di mettere in luce alcuni aspetti della logica da cui si è partiti. Per esporre questa via, occorre premettere un breve richiamo delle nozioni di algebra di Lindenbaum-Tarski e di procedimento di Lindenbaum-Tarski.

10.3.1 Algebre di Lindenbaum-Tarski

Con l'espressione *algebra di Lindenbaum-Tarski* per una certa logica $\mathcal{L}$ ci si riferisce all'algebra quoziente di una data algebre delle formule ottenuta considerando come congruenza la relazione di equivalenza logica rispetto ad $\mathcal{L}$. Con *procedimento di Lindenbaum-Tarski* mi riferisco alla strategia standard, spiegata sotto, per definire un'algebra di Lindenbaum-Tarski.

Consideriamo, per cominciare, il caso della logica enunciativa classica $\mathcal{C}$. I concetti esposti in questo paragrafo e nei due successivi saranno, poi, generalizzati.

Sia $C = \{\wedge, \vee, \neg, \bot, \top\}$ l'insieme dei connettivi e $P = \{p_i : i \in \omega\}$ l'insieme delle variabili enunciative. Sia Fm l'insieme delle formule, generato come al solito. Questa scelta di connettivi è la più comoda per trattare delle connessioni cone le algebre di Boole. Per altri aspetti, a cominciare dal calcolo, però, è comodo avere a disposizione due altri connettivi binari, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$. Consideriamo $\phi \rightarrow \psi$ un'abbreviazione di $\neg\phi \vee \psi$ e $\phi \leftrightarrow \psi$ come un'abbreviazione di $(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$[2].

Assumiamo una presentazione sintattica (per mezzo del calcolo alla Hilbert dato nel paragrafo immediatamente precedente) di $\mathcal{C} = \langle \mathbf{Fm}, \vdash_{\mathcal{C}} \rangle$.

Consideriamo la relazione di implicazione materiale tra formule, rappresentata dal connettivo $\rightarrow$. Tale relazione induce una relazione $\leq \subseteq Fm^2$ che è un pre-ordine su Fm[3]. Per ogni $\phi, \psi \in Fm$, infatti, definiamo $\phi \leq \psi$ sse $\vdash_{\mathcal{C}} \phi \rightarrow \psi$.

[2] Quando si intendono mostrare le connessioni tra la logica classica e un'algebra di Boole, la segnatura $\{\wedge, \vee, \neg, \bot, \top\}$ è la più conveniente e si possono introdurre $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ come specificato nel testo, ma quando si ha a che fare con il calcolo, è più comodo avere a disposizione $\rightarrow$ e $\neg$ e definire $\phi \vee \psi$ come $\neg\phi \rightarrow \psi$ e $\phi \wedge \psi$ come $\neg(\phi \rightarrow \neg\psi)$.

[3] Per la spiegazione della nozione di relazione di preordine su un insieme P e per altri

Diciamo che $\leq$ è la relazione di pre-ordine determinata da $\rightarrow$. Più in generale, possiamo considerare la relazione $\leq_\Gamma \subseteq Fm^2$, dove Γ è un insieme di formule, definita da

$$\phi \leq_\Gamma \psi \text{ sse } \Gamma \vdash_C \phi \rightarrow \psi$$

Consideriamo, ora, la relazione di bi-implicazione tra formule, rappresentata dal connettivo $\leftrightarrow$. La relazione $\equiv \subseteq Fm^2$ è definita come segue: per ogni $\phi, \psi \in Fm$, $\phi \equiv \psi$ sse $\phi \leftrightarrow \psi$ (ossia, sse $\phi \leq \psi$ e $\psi \leq \phi$). $\equiv$ è la simmetrizzazione di $\leq$ ed è una relazione di equivalenza su Fm. Chiamiamo $\equiv$ la relazione di equivalenza determinata da $\leftrightarrow$.

Più in generale, possiamo considerare la relazione $\equiv_\Gamma \subseteq Fm^2$, dove Γ è un insieme di formule, definita da

$$(1)\ \phi \equiv_\Gamma \psi \text{ sse } \Gamma \vdash_C \phi \leftrightarrow \psi$$

per ogni $\Gamma \subseteq Fm$ e per ogni $\phi, \psi \in Fm$.

Seguono immediatamente da questa definizione che, se Γ' è la teoria generata dall'insieme Γ di formule ($\Gamma' = \{\phi \in Fm : \Gamma \vdash_C \phi\}$), allora $\equiv_\Gamma = \equiv_{\Gamma'}$ e se due insiemi Γ e Δ di formule determinano le medesime conseguenze rispetto a $\vdash_C$ ($Cn_C\Gamma = Cn_C\Delta$), allora $\equiv_\Gamma = \equiv_\Delta$.

In particolare, poi, possiamo osservare che, per ogni $\Gamma \subseteq Fm$ e per ogni $\phi \in Fm$

- $\phi \equiv_\Gamma \perp$ sse $\Gamma \vdash_C \neg\phi$
- $\phi \equiv_\Gamma \top$ sse $\Gamma \vdash_C \phi$

perché $\phi \leftrightarrow \perp$ è logicamente equivalente, rispetto a $\vdash_C$, a $\neg\phi$ e $\phi \leftrightarrow \top$ è logicamente equivalente, rispetto a $\vdash_C$, a ϕ.

10.3.2 Procedimento di Lindenbaum-Tarski

Possiamo, ora, spiegare il metodo standard con cui ottenere le algebre di Lindenbaum-Tarski. Vediamo, proseguendo l'impostazione del paragrafo precedente, l'esempio offerto dalla logica classica.

Sia Γ un insieme di formule. La relazione $\equiv_\Gamma$ su Fm, definita sopra, non è solo una relazione di equivalenza, ma è anche una congruenza su **Fm**, ossia rispetta le operazioni logiche primitive. Questo è evidente se si ricorda che nella logica classica vale il teorema di rimpiazzamento, che stabilisce che, data una qualsiasi formula ϕ, ψ_1, ψ_2 ed una qualsiasi variabile enunciativa p da $\psi_1 \leftrightarrow \psi_2$ si può dedurre $\phi(\psi_1/p) \leftrightarrow \phi(\psi_2/p)$ (in simboli, $\psi_1 \leftrightarrow \psi_2 \vdash_C \phi(\psi_1/p) \leftrightarrow \phi(\psi_2/p)$). Siano $Fm/\equiv_\Gamma$ l'insieme quoziente rispetto a $\equiv_\Gamma$ e $[\phi]_{\equiv_\Gamma}$ la classe di equivalenza di una formula ϕ. Possiamo, allora, definire le seguenti operazioni su $Fm/\equiv_\Gamma$:

- $[\phi]_{\equiv_\Gamma} \wedge^{\mathbf{Fm}/\equiv_\Gamma} [\phi]_{\equiv_\Gamma} = [\phi \wedge \psi]_{\equiv_\Gamma}$

concetti impiegati in questo paragrafo (relazione d'ordine parziale, equialenza, congruenza, insieme quoziente, ...), cfr. l'appendice sui concetti matematici, posta alla fine del volume.

- $[\phi]_{\equiv_\Gamma} \vee^{\mathbf{Fm}/\equiv_\Gamma} [\phi]_{\equiv_\Gamma} = [\phi \vee \psi)]_{\equiv_\Gamma}$
- $\neg^{\mathbf{Fm}/\equiv_\Gamma}[\phi]_{\equiv_\Gamma} = [\neg\phi]_{\equiv_\Gamma}$
- $0^{\mathbf{Fm}/\equiv_\Gamma} = [\bot]_{\equiv_\Gamma}$
- $1^{\mathbf{Fm}/\equiv_\Gamma} = [\top]_{\equiv_\Gamma}$.

Theorem 151 $\mathbf{Fm}/\equiv_\Gamma = \left\langle Fm/\equiv_\Gamma, \wedge^{\mathbf{Fm}/\equiv_\Gamma}, \vee^{\mathbf{Fm}/\equiv_\Gamma}, \neg^{\mathbf{Fm}/\equiv_\Gamma}, 0^{\mathbf{Fm}/\equiv_\Gamma}, 1^{\mathbf{Fm}/\equiv_\Gamma} \right\rangle$ *è un'algebra di Boole*

Definition 152 *Chiamiamo* $\mathbf{Fm}/\equiv_\Gamma$ *l'algebra di Lindenbaum-Tarski di* $\mathcal{L}$ *relativa a* Γ*. Se* Γ *è l'insieme delle leggi logiche, ossia se* $\Gamma = Cn_C\emptyset$*, allora* $\equiv_\Gamma$ *è denotato, più semplicemente, con* $\equiv$ *e* $\mathbf{Fm}/\equiv$ *è detta l'algebra pura di Lindenbaum-Tarski.*

Possiamo facilmente definire un ordine $\leq^{\equiv_\Gamma}$ tra gli elementi di $Fm/\equiv_\Gamma$, mimando la definizione di $\leq$ per Fm, ossia,

$$[\phi]_{\equiv_\Gamma} \leq_{\equiv_\Gamma} [\psi]_{\equiv_\Gamma} \text{ sse } \Gamma \vdash_C \phi \to \psi.$$

Lemma 153 $[\phi]_{\equiv_\Gamma} \leq_{\equiv_\Gamma} [\psi]_{\equiv_\Gamma}$ *sse* $\Gamma, \phi \vdash_C \psi$.

Il lemma 153 è immediato perché $\mathcal{C}$ soddisfa il teorema di deduzione, ossia $\Gamma, \phi \vdash_C \psi$ sse $\Gamma \vdash_C \phi \to \psi$.

Lemma 154 *Possiamo anche notare*

- $0^{\mathbf{Fm}/\equiv_\Gamma} = [\bot]_{\equiv_\Gamma} = \{\phi \in Fm : \Gamma \vdash_C \neg\phi\}$
- $1^{\mathbf{Fm}/\equiv_\Gamma} = [\top]_{\equiv_\Gamma} = \{\phi \in Fm : \Gamma \vdash_C \phi\}$.

Un fatto importante è che vi è una corrispondenza tra le teorie di $\mathcal{C}$ e i filtri sull'algebra pura di Lindenbaum-Tarski $\mathbf{Fm}/\equiv$.

Proposition 155 *Sia* $T \subseteq Fm$ *una teoria di* $\mathcal{C}$*. Allora valgono*

1. l'insieme $T/\!\equiv\, = \{[\phi]_\equiv : \phi \in T\}$ è un filtro su $\mathbf{Fm}/\equiv$
2. se $F \in Fm/\!\equiv$ è un filtro su Fm, allora $Th(F) = \{\phi : [\phi]_\equiv \in F\}$ è una teoria di $\mathcal{C}$.

Lemma 156

1. Per ogni teoria T di $\mathcal{C}$, $Th(T/\!\equiv) = T$.
2. Per ogni filtro F di $Fm/\!\equiv$, $(Th(F))/\!\equiv\, = F$.

Siano $Fi_{Fm/\equiv}$ l'insieme dei filtri su $Fm/\!\equiv$ e $Cn_{\mathcal{C}}$ l'insieme delle teorie su Fm rispetto a $\mathcal{C}$. Il lemma 156 mostra che vi è una biiezione definita da $T \mapsto T/\equiv$ tra $Cn_{\mathcal{C}}$ e $Fi_{Fm/\equiv}$.

Corollary 157 $\left\langle Fi_{Fm/\equiv}, \subseteq \right\rangle$ *e* $\langle Cn_{\mathcal{C}}, \subseteq\rangle$ *sono dei reticoli completi e la biiezione definita da* $T \mapsto T/\equiv$ *è un isomorfismo tra di essi.*

10.3.3 Algebre di Lindenbaum-Tarski e teorema di completezza

Consideriamo la logica $\mathcal{C} = \langle \mathbf{Fm}, \vdash_{\mathcal{C}} \rangle$ definita per mezzo del calcolo alla Hilbert dato sopra e la classe $\mathbf{BA_S} = \{\langle \mathbf{B}, Hom(\mathbf{Fm}, \mathbf{B}), \Vdash_{\mathbf{B}} \rangle$: per ogni $\mathbf{B} \in \mathbf{BA}$ $\}$ delle semantiche basate su un'algebra di Boole, che definisce la relazione di conseguenza logica $\vDash_{\mathbf{B}}$ per ogni $\mathbf{B} \in \mathbf{BA}$ e una relazione di conseguenza locale (si veda definizione 115) $\vDash_{\mathbf{BA}}$. Consideriamo le due relazioni di conseguenza logica $\vdash_{\mathcal{C}}$ e $\vDash_{\mathbf{BA}}$. Come abbiamo spiegato nel capitolo precedente, possiamo chiederci se $\vdash_{\mathcal{C}}$ è corretta e se è completa rispetto a $\vDash_{\mathbf{BA}}$.

Il teorema di correttezza (per ogni $\Gamma \in Fm$ e per ogni $\phi \in Fm$, se $\Gamma \vdash_{\mathcal{C}} \phi$, allora $\Gamma \vDash_{\mathbf{BA}} \phi$) è il più semplice da dimostrare. Si mostra che gli assiomi sono tautologie, ossia che $\vDash_{\mathbf{BA}} \phi$ se ϕ è un assioma. Si mostra che la regola del modus ponens conserva la verità, ossia se $\mathbf{BA} \Vdash \phi[h_{\mathbf{BA}}]$ e $\mathbf{BA} \Vdash \phi \to \psi[h_{\mathbf{BA}}]$, allora $\mathbf{BA} \Vdash \psi[h_{\mathbf{BA}}]$. Per induzione sulla complessità delle formule, quindi, si mostra che ogni dimostrazione di ϕ dalle premesse in Γ, fornisce un argomento valido in $\mathbf{BA}$, ossia, per ogni $\Gamma \in Fm$ e per ogni $\phi \in Fm$, se $\Gamma \vdash_{\mathcal{C}} \phi$, allora $\Gamma \vDash_{\mathbf{BA}} \phi$.

La dimostrazione del teorema di completezza (per ogni $\Gamma \in Fm$ e per ogni $\phi \in Fm$, se $\Gamma \vDash_{\mathbf{2}} \phi$, allora $\Gamma \vdash_{\mathcal{C}} \phi$) è più sottile. Come per la dimostrazione del teorema di correttezza, mi limito a richiamarne i punti principali, che mostrano l'importanza del procedimento di Lindenbaum-Tarski e delle algebre di Lindenbaum-Tarski.

(A) Assumiamo $\Gamma \nvdash_{\mathcal{C}} \phi$ e procediamo a mostrare $\Gamma \nvDash_{\mathbf{BA}} \phi$.

(B) Definiamo la relazione $\equiv_\Gamma \subseteq Fm^2$ per mezzo della condizione: per ogni $\xi, \psi \in Fm$, $\xi \equiv_\Gamma \psi$ sse $\Gamma \vdash_C \xi \leftrightarrow \psi$. Abbiamo mostrato sopra che $\equiv_\Gamma$ è una congruenza su $\mathbf{Fm}$. Abbiamo mostrato, inoltre, che possiamo definire l'algebra di Boole $\mathbf{Fm}/\equiv_\Gamma = \left\langle Fm/\equiv_\Gamma, \wedge^{\mathbf{Fm}/\equiv_\Gamma}, \vee^{\mathbf{Fm}/\equiv_\Gamma}, \neg^{\mathbf{Fm}/\equiv_\Gamma}, 0^{\mathbf{Fm}/\equiv_\Gamma}, 1^{\mathbf{Fm}/\equiv_\Gamma} \right\rangle$, che, più esattamente, un'algebra di Lindenbaum-Tarski.

(C) Ora dobbiamo mostrare che, per ogni $\phi \in Fm$, $\Gamma \vdash_C \phi$ sse $[\phi]_{\equiv_\Gamma} = 1^{\mathbf{Fm}/\equiv_\Gamma}$. Si ricordi che, se $\Gamma \subseteq Fm$, allora $Cn_{\vdash_{\mathcal{C}}}\Gamma$ indica la chiusura di Γ rispetto a $\vdash_{\mathcal{C}}$. É chiaro che, per ogni $\phi \in Fm$, $\phi \in Cn_{\vdash_{\mathcal{C}}}\Gamma$ sse $[\phi]_{\equiv_\Gamma} \in [Cn_{\vdash_{\mathcal{C}}}\Gamma]_{\equiv_\Gamma}$, poiché $[Cn_{\vdash_{\mathcal{C}}}\Gamma]_{\equiv_\Gamma} = \{\gamma \in Fm : \gamma \in Cn_{\vdash_{\mathcal{C}}}\Gamma\}$. Occorre, ora, mostrare che $[Cn_{\vdash_{\mathcal{C}}}\Gamma]_{\equiv_\Gamma}$ costituisce un unico elemento in $Fm/\equiv_\Gamma$. Ciò segue dal fatto che ogni formula in $Cn_{\vdash_{\mathcal{C}}}\Gamma$ è equivalente ad ogni altra formula nello stesso insieme, infatti se $\Gamma \vdash_{\mathcal{C}} \phi$ e $\Gamma \vdash_{\mathcal{C}} \psi$, allora $\Gamma \vdash_{\mathcal{C}} \phi \leftrightarrow \psi$. Basterebbe mostrare che $[Cn_{\vdash_{\mathcal{C}}}\Gamma]_{\equiv_\Gamma} = 1^{\mathbf{Fm}/\equiv_\Gamma}$. Ciò segue da quanto appena mostrato e dal fatto che $\top \in Cn_{\vdash_{\mathcal{C}}}\Gamma$ e, quindi, $[1^{\mathbf{Fm}/\equiv_\Gamma}]_{\equiv_\Gamma} \in [Cn_{\vdash_{\mathcal{C}}}\Gamma]_{\equiv_\Gamma}$. A questo punto, risulta provato che, per ogni $\phi \in Fm$, $\Gamma \vdash_C \phi$ sse $[\phi]_{\equiv_\Gamma} = 1^{\mathbf{Fm}/\equiv_\Gamma}$.

(D) Sia $\nu_{\equiv_\Gamma} : Fm \to Fm/\equiv_\Gamma$la funzione naturale definita da $\nu_{\equiv_\Gamma}(\phi) = [\phi]_{\equiv_\Gamma}$ per ogni $\phi \in Fm$. Chiaramente $\nu_{\equiv_\Gamma} \in Hom(Fm, Fm/\equiv_\Gamma)$. Da (C) segue $\nu_{\equiv_\Gamma}(\Gamma) \subseteq \{1\}$ e $\nu_{\equiv_\Gamma}(\phi) \neq 1$.

(E) Sia $\vDash_{\mathbf{BA}}$ la relazione di conseguenza, definita come sopra,dalla classe $\mathbf{BA_S} = \{\langle \mathbf{B}, Hom(\mathbf{Fm}, \mathbf{B}), \Vdash_{\mathbf{B}} \rangle$. Poiché $\mathbf{Fm}/\equiv_\Gamma \in \mathbf{BA}$, questo risultato mostra che $\vDash_{\mathbf{BA}} \subseteq \vdash_{\mathcal{C}}$.

Unendo il teorema di correttezza e quello di completezza, abbiamo $\vDash_{\mathbf{BA}} = \vdash_{\mathcal{C}}$.

La classe $\mathbf{BA_S} = \{\langle \mathbf{B}, Hom(\mathbf{Fm}, \mathbf{B}), \Vdash_{\mathbf{B}} \rangle$: per ogni $\mathbf{B} \in \mathbf{BA}$ $\}$ delle semantiche basate su un'algebra di Boole è una classe di semantiche algebriche per $\mathcal{C} = \langle \mathbf{Fm}, \vdash_{\mathcal{C}} \rangle$.

Possiamo mostrare che non occorre, in realtà, prendere in considerazione l'intera classe delle algebre di Boole per avere un teorema di correttezza e completezza per $\vdash_{\mathcal{C}}$. Consideriamo la semantica semantica $\langle \mathbf{2}, Hom(\mathbf{Fm_L}, \mathbf{2}), \Vdash_{\mathbf{2}} \rangle$, definita nel precedente capitolo. Per il teorema di Stone che afferma $\mathbf{BA} = ISPP_S(\{\mathbf{2}\})$, ossia, la classe delle algebre di Boole è generata dalla classe $\{\mathbf{2}\}$ per chiusura rispetto a prodotti sottodiretti (P_S), prodotti diretti (P), sottoalgebre (S) e isomorfismi (I), segue che, per ogni $\Gamma \subseteq Fm$ e per ogni $\phi \in Fm$, vale $\Gamma \vDash_{\mathbf{BA}} \phi$ sse $\Gamma \vDash_{\mathbf{2}} \phi$ ($\vDash_{\mathbf{BA}} = \vDash_{\mathbf{2}}$). Da ciò è immediato ricavare $\vDash_{\mathbf{2}} = \vdash_{\mathcal{C}}$.

Ciò significa che abbiamo un'interpretazione dell'apparato deduttivo della logica classica nell'algebra $\mathbf{2}$ e che possiamo usare $\mathbf{2}$ per ottenere risultati che riguardano il sistema $\mathcal{C}$. Se vogliamo sapere se una formula ϕ è un teorema di $\mathcal{C}$, infatti, o se ϕ è deducibile da Γ, possiamo, per mezzo delle valutazioni, tradurre le formule in elementi di 2, ricorrere alla nozione di conseguenza $\vDash_{\mathbf{2}}$ e, poi, interpretare il risultato in $\mathcal{C}$.

10.3.4 Procedimento di Lindenbaum-Tarski generalizzato

Abbiamo visto come il procedimento di Lindenbaum-Tarski, nel caso presentato, consista essenzialmente nell'identificare gli enunciati che, data una certa logica $\mathcal{L}$, sono interderivabili in $\mathcal{L}$. Tale processo di identificazione degli enunciati interderivabili, conduce a definire la classe delle algebre di Lindenbaum-Tarski di $\mathcal{L}$.

Il procedimento di Lindenbaum-Tarski, così come è stato presentato, è di portata piuttosto ristretta (si richiede, per esempio, che sia definibile un connettivo $\leftrightarrow$ che definisca una congruenza sull'algebra delle formule). É possibile, tuttavia, fornirne una versione più generale, affinché sia possibile associare una classe di algebre ad un gran numero di logiche differenti. In tal modo si può verificare che, come si giunge ad associare la classe delle algebre di Boole alla logica classica, così si associa la classe delle algbre di Heyting alla logica intuizionista e la classe della algebre di Boole topologiche al sistema modale **S4**.

Per superare il problema di trattare logiche in cui il connettivo $\leftrightarrow$, se è definibile, non determina una congruenza sull'algebra delle formule, è stato proposto di potrebbe ricorrere al connettivo $\rightarrow$, defininendo la relazione $\equiv_\Gamma \subseteq Fm^2_{\mathbf{L}}$, dove Γ è un insieme di formule, definita da

$$(2)\ \phi \equiv_\Gamma \psi \text{ sse } \Gamma \vdash_C \phi \rightarrow \psi \text{ e } \Gamma \vdash_C \psi \rightarrow \phi$$

per ogni $\Gamma \subseteq Fm_{\mathbf{L}}$ e per ogni $\phi, \psi \in Fm_{\mathbf{L}}$.

In questo modo, è possibile definire la classe delle cosiddette logiche implicative (il contributo più noto a questo proposito è Rasiowa (1974)). Le logiche implicative sono logiche $\mathcal{L} = \langle Fm_{\mathbf{L}}, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$ dotate del connettivo $\rightarrow$ che soddisfa modus ponens ($\phi, \phi \rightarrow \psi \vdash_{\mathcal{L}} \psi$) e ragionamento a fortiori ($\phi \vdash_{\mathcal{L}} \psi \rightarrow \phi$) e tali che, per ogni $\Gamma \subseteq Fm$, la relazione $\leq_\Gamma \subseteq Fm^2$, definita dalla condizione $\phi \leq_\Gamma \psi$ sse $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \phi \rightarrow \psi$ per ogni $\Gamma \subseteq Fm$ e per ogni $\phi, \psi \in Fm$, è un pre-ordine su Fm

compatibile con le operazioni determinate dai connettivi in $\mathbf{Fm_L}$. Affinché $\leq_\Gamma$ sia un pre-ordine su Fm è sufficiente che $\rightarrow$ goda della proprietà riflessiva e della proprietà transitiva, ossia che valgano $\vdash_\mathcal{L} \phi \rightarrow \phi$ e $\phi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \xi \vdash_\mathcal{L} \phi \rightarrow \xi$. Affinché $\leq_\Gamma$ sia compatibile con le operazioni determinate dai connettivi in $\mathbf{Fm_L}$ è sufficiente che valga la seguente condizione: per ogni connettivo n-ario c, $\phi_1 \rightarrow \psi_1, ..., \phi_n \rightarrow \psi_n, \psi_1 \rightarrow \phi_1, ..., \psi_1 \rightarrow \phi_1 \vdash_\mathcal{L} c\phi_1, ..., \phi_n \rightarrow c\psi_1, ..., \psi_n$.

Da queste condizioni seguenche la relazione $\equiv_\Gamma$, definita dalla condizione $(*)$, che è la simmetrizzazione di $\leq_\Gamma$, è una congruenza sull'algebra delle formule. É chiaro, allora, che il procedimento di Lindembaum-Tarski può essere replicato usando $\equiv_\Gamma$ definita da (2), dove, prima, era stata usata una relazione definita per mezzo di $\leftrightarrow$. $\mathbf{Fm_L}/\equiv_\Gamma$ è, dunque, l'algebra di Lindenbaum-Tarski determinata da Γ generale

In forma ancora più generale Prucnal e Wrónski (1974) e Czelakowski (1981) hanno proposto di considerare un un insieme, eventualmente infinito, di formule che, considerate insieme, determinano una relazione di congruenza sull'algebra delle formule. Le logiche equivalenziali sono esattamente le logiche in cui è possibile isolare un insieme E, eventualmente infinito, di formule che contengano al massimo due variabili enunciative che si comporta come l'insieme di formule $\{\phi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \phi\}$. Non occorre, qui, fornire ulteriori dettagli. Quel che importa notare è che E permette di definire la relazione $\equiv_\Gamma \subseteq Fm^2$ tale che, per ogni $\Gamma \subseteq Fm$, per ogni $\phi(p,q), \psi(p,q) \in Fm$,

(3) $\phi \equiv_\Gamma \psi$ sse $\Gamma \vdash_C \xi(\phi/p, \psi/q)$ e $\Gamma \vdash_C \psi \rightarrow \phi$ per ogni $\xi(p,q) \in E$.

La relazione $\equiv_\Gamma$ definita da (3) è una congruenza sull'algebra delle formule e, quindi, il processo di Lindenbaum-Tarski può essere applicato come sopra.

Una proposta ancora più generale, ed è quella sulla quale mi soffermerò ora, è quella di considerare la congruenza di Leibniz, definita sopra. La congruenza di Leibniz è la più grande delle congruenze definibili sull'algebra di una matrice che rispetta l'insieme di valori designati. Dal lemma 125, sappiamo che ciò assicura che, data una matrice $M = \langle \mathbf{A}_M, D_M \rangle$, per ogni $a \in A$, $a \in D$ sse $[a]_\theta \in [D]_\theta$, che è quanto era richesto al punto (C) della dimostrazione del teorema di completezza sopra richiamato. Di fatto la condizione affermata nel lemma 125

Abbiamo definito sopra la classe $Md_\mathcal{L}$ delle matrici che sono modello di una logica $\mathcal{L} = \langle \mathbf{Fm}, \vdash_\mathcal{L} \rangle$. Indichiamo con $Md^\Omega_\mathcal{L}$ la classe delle matrici ridotte che sono modelli di $\mathcal{L}$ e indichiamo con $Alg^\Omega_\mathcal{L}$ la classe delle algebre nel cui dominio è possibile isolare un insieme che, in coppia con tale algebra, determina una matrice ridotta modello di $\mathcal{L}$.

Definition 158 *Sia $\mathcal{L} = \langle \mathbf{Fm}, \vdash_\mathcal{L} \rangle$ una logica. Definiamo:*

- $Md^\Omega_\mathcal{L} = \{\langle \mathbf{A}_M, D \rangle \in Md_\mathcal{L} : \langle \mathbf{A}_M, D \rangle \cong \langle [\mathbf{A}_M]_{\Omega_M}, [D]_{\Omega_M} \rangle]$
- $Alg^\Omega_\mathcal{L} = \{\mathbf{A}_M :$ per almeno un $D \subseteq A$, $\langle \mathbf{A}_M, D \rangle \in Md^\Omega_\mathcal{L}\}$.

Consideriamo il blocco di matrici di Lindenbaum $\mathcal{L}_{\vdash_\mathcal{L}} = \{L = \langle \mathbf{Fm}, Cn_{\vdash_\mathcal{L}}\Gamma\rangle : \Gamma \subseteq Fm\}$.

Definition 159 *Per mezzo della congruenza di Leibniz, possiamo determinare il blocco ridotto di Lindenbaum, ossia* $\mathcal{L}^{\Omega}_{\vdash_\mathcal{L}} = \{\langle [\mathbf{Fm}]_{\Omega_L}, [Cn_{\vdash_\mathcal{L}}\Gamma]_{\Omega_L}\rangle : \Gamma \subseteq Fm\}$.

Definition 160 *Siano* Γ *un insieme di formule e* $\langle [\mathbf{Fm}]_{\Omega_L}, [Cn_{\vdash_\mathcal{L}}\Gamma]_{\Omega_L}\rangle$ *una matrice di Lindenbaum ridotta. Definiamo algebra di Lindenbaum-Tarski rispetto a* $Cn_{\vdash_\mathcal{L}}\Gamma$ *l'algebra* $[\mathbf{Fm}]_{\Omega_L} = \langle [Fm]_{\Omega_L}, [C]_{\Omega_L}\rangle$, *dove* C *è l'insieme di operazioni (i connettivi) su* Fm *in* $\mathbf{Fm}$.

Come nel caso dell'algebra di Lindenbaum corrispondente alla logica classica, se C è l'insieme delle operazioni (connettivi) su $\mathbf{Fm}$, allora possiamo definire le operazioni su $[\mathbf{Fm}]_{\Omega_L}$ nel seguente modo:

per ogni $c \in C$ per ogni $\phi_1, ..., \phi_n \in Fm$, allora $c^{[\mathbf{Fm}]_{\Omega_L}}([\phi_1]_{\Omega_L}, ..., [\phi_n]_{\Omega_L}) = [c(\phi_1, ..., \phi_n)]_{\Omega_L}$.

Per mezzo della congruenza di Leibniz è possibile rendere più generale il procedimento di Lindenbaum-tarski e perfezionare il risultato del teorema 147. Dal teorema 147, sappiamo che per mezzo della nozione di blocco di Lindenbaum possiamo fornire una semantica completa ad ogni relazione di conseguenza logica. Unendo questo risultato alla possibilità di generare un blocco di Lindenbaum ridotto, possiamo rendere il risultato del teorema 147 più informativo.

Procediamo per gradi.

Supponiamo di avere una matrice di Lindenbaum $L = \langle \mathbf{Fm}, Cn_{\vdash_\mathcal{L}}\Gamma\rangle$. Generando la corrispondente matrice ridotta rispetto alla congruenza di Leibniz otteniamo $[L]_{\Omega_L} = \langle [\mathbf{Fm}]_{\Omega_L}, [Cn_{\vdash_\mathcal{L}}\Gamma]_{\Omega_L}\rangle$. Sappiamo che Ω_L è la più grande congruenza su $\mathbf{Fm}$ che rispetta $Cn_{\vdash_\mathcal{L}}\Gamma$, ossia tale che, per ogni $\phi, \psi \in Fm$, se vale $\phi\Omega_L\psi$, allora $\phi \in Cn_{\vdash_\mathcal{L}}\Gamma$ se e solo se $\psi \in Cn_{\vdash_\mathcal{L}}\Gamma$. Come abbiamo visto, per il lemma 7, questo è esattamente quel che serve per far funzionare il punto (C) della dimostrazione di completezza. Tale dimostrazione è stata richiamata per il caso classico e la proprietà richiesta al punto (C) era soddisfatta per proprietà particolari della logica classica, non necessariamente condivise da altri sistemi. Invece di considerare quella particolare relazione di equivalenza impiegata in tale dimostrazione, possiamo, ora, riferirci alla congruenza di Leibniz e determinare l'algebra $[\mathbf{Fm}]_{\Omega_L}$ che gode esattamente delle proprietà richieste per svolgere il lavoro svolto, nel caso classico, dall'algebra di Lindenbaum-Tarski. In questo modo, possiamo considerare $[\mathbf{Fm}]_{\Omega_L}$ come un'algebra di Lindenbaum-Tarski generata in modo del tutto generale, astraendo dalle particolarità di dati sistemi logici.

Risultati di completezza

Ricordiamo che, con i teoremi 147 e 149, abbiamo già mostrato, rispettivamente, che ogni relazione di conseguenza logica $\vdash_\mathcal{L}$ è completa rispetto al suo blocco di Lindenbaum $\mathcal{L}_{\vdash_\mathcal{L}}$ e rispetto alla classe $Md_\mathcal{L}$ dei suoi modelli. Possiamo dimostrare i seguenti teoremi, che giustificano l'interesse per le matrici e le algebre ottenute per mezzo della congruenza di Leibniz.

Theorem 161 *Ogni logica $\mathcal{L}$ è completa rispetto a $\mathcal{L}^{\Omega}_{\vdash_{\mathcal{L}}}$, ossia $\vdash_{\mathcal{L}}=\models_{\mathcal{L}^{\Omega}_{\vdash_{\mathcal{L}}}}$ per ogni logica $\mathcal{L}$.*

Proof. ($\subseteq$) Dalle definizion di $Md^{\Omega}_{\mathcal{L}}$ e di $\mathcal{L}^{\Omega}_{\vdash_{\mathcal{L}}}$, segue che $\models_{Md^{\Omega}_{\mathcal{L}}}\subseteq\models_{\mathcal{L}^{\Omega}_{\vdash_{\mathcal{L}}}}$, quindi $\vdash_{\mathcal{L}}\subseteq\models_{\mathcal{L}^{\Omega}_{\vdash_{\mathcal{L}}}}$.

($\supseteq$) Procediamo per contrapposizione. Assumiamo che, per qualche $\Gamma \subseteq Fm$ e per qualche $\phi \in Fm$, $\Gamma \nvdash_{\mathcal{L}} \phi$. Allora $\phi \notin Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma$. Consideriamo l'omomorfismo naturale $\nu : \mathbf{Fm} \to [\mathbf{Fm}]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma}$ come una valutazione. Poiché $\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma$ è compatibile con $Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma$, abbiamo che $\nu(\Gamma) \subseteq [Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma}$ e $\phi \notin [Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma}$. $\left\langle [\mathbf{Fm}]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma}, [Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma} \right\rangle \in \mathcal{L}^{\Omega}_{\vdash_{\mathcal{L}}}$, quindi $\Gamma \not\models_{\mathcal{L}^{\Omega}_{\vdash_{\mathcal{L}}}} \phi$. ■

Corollary 162 *Ogni logica $\mathcal{L}$ è completa rispetto ad ogni classe $\mathbf{M}$ di matrici tale che $\mathcal{L}^{\Omega}_{\vdash_{\mathcal{L}}} \subseteq\models_{\mathbf{M}}\subseteq\models_{Md^{\Omega}_{\mathcal{L}}}$.*

Proof. Dalle definizioni di $Md^{\Omega}_{\mathcal{L}}$, $\mathbf{M}$ e $\mathcal{L}^{\Omega}_{\vdash_{\mathcal{L}}}$, segue che $\vdash_{\mathcal{L}}\subseteq\models_{\mathbf{M}}\subseteq\models_{Md^{\Omega}_{\mathcal{L}}}\subseteq\models_{\mathcal{L}^{\Omega}_{\vdash_{\mathcal{L}}}}$. Resta da mostrare $\models_{\mathcal{L}^{\Omega}_{\vdash_{\mathcal{L}}}} \subseteq\vdash_{\mathcal{L}}$, ma questo è appena stato mostrato. ■

Da ciò segue che possiamo affermare che una logica può avere almeno due classi di modelli ridotti rispetto a cui è completa: il blocco ridotto di Lindenbaum e la classe dei modelli ridotti. In simboli, possiamo scrivere: $\vdash_{\mathcal{L}}=\models_{\mathcal{L}^{\Omega}_{\vdash_{\mathcal{L}}}} =\models_{Md^{\Omega}_{\mathcal{L}}}$.

Questi risultati ci permettono di perfezionare il risultato del teorema 147, secondo cui ogni logica è completa rispetto al blocco di Lindenbaum che essa determina. Abbiamo visto che tale risutlato risultava assai poco informativo, in quanto, se da un lato di definisce un metodo generale per dotare ogni logica di una semantica completa, dall'altro ciò è fondato sul ricorrere alla stessa nozione di conseguenza logica che si intende caratterizzare in termini semantici. Per mezzo della congruenza di Leibniz, possiamo dotare ogni logica di un'algebra e di semantica matriciale che facciano riferimento a meno elementi rispetto a quelli coinvolti nel blocco di Lindenbaum. Con la congruenza di Leibniz, infatti, possiamo definire il blocco ridotto di Lindenbaum che, come abbiamo visto, fornisce una nuova semantica completa per $\mathcal{L}$. In questo modo, abbiamo reso generale la costruzione di una semantica completa per $\mathcal{L}$ e di un'algebra di Lindenbaum-Tarski per $\mathcal{L}$.

Definition 163 *Diciamo che $\mathcal{L}$ è consistente sse $\nvdash_{\mathcal{L}} \phi$ per almeno una formula ϕ.*

Definition 164 *Diciamo che $\mathcal{L}$ è superiormente limitata sse vi è una formula $\top$ tale che $\vdash_{\mathcal{L}} \top$. Diciamo che $\mathcal{L}$ è inferiormente limitata sse vi è una formula $\bot$ tale che $\bot \vdash_{\mathcal{L}} \phi$ per ogni formula ϕ. Diciamo che $\mathcal{L}$ è limitata sse è superiormente limitata ed inferiormente limitata.*

Proposition 165 *Se $\mathcal{L}$ è consistente e limitata, allora, per ogni $\Gamma \subseteq Fm$, $|[Fm]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma}| \geq 2$.*

Corollary 166 *$\mathcal{L}$ è consistente sse $[\mathbf{Fm}]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma}$ non è l'algebra triviale.*

Sulla base di questo risultato, possiamo affermare che con le matrici di Lindenbaum siamo in grado di fornire un modello anche ad una logica inconsistente. In tal caso il modello sarebbe ogni matrice della forma $\left\langle [\mathbf{Fm}]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma}, [Fm]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma} \right\rangle$, dove $\Gamma \subseteq Fm$. É chiaro che ogni insieme di formule, anche l'insieme vuoto, determina, in questo caso, la medesima matrice: l'algebra $[\mathbf{Fm}]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma}$ è l'algebra triviale e l'insieme $[Fm]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma}$ di valori designati è l'universo dell'algebra. É facile vedere che vale il seguente lemma.

Lemma 167 *Per ogni $\Gamma \subseteq Fm$, $\left\langle [\mathbf{Fm}]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma}, [Fm]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma} \right\rangle \cong \langle \mathbf{1}, 1\rangle$, dove $1 = \{0\}$ e $\mathbf{1}$ è un algebra del medesimo tipo di $\mathbf{Fm}$.*

Vediamo ancora un risultato di completezza, ossia che, sotto certe condizioni, molto generali, una logica $\mathcal{L}$ è debolmente completa rispetto alla matrice di Lindenbaum ridotta il cui insieme di valori designati è $[Cn\emptyset]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\emptyset}$.

Definition 168 *Se $\mathcal{L}$ è consistente e limitata, allora, per ogni $\Gamma \subseteq Fm$, è possibile definire l'algebra di Lindenbaum-Tarski nel seguente modo $[\mathbf{Fm}]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma} = \left\langle [Fm]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma}, [C]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma}, [\bot]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\emptyset}, [\top]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\emptyset} \right\rangle$, dove C è l'insieme delle operazioni (i connettivi) su Fm.*

Lemma 169 *Se $\mathcal{L}$ è limitata, allora $[\top]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\emptyset} \in [Cn\emptyset]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\emptyset}$ nell'algebra $[\mathbf{Fm}]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\emptyset} = \left\langle [Fm]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\emptyset}, [C]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\emptyset}, [\bot]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\emptyset}, [\top]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\emptyset} \right\rangle$.*

Proof. Per la definizione 164, $\top \in Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\emptyset$, quindi, per ogni $\phi \in Fm$, se $\phi \in [\top]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\emptyset}$, allora $\phi \in [Cn_v\emptyset]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\emptyset}$. ■

Abbiamo già visto, con il teorema 146, che ogni logica $\mathcal{L}$ è debolmente completa rispetto alla matrice di Lindenbaum $\mathcal{TL} = \langle \mathbf{Fm}, Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\emptyset\rangle$, ossia $\vdash_{\mathcal{L}} \phi$ sse $\vDash_{\mathcal{TL}} \phi$ per ogni $\phi \in Fm$. Ora possiamo enunciare il risultato analogo per la matrice ridotta di $\mathcal{TL}$.

Theorem 170 *Se $\mathcal{L}$ è consistente e limitata, allora $\mathcal{L}$ è debolmente completa rispetto alla matrice di Lindenbaum ridotta $[\mathcal{TL}]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\emptyset} = \left\langle [\mathbf{Fm}]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\emptyset}, [Cn_v\emptyset]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\emptyset} \right\rangle$, ossia $\vdash_{\mathcal{L}} \phi$ sse $\vDash_{[\mathcal{TL}]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\emptyset}} \phi$ per ogni $\phi \in Fm$.*

Proof. ($\Longleftarrow$) Supponiamo $\nvdash_{\mathcal{L}} \phi$. Allora $\phi \notin Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\emptyset$ e, quindi, per il lemma 125, $[\phi]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\emptyset} \notin [Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\emptyset]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\emptyset}$. Ne concludiamo che $\nvDash_{[\mathcal{TL}]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\emptyset}} \phi$.

($\Longrightarrow$) Supponiamo $\nvDash_{[\mathcal{TL}]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\emptyset}} \phi$. Allora $[\phi]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\emptyset} \notin [Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\emptyset]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\emptyset}$. Quindi, per il lemma 125, $\phi \notin Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\emptyset$. Ne concludiamo che $\nvdash_{\mathcal{L}} \phi$. ■

Considerazioni

Riassiumiamo i risultati di completezza ottenuti in questa sezione e in quella dedicata alle matrici di Lindenbaum e ai blocchi di Lindenbaum.

Lindenbaum aveva notato che ogni logica $\mathcal{L} = \langle \mathbf{Fm}, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$ è debolmente completa rispetto alla matrice $\langle \mathbf{Fm}, Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}} \emptyset \rangle$. Questo risultato si può estendere, nel senso che ogni logica è debolmente completa rispetto ad una matrice della forma $\langle \mathbf{Fm}, Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}} \Gamma \rangle$, dove $\Gamma \subseteq Fm$, e abbiamo chiamato matrici di Lindenbaum le matrici di questo tipo. L'insieme di tutte le matrici di Lindenbaum di una certa logica costituiscono un particolare blocco di matrici, detto blocco di Lindenbaum, che è la classe $\mathcal{L}_{\vdash_{\mathcal{L}}} = \{\langle \mathbf{Fm}, Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}} \Gamma \rangle : \Gamma \subseteq Fm\}$. In questo modo, è stato determinato un metodo standard per associare un semantica ad ogni logica. Da un certo punto di vista, però, questo procedimento è stato ottenuto, per così, imbrogliando. Quel che abbiamo fatto, infatti, è stato consideare le formule come valutazioni di se stesse e le teorie di $\mathcal{L}$ come insiemi di valori designati. In questo caso, i medesimi oggetti, le formule, sono considerati di natura linguistica quando sono trattati nella logica e di natura extra-lingusitica, come i valori delle formule, quando sono trattati nella semantica. Quel che otteniamo con la semantica determinata dal blocco di Lindenbaum è poco informativo perché le matrici sono costrutite con materiale che la logica ci ha già fornito, ossia le teorie.

Possiamo, però, unire il ricorso alle matrici di Lindenbaum alla nozione di quoziente sull'algebra delle formule, ossia a quella del procedimento di Lindenbaum-Tarski e dell'algebra che ne risulta, l'algebra di Lindenbaum-Tarski. Abbiamo visto che, nel caso della logica classica, per mezzo di tale procedimento è possibile determinare un quoziente dell'algebra delle formule e determinare, in tal modo, una classe di algebre (le algebre di Boole) rispetto a cui la logica classica è completa. Abbiamo accennato al fatto che tale procedimento è generalizzabile e, applicandolo ad altre logiche, è possibile determinare le rispettive classi di algebre rispetto a cui tali logiche sono complete (le algebre di Heyting per la logica intuizionista e le algebre di Boole topologiche per il sistema modale **S4**, per esempio).

Di fatto, quando abbiamo applicato il procedimento di Lindenbaum-Tarski per mostrare la completezza della logica classica rispetto alla classe delle algebre di Boole, abbiamo fatto riferimento ad un valore designato, ossia alla testa dell'algebra di Boole. In questo modo, di fatto, abbiamo dimostrato la completezza anche rispetto alla classe di matrici la cui algebra è un'algebra di Boole e in cui l'insieme dei valori designati è il singoletto che contiene la testa dell'algebra di Boole. Nel seguito, nel presentare una generalizzazione del metodo di Lindenbaum-Tarski, farò riferimento sia alla classe K di algebre o alla classe KM di matrici la cui parte algebrica è sempre un'algebra in K. La relazione di conseguenza logica è definita in termini di matrici.

Va tenuto presente il fatto, di fondamentale importanza, che se da un lato vi sono rapporti stretti, essenzialmente già emersi, tra le matrici di Lindenbaum e il procedimento di Lindenbaum-Tarski, dall'altro lato le due nozioni vanno tenute ben distinte. Per mezzo delle matrici di Lindenbaum, siamo in grado di determinare il blocco di Lindenbau e,quindi, una semantica completa per ogni logica $\mathcal{L}$. facendo uso della congruenza di Leibniz, siamo in grado di mostrare una nuova semantica, derivata dalla precedente che pure è completa per $\mathcal{L}$. Ora, il procedimento di Lindebuam-Tarski può essere generalizzato, ricorrendo alla medesima congruenza di Leibniz, ma, affinché il procedimento sia utilizzabile per dimostrare un teorema di completezza, occorre fare ulteriori assunzioni, come vedremo.

Consideriamo una logica $\mathcal{L} = \langle \mathbf{Fm}, \vdash_{\mathcal{L}} \rangle$. Consideriamo una classe K di algebre dello stesso tipo di $\mathbf{Fm}$ e la classe KM di matrici, ciascuna delle quali è della forma $\langle \mathbf{A}_{KM}, D \rangle$, dove $\mathbf{A}_{KM} \in K$ e D è l'insieme di valori designati. Poniamo, come al solito, $\mathbf{A}_{KM} \Vdash \phi[h_{\mathbf{A}_{KM}}]$ sse $h_{\mathbf{A}_{KM}}(\phi) \in D$ per ogni $h_{\mathbf{A}_{KM}} \in Hom(\mathbf{Fm}, \mathbf{A}_{KM})$ e per ogni $\phi \in Fm$. Definiamo le classi $Mod_{\mathbf{A}_{KM}}(\phi) = \{h_{\mathbf{A}_{KM}} \in Hom(\mathbf{Fm}, \mathbf{A}_{KM}) : \mathbf{A}_{KM} \Vdash \phi[h_{\mathbf{A}_{KM}}]\}$ e $Mod_{\mathbf{A}_{KM}}(\Gamma) = \{h_{\mathbf{A}_{KM}} \in Hom(\mathbf{Fm}, \mathbf{A}_{KM}) : \mathbf{A}_{KM} \Vdash \gamma[h_{\mathbf{A}_{KM}}]$ per ogni $\gamma \in \Gamma\}$. Definiamo la relazione di conseguenza $\vDash_K$ nel modo seguente. Per ogni $\Gamma \subseteq Fm$ e per ogni $\phi \in Fm$,

$$\Gamma \vDash_K \phi \text{ sse, per ogni } \mathbf{A}_{KM} \in K,\ Mod_{\mathbf{A}_{KM}}(\Gamma) \subseteq Mod_{\mathbf{A}_{KM}}(\phi).$$

Supponiamo di voler mostrare che $\mathcal{L}$ è completa per una classe K di algebre, ossia che $\vdash_{\mathcal{L}} = \vDash_K$.

Se guardiamo a ciò che è non è specifico della logica classica, vediamo che il metodo di Lindenbaum-Tarski impiegato per dimostrare il teorema di completezza della logica classica rispetto alla classe delle algebre di Boole può essere descritto nel modo seguente. La parte in cui si prova $\vdash_{\mathcal{L}} \subseteq \vDash_K$, ossia quello che è chiamato anche teorema di correttezza, non fa parte del procedimento di Lindenbaum-Tarski. La dimostrazione si basa sul fatto che, per ogni assioma ϕ, se c'è, vale $\vDash_K$ e che le regole di deduzione preservano i valori designati, ossia, per ogni valutazione σ, se $K \Vdash \phi_1[\sigma], ..., K \Vdash \phi_n[\sigma]$, allora $K \Vdash \phi[\sigma]$ per ogni regola della forma

$$\frac{\phi_1, ..., \phi_n}{\phi}.$$

La seconda parte del teorema di completezza, talvolta (anche in questo testo) chiamata semplicemente teorema di completezza (e distinta dall'altra parte, che è il teorema di correttezza), è quella in cui si prova $\vDash_K \subseteq \vdash_{\mathcal{L}}$. In questa parte, si ricorre alle matrici di Lindenbaum. Il mondo dei valori semantici delle formule è dato dall'algebra delle formule stessa e le teorie di $\mathcal{L}$ sono usate per ottenere gli insiemi dei valori designati nelle matrici del blocco di Lindenbaum e, per mezzo della congruenza di Leibniz, si ottiene una matrice ridotta la cui algebra è in K.

Se poniamo $\Gamma \nvdash_{\mathcal{L}} \phi$ e riusciamo a mostrare che il quoziente dell'algebra delle formule $[\mathbf{Fm}]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma}$ è in K e che vi è una valutazione h su $[\mathbf{Fm}]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma}$ tale che soddisfa Γ e non soddisfa ϕ, allora abbiamo mostrato che $\Gamma \nvDash_K \phi$ e, quindi, che $\vDash_K \subseteq \vdash_{\mathcal{L}}$

Ecco, più in dettaglio, come si procede. Uso le stesse lettere con cui ho indicato le diverse fasi della dimostrazione di completezza della logica classica rispetto alla classe delle algebre di Boole per mostrare come si procede, punto per punto, nel caso più generale.

Se poniamo

(A) Assumiamo $\Gamma \nvdash_{\mathcal{L}} \phi$ e procediamo a mostrare $\Gamma \nvDash_K \phi$.

(B) Consideriamo la teoria $Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma$, per un certo insieme Γ di formule e consideriamo, poi, la congruenza di Leibniz $\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma$ sull'insieme delle formule. In questo modo, otteniamo l'algebra quoziente $[\mathbf{Fm}]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma}$ e mostriamo che $[\mathbf{Fm}]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma} \in K$.

(C) Ora dobbiamo mostrare che, per ogni $\phi \in Fm$, $\phi \in Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma$ sse $[\phi]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma} \in [Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma}$. Per il lemma 125, sappiamo che questo è assicurato dal fatto che $\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma$ è una congruenza di Leibniz. In generale, ogni congruenza che sia una congruenza matriciale per $\left\langle [\mathbf{Fm}]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma}, [Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma} \right\rangle$ permette di dimostrare questo punto. La congruenza di Leibniz appare la più adatta ad una trattazione generale del procedimento di Lindenbaum-Tarski perché, per definizione, è la più grande tra le congruenze matriciali su $\left\langle [\mathbf{Fm}]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma}, [Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma} \right\rangle$.

(D) Il punto (C) permette di prendere come valutazione l'omomorfismo naturale $\pi : \mathbf{Fm} \to [\mathbf{Fm}]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma}$ ed avere, come conseguenza, che $\pi(\gamma) \in [Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma}$ per ogni $\gamma \in \Gamma$, allora $\pi(\phi) \notin [Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma}$.

(E) Poiché $[\mathbf{Fm}]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma} \in K$, ciò mostra che $\Gamma \nvDash_K \phi$, ossia $\vDash_K \subseteq \vdash_{\mathcal{L}}$.

Matrici di Lindenbaum e quozienti

Abbiamo visto, allora, alcuni risultati ed alcune applicazioni delle matrici di Lindenbaum, del blocco di Lindenbaum e di come queste nozioni possono determinare nuove matrici e nuovi blocchi di matrici per mezzo della congruenza e, in particolare per mezzo della più grande congruenza che rispetta l'insieme dei valori designati, ossia la congruenza di Leibniz. Abbiamo già specificato che, in un certo senso, se la semantica determinata dal blocco di Lindenbaum non è soddisfacente perché presenta una reduplciazione dei dati della logica senza indicare quali siano i valori sematici di base su cui si poggia la semantica. In un blocco di Lndenbaum, in altre parole, ritroviamo tutte le formule e tutte le teorie che abbiamo già nella logica.

Riducendo il blocco di Lindenbaum per mezzo di un congruenza, è possibile cercare di fare economia degli enti a cui si ricorre nella semantica e di unificare le funzioni che sono semanticamente equivalenti. In particolare, è importante che la congruenza non mischi valori designati con valori non designati, perché su questa differenza si basa la definizione di conseguenza logica semantica. La congruenza di Leibniz è la maggiore tra le congruenze che rispettano questa suddivisione dei valori in designati e non designati.

Se compiamo alcune assunzioni, molto generali, possiamo vedere che il risultato di ridurre una matrice per mezzo della congruenza di Leibniz conduce a risultati molto più informativi rispetto a quelli forniti dal blocco di Lindenbam da cui abbiamo preso le mosse. Supponiamo di avere la matrice di Lindenbaum $\langle \mathbf{Fm}, Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma \rangle$ .Se la congruenza di Leibniz identifica tutti gli elementi in $Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma$, allora possiamo porre $[Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma]_{\Omega Cn_{\vdash_{\mathcal{L}}}\Gamma} = \{1\}$, ossia indicare l'insieme dei valori designati semplicemente con 1. Assumiamo , inoltre, che la logica $\mathcal{L}$ sia limitata. In tal caso, per il lemma 169, possiamo porre $[\top]_{\Omega Cn_{\vdash_\mathcal{L}}\Gamma} \in [Cn_{\vdash_\mathcal{L}}\Gamma]_{\Omega Cn_{\vdash_\mathcal{L}}\Gamma}$, ossia $[\top]_{\Omega Cn_{\vdash_\mathcal{L}}\Gamma} = 1$. D'altra parte, abbiamo anche un limite inferiore, che possiamo indicare con $[\bot]_{\Omega Cn_{\vdash_\mathcal{L}}\Gamma} = 0$. Non è detto che non esistano altri valori, ossia altre classi di equivalenza, oltre 0 e 1. In ogni caso possiamo stabilire un ordine parziale tra i valori sulla base della relazione di conseguenza logica della logica. In altre parole, per ogni $\phi, \psi \in Fm$, possiamo porre

$[\phi]_{\Omega Cn_{\vdash_\mathcal{L}}\Gamma} \leq [\psi]_{\Omega Cn_{\vdash_\mathcal{L}}\Gamma}$ sse, per ogni $\zeta \in [\phi]_{\Omega Cn_{\vdash_\mathcal{L}}\Gamma}$ e per ogni $\xi \in [\psi]_{\Omega Cn_{\vdash_\mathcal{L}}\Gamma}$, $\zeta \vdash_\mathcal{L} \xi$.

Chiaramente $0 \leq 1$ e, per ogni $\phi \in Fm$, $0 \leq [\phi]_{\Omega Cn_{\vdash_\mathcal{L}}\Gamma} \leq 1$ e $\mathcal{L}$ è coerente sse $0 \neq 1$.

In questo caso, la matrice pura di Lindenbaum, $\left\langle [\mathbf{Fm}]_{\Omega Cn_{\vdash_\mathcal{L}}\emptyset}, [Cn_v\emptyset]_{\Omega Cn_{\vdash_\mathcal{L}}\emptyset} \right\rangle$, può essere indicata con $\langle [\mathbf{Fm}]_{\Omega 1}, \{1\} \rangle$ possiamo riaffermare il teorema 170, dicendo che se $\mathcal{L}$ è coerente e limitata, allora è debolmente completa rispetto a $\langle [\mathbf{Fm}]_{\Omega 1}, \{1\} \rangle$.

Per mezzo di questa operazione di quoziente, abbiamo determinato un valore di verità, 1, che rappresenta il vero e che è sempre goduto da tutte le tautologie (ricordiamo, infatti, che $1 \in\in [Cn_{\vdash_\mathcal{L}}\Gamma]_{\Omega Cn_{\vdash_\mathcal{L}}\Gamma}$ per ogni $\Gamma \subseteq Fm$). Il valore di verità 0, poi, rappresenta il falso, mentre i valori di verità intermedi tra 0 e 1 (e non encessariamente comparabili tra loro) rappresentano ulteriori valori di verità, la cui interpretazione intuitiva è da chiarire caso per caso.

In questo modo, tuttavia, tramite l'operazione di congruenza matriciale, abbiamo potuto astrarre dal complesso di enti da cui siamo partiti per giungere a considerare solo i valori di verità che rispecchiano i valori semantici effettivamente all'opera nella definizione della relazione di conseguenza logica per mezzo di una data matrice (o di una classe di matrici).

Quel che non possiamo ottenere, a meno di imporre ulteriori richieste alla logica, è che si possano sempre ridurre i valori di verità a due soli, il Vero e il Falso. Ciò accade nella logica classica, ma non vale, per esempio, nella logica intuizionista.

Non è detto, in generale, che la congruenza di Leibniz, identifichi tutti gli elementi in $Cn_{\vdash_\mathcal{L}}\Gamma$, quindi non è neppure detto, in generale, che vi sia un unico valore designato che indichi il Vero. Nel caso delle logiche implicative, per esempio, questa possibilità è assicurata dalla condizione

$$\phi, \psi \vdash_\mathcal{L} \phi \to \psi$$

per ogni $\phi, \psi \in Fm$.

Il fatto che $Cn_{\vdash_\mathcal{L}}\Gamma$, poi, sia l'elemento massimo dell'ordine $\leq$, definito da $\phi \leq \psi$ sse $\vdash_\mathcal{L} \to \psi$, dipende dalla condizione

$$\phi \vdash_\mathcal{L} \phi \to \psi$$

per ogni $\phi, \psi \in Fm$.

Nel caso delle logiche freghiane, poi, la possibilità di identificare gli elementi in $Cn_{\vdash_\mathcal{L}}\Gamma$, dipende dalla presenza di un limite superiore in $\langle Fm, \leq \rangle$, dove $\leq$ è determinato dalla condizione

$$\phi \leq \psi \text{ sse } \phi \vdash_{\mathcal{L}} \psi$$

per ogni $\phi, \psi \in Fm$ e dal rispetto delle seguenti condizioni

$$\frac{\phi_{1\vdash_{\mathcal{L}}}\psi_1, ..., \phi_n \vdash_{\mathcal{L}} \psi_n, \psi_1 \vdash_{\mathcal{L}} \phi_1, ..., \psi_n \vdash_{\mathcal{L}} \phi_n}{c(\phi_1, ..., \phi_n) \vdash_{\mathcal{L}} c(\psi_1, ..., \psi_n)}$$

e

$$\frac{\phi_{1\vdash_{\mathcal{L}}}\psi_1, ..., \phi_n \vdash_{\mathcal{L}} \psi_n, \psi_1 \vdash_{\mathcal{L}} \phi_1, ..., \psi_n \vdash_{\mathcal{L}} \phi_n}{c(\psi_1, ..., \psi_n) \vdash_{\mathcal{L}} c(\phi_1, ..., \phi_n)}$$

per ogni connettivo n-ario $c \in C$ e per ogni $\phi_1, ..., \phi_n, \psi_1, ..., \psi_1 \in Fm$.

10.4 Appendice

10.4.1 Valori algebrici: un'alternativa ai valori di verità

Prendendo spunto da un'idea di C. I. Lewis (cfr. Lewis 1923), chiamiamo *fatto* ciò a cui si riferisce un enunciato. In tal senso è possibile parlare tanto di fatto reale (il riferimento di un enunciato vero) quanto di fatto irreale (il riferimento di un enunciato falso). Lo stesso Lewis, sebbene in tale saggio non si è posto i problemi che stiamo ora trattando e non si esprimeva nei termini in cui lo farò qui, suggerisce che l'interpretazione semantica di un sistema di logica enunciativa possa essere espressa in termini di fatti, piuttosto che di valori di verità. Consideriamo, dunque, come semantica per un sistema di logica enunciativa classica, un'algebra dei fatti $\mathbf{F} = \langle F, \wedge, \vee, ', 0, 1\rangle$, dove F è l'insieme dei fatti e le operazioni seguenti sono le solite operazioni di un'algebra di Boole. L'ordine $\leq$ su F indica l'implicazione logica: se $a \leq b$, allora b è il fatto che accade se accade il fatto a. Sia X un insieme di fatti. $\sup(X)$ è il fatto che accade se e solo se si dà almeno uno dei fatti in X. $\inf(X)$ è il fatto che accade se e solo se accadono tutti i fatti in X.

Con questo apparato, possiamo esporre (ma non fedelmente, perché non disponiamo di un'operazione corrispondente all'implicazione stretta), l'idea di Lewis di individuare due particolari tipi di insiemi di fatti: i sistemi e i mondi possibili. I sistemi sono insiemi di fatti consistenti e chiusi rispetto all'iimplicazione, ma non necessariamente completi. Gli insiemi di mondi possibili sono estensioni dei sistemi ad insiemi consistenti e completi. Più esplicitamente, un sistema S è un insieme di fatti tale che, per ogni $a, b \in F$,

1. se $a \in S$, allora $a' \notin S$
2. se $a \in S$ e $a \leq b$, allora $b \in S$
3. se $a, b \in S$, allora $a \wedge b \in S$.

   Un mondo possibile M è un sistema tale che, per ogni $a, b \in F$,

4. se $a' \notin S$, allora $a \in S$.

Un sistema S non è altro, quindi, che un filtro su F (per le condizioni 2 e 3) che è proprio (per la condizione 1). Un mondo possibile M è un ultrafiltro su F, ossia è un sistema proprio massimale. La condizione 1 e la condizine 4 insieme, infatti, implicano che, per ogni fatto a, o $a \in M$ o $a' \in M$. Ogni insieme di fatti che rispecchia la condizione 1, ossia che è consistente, determina il più piccolo sistema che contiene tali fatti ed è chiuso rispetto alle condizioni 2 e 3. Ogni insieme di fatti può essere considerato una porzione della nostra conoscenza, quindi possiamo dire che ogni porzione di conoscenza che non sia contraddittoria determina un sistema, chiudendo tale porzione di conoscenza rispetto alle condizioni 2 e 3. I fatti che non sono contenuti in un sistema S sono detti *logicamente indipendenti* dai fatti in S. Ogni sistema, in generale, può essere contenuto in diversi mondi possibili e ciò rispecchia la limitatezza della nostra conoscenza nel senso che un sistema non determina un mondo, ma esistono diversi logicamente compatibili con quanto sappiamo in un dato momento.

Il blocco di matrici costituito dall'algebra dei fatti e dai sistemi di fatti possibili come insiemi dei valori designati è una semantica corretta e completa per la logica classica e ne costituisce un'interpretazione possibile. Più precisamente, consideriamo un blocco di matrici $\{\langle \mathbf{F}, S\rangle : S \in \mathcal{S}\}$, dove $\mathcal{S}$è l'insieme dei sistemi di fatti possibili e rappresenta le porzioni di conoscenza possibili. É chiaramente analogo al blocco di Lindenbaum, solo che si opera con l'algebra dei fatti e con sistemi di fatti possibili. Sia $h \in Hom(\mathbf{Fm_L}, \mathbf{F})$. L'usuale relazione di soddisfazione tra matrici, formule e valutazioni può essere piuttosto chiamata, qui, relazione di conferma. Questa scelta terminologica si adatta meglio a questo contesto in cui il rapporto tra enunciati e fatti assomglia a quello sperimentale in cui esplora il mondo dei fatti per trovare una conferma, appunto, o una smentita a ciò che esprime un certo enunciato. Se $h(\phi) \in S$, diciamo che ϕ è confermata dal sistema di fatti S (in simboli, $\langle \mathbf{F}, S\rangle \Vdash \phi[h]$). Se $h(\phi) \in S$ per ogni $S \in \mathcal{S}$, allora ϕ è una legge logica, in quanto valida in ogni sistema di fatti. Definiamo $Mod_S(\phi) = \{h \in Hom(\mathbf{Fm_L}, \mathbf{F}) : h(\phi) \in S\}$. Se $Mod_S(\Gamma) \subseteq Mod_S(\phi)$, allora ϕ segue da Γ in S (in simboli, $\Gamma \vDash_S \phi$). Se $Mod_S(\Gamma) \subseteq Mod_S(\phi)$ per ogni $S \in \mathcal{S}$, allora ϕ segue logicamente da Γ (in simboli, $\Gamma \vDash \phi$), in quanto ϕ è confermata in ogni sistemi di fatti possibile che conferma Γ. Se $Mod_S(\phi) = \{S : S \in \mathcal{S}\}$, allora ϕ è valida, ossia esprime un fatto logicamente necessario (in simboli, $\vDash \phi$).

Possiamo notare che avremmo potuto definire una relazione di conseguenza equivalente, ricorrendo alla nozione di mondo possibile e al seguente blocco di matrici $\{\langle \mathbf{F}, M\rangle : M \in \mathcal{M}\}$, dove $\mathcal{M}$ è l'insieme dei mondi possibili e rappresenta, quindi, anche le porzioni di conoscenza completa possibili.

Questa equivalenza non si verifica se, invece di adottare un'algebra di Boole, avessimo adottato un'algebra di Heyting per descrivere le operazioni sui fatti. Assumiamo $\mathbf{F} = \langle F, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1\rangle$, dove F è, come sopra, l'insieme dei fatti e le operazione su F sono quelle di un'algebra di Heyting. Definiamo $a' = a \rightarrow 0$. Siano S e M definiti come sopra e così $\mathcal{S}$ e $\mathcal{M}$. In questo caso il blocco di matrici $\{\langle \mathbf{F}, S\rangle : S \in \mathcal{S}\}$ determina la relazione di conseguenza logica intuizionista, mentre il blocco di matrici $\{\langle \mathbf{F}, M\rangle : M \in \mathcal{M}\}$ determina la relazione di conseguenza logica classica. Ciò si accorda con una delle possibili interpretazioni informali della logica intuizionista, ossia di un sistema che rappresenta gli stati di conoscenza. Non in ogni stato della conoscenza, ciò che, seguendo Lewis, qui è stato chiamato sistema di fatti, è noto se vale a o se vale a'. Solitamente, anzi, uno stato della conoscenza è incompleto. Un mondo possibile, invece, rappresenta una situazione ideale in cui ogni fatto è conosciuto, per cui si è in grado di dire se vale a o se vale a'.

Parte III

CONCLUSIONE

Capitolo 11

UNA RELAZIONE MULTIFORME

Alla fine di un percorso così lungo, occorre cercare di ricapitalore il senso di ciò che si è fatto. Come ho dichiarato in più punti di questo lavoro, il mio scopo principale è stato quello di mostrare, sia con esempi storici sia con un'analisi di certe tematiche presenti nel dibattito attuale, quando sia complesso compiere un discorso intorno alla nozione di conseguenza logica e ho cercato di mostrare gli aspetti di questa complessità.

Nonostante uno sguardo ingenuamente ristretto al nostro presente possa indurre a credere che la nozione della conseguenza logica sia sempre stata il maggior centro di interesse della ricerca logica o almeno uno dei temi capitali in ogni periodo della sua storia, le cose stanno in modo assai diverso. Non è un caso se ritroviamo nello stesso autore affermazioni come le seguenti

> Quando forniamo un resoconto preciso di questa nozione [la nozione della conseguenza logica], non stiamo definendo, in modo arbitrario, un concetto nuovo, le cui proprietà abbiamo intenzione, quindi, di studiare - come quando introduciamo, diciamo, il concetto di gruppo o quello di campo reale chiuso. É per questo motivo che Tarski assume come proprio obiettivo [fornire] un resoconto della conseguenza che rimanga fedele al concetto ordinario e intuitivo da cui deriviamo il nome. É per questo motivo che il compito diviene, in larga parte, un compito di analisi concettuale (Etchemendy [1990], p. 2[1]).

e

[1] When we give a precise account of this notion, we are not arbitrarly defining a new concept whose properties we then set out to study - as we are when we introduce, say, the concept of a group, or that of a real closed field. It is for this reason that Tarski takes as his goal an account of consequence that remains faithful to the ordinary, intuitive concept from which we borrow the name. It is for this reason that the task vecomes, in large part, one of the conceptual analysis.

> Il concetto intuitivo di conseguenza, la nozione del seguire di un enunciato da altri enunciati, è senza dubbio il concetto più importante in logica. É ciò che ha guidato lo studio della logica per più di duemila anni (Etchemendy [1990], p. 6[2]).

Solo considerazioni superficiali, che si riflettono inevitabilmente anche nelle proposte teoretiche, possono far pensare e che la logica abbia sempre avuto, dalla sua origine ad oggi, lo scopo principale di studiare la nozione di conseguenza. Solo sulla base di una visione priva di critica, poi, si può parlare tranquillamente, come si fa nel primo dei due brani citati, *del* concetto di conseguenza logica, ordinario e intuitivo, da studiare come qualcosa che è già dato e che va semplicemente descritto.

Ebbene, quel che ho cercato di mostrare è che, piuttosto, la nozione di conseguenza logica è una nozione che compare in certi pensatori che si sono dedicati alla riflessione logica sulla base di precise motivazioni, di ordine epistemologico o metafisico, così come, per motivazioni diverse ma della stessa natura, non compare o, comunque, non è certamente centrale in altri pensatori, tra i quali vi sono anche Aristotele, il cui interesse, piuttosto, era rivolto principalmente allo studio delle inferenze sillogistiche e Frege, il cui obiettivo era fornire una base sicura per ricostruire l'aritmetica su basi logiche e, per questo, ha fornito un calcolo formale che assicurasse la cogenza di ogni passaggio dimostrativo. Il concetto di conseguenza logica, come abbiamo visto, è determinato da una serie di relazioni con altri concetti, anche al di fuori della logica.

Nozioni quali, per esempio, preservazione della verità, formalità, legge del pensiero e deduzione intervengono in misura diversa e in pensatori diversi per cercare di fornire una caratterizzazione della conseguenza logica. A loro volta, poi, queste nozioni si collegano ad altre ancora, anche di natura non più logica. Abbiamo visto, per esempio, come si debba formulare un'ontologia minimale per poter parlare di formalità nell'ottica tarskiana. Abbiamo visto l'insistenza sui caratteri normativo ed epistemico della conseguenza logica, quando la si caratterizza in termini di deduzione o, più in generale, in termini di seguire una regola. Abbiamo visto come un'analoga volontà di caratterizzare la nozione di conseguenza logica come relazione formale, abbia portato a soluzioni assai diverse in Kant, da una parte, e in Bolzano e Tarski dall'altra (pur con le profonde differenze che, per altri aspetti, vi sono tra anche tra loro due). Se in Kant si enfatizza la nozione di logica come scienza delle leggi necessarie del pensiero, ravvisandovi la formalità nel fatto che tali leggi valgono in ogni contesto di ragionamento, in Bolzano e in Tarski la formalità è legata all'idea di variazione del contenuto non logico di ciò (proposizioni in sé o enunciati) che compone un argomento.

É importante sottolineare ancora una volta, perché è particolarmente significativo per comprendere il senso di questo lavoro, come la famosa definizione della nozione di conseguenza logica fornita da Tarski [1936c], che Etchmendy

[2]The intuitive concept of consequence, the notion of a sentence following logically from others, i without dout the most central concept in logic. It is what has driven the study of logic for more than two thousand years.

considera come un tentativo di coglierne l'essenza, sia sorta sulla base di una nozione di conseguenza logica che si era venuta chiarendo, in gran parte, come si è detto, tramite i lavori degli assiomatici, che lavoravano già con un concetto sostanzialmente identico a quello tarskiano. Non si tratta, quindi, di limitarsi a cogliere qualcosa che, in qualche modo, si dà già da solo. Studiare il concetto di conseguenza logica ha per lo più significato, piuttosto, e sarebbe stato sorprendente il contrario, rendersi innazitutto conto della ricchezza di usi, intuizioni, caratterizzazioni e relazioni che si riferiscono ad esso.

Lo stesso studio tecnico che ho compiuto nella seconda parte del lavoro, ha sempre voluto mettere l'accento sulla non ovvietà delle decisioni formali con cui si può caratterizzare la nozione di conseguenza logica e di mostrare la fitta rete di rapporti che vale tra questa nozione ed altre quali valore di verità, calcolo, teoria, matrice. A volte una soluzione può essere migliore per un certo aspetto, ma lasciare in ombra qualche altra proprietà che potrebbe essere legittimamente attribuita alla nozione di conseguenza logica.

Un caso su cui ho insistito molto è la suddivisione tra caratterizzazione sintattica e semantica della nozione di conseguenza logica e di come ciò corrisponda a diverse intuizioni che si possono avere al riguardo. Da un lato, con una caratterizzazione sintattica, si può caratterizzare la conseguenza logica comel dedurre e, un po' più alla lontana, come leggi del pensiero o razionalità. D'altro lato, con una caratterizzazione semantica, la si può avvicinare al rapporto tra valori di verità e, in ultima analisi, ai diversi modi in cui si può interpretare un linguaggio e considerare tutte le situazioni possibili. Ci sono, poi, anche situazioni in cui non è sempre così chiara la distinzione tra sintassi e semantica, come in certi calcoli calcoli dei sequenti con etichette, in cui si manipolano simboli del linguaggio, ma le tecniche sono chiaramente ispirate a nozioni semantiche. Ho cercato di porre l'accento anche sul fatto che all'interno di un dato modo di definire la conseguenza logica, sintassi o semantica, possono darsi tecniche, scopi e concezioni diverse. Se si può sostenere, infatti, che i calcoli della deduzione naturale siano una caratterizzazione a livello tecnico delle regole che seguiamo quando ragioniamo con attenzione e in modo proprio, dall'altro ciò non sembra vero per i calcoli alla Hilbert le cui dimostrazioni sono spesso compicate e astruse. La nozione di razionalità colta dai calcoli alla Hilbert non è esattamente la stessa colta, almeno in una certa misura, dai calcoli della deduzione naturale. Si è parlato di come una visione legata alle regole sembri svincolarsi da una nozione di logica che tende, invece, a considerarsi come la depositaria di verità certe ed assolute (gli assiomi) e che separa, in un certo senso, deduzione da ragionamento perché la deduzione assume delle forme che sono ben lontane da ciò che rappresenta un ragionamento valido nella maggior parte dei casi in cui, di fatto, si ricorre ad esso.

Abbiamo visto, però, che ci sono anche delle proprietà che possono essere studiate a prescindere da questa caratterizzazione, rendendo, così, possibile fondare uno studio tecnico generale della nozione di conseguenza logica e abbiamo accennato anche al fatto che queste proprietà generali possono essere messe in discussione e cambiate (in modo più o meno radicale) oppure se ne possono aggiungere delle altre (come nel caso di Tarski che pone anche la proprietà della finitezza tra gli assiomi che caratterizzano la nozione di conseguenza). Questo tipo di approccio generale, che non considera il modo specifico in cui si definisce una certa relazione di conseguenza logica, mostra che è possibile pensare che vi siano anche intuizioni sulla conseguenza logica che non abbiano né natura sintattica né natura semantica, ossia che non legata né a idee come calcolo, deduzione, seguire delle regole e razionalità né a idee come preservazione della verità e rapporto tra casi possibili.

Questi sono solo veloci esempi che richiamano il fatto centrale che mi preme chiarire e che ho cercato di sostenere con osservazioni tratte da diversi settori, autori e periodi della ricerca logica, ossia che lo studio della nozione di conseguenza logica non si occupa di una nozione fissa e determinata in modo univoco, ma di una nozione che si costruisce in base a scopi e strumenti, in parte ereditati precedenti ricerche e in parte determinati in nuovi contesti e con nove esigenze.

Certamente, a questo riguardo, come in ogni settore scientifico, ci sono delle intuizioni che guidano il modo con cui compiamo l'impresa di determinare la nozione di conseguenza logica. Ma ci sono queste intuizioni, non solo sulla sua natura, ma anche sul suo uso e sul suo ruolo (si pensi al legame con la ricerca scientifica che si trova, per esempio, in Bolzano), che fanno sì che la nozione di conseguenza diventi importante, sia isolata e sia determinata in un modo piuttosto che in un altro, senza che vi sia quello giusto in senso assoluto.

Ciò non significa necessariamente sostenere che vi sono semplicemente diverse nozioni di conseguenza logica e doremmo accettare una posizione relativistica secondo cui sono tutte legittime ed ognuna è equivalente alle altre. Quel che voglio suggerire è qualcosa di diverso. La nozione di conseguenza logica, verosimilmente, sorge da alcune intuizioni su cosa sia un argomento logicamente valido che sono effettivamente comuni, ma, poi, la fitta rete di relazioni con altri concetti e diverse convinzioni metafisiche ed epistemologiche fa sì che sia caratterizzata in modi diversi, dando preminenza, di volta in volta, ad alcuni dei suoi diversi aspetti.

Può capitare che questa rete di relazioni non le lasci neppure lo spazio per sorgere. In fondo, questo è quello che è capitato in Aristotele, che, dando particolare importanza al nesso predicativo e all'uso dei sillogismi per giustificare e fondare conclusioni che erano enunciati categorici, non si è occupato della nozione di conseguenza logica a prescindere dalla forma solo sillogistica degli argomenti.

Un più spiccato interesse per la logica come arte di ragionare, poi, porta a privilegiare l'aspetto delle regole per l'intelletto. Abbiamo visto il caso di Kant, ma ci sono anche casi in cui si mescolano, quasi in uguale misura, diverse intuizioni. Particolarmente interessante, a questo proposito, è il caso di Bolzano, che ha definito la relazione di conseguenza logica come una relazione oggettiva tra proposizioni in sé e, quindi, da questo punto di vista ha evitato qualsiasi riferimeto al soggetto e al ragionamento. D'altra parte, poi, egli pone condizioni come la compatibilità delle premesse con la conclusione e la non ridondanza delle premesse per dimostrare la conclusione che avvicinano, in modo particolare, la sua caratterizzazione all'uso della logica nell'ambito della ricerca scientifica, come fondamento per compiere deduzioni e scoprire nuove conoscenze.

Quel che vorrei aver fornito è un'analisi di alcuni dei momenti della riflessione nel campo dell logica che sono rilevanti per capire il senso dello studio della nozione di conseguenza logica e la possibilità di avere una coscienza non banale della complessità del problema. Quel che ho proposto è stato un percorso attraverso alcuni di questi momenti. Non si tratta, ovviamente di un percorso completo, ma ho cercato di porre a confronto i diversi argomenti che ho affrontato, di mostrare la natura di certe scelte teoriche che si compiono per fornire una caratterizzazione piuttosto che un'altra della conseguenza logica, di spiegare i punti di vista e la trama di relazioni tra intuizioni, scopi, problemi e possibili soluzioni che orientano e guidano l'elaborazione delle diverse proposte. Tali proposte non sono, semplicisticamente, sviluppi giusti o sbagliati della ricerca logica, ma sono il frutto di un'attività scientifica volta a chiarire delle intuizioni, a determinare relazioni tra diversi concetti, a pensare a nuove applicazioni e ad aprire lo spazio per nuovi problemi e per nuove ricerche.

Parte IV

ABBREVIAZIONI E BIBLIOGRAFIA

ELENCO ABBREVIAZIONI

E LEGENDA

Aristotele

APo Analitici secondi

APr Analitici primi

Cat. Categorie

Int. Dell'espressione

Met. Metafisica

Bolzano

ML Von der matematischen Lehrart

WL Wissenschaftslehre

Boole

MA The Mathematical Analysis of Logic

Descartes

R Regulae ad directionem ingenii

Frege

BS Begriffsschrift

GA Die Grundlagen der Arithmetik

Kant

A Kritik der reinen Vernunft, I edizione

B Kritik der reinen Vernunft, I edizione

L Logik

Russell-Whitehead

PM Principia mathematica

[PM I A 1, pp. 92-3] = Principia matematica, parte I, sezione A, capitolo 1, pp. 92-3.

BIBLIOGRAFIA

AA. VV. [1974]

Proceedings of the Tarski Symposium, American Mathematical Society.

Aristotele

Gli analitici primi, c. M. Mignucci, Loffredo, Napoli [1969].

Aristotele

Organon, c. G. Colli, Adelphi, Milano [2003].

Aristotele

Metafisica, c. G. Reale, Bompiani, Milano [2000].

Aberdein A., Read S. [2009]

The Philosophy of Alternative Logics, in Haaparanta [2009], p. 613-723.

Anderson A. R., Belnap jr N. D. [1975]

The Pure Calculus of Entailment, The Journal of Philosophical Logic, 27, pp. 19-52, in Jacquette [2002a], pp. 216-36.

Antonelli A. [2010]

Non-monotonic Logic in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2010 Edition)*, Edward N. Zalta (ed.), URL = http://plato.stanford.edu/archives/sum2010/entries/logic-nonmonotonic/, consultato 03 gennaio 2011.

Avron A. [1994]

What is a Logical System?, in Gabbay [1994], pp. 217-238.

Beall J. C., Restall J. [2006]

Logical Pluralism, Clarendon Press, Oxford.

Bernstein B. A. [1925]
Sets of Postulates for the Logic of Propositions, Transactions of the American Mathematical Society, pp. 472-478.

Bernstein B. A. [1926]
Whitehead and Russell's Principia mathematica, review for the Bullettin of the American Mathematical Society, pp. 711-713.

Bernstein B. A. [1931]
Whitehead and Russell's Theory of Deduction as a Mathematical Science, Bullettin of the American Mathematical Society, pp. 480-488.

Bernstein B. A. [1932]
Relation of Whitehead and Russell's Theory of Deduction to the Boolean Logic of Propositions, Bullettin of the American Mathematical Society, pp. 589-593.

Beziau J. Y. [2007, ed.]
Logica universalis. Towards a General Theory of Logic, Birkhäuser, Basel, 2nd edition.

Bochman A. [2000]
Belief Contraction as Nonmonotonic Inference, in The Joutnal of Symbolic Logic, Vol. 65, no. 2 (Jun. 2000), pp. 605-626.

Bolzano B. [1837]
Wissenshaftlehre, tr. ingl. *Theory of Science*, R. George ed.,

Bolzano B.
Von der mathematischen Lehrart, tr. L. Giotti, *Del metodo matematico*, intr. C. Cellucci, Bollati Boringhieri, Milano, 2004.

Bonomi A. [1973]
La struttura logica del linguaggio, Bompiani, Milano.

Boole G. [1847]
The Mathematical Analysis of Logic. Being an Essay towards a Calculus of Deductive Reasoning, Macmillan, Barclay & Macmillan, Cambridge / George Bell, London in Boole (2004).

Boole G. [2004]
L'analisi matematica della logica, a c. M. Mugnai, Bollati Boringhieri, Torino.

Bozzi S. [2000a]
La metodologia delle scienze deduttive di A. Tarski. Teorie e logiche proposizionali, manoscritto.

Bozzi S. [2000b]
Tarski e la metodologia delle scienze deduttive, manoscritto.

Bozzi S. [2011]
Algebre e linguaggi proposizionali, manoscritto.

Brouwer [1913]
Intuitionism and Formalism, Bulletin of the American Mathematical Society, 20, pp. 81-96, in Brouwer [1975].

Brouwer [1948]
Consciousness, Philosophy and Mathematics, Proceedings of the 10th International Congress of Philosophy, Amsterdam, pp. 1235-1249, in Brouwer [1957].

Brouwer [1951]
Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism, ed. D. van Dalen, Cambridge University Press.

Brouwer [1954]
Points and Spaces, Canadian Journal of Mathematics, 6, pp. 1-17, in Brouwer [1957].

Brouwer [1957]
Collected Works, 1, Philosophy and Foundations of Mathematics, ed. H. Heyting, North-Holland, Amsterdam.

Burgess J. P. [2009]
Philosophical Logic, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

Cagnoni D. (ed.) [1981]
Teoria della dimostrazione, intr. S. Bozzi, Feltrinelli, Milano.

Carroll L. [1895]
What the Tortoise Said to Achilles, Mind, vol. 4, n. 14 (Apr. 1895), pp. 278-280.

Carnap R. [1939]
Foundations of Logic and Mathematics, in International Encycopledia of Unified Science, Vol. 1, n. 3, University of Chicago Press.

Carrara M., Giaretta P. [2004, ed.]
Filosofia e logica, Rubbettino, Soveria Mannelli.

Casari E. [2006]
La matematica della verità. Strumenti matematici della semantica logica, Bollati Boringhieri, Milano.

Cellucci C. [1985]
Introduzione, in Bolzano *Von der mathematischen Lehrart*, pp. 7-39.

Cleave J. P. [1991]
A Study of Logics, Oxford University Press, Oxford.

Crossley J. N., Dummett M. A. E. [1965]
Formal Systems and Recursive Funzionts. Proceedings of the Eight Logic Colloquium, Oxford, North-Holland, Amsterdam.

Czelakowski J. [1981]
Equivalential Logics I,II, Studia Logica 40 (1981), pp. 227-236 e 355-372.

Czelakowski J. [1985]
Logics and Operators, Logic and Logical Philosophy, Vol. 3, pp. 87-100.

Czelakowski J. [2001]
Protoalgebraic Logics, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Czelakowski J. [2003]
The Suszko Operator. Part I, Studia Logica, Vol. 74, No. 1-2, Abstract Algebraic Logic: Part 2, pp. 181-231.

Czelakowski J. – Malinowski G. [1985]
Key Notions of Tarski's Methodology of Deductive Systems, in Studia Logica, vol. 44, n. 4, pp. 321-351.

Da Costa N. C. A., Béziau J.-Y., Bueno O. A. S. [1996]
Malinowski and Suszko on many-Valued Logics:On the Reduction of Many-Valuedness to Two-Valuedness, Modern Logic 3, pp. 272-299.

Davey B. A., Priestley H. A. [2008]
Introduction to Lattices and Order, II ed., Cambridge University Press, Cambridge.

Detlefsen M. [1990]
Brouwerian Intuitionism, Mind, New Series, Vol. 99, No. 396, pp. 501-534.

Descartes R. [1628]
Regulae ad directionem ingenii, tr. L. Urbani Ulivi, *Regole per la guida dell'intelligenza*, Bompiani, Milano.

Etchemendy J. [1990]
The Concept of Logical Consequence¸ Harvard University Press, Cambridge, Massachusset.

Etchemendy J. [2008]
Reflections on Consequence, in Patterson [2008].

Font J. M., Jansana R., Pigozzi D. [2003]
A Survey of Abstract Algebraic Logic, Studia Logica, Vol.74, N. 1/2, Giugno-Luglio 2003, pp. 13-97.

Frege G. [1879]
Begriffschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens, Halle, Nebert, tr. *Ideografia*, in Frege [1965].

Frege G. [1879]
Begriffschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens, in Frege [1993].

Frege G. [1880-'81]
Booles rechnende Logik und di Begriffsschrift, tr. *La logica calcolistica di Boole e l'ideografia*, in Frege [1986].

Frege G. [1892]
Über Sinn und Bedeutung, Zeitschrift für Philosophe und philosophische Kritik, 100, pp. 192-205, in Frege (2005), pp. 32-57.

Frege G. [1893]
Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet, Jena, Pohle, vo. I, in Frege [1965].

Frege G. [1906]
17 Kernsätze zur Logik, tr. Frege [1969], pp. 293-294.

Frege G. [1914]
Logik in der Mathematik, in Frege [1969], pp. 333-392.

Frege G. [1918-‘19]
Der Gedanke. Eine Logische Untersuchung Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus, I, pp. 58-77, in Frege [1988], pp. 43-74.

Frege G. (1923)
Logische untersuchungen. Drittel Teil: Gedankgefüge, in Beiträge zur Philosophie des deutschen idealismus, III [1923-‘26], pp. 36-51, tr. Frege [1988], pp. 99-125.

Frege G. [1965]
Logica e aritmentica, a c. C. Mangione, pr. L. Geymonat, Boringhieri, Torino.

Frege G. [1969]
Nachgelassene schriften und wissenschaftlicher Briefwechsel, vol. I, a c. h. Hermes, F. kambartel, F. Kaulbach, Felix Meiner Verlag, Hamburg, tr. in Frege [1986].

Frege G. [1986]
Scritti postumi, tr. E. Picardi, Bibliopolis, Napoli.

Frege G. [1988]
Ricerche logiche, a c. M. Di Francesco, intr. M. Dummett, tr. R. Casati, Guerini, Milano.

Frege G. [1879]
Begriffschrift un andere Aufsätze, c. I Angelelli, Olms Verlag, Hildesheim.

Frege G. [2005]
Senso, funzione e concetto. Scritti filosofici 1891-1897, a c. C. Penco e E. Picardi, Laterza, Roma-Bari.

Gabbay D. M. [1995]
Intuitionistic Basis for Non-monotonic Logic, In Proceedings of CADE—6, pp. 260-273, Vol. 138 of Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag.

Gabbay D. M. (ed.) [1994]
What is a logical system?, .

Gabbay D. M. - Guenthner F. (ed.) [2002]
Handbook of Philosophical Logic, springer, Dordrecht.

Gallier G. [1986]
Logic for Computer science: Foundations of Automated Theorem Proving, Harper and Row, New York.

Galvan S. [1997]
Non contraddizione e terzo escluso, Franco Angeli, Milano.

García-Carpintero M. [1993],
The Grounds for the Model_Theoretic account of the Logical Properties, Notre Dame Journal of Formal Logic 34, pp. 107, 31.

Gentzen G. [1935]
Untersuchungen über das logische Schliessen (*Synopsis* e sezioni I-III), Mathematisce Zeitschrift, 39, pp. 176-210 in D. Cagnoni (ed.) [1981].

Goble L. [2001]
The Blackwell Introduction to Philosophical Logic, Blackwell Publishing, Oxford.

Gödel K. [1929]
Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Functionenkalküls, Monatshefte für Mathematik und Physik, Vol. 37, pp. 349–360 in Gödel (1986), pp. 63-82.

Gödel K. [1931]

Über formal unentscheidbare Sätze der Principia mathematica *und verwandter Systeme* I, in Mh. Math. Phys., XXXVIII, pp. 173-98 tr. *Proposizioni formalmente indecidibile dei* Principia mathematica *e di sistemi affini* I, in Gödel [1999].

Gödel K. [1932]

Zum intuitionistischen Aussagenkalkül, Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Wien, Vol. 69, p. 65–66.

Gödel K. [1986],

Collected Works. Volume 1. Publications 1929-1936, Oxford University Press, New York - Clarendon Press, Oxford, tr. Gödel [1999].

Gödel K. [1999]

Opere. Volume 1.1929-1936, tr. E. Ballo, S. Bozzi, G. Lolli, C. Mangione, Bollati Boringhieri, Torino.

Goldstein L. [1992]

Smooth and Rough Logic, Philosophical Investigations, 13, pp. 93-110.

Gómez-Torrente M. [2004]

La nociòn de consecuencia lògica, in Orayen R., Moretti A. [2004].

Gómez-Torrente M. [2010]

Alfred Tarski, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2011 Edition), Edward N. Zalta (ed.), forthcoming URL =

http://plato.stanford.edu/archives/spr2011/entries/tarski/, consultato il 10 marzo 2011.

Haack S. [1978]

Philosophy of Logics, tr. in Haack S [1983]

Haack S. [1983]

Filosofia delle logiche, tr. M. Marsonet, F. Angeli, Milano 1983

Haaparanta L. [2009]

The Development of Modern Logic, Oxford University Press, Oxford.

Heyting A. [1930]

Sur la logique intuitionniste, Acadèmie Royale de Belgique, 16, pp. 957-63 in Mancosu (1998), pp. 306-10.

Heyting A. [1956]

Intuitionism. An Introduction, North-Holland, Amsterdam.

Henle P. [1935]

A Definition of abstract Systems, Mind, Vol. 44, No. 75, pp. 341-346.

Hilbert D., Ackermann W. [1928]

Grundzüge der teoretischen Logik, springer, Berlin.

Hilbert D., Bernays P. [1934]

Grundlagen der Mathematik, vol. 1, Springer, Berlin.

Hodges W. [1985]

Truth in a Structure, Proceedings of the Aristotelian Society, New Series, vol. 8 (1985-1986), pp. 135-51.

Hodges W. [2004]

Tarski's Truth Definitions, The Stanford Encyclopedia of Philosophy, Edward N. Zalta (ed.), 18 agosto 2010, URL = http://plato.stanford.edu/entries/tarski-truth/, consultato il 20 agosto 2010.

Hodges W. [2007]

The Mathematical Core of Tarski's Truth Definition, www.maths.qmul.ac.uk/~wilfrid/unilog07.pdf

Hodges W. [2008]

Tarski's Theory of Definition, in Patterson (2010), pp. 94-132.

Huntington E. V. [1904]
Sets of Indipendent Postulates for the Algebra of Logic, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 5, No. 3, pp. 288-309.

Huntington E. V. [1906]
The Fundamental Laws of Addition and Multiplication in Elementary Algebra, The Annals of Mathematics, Second Serie, Vol. 8, No. 1, pp. 1-44.

Huntington E. V. [1911]
The Fundamental Propositions of Algebra, Monograph on Topics of Modern Mathematics, J. W. Young ed., Longmans, Green and Co., New York.

Huntington E. V. [1933]
New Sets of Indipendent Postulates for the Algebra of Logic, With Special Reference to Whitehead and Russell's Principia mathematica Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 5, No. 3, pp. 274-304.

Huntington E. V. [1934]
Independent Postulates for the "Informal" Part of Principia mathematica,

Jacquette D. [2002a]
Philosophy of Logic. An Anthology, Blackwell Publishers, Malden Massachusetts e Oxford.

Jacquette D. (ed.) [2002b]
A Companion to Philosophical Logic, Blackwell Publishers, Malden Massachusetts e Oxford.

Jané I. [2006]
What is Tarski Common *Concept of Consequence?*, The Bullettin of Symbolic Logic, Vol. 12, N. 1 (Mar.), pp. 1-42.

Jansana R. [2011]

Propositional Consequence Relations and Algebraic Logic, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2011 Edition), Edward N. Zalta (ed.), forthcoming URL = http://plato.stanford.edu/archives/spr2011/entries/consequence-algebraic/, consultato il 12 marzo 2011.

Jaśkowski S. [1934]

On the Rules of Supposition in Formal Logic, Studia Logica 1, pp. 32-43.

Kapp E. [1931]

Syllogistik, in Paul-Wissowa [1931].

Kant I. [1781-7]

Kritik der reinen Vernunft, tr. In Kant [2004].

Kant I. [2003]

Enciclopedia filosofia, c. G. Landolfi Petrone e L. Balbiani, Bompiani, Milano.

Kant I. [2004]

Critica della ragion pura, tr. C. Esposito, Bompiani, Milano.

Kant I. [1800]

Logik, in Kant [1999].

Kant I. [1999]

Logica, c. L. Amoroso, Laterza, Roma-Bari.

Keynes J. M. [1900]

Studies and Exercises in Formal Logic, MacMillan and Co., New York.

Keyser C. J. [1918]

Doctrinal Functions, Journal of Philosophy, Psychology and Scientific Methods, Vol. 15, No. 10, pp. 262-267.

Kolmogorov A. N. [1931]
On the Interpretation of Intuitionistic Logic, in Mancosu [1998], pp. 328-34.

Kripke S. [1965]
Semantical Analysis of Intuitionistic Logic I, in Crossley J. N., Dummett M. A. E. (1965), pp. 93-130.

Lewis C. I. [1923]
Facts, Systems and the Unity of the World, in Lewis (1970).

Lewis C. I. [1970]
Collected Papers of Clarence Irving Lewis, Stanford University Press, Stanford, California.

Lewis D. [1973]
Counterfactuals, Harvard University Press, Cambridge, MA.

Łos J., Suszko R. [1958]
Remarks on Sentential Logics, Indagationes Mathematicae Vol. 20, pp. 177-183.

Łukasiewicz J. [1922],
A Numerical Interpretation of the Theory of Propositions, Ruch Filozoficzny, Vol. 23, pp. 92-94,in Łukasiewicz J. [1970].

Łukasiewicz J. [1957]
Aristotle's Syllogistic from the Standpoint of Modern Formal Logic, Oxford.

Łukasiewicz J. [1970],
Jan Łukasiewicz: Selected Works, North-Holland, Amsterdam.

Łukasiewicz J. - Tarski A. [1930]
Untersuchungen über den Aussagenkalkül, in Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, vol. 23, cl. iii, pp. 30-50, tr. in Tarski (1983).

Makinson D. [2005]
How to Go Nonmonotonic, in Gabbay-Guenthner (2005, ed.).

Makinson D. [2007]
Friendliness and Sympathy in Logic, in Beziau (2007, ed.), pp. 195-224.

Malinowski G. [1990]
Q-Consequence Operation, Reports on mathematical Logic 24, pp. 49-59.

Mancosu P. [1998]
From Brouwer to Hilbert. The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s, (ed.) Oxford University Press, New York – Oxford.

Mangione C., Bozzi S. [2001]
Storia della logica. Da Boole ai nostri giorni, Garzanti, Milano.

Mariani M. [2004]
Introduzione a Frege, Laterza, Roma-Bari.

Mignucci M. [2004]
Aristotele e l'esistenza logica, in Carrara, Giaretta (2004), pp. 3- 37.

Milne P. [1999]
Tarski, Truth and Model Theory, in Proceedings of the Aristotelian Society, New series, vol. 99, pp. 141-67.

Moisil G. [1958]
Sur la logique positive, Acta Logica 1, pp. 149-183, in Moisil [1972], pp. 457-502.

Moisil G. [1968]
La logique classique des propositions d'ordre supérieur, Studii cerc. Mat. 20, pp. 237-266, in Moisil [1972], pp. 504-532.

Moisil G. [1972],
Essays sur les Logiques non Chrysippiennes, Bucarest.

Negri M [1994]
Elementi di logica, LED, Rozzano (Mi).

Németi I., Andréka H. [1994]
General Algebraic Logic, in Gabbay [1994].

Orayen R., Moretti A. [2004],
Filosofia de la lògica, in *Enciclopedia IberoAmericana de Filosofia*, (a c.) Editorial Trotta, Madrid.

Padoa A. [1896]
Di alcune proposizioni fondamentaie relative al mutuo separarsi di coppie di punti, Bocca – Clausen, Torino.

Padoa A. [1900]
**Un nuevo sistema de definiciones para la geometría euclídea*, El Progreso Matemàtico, ser. 2, pp. 364-368.

Padoa A. [1902 a]
Per la compilazione di un dizionario di matematica, estratto dal Periodico di Matematica, Tomo XVII, Fasc. V.

Padoa A. [1902 a]
Logica matematica e matematica elementare, Giusti, Livorno.

Pasch M. (1926, I ed. 1882)
Vorlesungen über neuere Geometrie, Springer, Berlin.

Patterson D. (2008)
New Essays on Tarski and Philosophy, Oxford University Press, Oxford, New York.

Paul-Wissowa [1931]

Realencyclopädie der classischen Altertumswissenschaft, II s., 7, coll. 1046-67, Stuttgart 1931.

Peano G. (1889)

Arithmetices principia nova methodo exposita, in Peano (2001).

Peano G. (2001)

Arithmetices principia, Principi di geometria e di logica, intr. P. Odifreddi, Aragno editore, Torino.

Pieri M. (1895)

Sui principii che reggono la geometria di posizione. Nota I, Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino, vol. 30, pp. 607-641, in Pieri (1980) , in Pieri M. [1980].

Pieri M. (1898)

I principii della geometria di posizione composti in sistema logico deduttivo, Clausen, Torino, in Pieri M. [1980].

Pieri M. [1905]

Nuovi principii di geometria projettiva complessa, Accademia reale delle scienze di Torino, anno 1904-1905, Carlo Clausen, Torino, in Pieri M. [1980].

Pieri M. [1980]

Opere sui fondamenti della matematica, Unione matematica Italiana, Cremonese, Bologna.

Pogorzelski W. A. [1969]

The Two-valued Propositional Calculus and the Deduction Theorem, Acta Universitatis Vratislaviensis 101, pp. 13-18.

Pogorzelski W. A., Słupecki J. [1960]

Basic Properties of Deductive Systems Based on Non-classical Logics, Silesian Univecrsity, Katowice.

Pogorzelski W. A., Wojtylak P. [2008]

Completeness Theory for Propositional Logic, Birkhäuser, Basel.

Post E. L. [1921]

Introduction to a General Theory of Elementary Propositions, American Journal of Mathematics, Vol. XLIII, No. 3.

Prawitz [2007a]

Validity of Inferences, URL = http://www.cs.unibo.it/corsi/Validity_of_inferences.pdf consultato il 30 marzo 2011.

Prawitz D. [2007b]

Sei lezioni sulla conseguenza logica, tr. V. Benedetti, URL = http://www.cs.unibo.it/corsi/ consultato il 30 marzo 2011.

Priest G. [1979]

The Logic of Paradox, Journal of Philosophical Logic, 8, pp. 219-241.

Prucnal T., Wroński A. [1974]

An Algebraic Characterization of the Notion of Structural Completeness, Bulletin of the Section of Logic 3, pp. 30-33.

Rasiowa H. [1974]

An Algebraic Approach to Non-classical Logics, vol. 78 of Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North-Holland, Amsterdam.

Read S. [1994]

Formal and Material Consequence, Journal of Philosophical Logic 23, pp. 247-65, in Jacquette [2002a], pp. 237-46.

Rescher N. [1968]

Studies in Logical Theory, Blackwell, Oxford.

Rusnock P., Burke M. [2010]

Etchemendy and Bolzano on Logical Consequence, History and Philosophy of Logic, 31, pp. 3-29.

Russell B. [1903]

The Principles of Mathematics, George Allen and Unwin, London.

Russell B. – Whitehead A. N. [1910-3]

Principia Mathematica, Cambridge University Press, vol. I 1910 (2ª ed. 1925), vol. II 1912 (2ª ed. 1927), vol. II 1913 (2ª ed. 1927).

Sain I. [1988]

Is "Some-Other-Time" Sometimes Better than "Sometime" for Proving Partial Correctness of Programs?, Studia Logica, Vol. 47, N. 3, pp. 279-301.

Sainsbury M. [2001]

Logical Forms. An Introduction to Philosophical Logic, II ed., Blackwell, Oxford.

Scott D. [1974]

Completeness and Axiomatizability in Many-Valued Logic, Proceedings of Tarski Symposium, L. Henkin (ed.), pp. 411-435.

Shapiro S.

Necessity, Meaning and Rationality, in , pp. .

Shramko Y., Wansing H. [2010[

"Truth Values", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2010 Edition)*, Edward N. Zalta (ed.), URL = http://plato.stanford.edu/archives/sum2010/entries/truth-values/, consultato il 12 marzo 2011.

Scott D. [1974]

Completeness and Axiomatizability in Many-valued Logics, Proceedings of the Tarski Symposium (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXV, Univ. California, Berkeley, Calif., 1971). American Mathematical Society, pp. 411-436.

Sebestik J. [2008]
Bolzano's Logic, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2008 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = http://plato.stanford.edu/archives/win2008/entries/bolzano-logic/, consultato 6 aprile 2011.

Skolem T. [1922]
Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre, in Mathematikerkongressen i Helsingfors den 4-7 Juli 1922, p. 217-32.

Sider T. [2010]
Logic for Philosophy, Oxford University Press, Oxford.

Smiley T. J. [1958-1959]
Entailment and Deducibility, in Proceedings of the Aristotelian Society, new Series, Vol. 59, pp. 233-254.

Stalnaker [1968]
A Theory of Conditionals, in Rescher [1968].

Strawson P. F. [1952]
Introduction to Logical Theory, London-New York, tr. in Strawson [1961].
Strawson [1961]
Introduzione alla teoria logica, tr. A. Visalberghi, Einaudi, Torino, 1961.

Suszko [1975]
Remarks on Łukasiewicz's Three-Valued Logic, Bulletin of the Section of Logic 4, pp. 373-380.

Suszko [1977]
Congruences in Sentential Calculus, A Report from the Autumn School of Logic (Międzygórze, Poland, 21-29 Novembre 1977).

Tarski [1929]
Les fondements de la géoemtrie des corps, Ksiega Pamiatkova Pierwszego Polskiego Zjazdu Matematycznego, supplemento a Annales del Société Polonaise de Mathématique, Kraków, pp. 29-33 in Tarski [1983], p. 24-29.

Tarski A. [1930a]
Über einige fondamentale Begriffe der Metamathematik, in Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, vo. 23, cl. Iii, pp. 22-29, tr. in Tarski (1983).

Tarski A. [1930b]
Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften. I, in Monatshefte für Mathematik und Physik, vol. 37, pp. 361-404, tr. in Tarski [1983].

Tarski A. [1933a]
Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych (Sul concetto di verità nei linguaggi delle scienze deduttive), Warsaw, tr. in Tarski [1983].

Tarski A. [1933b]
Einige Betrachtungen über die Begriffe ω-Widerspruchtfreiheit und der ω-Vollständigkeit, in Monatshefte für Mathematik und Physik, vol. 40, pp. 97-112, tr. *Some Observations on the Concepts of ω-Consistency and ω-Completeness*, in Tarski [1983].

Tarski A. [1934]
Z badań metodologicznych nad definiowalnością terminów (Alcune investigazioni metodologiche sulla definibilità dei concetti), in Przegląd Filozoficzny, vol. 37, pp. 438-60 in Tarski [1983], pp. 296-319.

Tarski A. [1935]
Grundzüge des Systemkalkül, Erster Teil, in Fundamenta Mathematicae, vol. 25, pp. 503-26 in Tarski [1983].

Tarski A. [1936a]

Grundzüge des Systemkalkül, Zweiter Teil, in Fundamenta Mathematicae, vol. 26, pp. 283-301 in Tarski [1983].

Tarski A. [1936b]

O ugruntowaniu naukowej semantyki (La fondazione della semantica scientifica), in Przegląd Filozoficzny, vol. 39, pp. 50-57 in Tarski [1983], pp. 401-408.

Tarski A. [1936c]

O pojciu wynikania logicznego (Sul concetto di conseguenza logica), Prezgląd Filozoficzny, vol. 39, pp. 56-68, tr. in Tarski [1983].

Tarski A. [1936d]

*O logice matematycznej i metodzie dedukcyjne*j, Biblioteczka Mat. 3–5, Książnica-Atlas, Lwów e Warsaw, tr. in Tarski (1969).

Tarski A. [1944]

The Semantic Conception of Truth and the Foundations of Semantics, Philosophy and Phenomenological Research, vol. 4, n. 3, pp. 431-76.

Tarski [1948]

A Problem Concerning the Notion of Definability, The Journal of Symbolic Logic, Vo. 13, No. 2, pp. 107-111.

Tarski [1965]

Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences, Oxford University Press, Oxford.

Tarski A. [1969]

Introduzione alla logica e alla metodologia delle scienza deduttive, tr. Tarski [1936d] (dall'edizione inglese, Tarski [1965]) E. Ballo e S. Bozzi, Bompiani, Milano.

Tarski A. [1983]
Logic, Semantics, Metamathematics, II ed., tr. J. H. Woodger, intr. J. Corcoran, Hackett Publishing Company, Indianapolis, Indiana.

Tarski A. [1986]
What are Logical Notions?, ed. J. Corcoran, in *History and Philosophy of Logic*, 7, pp. 143-54.

Tarski [1987]
A Philosophical Letter of Alfred Tarski, M. White (ed.), The Journal of Philosophy, Vol. 84, No. 1, pp. 28-32.

Tarski [1995]
Some Current Problems in Metamathematics, J. Tarski, J. Woleński (ed.), History and Philosophy of Logic, 16, pp. 159-168.

Tarski A. [2002]
On the Concept of Following Logically, ed. M. Stroińska e D. Hitchcok, History and Philosophy of Logic, 23, pp. 155-96.

Tarski A. – Lindenbaum A. [1935]
Über die Beschränktheit der Ausdruckmittel deduktiver Theorien, in Ergebnisse eines mathematischen *Kolloquiums*, fascicolo 7, pp. 15-22 in Tarski (1983), pp. 384-392.

Tarski A. – Vaught R. L. [1956]
Arithmetical Extensions of Relational Systems, Compositio Mathematica, tome 13 (1956-1958), pp. 81-102.

Tennant N. [1984]
Perfect Validity, Entailment and Paraconsistency, in Studia Logica: An International Journal for Symbolic Logic, Vol. 43, No. 1/2.

Tennant N. [1994]
The Transmission of Truth and the transitivity of Deduction, in Gabbay [1994].

van Dalen D. [2001]
Intuitionistic Logic, in Goble [2001], pp. 224-257.

Varzi A. (ed.) [1999]
The nature of Logic, Europena Review of Philosophy, 4, CSLI, Stanford, California.

Vaught R. L. [1986]
Alfred Tarsk's Work in Model Theory, The Journal of Symbolic Logic, Vol. 51, No. 4, pp. 869-882.

Veblen O. [1904]
A System of Axioms for Geometry, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 5, pp. 343-384.

Veblen [1906]
The Fundamental Laws of Addition and Multiplication in Elementary Algebra, The Annals of Mathe,atics, Second Series, Vol. 8, No. 1, pp. 1-44.

Veblen O., Young J. W. [1910]
Projective Geometry, Vol. 1, Ginn and Co., Boston.

Wittgenstein L. [1921]
Tractatus logico-philosophicus,

Wójcicki R. [1969]
Logical Matrices Strongly Adeguate for Strucutral Sentential Calculi, Bulletin de l'Academie polonaise des Sciences, Séries des Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques 17, pp. 333-335.

Wójcicki R. [1988]
Theory of Logical Calculi. Basic Theory of Consequence Operations, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Young R. [2011]

What is a Truth-value?, pre-print disponibile presso http://www.ryanyoung.org/truthvalue.pdf, consultato il 21 marzo 2011.