

时间序列预测

Time Series Forecasting

王树佳 | 深圳大学经济学院

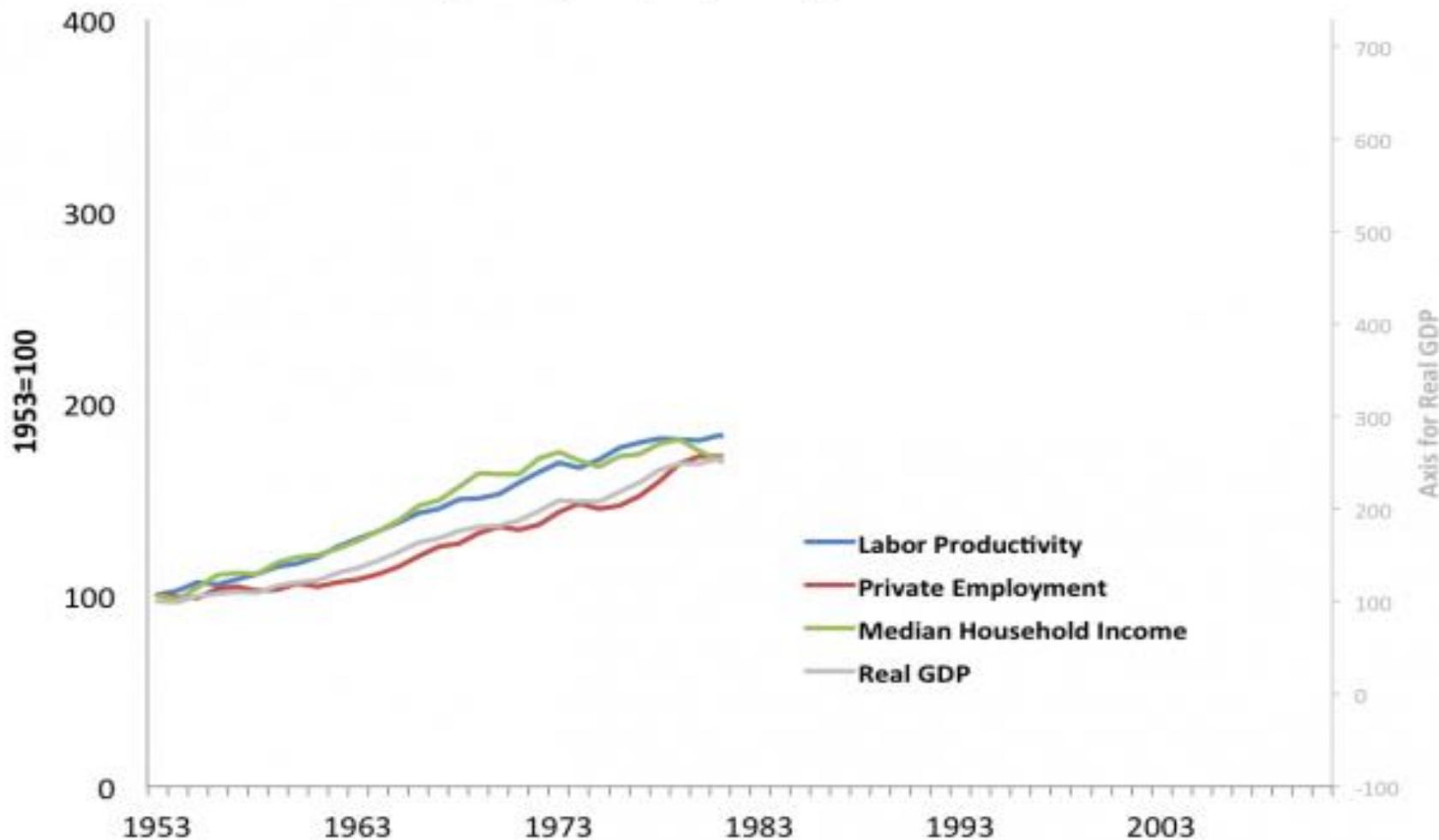
sjwang123@163.com

本章目标：如何用历史数据做预测？



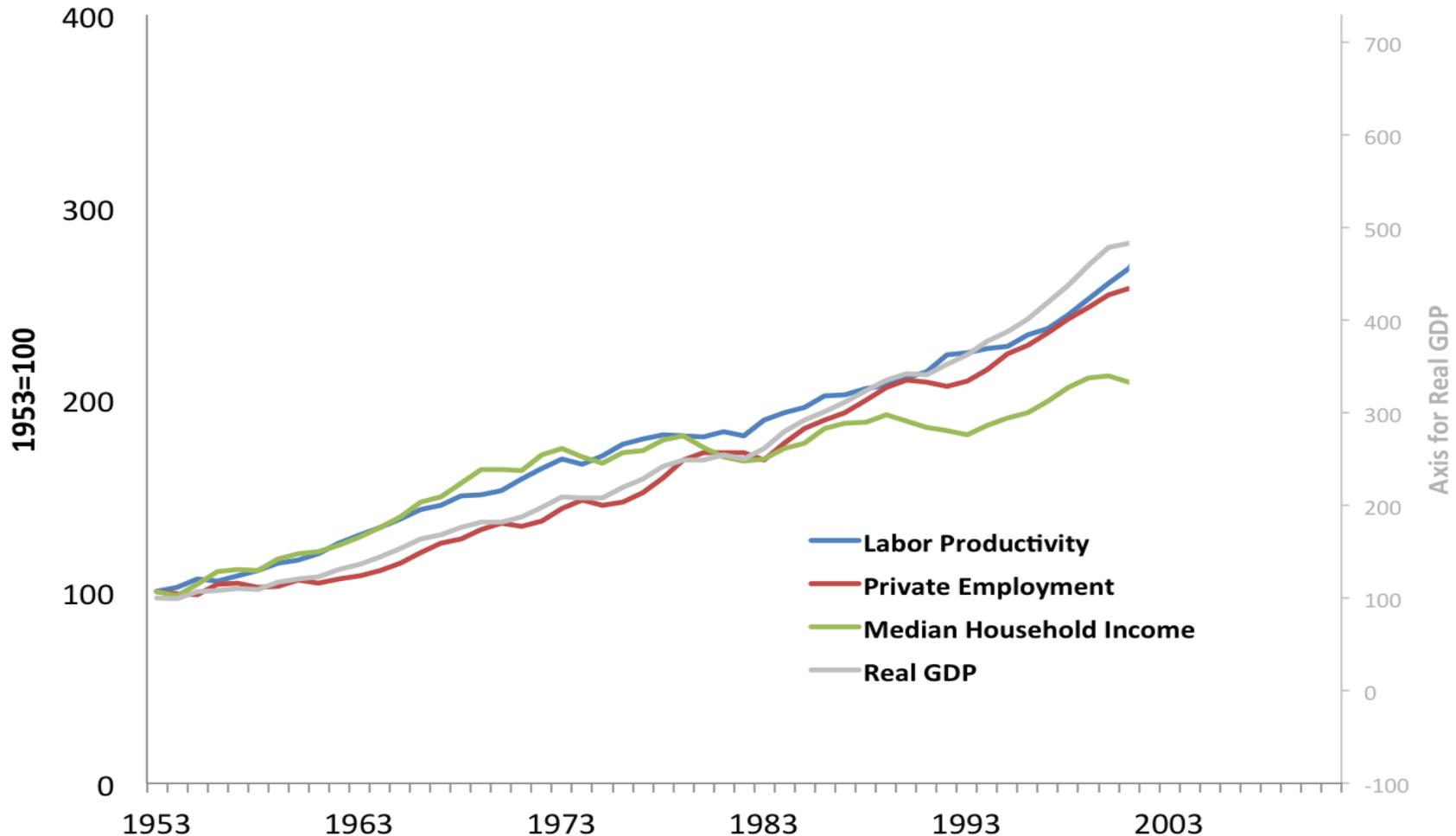
引例：美国经济的“大分叉”

US Productivity, GDP, Employment, and Income: 1953-1981



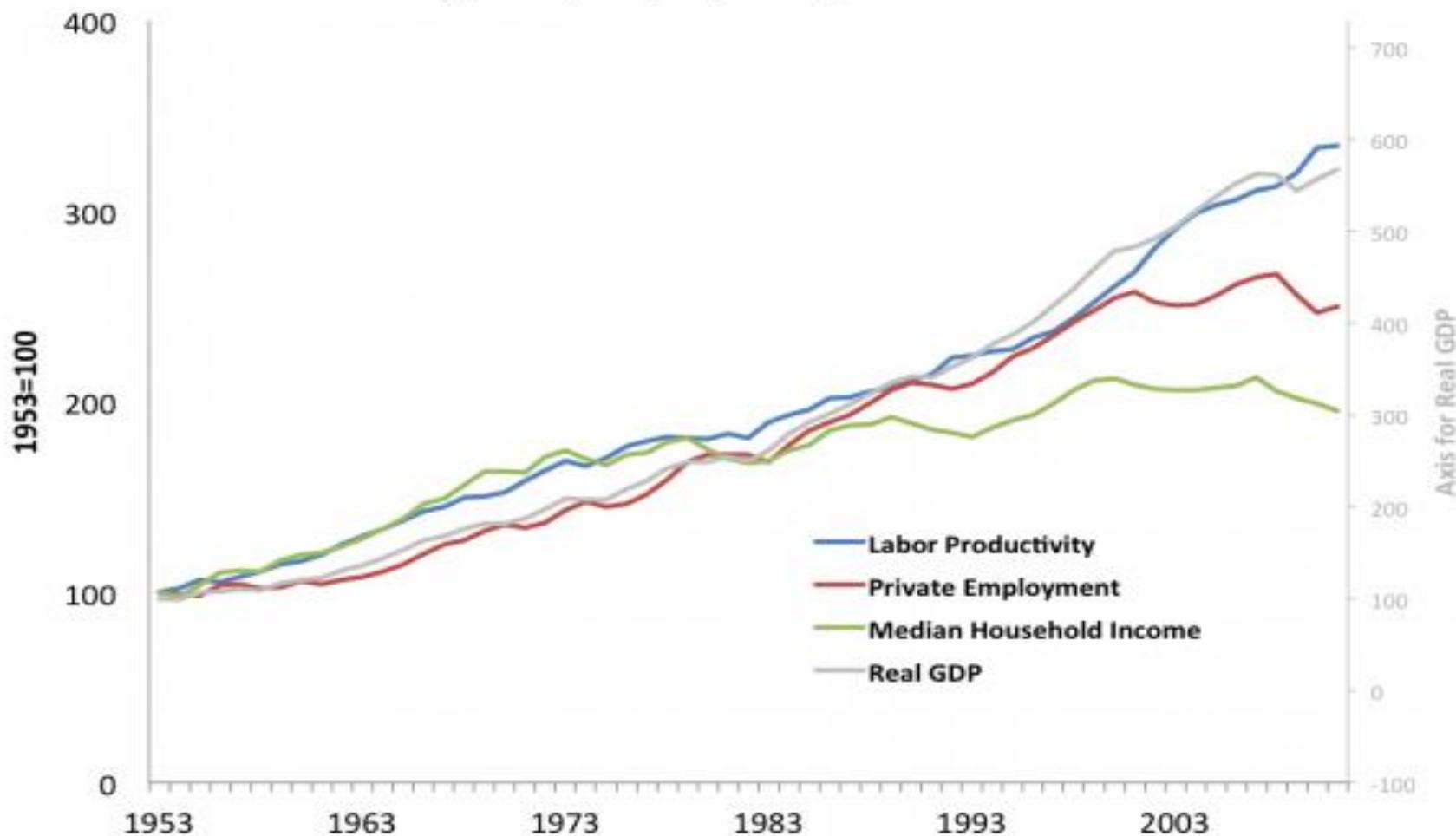
引例：美国经济的“大分叉”

US Productivity, GDP, Employment, and Income: 1953-2001



引例：经济的“大分叉”

US Productivity, GDP, Employment, and Income: 1953-2011



学习目标

学完本章后，你应该掌握：

- A. 掌握常用时间序列预测方法
- B. 会衡量预测的**精度**
- C. 会利用**趋势**进行预测
- D. 会处理时间序列的**季节**因素
- E. 存在**趋势和季节**因素时，能正确做预测
- F. 能运用软件Excel和Minitab进行预测

本章内容

1. 时间序列及模式
2. 预测精度
3. 水平模式下的预测
4. 趋势模式下的预测
5. 趋势与季节模式下的预测
6. Minitab：多种预测方法的比较

本章内容

1. 时间序列及模式
2. 预测精度
3. 水平模式下的预测
4. 趋势模式下的预测
5. 趋势与季节模式下的预测
6. Minitab：多种预测方法的比较

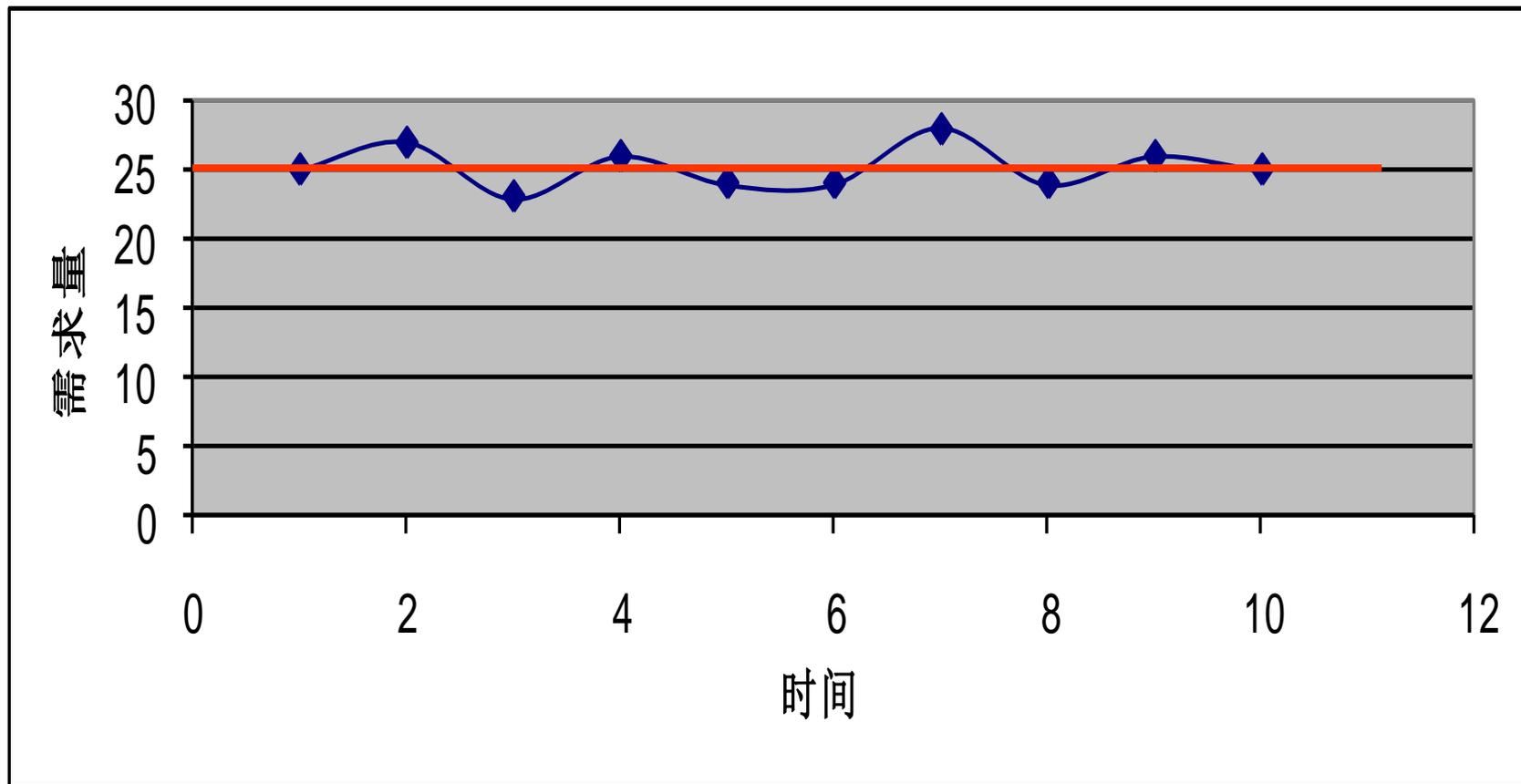
时间序列及模式

时间序列 (Time Series) 是指将同一统计指标的数值按其发生的时间先后顺序排列而成的数列。

时间序列的几种模式：

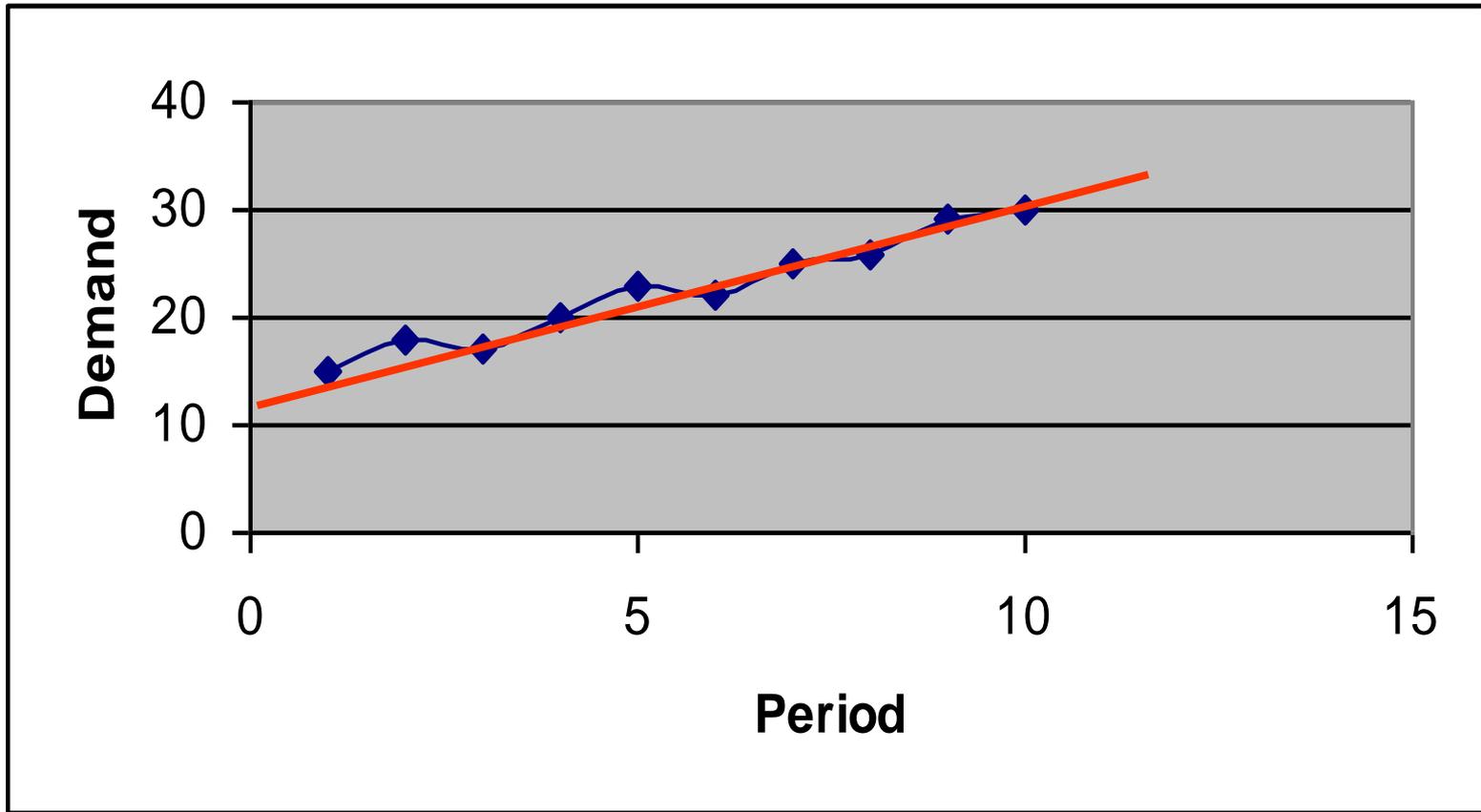
1. 水平模式
2. 趋势模式
3. 季节模式
4. 趋势与季节模式
5. 循环模式

水平模式：沿水平线波动



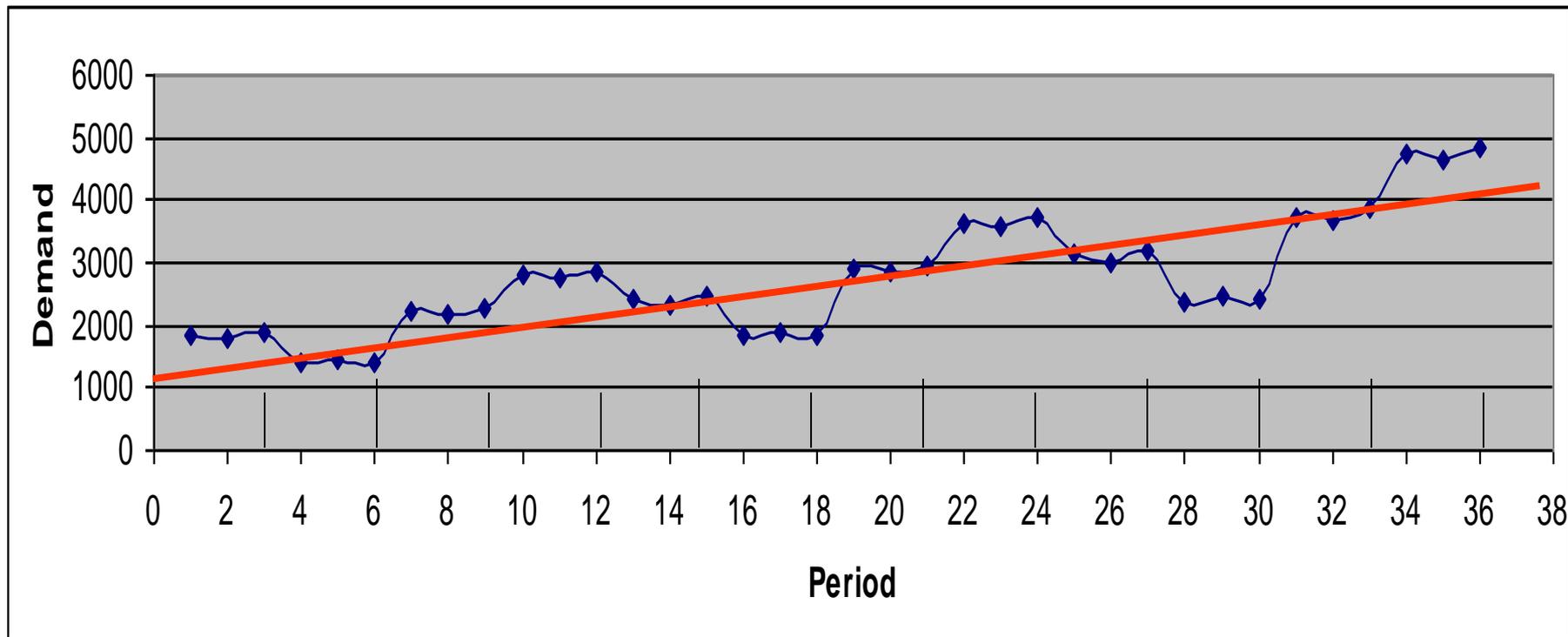
平稳时间序列：平均值和变异性都保持不变

趋势模式：按一定趋势波动



趋势通常是长期因素影响的结果

趋势与季节模式：同时存在趋势与季节影响



季度 1st 2nd 3rd 4th 1st 2nd 3rd 4th 1st 2nd 3rd 4th
年 1st 2nd 3rd

如何预测？

本章内容

1. 时间序列及模式
- 2. 预测精度**
3. 水平模式下的预测
4. 趋势模式下的预测
5. 趋势与季节模式下的预测
6. Minitab：多种预测方法的比较

预测误差

1. 平均绝对误差(Mean Absolute Deviation, MAD) :
预测误差绝对值的平均值

$$MAD = \frac{1}{T} \sum |y_t - \hat{y}_t|$$

y_t 为时间 t 的实际观察值， \hat{y}_t 为时间 t 的预测值。

2. 平均绝对相对误差

(Mean Absolute Percentage Error, MAPE) :

$$MAPE = \frac{1}{T} \sum \frac{|y_t - \hat{y}_t|}{y_t}$$

预测误差

3. 均方误差(Mean Square Error, MSE) :

$$MSE = \frac{1}{T} \sum (y_t - \hat{y}_t)^2$$

4. 预测的标准误(Standard Error , SE):
MSE的平方根

$$SE = \sqrt{MSE}$$

□ 实际应用中需要多种误差评价方法进行比较

例1：音乐商店销售额（朴素预测法）

一家音乐商店过去12周的销售数据如下，用**朴素预测法**（即最近一周的销售额预测下一周的销售额）预测。计算预测误差

t	1	2	3	4	5	6
X_t	68.57	67.76	70.19	69.38	69.92	70.46
t	7	8	9	10	11	12
X_t	71.54	71.27	69.92	69.38	70.19	69.65

例1：音乐商店销售额（朴素预测法）

	A	B	C	D	E	F
1	t	X_t	预测值	误差绝对值	误差平方	相对误差绝对值(%)
2	1	68.57				
3	2	67.76	68.57	0.81	0.66	1.20
4	3	70.19	67.76	2.43	5.90	3.46
5	4	69.38	70.19	0.81	0.66	1.17
6	5	69.92	69.38	0.54	0.29	0.77
7	6	70.46	69.92	0.54	0.29	0.77
8	7	71.54	70.46	1.08	1.17	1.51
9	8	71.27	71.54	0.27	0.07	0.38
10	9	69.92	71.27	1.35	1.82	1.93
11	10	69.38	69.92	0.54	0.29	0.78
12	11	70.19	69.38	0.81	0.66	1.15
13	12	69.65	70.19	0.54	0.29	0.78
14						
15				MAD	MSE	MAPE(%)
16				0.88	1.10	1.26

本章内容

1. 时间序列及模式
2. 预测精度
- 3. 水平模式下的预测**
4. 趋势模式下的预测
5. 趋势与季节模式下的预测
6. Minitab：多种预测方法的比较

水平模式下的预测

目的：“消除”时间序列的随机波动，所以也叫“平滑法”。

常用方法：

1. 移动平均法
2. 简单指数平滑法

□ 以上方法不能直接用于有趋势、季节或循环变动情形

水平模式下的预测

1. 移动平均法
2. 简单指数平滑法

移动平均预测(Moving Average, MA)

移动平均预测法：把最近K期数据的平均值作为下一期数据的预测值。

$$F_{t+1} = \frac{y_t + y_{t-1} + \cdots + y_{t-k+1}}{k}$$

其中

F_{t+1} = 第 $(t + 1)$ 期的预测值

y_t = 第 t 期的实际值

例1：音乐商店销售额（移动平均法）

	A	B	C	D	E	F	G
1	音乐商店过去12周的销售额						
2	三项移动平均						
3	t	Xt	Ft	Et	Et	Et^2	[Et /Xt]*100
4	1	68.57					
5	2	67.76					
6	3	70.19					
7	4	69.38	68.84	0.54	0.54	0.29	0.78
8	5	69.92	69.11	0.81	0.81	0.66	1.16
9	6	70.46	69.83	0.63	0.63	0.40	0.89
10	7	71.54	69.92	1.62	1.62	2.62	2.26
11	8	71.27	70.64	0.63	0.63	0.40	0.88
12	9	69.92	71.09	-1.17	1.17	1.37	1.67
13	10	69.38	70.91	-1.53	1.53	2.34	2.21
14	11	70.19	70.19	0.00	0.00	0.00	0.00
15	12	69.65	69.83	-0.18	0.18	0.03	0.26
16							
17					MAD	MSE	MAPE
18					0.79	0.90	1.12

例1：音乐商店销售额（移动平均法）

I	J	K	L	M	N	O
四项移动平均						
t	Xt	Ft	Et	Et	Et ²	[Et /Xt]*100
1	68.57					
2	67.76					
3	70.19					
4	69.38					
5	69.92	68.98	0.95	0.95	0.89	1.35
6	70.46	69.31	1.15	1.15	1.32	1.63
7	71.54	69.99	1.55	1.55	2.41	2.17
8	71.27	70.33	0.94	0.94	0.89	1.33
9	69.92	70.80	-0.88	0.88	0.77	1.26
10	69.38	70.80	-1.42	1.42	2.01	2.04
11	70.19	70.53	-0.34	0.34	0.11	0.48
12	69.65	70.19	-0.54	0.54	0.29	0.78
				MAD	MSE	MAPE
				0.97	1.09	1.38

如何确定项数 k 的值？

1. 根据时间序列特点：如果序列值仅与最近的值相关，则应取较小的 k 值。
2. 若序列包含周期变动时，项数 K 应和周期长度基本一致，才能较好的消除周期波动。
3. 用试验和误差来确定：取使MSE最小的 k 值。

水平模式下的预测

1. 移动平均法
2. 简单指数平滑法

简单指数平滑模型

Simple Exponential Smoothing Model

设时间序列: $X_1, X_2, \dots, X_t, \dots$ 或 $\{X_t, t=1, n\}$

简单指数平滑预测模型: 以前 t 个数据的指数加权平均值作为第 $(t + 1)$ 期的预测值。

$$\begin{aligned} S_t &= \alpha X_t + \alpha(1 - \alpha)X_{t-1} + \alpha(1 - \alpha)^2 X_{t-2} + \dots \\ &= \alpha X_t + (1 - \alpha)S_{t-1} \end{aligned}$$

$$F_{t+1} = S_t$$

其中 F_{t+1} 是第 $(t + 1)$ 期的预测值, X_t 是第 t 期的实际值, α 是平滑常数(Smoothing Constant)。

也叫**单参数指数平滑模型**, **单指数平滑模型**

简单指数平滑模型

Simple Exponential Smoothing Model

简单指数平滑预测模型：

$$S_t = \alpha X_t + (1 - \alpha) S_{t-1}$$

$$F_{t+1} = S_t$$

可解释为：

预测值 = α (上期实际值) + $(1 - \alpha)$ (上次预测值)

模型计算：递推法

$$\text{因为 } S_t = \alpha X_t + (1 - \alpha) S_{t-1}$$

首先选取初值和平滑常数 α

$$S_1 = X_1$$

$$S_2 = \alpha X_2 + (1 - \alpha) S_1$$

$$S_3 = \alpha X_3 + (1 - \alpha) S_2$$

.....

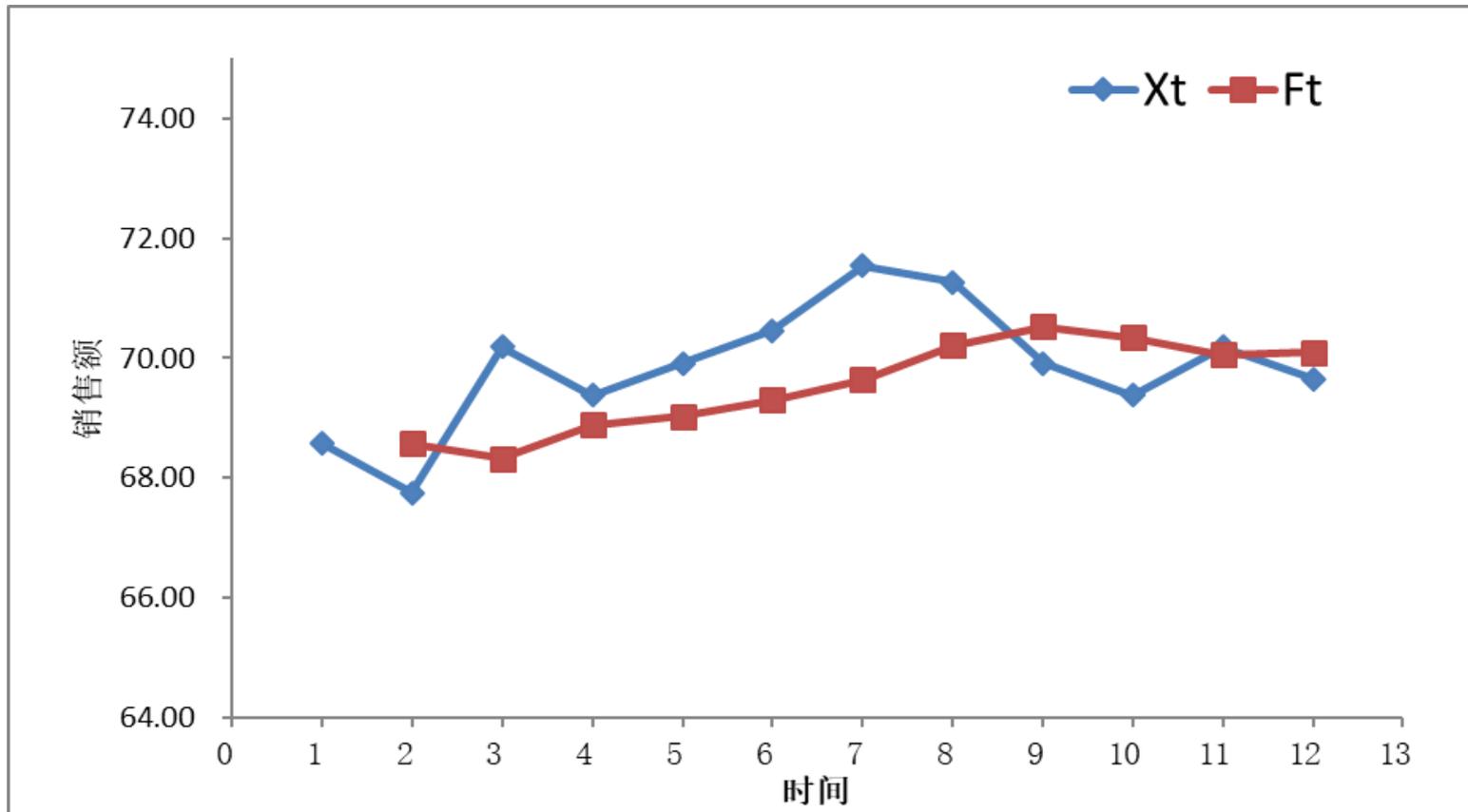
$$S_t = \alpha X_t + (1 - \alpha) S_{t-1}$$

预测： $F_{t+1} = S_t$

例1：音乐商店销售额（指数平滑法）

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	音乐商店过去12周的销售额						
3	alpha =	0.3					
4	t	Xt	St	Ft	Et	Et^2	[Et /Xt]*100
5	1	68.57	68.57				
6	2	67.76	68.33	68.57	0.81	0.66	1.20
7	3	70.19	68.89	68.33	1.86	3.47	2.65
8	4	69.38	69.03	68.89	0.49	0.24	0.71
9	5	69.92	69.30	69.03	0.89	0.78	1.27
10	6	70.46	69.65	69.30	1.16	1.35	1.65
11	7	71.54	70.22	69.65	1.89	3.58	2.64
12	8	71.27	70.53	70.22	1.05	1.11	1.48
13	9	69.92	70.35	70.53	0.61	0.37	0.88
14	10	69.38	70.06	70.35	0.97	0.94	1.40
15	11	70.19	70.10	70.06	0.13	0.02	0.19
16	12	69.65	69.96	70.10	0.45	0.20	0.64
17							
18					MAD	MSE	MAPE
19					0.94	1.16	1.34

例1：音乐商店销售额（指数平滑法）

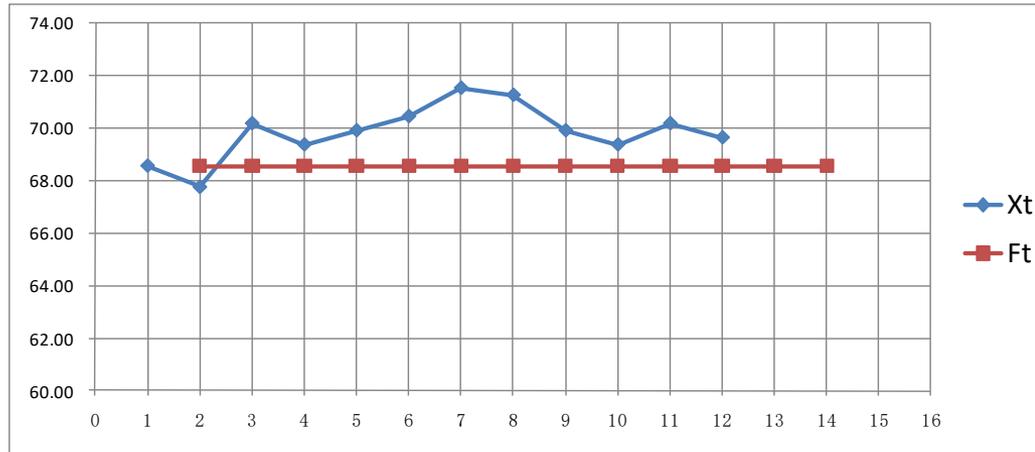


模型设计：位置、公式等输入项

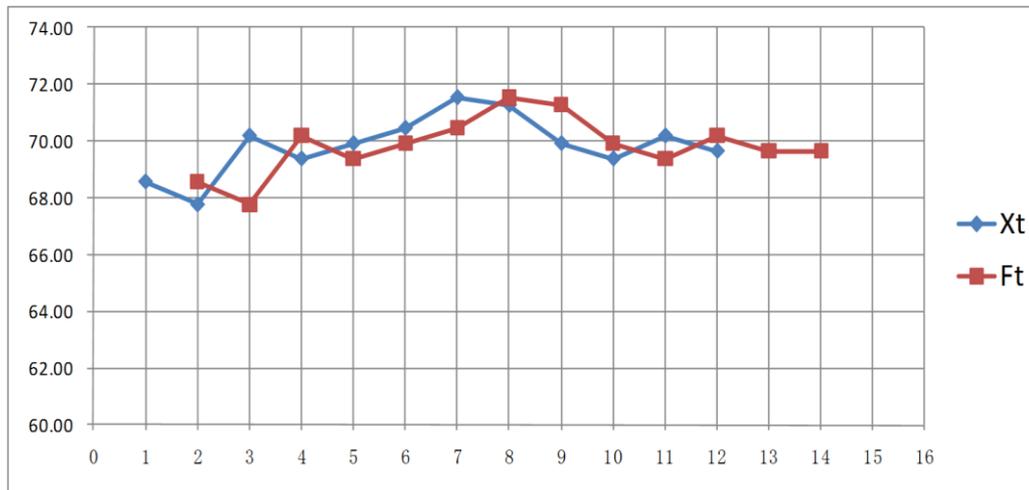
	A	B	C	D	E	F	G
1	音乐商店过去12周的销售额						
2							
3	alpha =	0.3					
4	t	Xt	St	Ft	Et	Et^2	[Et /Xt]*100
5	1	68.57	=B5				
6	2	67.76	=B\$3*B6+(1-B\$3)*C5	=C5	=ABS(B6-D6)	=E6^2	=E6/B6*100
7	3	70.19					
8	4	69.38	COPY		COPY	COPY	COPY
9	5	69.92	↓		↓	↓	↓
10	6	70.46					
11	7	71.54					
12	8	71.27					
13	9	69.92					
14	10	69.38					
15	11	70.19					
16	12	69.65					
17							
18					MAD	MSE	MAPE
19					=AVERAGE(E6:E16)	→	

如何选取平滑参数 α ?

$\alpha=0$: 预测只取决于第一个观察值 X_1



$\alpha=1$: 预测只取决于最近一个观察值 X_{t-1}



平滑参数 α 的选取办法

(1) 经验法：根据实际经验判断。一般取值范围在0.05到0.5之间。

列维斯(Lewis's rule)：

- 如果时间序列比较平稳，取较小的 α 值；
- 如果时间序列波动较大，取较大的 α 值。

(2) 数值算法：取 α 的值使某个预测误差指标最小。

方法？规划求解！

当 $\alpha = 0.6489$ 时，MSE最小

	A	B	C	D	E	F	G
1	音乐商店过去12周的销售额						
2							
3	alpha =	0.6489					
4	t	Xt	St	Ft	Et	Et^2	[(Et/Xt)*100
5	1	68.57	68.57				
6	2	67.76	68.04	68.57	0.81	0.66	1.20
7	3	70.19	69.44	68.04	2.15	4.60	3.06
8	4	69.38	69.40	69.44	0.06	0.00	0.08
9	5	69.92	69.74	69.40	0.52	0.27	0.74
10	6	70.46	70.21	69.74	0.72	0.52	1.03
11	7	71.54	71.07	70.21	1.33	1.78	1.86
12	8	71.27	71.20	71.07	0.20	0.04	0.28
13	9	69.92	70.37	71.20	1.28	1.64	1.83
14	10	69.38	69.73	70.37	0.99	0.98	1.43
15	11	70.19	70.03	69.73	0.46	0.21	0.66
16	12	69.65	69.78	70.03	0.38	0.14	0.54
17							
18					MAD	MSE	MAPE
19					0.81	0.99	1.15

Excel : 工具->数据分析->指数平滑

数据分析

分析工具 (A)

- 方差分析：单因素方差分析
- 方差分析：可重复双因素分析
- 方差分析：无重复双因素分析
- 相关系数
- 协方差
- 描述统计
- 指数平滑**
- F-检验 双样本方差
- 傅利叶分析
- 直方图

确定
取消
帮助 (H)

指数平滑

输入

输入区域 (I):

阻尼系数 (D):

标志 (L)

输出选项

输出区域 (O):

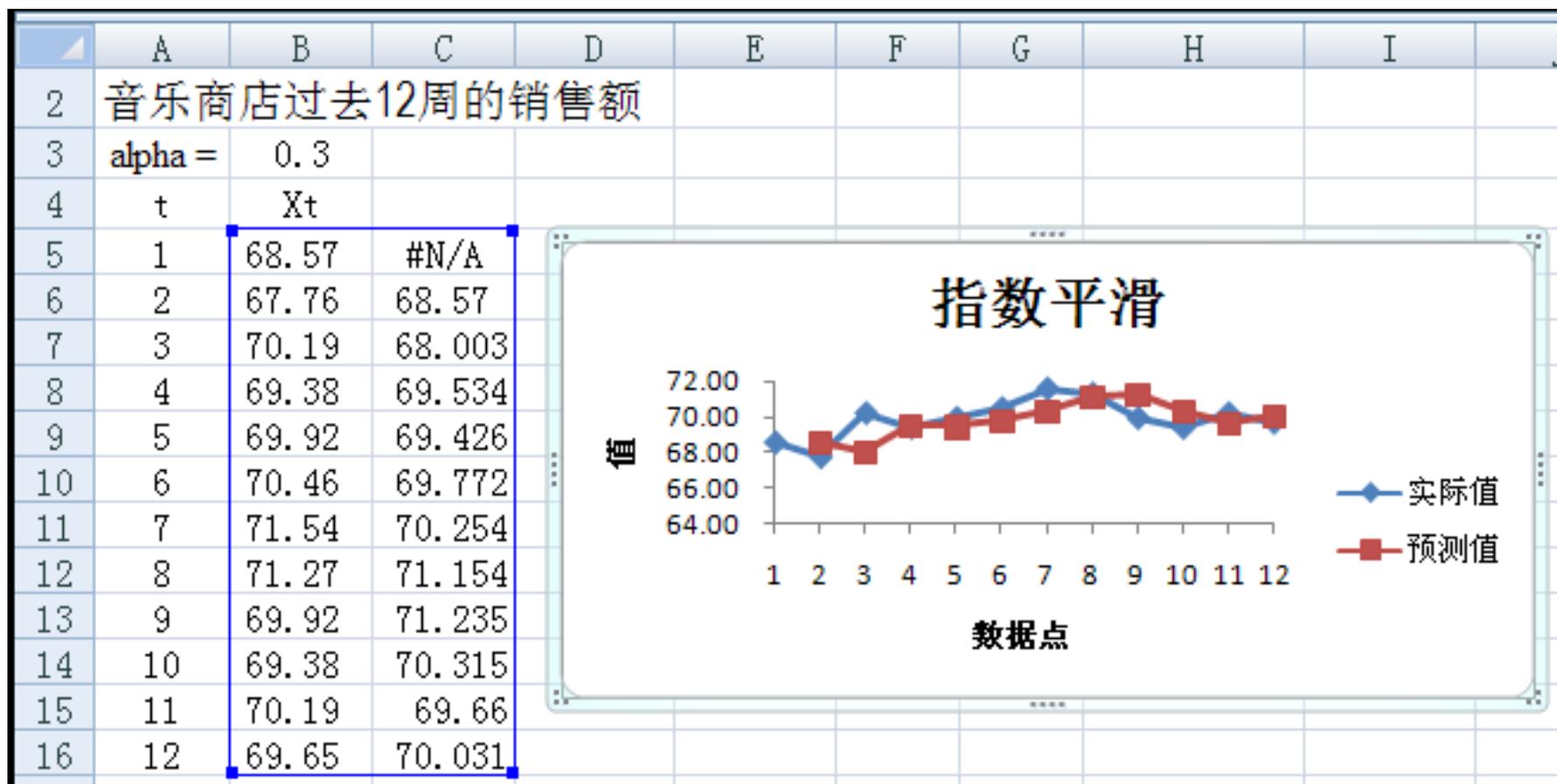
新工作表组 (F):

新工作簿 (W)

图表输出 (C) 标准误差

确定
取消
帮助 (H)

结果：



本节总结

水平模式：水平波动，无趋势、无季节变动

1. 移动平均预测

以最近 k 项平均预测

2. 简单指数平滑模型(单指数平滑模型)

□ 模型： $S_t = \alpha X_t + (1 - \alpha) S_{t-1}$

$$F_{t+1} = S_t$$

□ 初始值： $S_1 = X_1$

□ 预测精度：MAD；MSE；SE；MAPE

□ 如何选取平滑参数？经验法；最小误差法

本章内容

1. 时间序列及模式
2. 预测精度
3. 水平模式下的预测
- 4. 趋势模式下的预测**
5. 趋势与季节模式下的预测
6. Minitab：多种预测方法的比较

趋势模式下的预测

1. 线性趋势回归
2. 非线性趋势回归
3. 双参数指数平滑(Holt线性指数平滑)

趋势模式下的预测

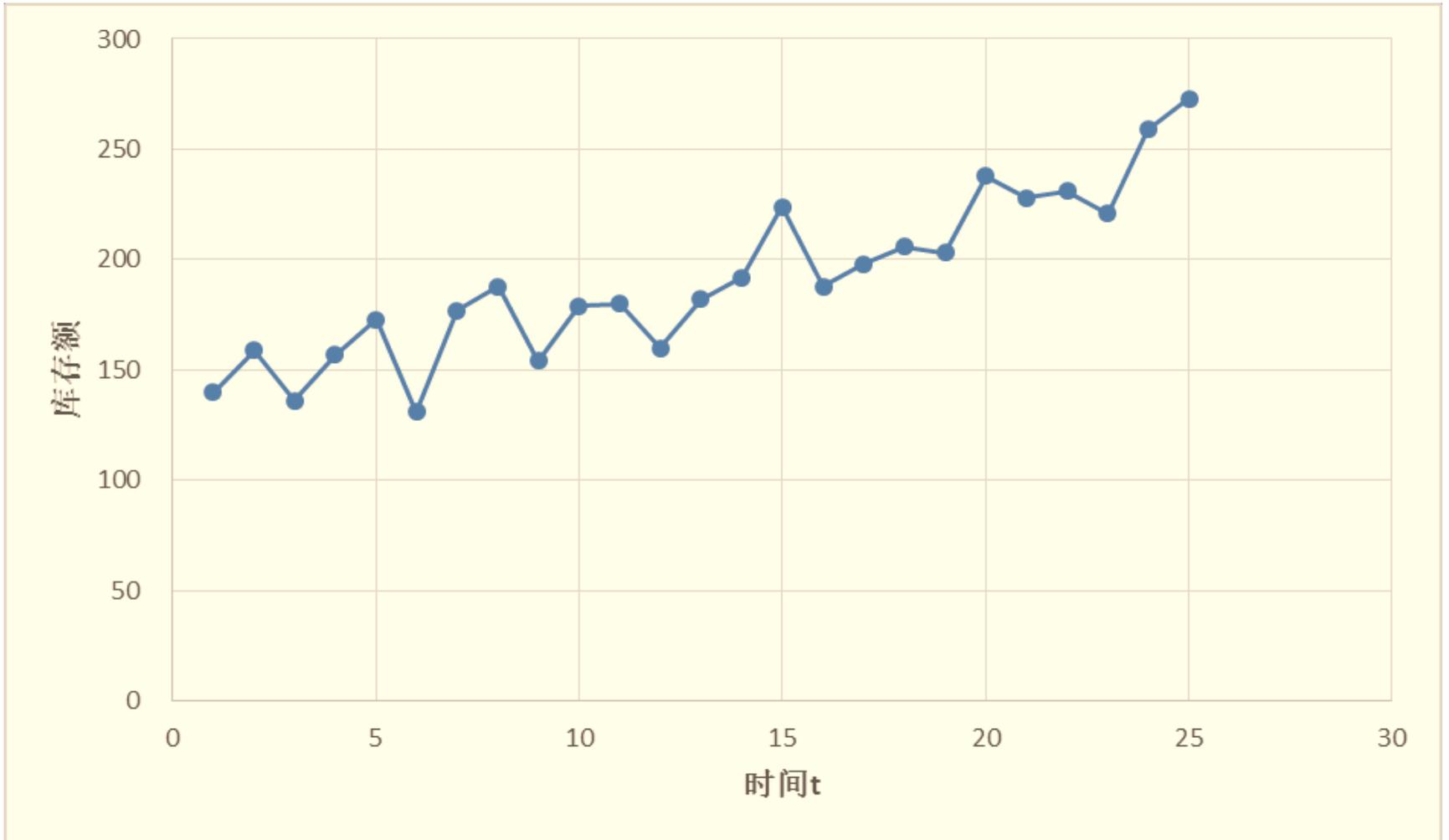
1. 线性趋势回归
2. 非线性趋势回归
3. 双参数指数平滑(Holt线性指数平滑)

例2：25周库存数据

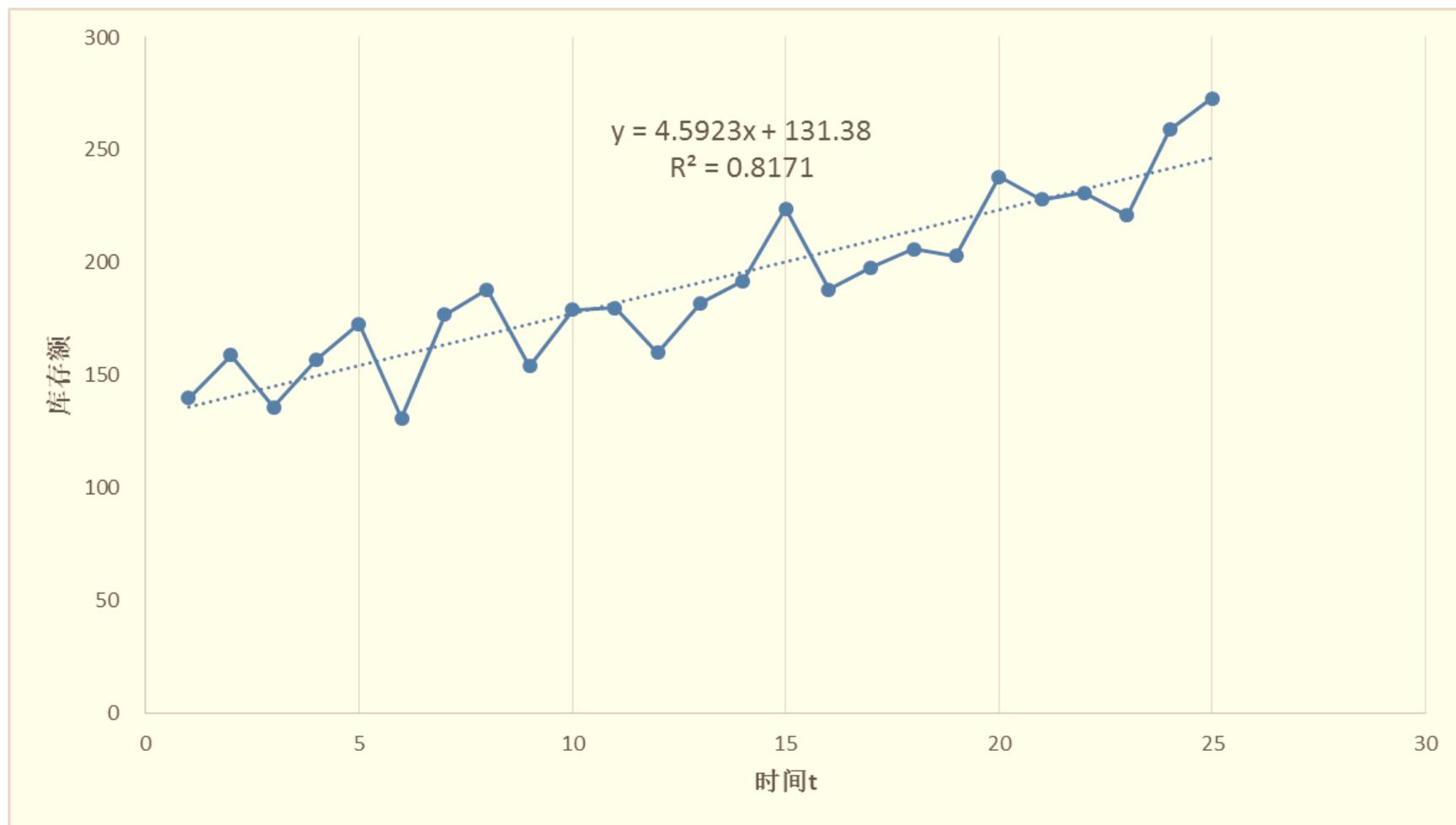
下面是一家公司过去25周的周末库存数据。需要预测未来2周的周末库存额。

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Xt	140	159	136	157	173	131	177	188	154	179	180	160	182
t	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
Xt	192	224	188	198	206	203	238	228	231	221	259	273	

例2：25周库存数据：趋势明显



线性趋势预测：添加趋势线



线性趋势预测：预测误差

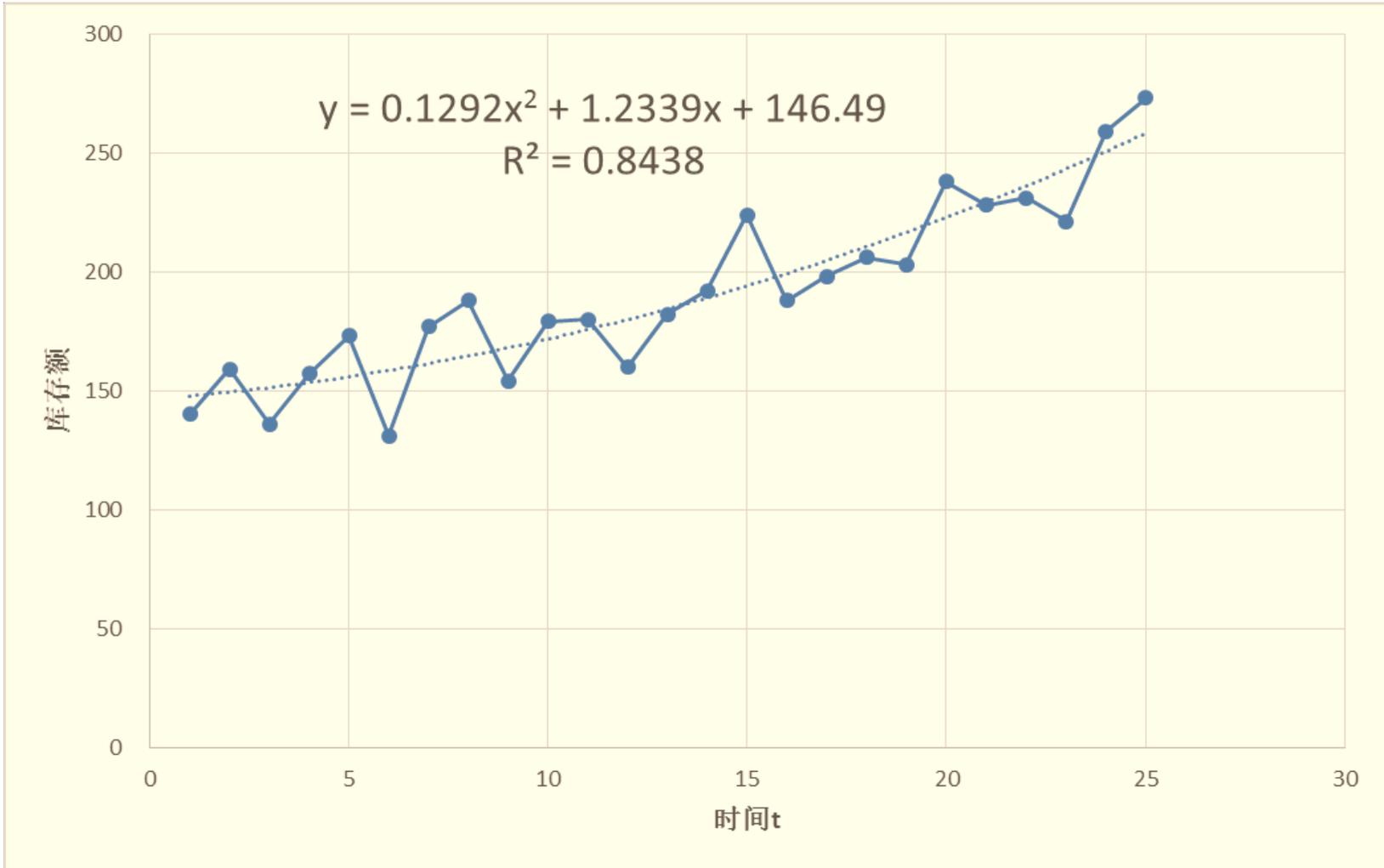
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	过去24周库存数据								
2	t	Xt	Ft	 Et 	Et²	 Et /Xt	MAD	MSE	MAPE
3	1	140	135.97	4.03	16.22	2.88	13.31	245.51	7.25
4	2	159	140.56	18.44	339.86	11.59			
5	3	136	145.16	9.16	83.85	6.73			
6	4	157	149.75	7.25	52.57	4.62			
7	5	173	154.34	18.66	348.14	10.79			
8	6	131	158.93	27.93	780.30	21.32			
9	7	177	163.53	13.47	181.54	7.61			
10	8	188	168.12	19.88	395.28	10.58			
11	9	154	172.71	18.71	350.09	12.15			
12	10	179	177.30	1.70	2.88	0.95			
13	11	180	181.90	1.90	3.59	1.05			
14	12	160	186.49	26.49	701.60	16.55			
15	13	182	191.08	9.08	82.45	4.99			
16	14	192	195.67	3.67	13.49	1.91			
17	15	224	200.26	23.74	563.37	10.60			
18	16	188	204.86	16.86	284.16	8.97			
19	17	198	209.45	11.45	131.08	5.78			
20	18	206	214.04	8.04	64.67	3.90			
21	19	203	218.63	15.63	244.42	7.70			
22	20	238	223.23	14.77	218.27	6.21			
23	21	228	227.82	0.18	0.03	0.08			
24	22	231	232.41	1.41	1.99	0.61			
25	23	221	237.00	16.00	256.10	7.24			
26	24	259	241.60	17.40	302.92	6.72			
27	25	273	246.19	26.81	718.90	9.82			

什么公式？

趋势模式下的预测

1. 线性趋势回归
2. 非线性趋势回归
3. 双参数指数平滑(Holt线性指数平滑)

非线性趋势： R^2 有所增大



非线性趋势预测：预测误差

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	过去24周库存数据								
2	t	Xt	Ft	 Et 	Et²	 Et /Xt	MAD	MSE	MAPE%
3	1	140	147.85	7.85	61.67	5.61	12.16	209.59	6.71
4	2	159	149.47	9.53	90.73	5.99			
5	3	136	151.35	15.35	235.76	11.29			
6	4	157	153.49	3.51	12.30	2.23			
7	5	173	155.89	17.11	292.77	9.89			
8	6	131	158.54	27.54	758.70	21.03			
9	7	177	161.46	15.54	241.55	8.78			
10	8	188	164.63	23.37	546.16	12.43			
11	9	154	168.06	14.06	197.69	9.13			
12	10	179	171.75	7.25	52.58	4.05			
13	11	180	175.70	4.30	18.52	2.39			
14	12	160	179.90	19.90	396.07	12.44			
15	13	182	184.37	2.37	5.60	1.30			
16	14	192	189.09	2.91	8.48	1.52			
17	15	224	194.07	29.93	895.89	13.36			
18	16	188	199.31	11.31	127.86	6.01			
19	17	198	204.81	6.81	46.31	3.44			
20	18	206	210.56	4.56	20.80	2.21			
21	19	203	216.58	13.58	184.29	6.69			
22	20	238	222.85	15.15	229.58	6.37			
23	21	228	229.38	1.38	1.90	0.60			
24	22	231	236.17	5.17	26.71	2.24			
25	23	221	243.22	22.22	493.57	10.05			
26	24	259	250.52	8.48	71.86	3.27			
27	25	273	258.09	14.91	222.38	5.46			

什么公式？

线性趋势：

MAD	MSE	MAPE%
13.31	245.51	7.25

趋势模式下的预测

1. 线性趋势回归
2. 非线性趋势回归
3. 双参数指数平滑(Holt线性指数平滑)

双参数指数平滑模型

水平： S_t =t时刻的时间序列水平估计值

趋势： R_t =t时刻时间序列斜率估计值

双参数指数平滑模型：

$$S_t = \alpha X_t + (1 - \alpha)(S_{t-1} + R_{t-1})$$

$$R_t = \beta(S_t - S_{t-1}) + (1 - \beta)R_{t-1}$$

$$F_{t+1} = S_t + R_t$$

如果时间序列是平稳的(水平模式)，则 $R_t=0$ ，转化为简单指数平滑模型。

双参数指数平滑模型：预测

问题：

1. 如何定初值 S_1 和 R_1 ？
2. 如何定平滑系数 α, β ？

初值 S_1 和 R_1

方法：

1. $S_1 = X_1, R_1 = X_2 - X_1$

2. $S_1 = X_1, R_1 = (X_m - X_1)/(m-1)$

3. 前面几个数据拟合一条直线

如何定平滑系数 α , β ?

两种方法:

经验法: Woodward & Goldsmith 建议
 $\alpha = 0.1$ and $\beta = 0.01$.

计算法: 选择 α 和 β 使得预测误差最小

预测：模型设计

	A	B	C	D	E
1	初值				
2	S1 =	146			
3	R1 =	3			
4					
5	平滑参数				
6	$\alpha =$	0.5			
7	$\beta =$	0.5			
8					
9	t	Xt	St	Rt	Ft
10	1	140	=B2	=B3	
11	2	159	=B6*B11+(1-B6)*(C10+D10)	=B7*(C11-C10)+(1-B7)*D10	=C10+D10
12	3	136			
13	4	157			
14	5	173	Copy	Copy	
15					
16					

预测：计算结果

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1		初始值										
2		S1 =	146									
3		R1 =	3									
4		平滑参数										
5		$\alpha =$	0.5									
6		$\beta =$	0.5									
7	t	Xt	St	Rt	Ft	Et	 Et 	Et*Et	[(Et)/Xt]	MAD	MSE	MAPE
8	1	140	146.00	3.00						18.17	455.59	9.97
9	2	159	154.00	5.50	149.00	10.00	10.00	100.00	6.29			
10	3	136	147.75	-0.38	159.50	-23.50	23.50	552.25	17.28			
11	4	157	152.19	2.03	147.38	9.63	9.63	92.64	6.13			
12	5	173	163.61	6.73	154.22	18.78	18.78	352.74	10.86			
13	6	131	150.67	-3.11	170.34	-39.34	39.34	1547.32	30.03	MAD	MSE	MAPE%
14	7	177	162.28	4.25	147.56	29.44	29.44	866.68	16.63	13.31	245.51	7.25
15	8	188	177.27	9.62	166.53	21.47	21.47	460.84	11.42			
16	9	154	170.44	1.40	186.89	-32.89	32.89	1081.46	21.35			
17	10	179	175.42	3.19	171.84	7.16	7.16	51.26	4.00			
18	11	180	179.30	3.54	178.61	1.39	1.39	1.94	0.77	MAD	MSE	MAPE%
19	12	160	171.42	-2.17	182.84	-22.84	22.84	521.65	14.27	12.16	209.59	6.71
20	13	182	175.62	1.01	169.25	12.75	12.75	162.67	7.01			
21	14	192	184.32	4.86	176.64	15.36	15.36	236.02	8.00			
22	15	224	206.59	13.56	189.17	34.83	34.83	1212.87	15.55			
23	16	188	204.07	5.52	220.15	-32.15	32.15	1033.52	17.10			
24	17	198	203.80	2.62	209.60	-11.60	11.60	134.53	5.86			
25	18	206	206.21	2.52	206.42	-0.42	0.42	0.18	0.21			
26	19	203	205.87	1.09	208.73	-5.73	5.73	32.84	2.82			
27	20	238	222.48	8.85	206.95	31.05	31.05	964.01	13.05			

线性趋势：

非线性趋势：

预测：选择 α 和 β MAPE最小

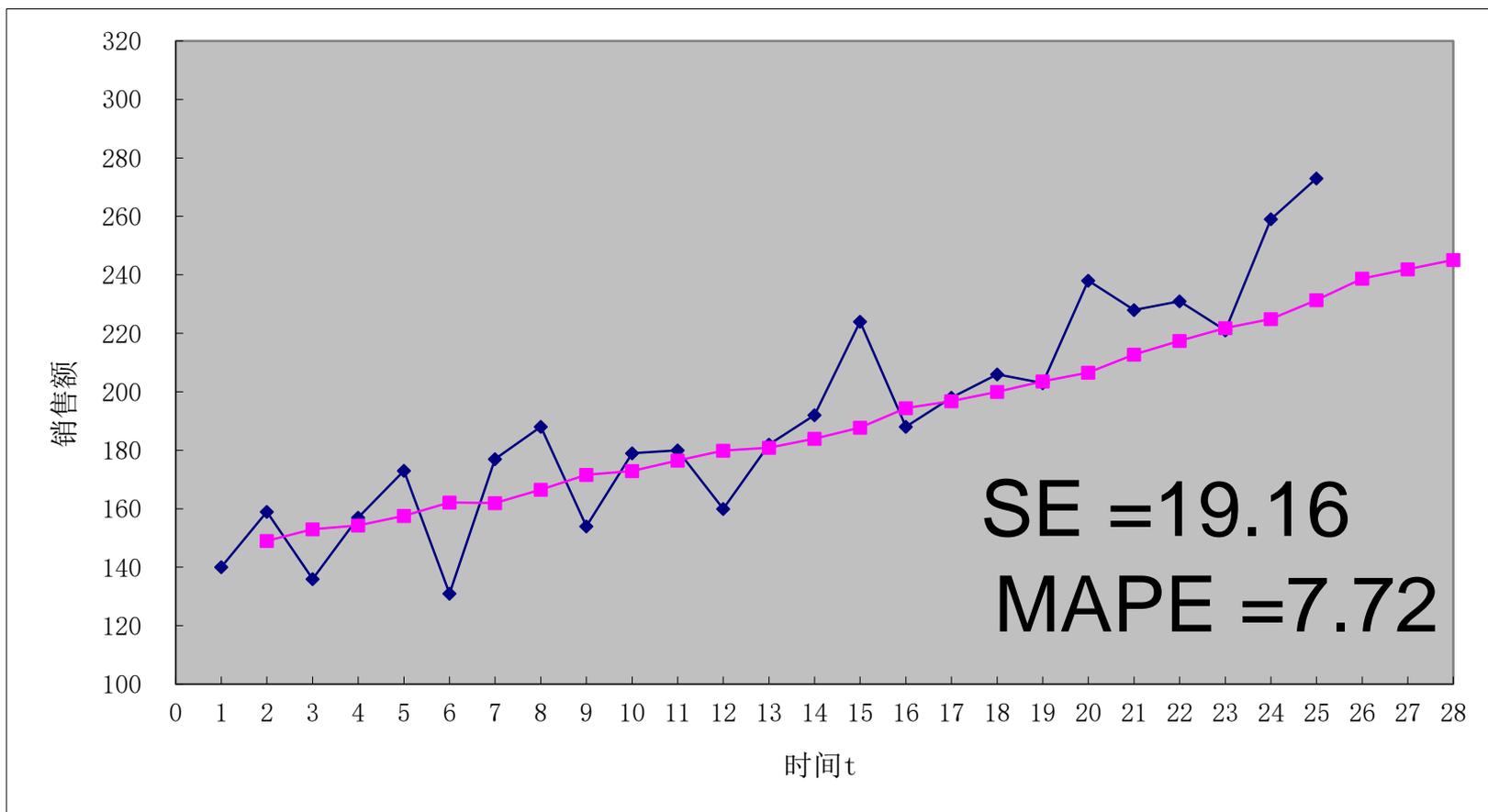
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1		初始值										
2		S1 =	146									
3		R1 =	3									
4		平滑参数										
5		$\alpha =$	0.065									
6		$\beta =$	1									
7	t	Xt	St	Rt	Ft	Et	Et	Et*Et	[Et /Xt]	MAD	MSE	MAPE
8	1	140	146.00	3.00						13.17	270.66	7.08
9	2	159	149.65	3.65	149.00	10.00	10.00	100.00	6.29			
10	3	136	152.18	2.53	153.30	-17.30	17.30	299.20	12.72			
11	4	157	154.85	2.68	154.70	2.30	2.30	5.28	1.46	线性趋势：		
12	5	173	158.53	3.68	157.53	15.47	15.47	239.42	8.94			
13	6	131	160.19	1.65	162.21	-31.21	31.21	974.06	23.82	MAD	MSE	MAPE%
14	7	177	162.82	2.64	161.84	15.16	15.16	229.83	8.56	13.31	245.51	7.25
15	8	188	166.92	4.10	165.46	22.54	22.54	507.97	11.99	非线性趋势：		
16	9	154	169.92	3.00	171.02	-17.02	17.02	289.83	11.05			
17	10	179	173.31	3.39	172.92	6.08	6.08	37.02	3.40			
18	11	180	176.92	3.60	176.70	3.30	3.30	10.88	1.83	MAD	MSE	MAPE%
19	12	160	179.19	2.27	180.52	-20.52	20.52	421.07	12.82	12.16	209.59	6.71
20	13	182	181.50	2.31	181.46	0.54	0.54	0.29	0.30			
21	14	192	184.34	2.84	183.81	8.19	8.19	67.15	4.27			
22	15	224	189.57	5.23	187.18	36.82	36.82	1355.93	16.44			
23	16	188	194.35	4.79	194.79	-6.79	6.79	46.17	3.61			
24	17	198	199.07	4.71	199.14	-1.14	1.14	1.30	0.58			
25	18	206	203.93	4.86	203.78	2.22	2.22	4.92	1.08			
26	19	203	208.41	4.48	208.78	-5.78	5.78	33.45	2.85			
27	20	238	214.52	6.11	212.89	25.11	25.11	630.46	10.55			

线性趋势：

非线性趋势：

平滑参数的经验选择

$\alpha = 0.1, \beta = 0.01$ (Woodward & Goldsmith)



如何预测第26，27和28周的库存额？

预测公式： $F_{t+k} = S_t + kR_t$

用使MAPE最小的平滑参数进行预测：

$$26: F_{25+1} = S_{25} + R_{25} = 249.78 + 1 * 8.78 = 258.56$$

$$27: F_{25+2} = S_{25} + 2R_{25} = 249.78 + 2 * 8.78 = 267.34$$

$$28: F_{25+3} = S_{25} + 3R_{25} = 249.78 + 3 * 8.78 = 276.12$$

本节总结: 趋势模式下的预测

1. 线性趋势回归预测

对趋势进行线性回归

2. 非线性趋势回归预测

对趋势进行非线性回归

3. 双参数指数平滑模型(Holt线性指数平滑)

$$S_t = \alpha X_t + (1 - \alpha)(S_{t-1} + R_{t-1})$$

$$R_t = \beta(S_t - S_{t-1}) + (1 - \beta)R_{t-1}$$

$$F_{t+1} = S_t + R_t$$

本章内容

1. 时间序列及模式
2. 预测精度
3. 水平模式下的预测
4. 趋势模式下的预测
- 5. 趋势与季节模式下的预测**
6. Minitab：多种预测方法的比较

趋势与季节模式下的预测

1. 没有趋势的季节性变动
2. 趋势与季节变动

趋势与季节模式下的预测

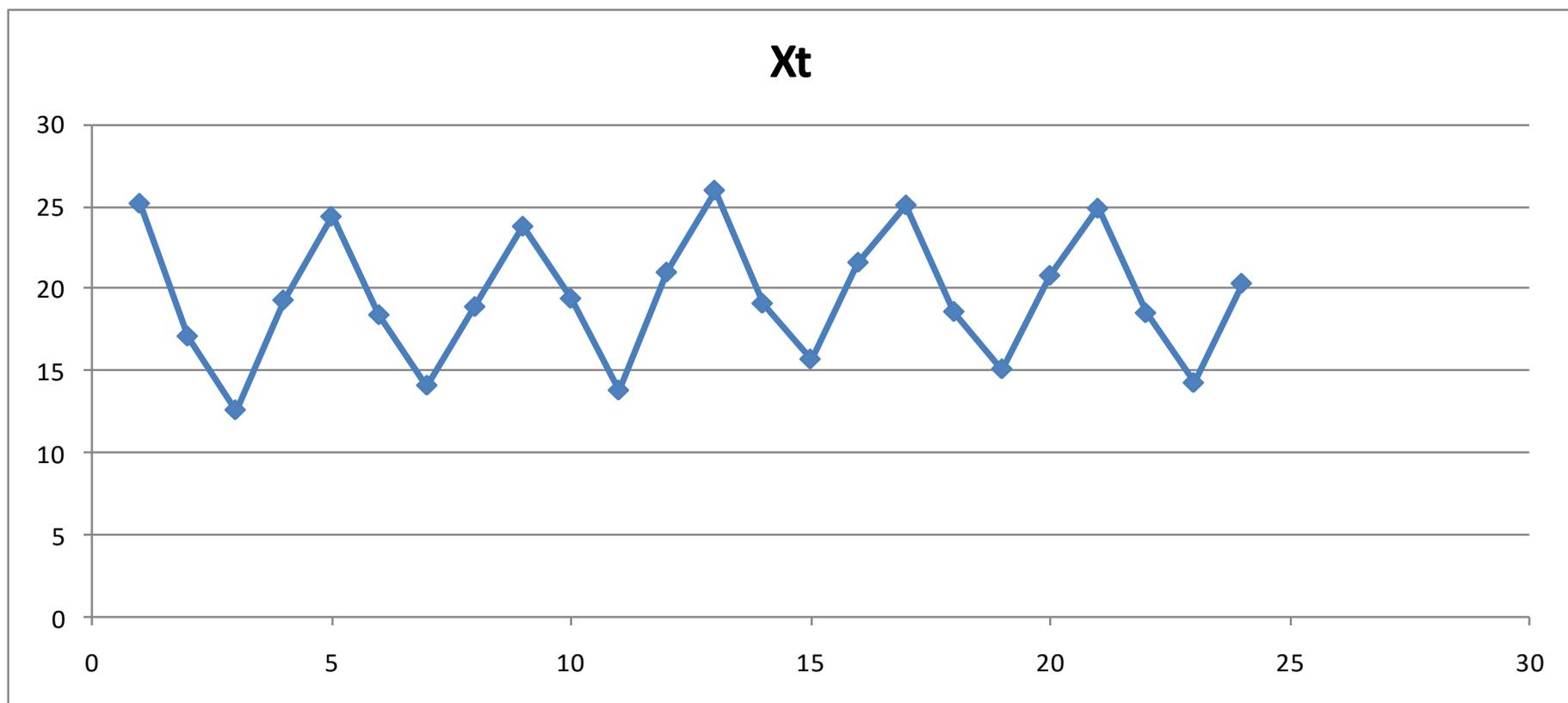
1. 没有趋势的季节性变动
2. 趋势与季节变动

例3：旅游数据：预测下两个季度？

$$\bar{Y} = 19.5$$

年份 \ 季度	1	2	3	4
2005	25.2	17.1	12.6	19.3
2006	24.4	18.4	14.1	18.9
2007	23.8	19.4	13.8	21
2008	26	19.1	15.7	21.6
2009	25.1	18.6	15.1	20.8
平均	24.9	18.52	14.26	20.32
季节指数	127.69	94.97	73.12	104.20

没有趋势，只有季节性变动

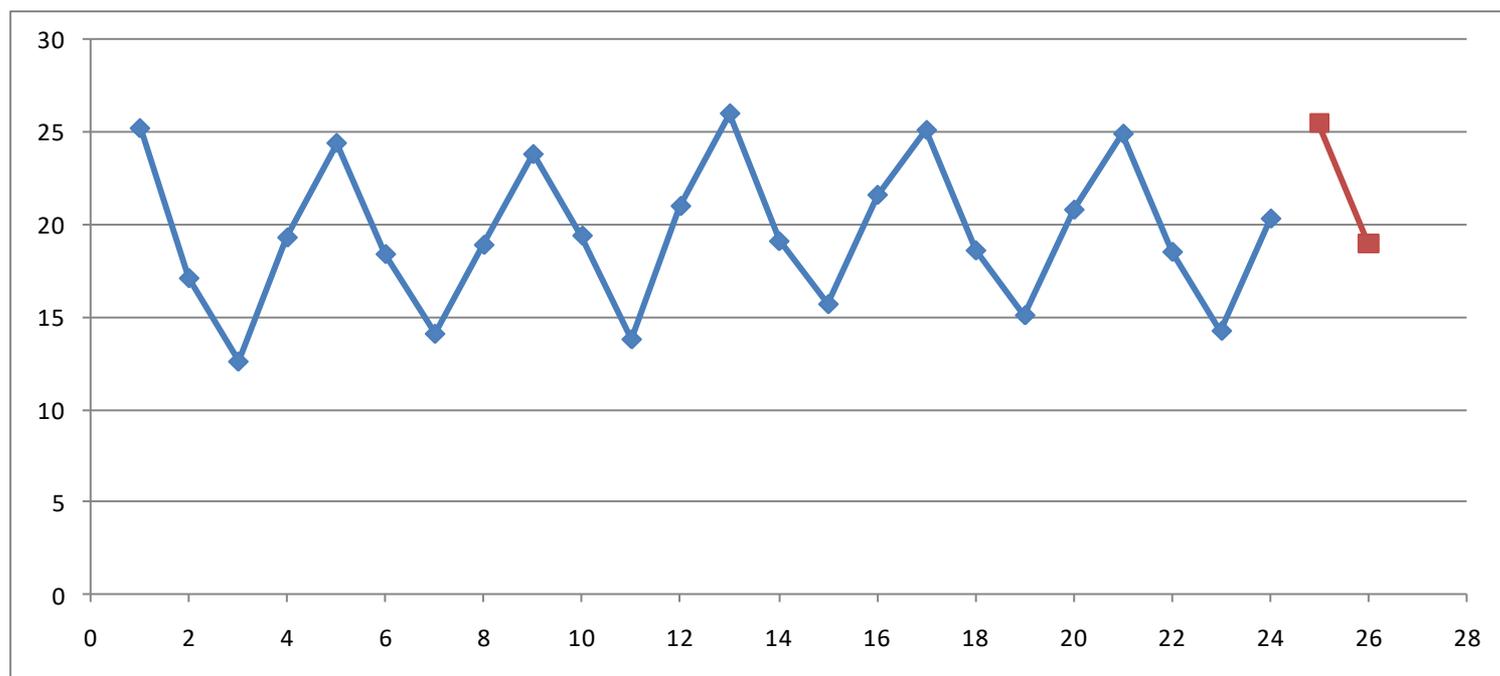


没有趋势的季节性：利用季节指数预测

预测2010年第1、2季度：已知2009年第4季度=20.8

第1季度： $=20.8/104.2 \times 127.69 = 25.49$

第2季度： $=20.8/104.2 \times 94.97 = 18.96$



趋势与季节模式下的预测

1. 没有趋势的季节性变动
2. 趋势与季节变动

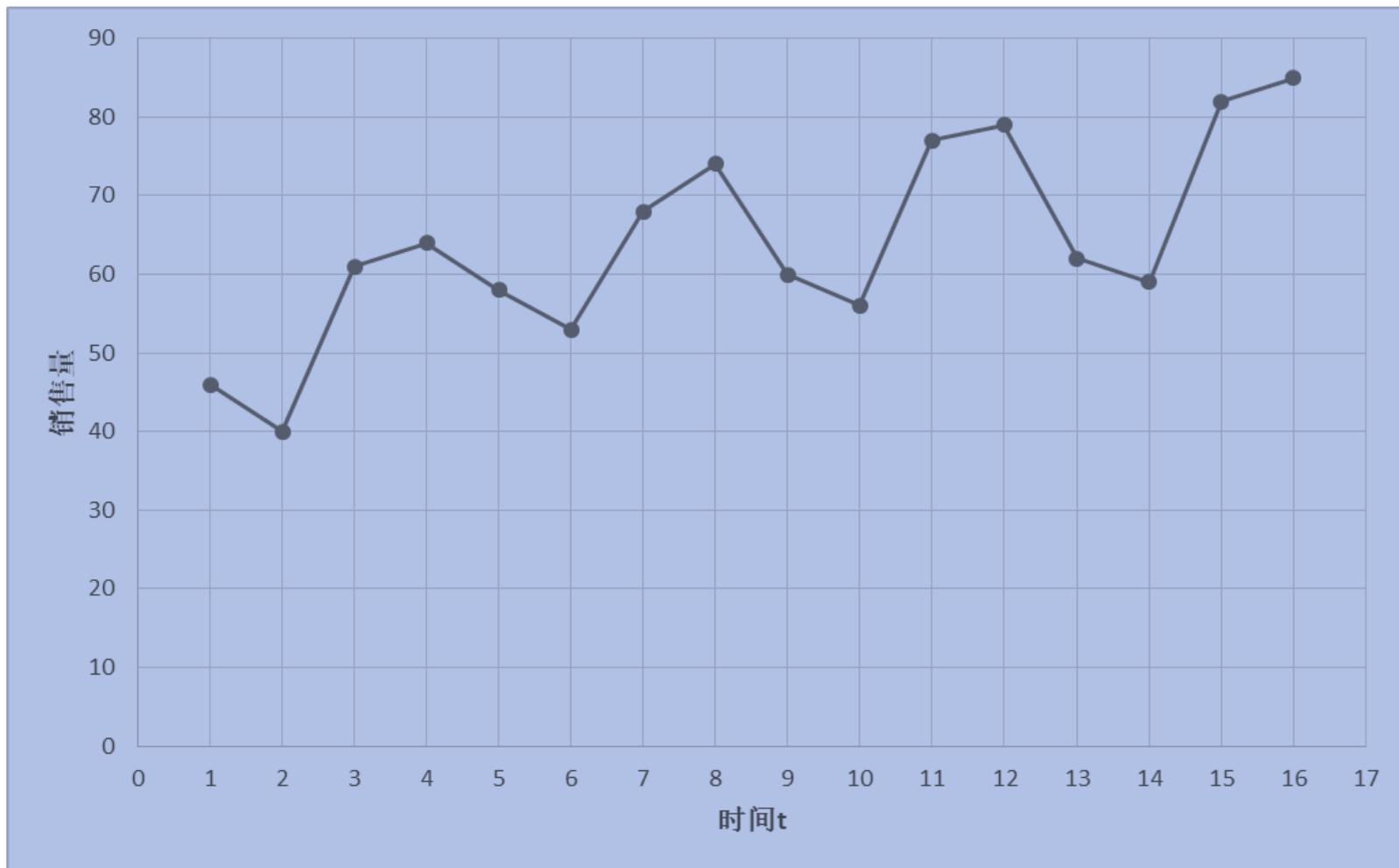
例4：电脑的季度销售量

某品牌电脑企业四年的季度销售量（百台）

年 季度	第一季度	第二季度	第三季度	第四季度
第一年	46	40	61	64
第二年	58	53	68	74
第三年	60	56	77	79
第四年	62	59	82	85

预测第5年第1季度和第2季度的销售量。

趋势与季节模式：如何预测？



趋势与季节变动

方法1：虚拟变量回归

方法2：Holt-Winter模型

方法3：分解法

趋势与季节变动

方法1：虚拟变量回归

方法2：Holt-Winter模型

方法3：分解法

虚拟变量回归：变量

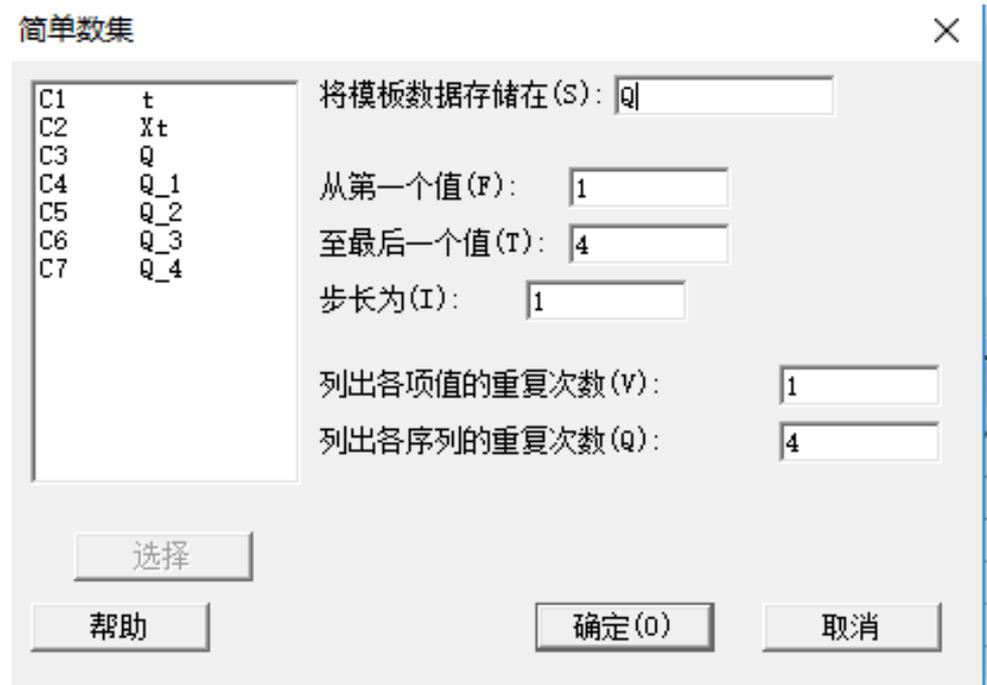
□ 因变量： X_t

□ 自变量

1. 时间 t （期数）
2. 季节虚拟变量：
 - ✓ 基准组为第1季度
 - ✓ 共有三个虚拟变量：
Q2, Q3, Q4

□ 在Minitab产生Q：

计算=>产生模块化数据=>简单数集



虚拟变量回归：模型

回归分析: X_t 与 t , Q_2 , Q_3 , Q_4

回归方程为

$$X_t = 45.6 + 1.56 t - 6.06 Q_2 + 12.4 Q_3 + 14.3 Q_4$$

自变量	系数	系数标准误	T	P
常量	45.563	1.741	26.16	0.000
t	1.5625	0.1533	10.19	0.000
Q_2	-6.063	1.945	-3.12	0.010
Q_3	12.375	1.964	6.30	0.000
Q_4	14.312	1.993	7.18	0.000

$S = 2.74276$ $R\text{-Sq} = 96.6\%$ $R\text{-Sq} (\text{调整}) = 95.4\%$

虚拟变量回归：预测

回归方程为

$$X_t = 45.6 + 1.56 t - 6.06 Q_2 + 12.4 Q_3 + 14.3 Q_4$$

预测第5年第1季度和第2季度的销售量：

$$t=17 (Q_2=Q_3=Q_4=0) : 72.125$$

$$t=18 (Q_2=1 , Q_3=Q_4=0) : 67.625$$

趋势与季节变动

方法1：虚拟变量回归

方法2：Holt-Winter模型

方法3：分解法

Holt-Winter模型（趋势+季节）

乘法公式：

$$S_t = \alpha(X_t / Q_{t-p}) + (1 - \alpha)(S_{t-1} + R_{t-1})$$

$$R_t = \beta(S_t - S_{t-1}) + (1 - \beta)R_{t-1}$$

$$Q_t = \delta(X_t / S_t) + (1 - \delta)Q_{t-p}$$

$$F_{t+1} = (S_t + R_t)Q_{t-p}$$

S_t 是在时间t处的水平， α 是水平的权重

R_t 是时间点t处的趋势， β 是趋势的权重

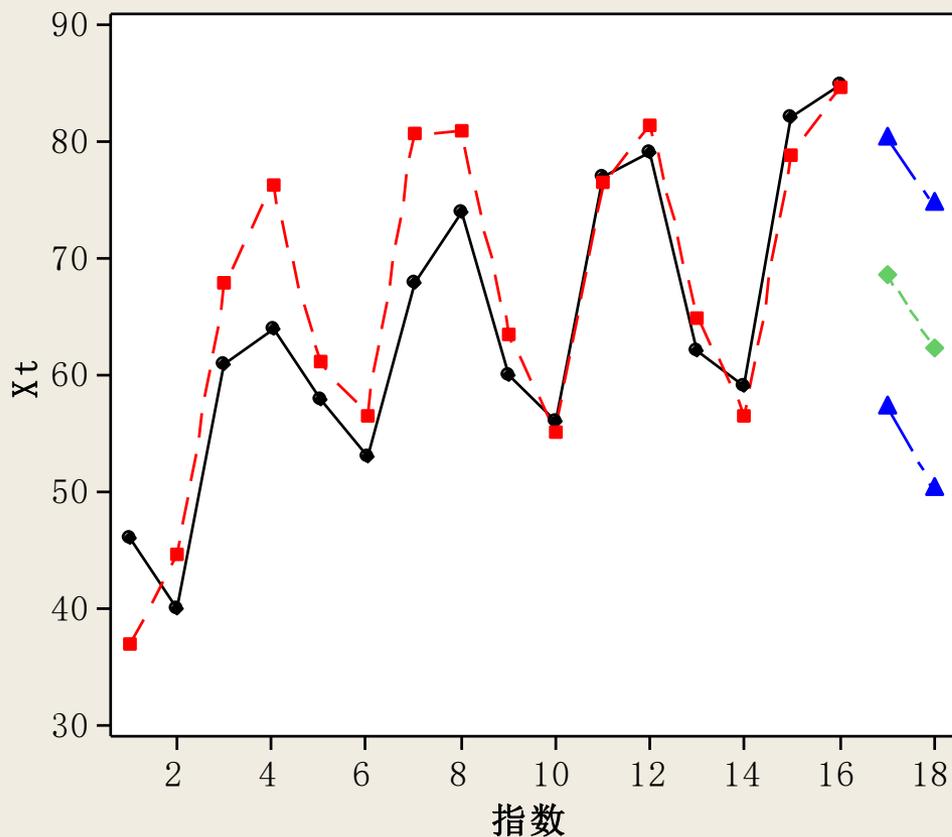
Q_t 是时间点t处的季节分量， δ 是季节分量的权重

p 是季节周期， X_t 是时间点t处的数据值

F_{t+1} 是 X_{t+1} 的预测值

Minitab : 时间序列>Winter方法

Xt 的 Winters 方法图
乘法



变量	
—●—	实际
—■—	拟合值
—◇—	预测
—▲—	95.0% 预测区间

平滑常量	
Alpha (水平)	0.4
Gamma (趋势)	0.4
Delta (周期)	0.2

准确度度量	
平均百分误差 (MAPE)	7.8291
平均绝对误差 (MAD)	4.6783
平均偏差平方和	35.8551

Minitab : 时间序列>Winter方法

Xt 的 Winters 方法

乘法

数据 Xt

长度 16

平滑常量

Alpha (水平) 0.4

Gamma (趋势) 0.4

Delta (周期) 0.2

准确度度量

平均百分误差 (MAPE) 7.8291

平均绝对误差 (MAD) 4.6783

平均偏差平方和 35.8551

预测

周期	预测	下限	上限
----	----	----	----

17	68.7041	57.2424	80.1657
----	---------	---------	---------

18	62.4144	50.2126	74.6163
----	---------	---------	---------

趋势与季节变动

方法1：虚拟变量回归

方法2：Holt-Winter模型

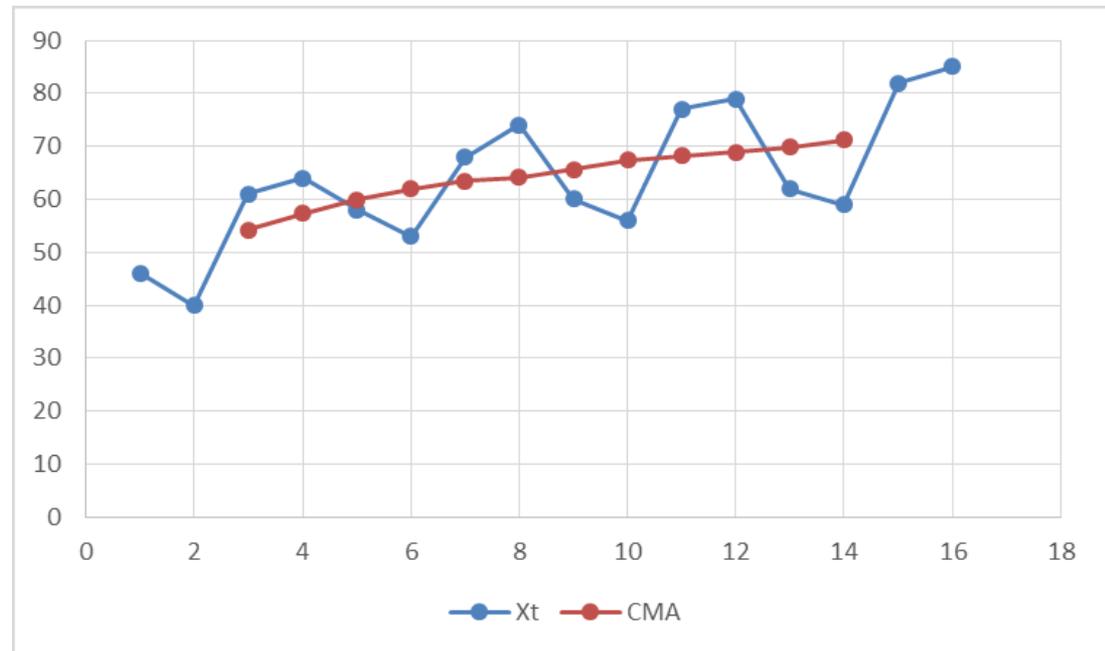
方法3：分解法

分解法：步骤

1. **计算趋势**：移动平均。如果偶数项，需要中心化移正平均。
2. **剔除趋势**：计算比值 $SD = \text{实际数据} / \text{移动平均值}$
3. **计算季节指数**：对SD按同期平均法（Minitab用中位数）
4. **按季节调整原序列**：把原序列除以季节指数，得到剔除季节因素的新数列
5. **用趋势线拟合新数列**：线性或非线性回归
6. **预测**：新数列趋势值乘以季节指数，得到预测值

第一步：计算趋势：移动平均

	A	B	C
1	某电脑公司四年的季度销售量		
2	t	Xt	CMA
3	1	46	
4	2	40	
5	3	61	54.25
6	4	64	57.38
7	5	58	59.88
8	6	53	62.00
9	7	68	63.50
10	8	74	64.13
11	9	60	65.63
12	10	56	67.38
13	11	77	68.25
14	12	79	68.88
15	13	62	69.88
16	14	59	71.25
17	15	82	
18	16	85	



CMA :

四项移动平均 (偶数项 , 先移正 , 再平均) 。 问题 : 公式及位置 ?

第二步：剔除趋势，计算比值SD

	A	B	C	D
1	某电脑公司四年的季度销售量（万台）			
2	t	Xt	CMA	SD
3	1	46		
4	2	40		
5	3	61	54.25	1.12
6	4	64	57.38	1.12
7	5	58	59.88	0.97
8	6	53	62.00	0.85
9	7	68	63.50	1.07
10	8	74	64.13	1.15
11	9	60	65.63	0.91
12	10	56	67.38	0.83
13	11	77	68.25	1.13
14	12	79	68.88	1.15
15	13	62	69.88	0.89
16	14	59	71.25	0.83
17	15	82		
18	16	85		



SD是否变水平模式了？

第三步：计算季节指数，同期平均法

	A	B	C	D	E
1	某电脑公司四年的季度销售量（万台）				
2	t	X_t	CMA	SD	SI
3	1	46			0.92
4	2	40			0.84
5	3	61	54.25	1.12	1.11
6	4	64	57.38	1.12	1.14
7	5	58	59.88	0.97	0.92
8	6	53	62.00	0.85	0.84
9	7	68	63.50	1.07	1.11
10	8	74	64.13	1.15	1.14
11	9	60	65.63	0.91	0.92
12	10	56	67.38	0.83	0.84
13	11	77	68.25	1.13	1.11
14	12	79	68.88	1.15	1.14
15	13	62	69.88	0.89	0.92
16	14	59	71.25	0.83	0.84
17	15	82			1.11
18	16	85			1.14

第三步：计算季节指数，同期平均法

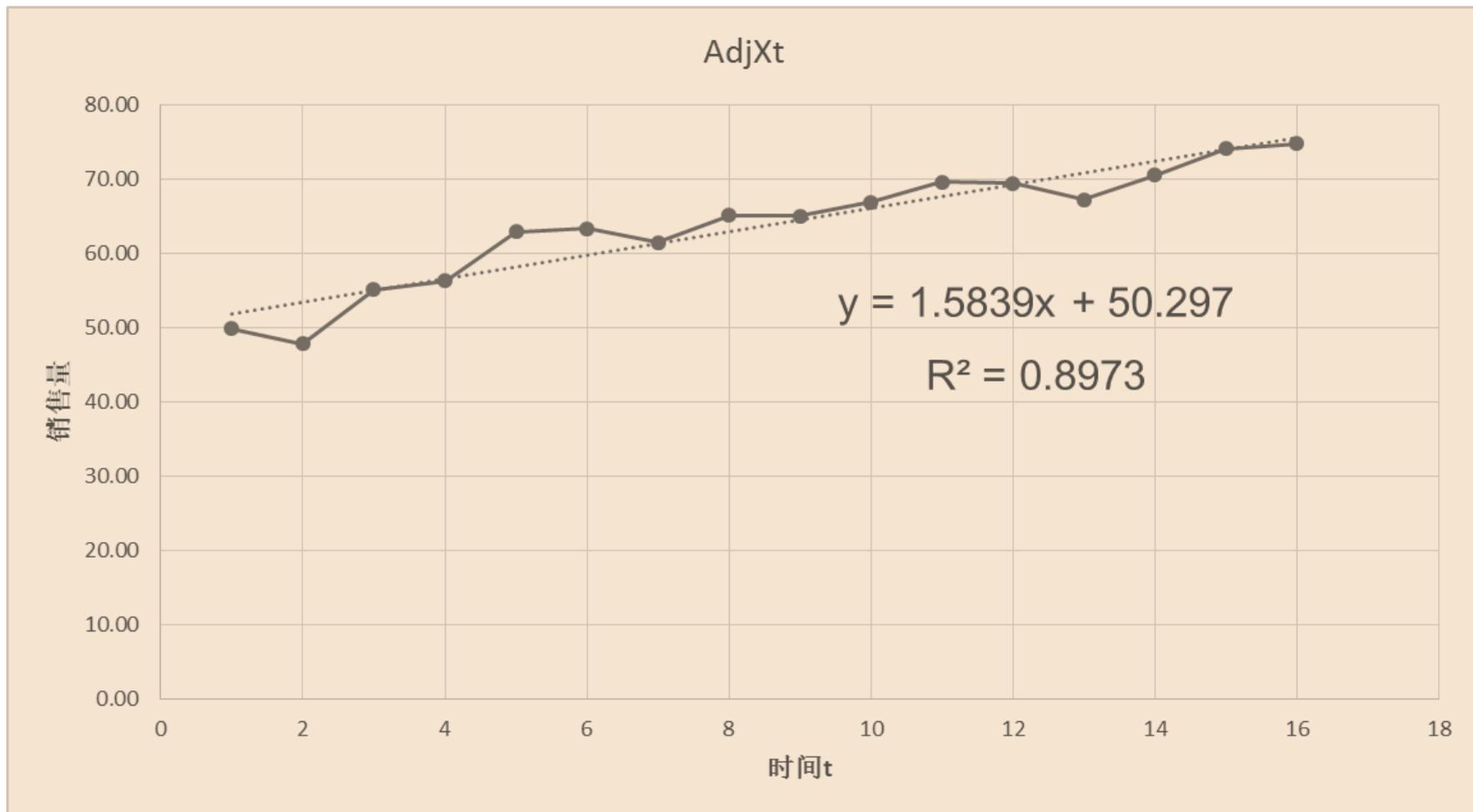
	A	B	C	D	E
1	某电脑公司四年的季度销售量（百台）				
2	t	Xt	CMA	SD	SI
3	1	46			0.92
4	2	40			0.84
5	3	61	54.25	1.12	1.11
6	4	64	57.38	1.12	1.14
7	5	58	59.88	0.97	0.92
8	6	53	62.00	0.85	0.84

20							
21	Calculation of seasonal index				Raw SI	SI	
22	Q1		0.97	0.91	0.89	0.92	0.92
23	Q2		0.85	0.83	0.83	0.84	0.84
24	Q3	1.12	1.07	1.13		1.11	1.11
25	Q4	1.12	1.15	1.15		1.14	1.14
26					SUM =	4.01	4.00
27							
	18	16	85			1.14	

第四步：按季节调整原序列

	A	B	C	D	E	F
1	某电脑公司四年的季度销售量（百台）					
2	t	Xt	CMA	SD	SI	AdjXt
3	1	46			0.92	49.92
4	2	40			0.84	47.83
5	3	61	54.25	1.12	1.11	55.17
6	4	64	57.38	1.12	1.14	56.31
7	5	58	59.88	0.97	0.92	62.94
8	6	53	62.00	0.85	0.84	63.37
9	7	68	63.50	1.07	1.11	61.51
10	8	74	64.13	1.15	1.14	65.11
11	9	60	65.63	0.91	0.92	65.11
12	10	56	67.38	0.83	0.84	66.96
13	11	77	68.25	1.13	1.11	69.65
14	12	79	68.88	1.15	1.14	69.51
15	13	62	69.88	0.89	0.92	67.28
16	14	59	71.25	0.83	0.84	70.55
17	15	82			1.11	74.17
18	16	85			1.14	74.79

第五步：用趋势线拟合新数列



第六步：预测及误差

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	某电脑公司四年的季度销售量（百台）										
2	t	Xt	CMA	SD	SI	AdjXt	Trend	Ft	 Et 	 Et ^2	% Error
3	1	46			0.92	49.92	51.88	47.81	1.81	3.28	3.94
4	2	40			0.84	47.83	53.46	44.71	4.71	22.22	11.79
5	3	61	54.25	1.12	1.11	55.17	55.05	60.86	0.14	0.02	0.23
6	4	64	57.38	1.12	1.14	56.31	56.63	64.36	0.36	0.13	0.57
7	5	58	59.88	0.97	0.92	62.94	58.22	53.65	4.35	18.92	7.50
8	6	53	62.00	0.85	0.84	63.37	59.80	50.01	2.99	8.92	5.64
9	7	68	63.50	1.07	1.11	61.51	61.38	67.87	0.13	0.02	0.20
10	8	74	64.13	1.15	1.14	65.11	62.97	71.56	2.44	5.93	3.29
11	9	60	65.63	0.91	0.92	65.11	64.55	59.49	0.51	0.26	0.85
12	10	56	67.38	0.83	0.84	66.96	66.14	55.31	0.69	0.47	1.23
13	11	77	68.25	1.13	1.11	69.65	67.72	74.87	2.13	4.53	2.77
14	12	79	68.88	1.15	1.14	69.51	69.30	78.77	0.23	0.06	0.30
15	13	62	69.88	0.89	0.92	67.28	70.89	65.33	3.33	11.07	5.37
16	14	59	71.25	0.83	0.84	70.55	72.47	60.61	1.61	2.59	2.73
17	15	82			1.11	74.17	74.06	81.88	0.12	0.02	0.15
18	16	85			1.14	74.79	75.64	85.97	0.97	0.93	1.14
19									MAD	MSE	MAPE%
20									1.66	4.96	2.98

公式？

预测第五年第一、二季度

1) 先计算趋势值：

$$t = 18 : 50.297 + 1.5839 \times 18 = 78.81$$

$$t = 17 : 50.297 + 1.5839 \times 17 = 77.22$$

2) 第一季度的季节指数为0.92，故预测值为：

$$77.22 \times 0.92 = 71.17$$

3) 第二季度的季节指数为0.82，故预测值为：

$$78.81 \times 0.82 = 65.91$$

本章内容

1. 时间序列及模式
2. 预测精度
3. 水平模式下的预测
4. 趋势模式下的预测
5. 趋势与季节模式下的预测
6. **Minitab：多种预测方法的比较**

Minitab: 方法比较

1. 长期趋势(线性回归)预测 (有趋势, 无季节)
2. 移动平均预测 (无趋势, 无季节)
3. 单参数指数平滑模型 (无趋势, 无季节)
4. 双参数指数平滑模型 (有趋势, 无季节)
5. Winter模型 (有趋势, 有季节)
6. 分解模型 (有趋势, 有季节)

一、长期趋势预测(线性回归)

Minitab: 统计->时间序列->趋势分析

拟合趋势方程

$$Y_t = 47.65 + 1.92 * t$$

准确度度量

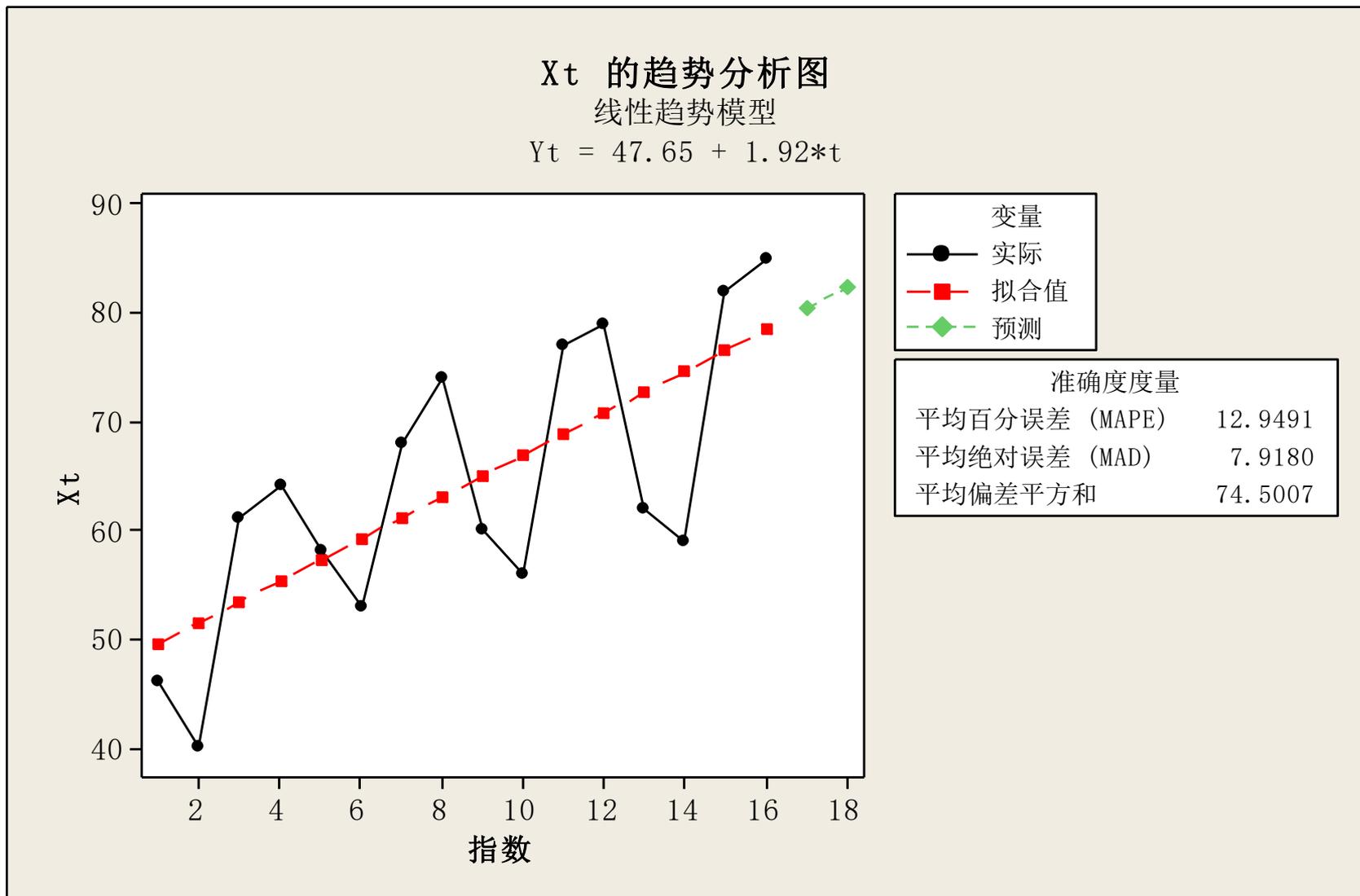
平均百分误差 (MAPE) 12.9491

平均绝对误差 (MAD) 7.9180

平均偏差平方和 74.5007

预测	周期	预测
	17	80.3500
	18	82.2735

一、长期趋势预测(线性回归)

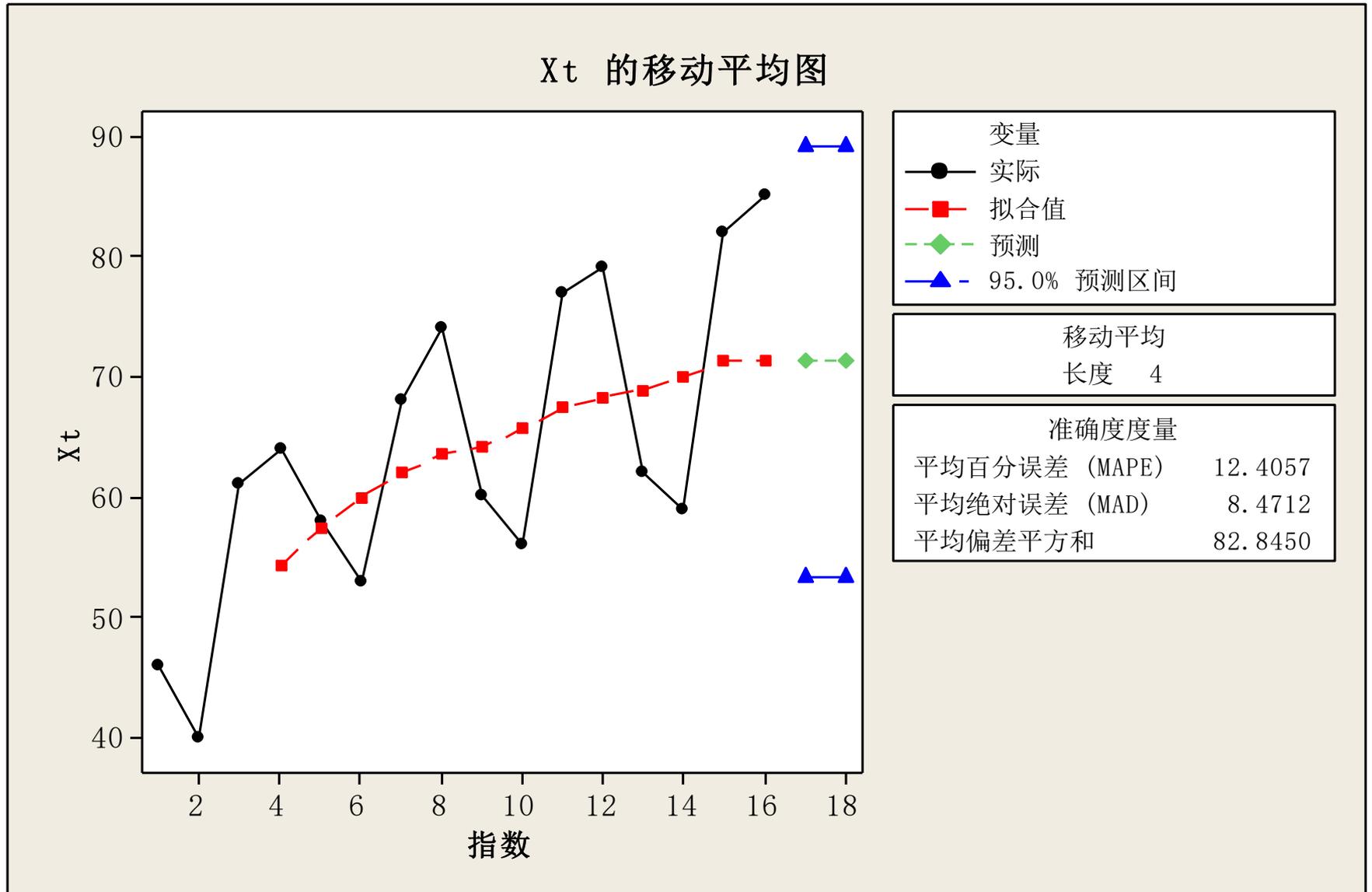


二、移动平均预测

Minitab: 统计->时间序列->移动平均

数据	Xt		
长度	16		
缺失数据数	0		
移动平均			
长度	4		
准确度度量			
平均百分误差 (MAPE)	12.4057		
平均绝对误差 (MAD)	8.4712		
平均偏差平方和	82.8450		
预测			
周期	预测	下限	上限
17	71.25	53.4106	89.0894
18	71.25	53.4106	89.0894

二、移动平均预测



三、单参数指数平滑模型预测

Minitab: 统计->时间序列->单指数平滑

平滑常量

Alpha 0.382687

准确度度量

平均百分误差 (MAPE) 15.730

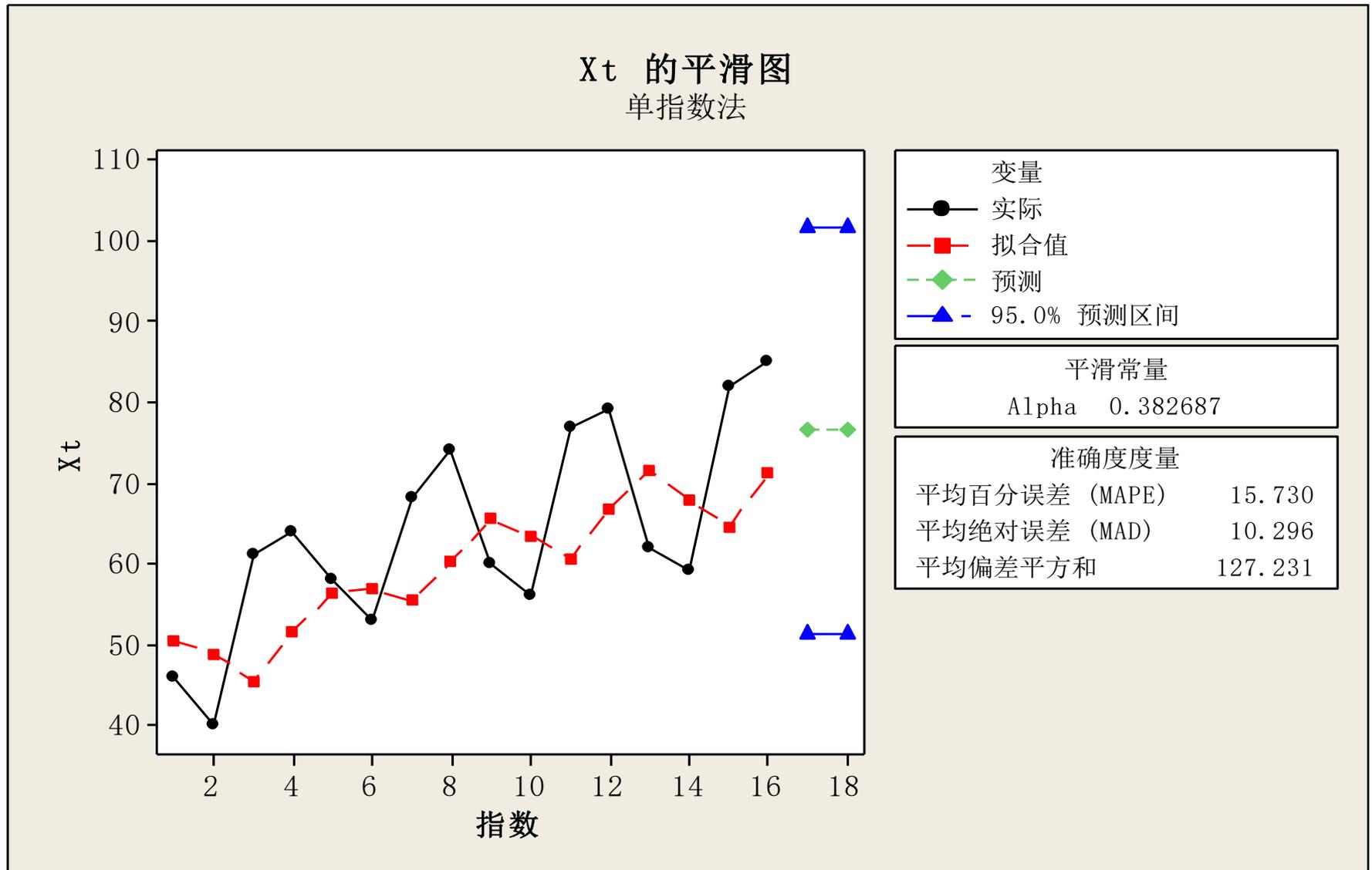
平均绝对误差 (MAD) 10.296

平均偏差平方和 127.231

预测

周期	预测	下限	上限
17	76.4689	51.2440	101.694
18	76.4689	51.2440	101.694

三、单参数指数平滑模型预测



四、双参数指数平滑模型预测

Minitab: 统计->时间序列->双指数平滑

平滑常量

Alpha (水平) 1.52887

Gamma (趋势) 0.02179

准确度度量

平均百分误差 (MAPE) 19.684

平均绝对误差 (MAD) 11.905

平均偏差平方和 223.485

预测

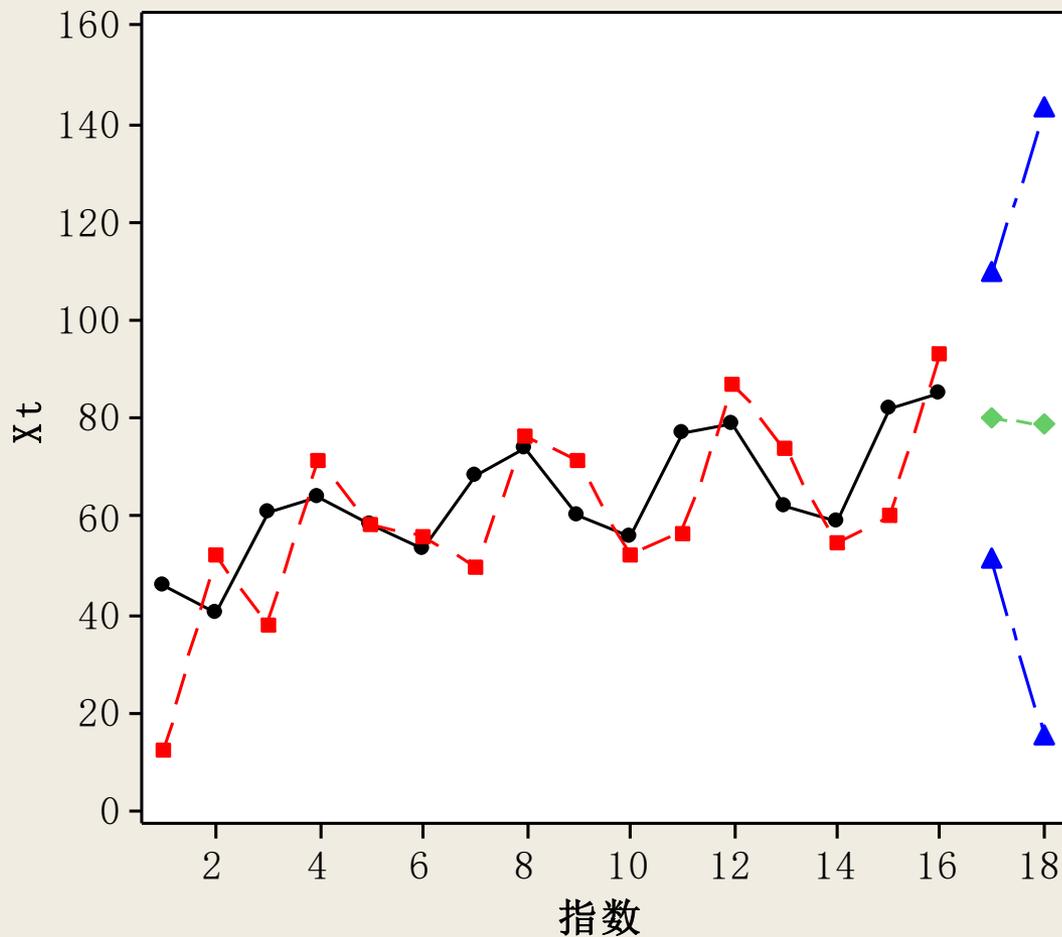
周期	预测	下限	上限
----	----	----	----

17	79.8188	50.6518	108.986
----	---------	---------	---------

18	78.7972	15.0048	142.590
----	---------	---------	---------

四、双参数指数平滑模型预测

X_t 的平滑图
双指数法



变量
—●— 实际
—■— 拟合值
—◇— 预测
—▲— 95.0% 预测区间

平滑常量	
Alpha (水平)	1.52887
Gamma (趋势)	0.02179

准确度度量	
平均百分误差 (MAPE)	19.684
平均绝对误差 (MAD)	11.905
平均偏差平方和	223.485

五、Winter模型（有趋势和季节）

Minitab：统计→时间序列→Winters方法

Xt 的 Winters 方法

平滑常量

Alpha（水平） 0.4

Gamma（趋势） 0.4

Delta（周期） 0.2

准确度度量

平均百分误差（MAPE） 7.8291

平均绝对误差（MAD） 4.6783

平均偏差平方和 35.8551

预测

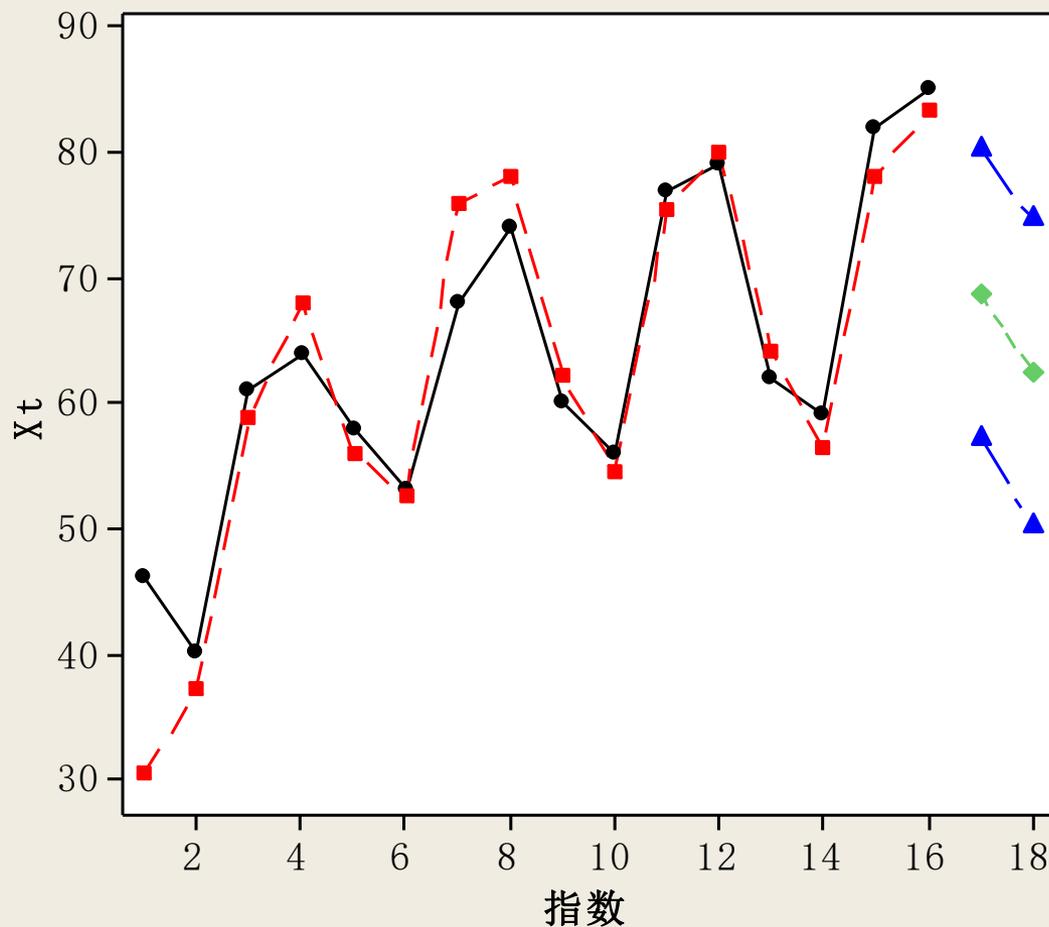
周期	预测	下限	上限
----	----	----	----

17	68.7041	57.2424	80.1657
----	---------	---------	---------

18	62.4144	50.2126	74.6163
----	---------	---------	---------

五、Winter模型（有趋势和季节）

Xt 的 Winters 方法图
乘法



变量	
—●—	实际
—■—	已平滑
—◇—	预测
—▲—	95.0% 预测区间

平滑常量	
Alpha (水平)	0.4
Gamma (趋势)	0.4
Delta (周期)	0.2

准确度度量	
平均百分误差 (MAPE)	7.8291
平均绝对误差 (MAD)	4.6783
平均偏差平方和	35.8551

六、分解模型（有趋势和季节）

Minitab: 统计→时间序列→分解

X_t 的时间序列分解

乘法模型

数据 X_t

长度 16

缺失数据数 0

拟合趋势方程

$$Y_t = 50.58 + 1.56 * t$$

季节性指数

周期 指数

1 0.91044

2 0.82768

3 1.11970

4 1.14218

准确度度量

平均百分误差 (MAPE) 3.10745

平均绝对误差 (MAD) 1.74623

平均偏差平方和 4.80285

预测

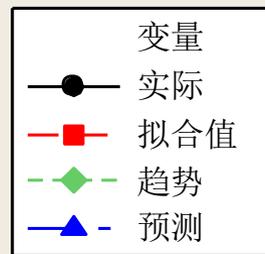
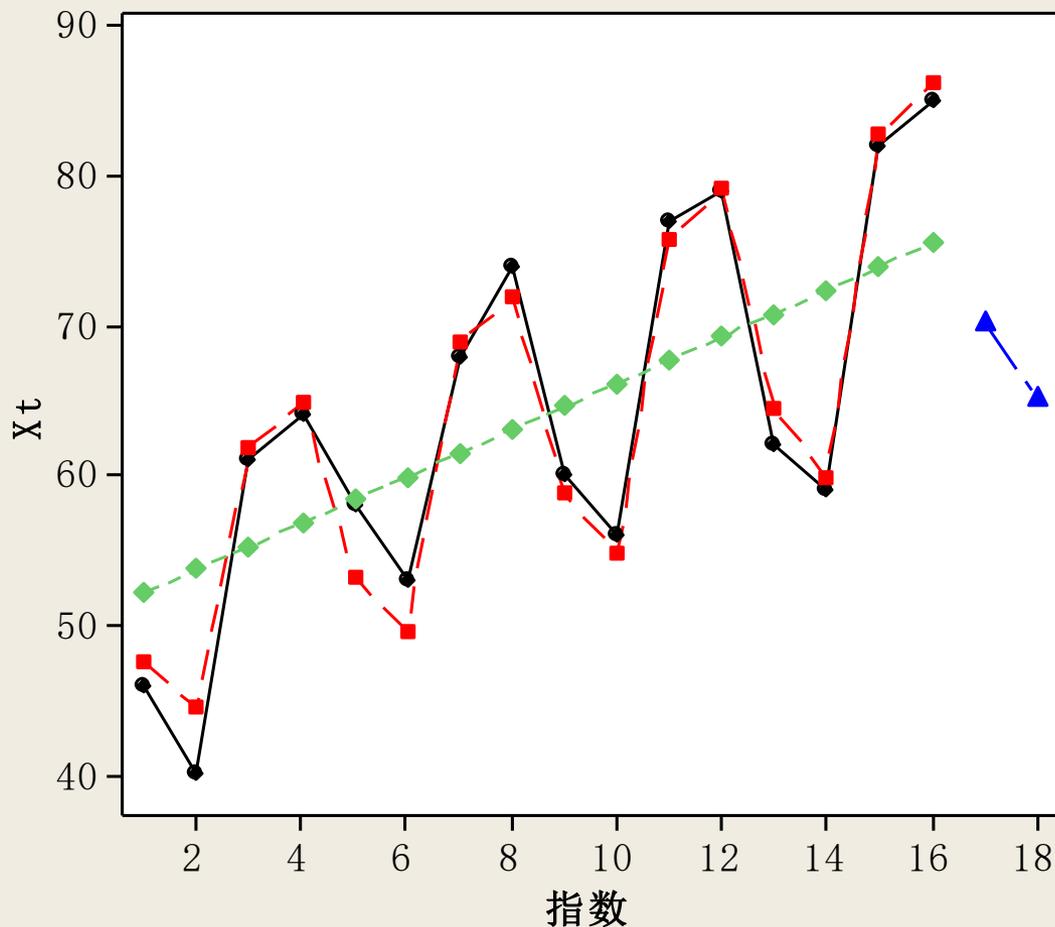
周期 预测

17 70.1633

18 65.0743

六、分解模型（有趋势和季节）

X_t 的时间序列分解图
乘法模型



准确度度量

平均百分误差 (MAPE)	3.10745
平均绝对误差 (MAD)	1.74623
平均偏差平方和	4.80285

六种方法的比较

	拟合趋势方程	移动平均	单参数平滑	双参数平滑	Winters方法	分解法
MAPE	12.95	12.41	15.73	19.68	7.83	3.11
MAD	7.92	8.47	10.3	11.91	4.68	1.75
预测17	80.35	71.25	76.47	79.82	68.7	70.16
预测18	82.27	71.25	76.47	78.8	62.41	65.07

因为本例有趋势及季节变化，如不做相应调整，误差很大。本例以分解法最准确，Winters方法次之。

本章总结

1. 水平模式：无趋势、无季节、无循环
 - ✓ 移动平均预测：k项平均
 - ✓ 简单指数平滑模型（单参数平滑模型）
2. 趋势模式：有趋势、无季节
 - ✓ 线性趋势回归
 - ✓ 非线性趋势回归
 - ✓ 双参数指数平滑(Holt线性指数平滑)
3. 季节模式：无趋势，有季节
 - ✓ 同期平均法
4. 趋势与季节模式：
 - ✓ 虚拟变量回归
 - ✓ Holt-Winter模型
 - ✓ 分解法

实践与讨论：呼叫中心呼叫量的预测

计算机俱乐部仓库(Computer Club Warehouse,CCW)是通过电话(网上、传真)下单的方式销售各种计算机产品。公司设有呼叫中心,统一通过800免费电话下单。

呼叫中心接线员虽然工资不低,但精神紧张,容易产生厌倦感,因此人员流动较大,造成中心管理问题很多,订单处理效率低下,指示错误时有发生,员工士气低落。

新任呼叫中心经理李小姐临危任命,新官上任三把火。

三把火之一:安装一个关键数据记录程序,每一次的通话记录和每一位接线员所处理的呼叫量都记录下来;

三把火之二:对表现出色的员工予以大手笔奖励;

三把火之三:开发一个程序来估计下个季度的呼叫量,据此在每个季度末根据人员流失情况,决定多少新人以便进行下一轮的培训(每季度初)。

实践与讨论：呼叫中心呼叫量的预测

总裁告诉李小姐，公司的呼叫量和销售量一直遵循“25%规则”，即公司每个季度非常平稳，只有第四季度猛增25%。

李小姐实施三年以后，发现总裁告诉她的预测模型很不准确，导致她从来没有获得正确的雇员人数，给工作造成很多被动。

总裁以前的预测模型：

二季度预测量 = 一季度呼叫量，

三季度预测量 = 二季度呼叫量，

四季度预测量 = 1.25(三季度呼叫量)，

下年一季度预测量 = 四季度呼叫量/1.25。

请你计算旧预测模型的误差，然后为李小姐提出最合适的预测模型，并比较预测误差。

实践与讨论：呼叫中心呼叫量的预测

年	季度	电话呼叫量
1	1	6809
1	2	6465
1	3	6569
1	4	8266
2	1	7257
2	2	7064
2	3	7784
2	4	8724
3	1	6992
3	2	6822
3	3	7949
3	4	9650