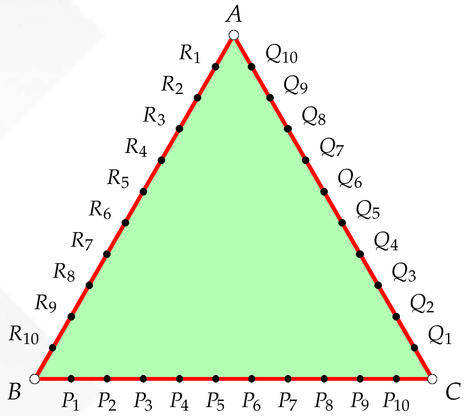
ಎರಡು ಸಮಸ್ಯೆಗಳ ಅಧ್ಯಯನ

ಕೋಮ್ಯಾಕ್

ಸಮಸ್ಯೆ ಪರಿಹರಿಸುವಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಸಾಹಸ ಎಂಬ ಶೀರ್ಷಿಕೆಯಡಿಯಲ್ಲಿನ ಸರಣಿ ಲೇಖನಮಾಲೆಯ ಅಂಗವಾಗಿ ಈ ಸಂಚಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ವಿವರವಾಗಿ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸುತ್ತಿದ್ದೇವೆ. ಮೊದಲನೆಯ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಅಕ್ಟೋಬರ್ 2016ರಲ್ಲಿ ನಡೆದ ರೀಜನಲ್ ಮ್ಯಾಥಮ್ಯಾಟಿಕ್ಸ್ ಒಲಿಂಪಿಯಾಡ್ (ಇಂಡಿಯಾ)ನಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸಿದ 6ನೆಯ ಸಮಸ್ಯೆಯಿಂದ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಹಿಂದಿನ ಸಂಚಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸಿದ್ದ ಟೂರ್ನಮೆಂಟ್ ಆಫ್ ದ ಟೌನ್ಸ್ ನಿಂದ ಆಯ್ದುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ. https://en.wikipedia.org/wiki/Tournament_of_the_Towns ಇಲ್ಲಿ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡುತ್ತಿರುವ ಸಮಸ್ಯೆಯು 1997ರಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬಂದಿತ್ತು; ಅಲ್ಲದೆ ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯು ದಕ್ಷಿಣ ಆಫ್ರಿಕಾದ ಒಲಿಂಪಿಯಾಡ್‌ನಲ್ಲೂ ಮಂಡಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿತ್ತು. ಎಂದಿನಂತೆ, ನಾವು ಮೊದಲು ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಮಂಡಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ, ಪರಿಹಾರವನ್ನು ನೋಡುವುದಕ್ಕೆ ಮುಂಚಿತವಾಗಿಯೇ ನೀವು ಅದನ್ನು ಬಗೆಹರಿಸಲು ಒಂದು ಅವಕಾಶವನ್ನು ನೀಡುತ್ತಿದ್ದೇವೆ.

ಸಮಸ್ಯೆ 1

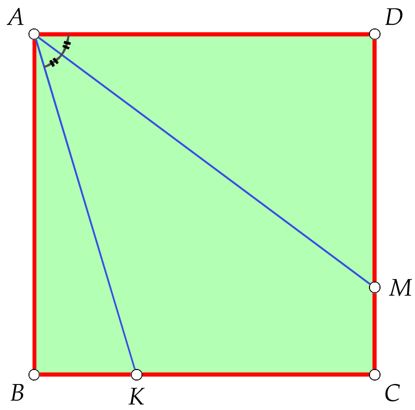
ABC ಒಂದು ಸಮಕೋನತ್ರಿಕೋನ (ಚಿತ್ರ 1 ನೋಡಿರಿ). ಬಾಹು BCಯ ಮೇಲೆ $P_1, P_2, \ldots P_{10}$) ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಅದೇ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಇಡಲಾಗಿದ್ದು, ಈ ಬಿಂದುಗಳು BC ಬಾಹುವನ್ನು 11 ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿವೆ. ಅಂತೆಯೇ $Q_1, Q_2, \ldots Q_{10}$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು CA ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲೆ ಅದೇ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿಯೇ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಇವೂ CA ಬಾಹುವನ್ನು11 ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸುತ್ತವೆ. $R_1, R_2, \ldots R_{10}$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು AB ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದ್ದು, ಇವೂ ಸಹ AB ಬಾಹುವನ್ನು 11 ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸುತ್ತವೆ. ಈಗ ತ್ರಿಕೋನ $P_iQ_jR_k$ ಗುರುತ್ವ ಕೇಂದ್ರವು (ಸೆಂಟ್ರಾಯ್ಡ್) ತ್ರಿಕೋನ ABC ಯ ಗುರುತ್ವ ಕೇಂದ್ರಕ್ಕೆ ಸರಿಹೊಂದುವಂತೆ ಎಷ್ಟು $P_iQ_jR_k$ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ರಚಿತವಾಗಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಎಣಿಸಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 1

ಸಮಸ್ಯೆ 2

$ABCD$ ಒಂದು ಚೌಕವಾಗಿದ್ದು (ಚಿತ್ರ 2 ನೋಡಿ) K ಬಾಹು BC ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿದೆ. ಕೋನ $\angle KAD$ ಯ ಒಳವಿಭಾಜಕವು CD ಬಾಹುವನ್ನು ಬಿಂದು M ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. ಈಗ $AK = BK + DM$ ಎಂಬುದನ್ನು ದೃಢಪಡಿಸಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 2

ಮೊದಲನೆಯ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಪರಿಹಾರ

ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯು ಅದು ಕಾಣುವುದಕ್ಕಿಂತ ಬಹಳ ಸುಲಭದ್ದಾಗಿದೆ. ಅಲ್ಲದೆ, ಉತ್ತರವು ನೀವು ಸ್ವೋಪಜ್ಞತೆಯಿಂದ ನಿರೀಕ್ಷಿಸುವುದೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ!

ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಒಂದು ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ತ್ರಿಕೋನ ABCಯ BC, CA, AB ಬಾಹುಗಳ ಮೇಲೆ P, Q, Rಗಳು ಬಿಂದುಗಳು ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ. PQR ತ್ರಿಕೋನದ ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರವು ABC ತ್ರಿಕೋನದ ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರದೊಂದಿಗೆ ಮಿಳಿತವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದೂ ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ. ಈಗ, P, Q, R ಬಿಂದುಗಳು ತಮ್ಮ ತಮ್ಮ ಬಾಹುಗಳ ಮೇಲೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಎಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ ಎಂದು ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವೆ?

A ಅನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ (ಕೋಆರ್ಡಿನೇಟ್) ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಮೂಲವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ. ಬಿಂದುಗಳಾದ P, Q, R ಕ್ರಮವಾಗಿ BC, CA, AB ಭುಜಗಳ ಮೇಲೆ ಸ್ಥಾಪಿತವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದ u, v, w ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಸಮೀಕರಣ ಸಂಬಂಧಿತವಾಗಿ ಸ್ಥಾಪಿತವಾಗುತ್ತವೆ (ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ಪ್ರತಿ ಬಿಂದುವಿನ ಹೆಸರನ್ನು ಅವುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು (ಕೋ-ಆರ್ಡಿನೇಟ್‌ಗಳನ್ನು) ಸಹ ಸೂಚಿಸಲು ಬಳಸುತ್ತಿದ್ದೇವೆ):

$$P = uB + (1-u)C, \quad Q = vC + (1-v)A, \quad R = wA + (1-w)B. \tag{1}$$

$A = 0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಸಮೀಕರಣವು ಹೀಗೆ ಪರಿವರ್ತಿತವಾಗುತ್ತದೆ:

$$P = uB + (1-u)C, \quad Q = vC, \quad R = (1-w)B. \tag{2}$$

ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರಗಳು ಒಂದೆಡೆ ಮಿಳಿತವಾಗುವುದರಿಂದ,

$$\frac{(A+B+C)}{3} = \frac{(P+Q+R)}{3} \tag{3}$$

ಆಗುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಸಮೀಕರಣವು ಸ್ಥಾಪಿತವಾಗುತ್ತದೆ :

$$B + C = uB + (1-u)C + vC + (1-w)B. \tag{4}$$

ಇದರಿಂದ ನಮಗೆ

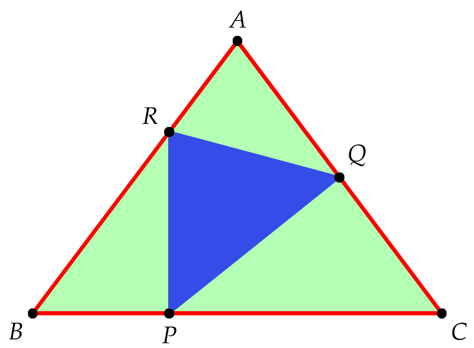
$$(w-u)B = (v-u)C \tag{5}$$

ಈಗ $(w-u)B$ ಕಿರಣ $\overrightarrow{AB}$ರ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುವಾಗಿದೆ. ಹಾಗೆಯೆ $(v-u)C$ ಕಿರಣ $\overrightarrow{AC}$ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುವಾಗಿದೆ. ಇವೆರೆಡೂ ಕಿರಣಗಳು ಹಂಚಿಕೊಂಡಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುವೆಂದರೆ ಅದು A ಮಾತ್ರ. ಹಾಗಾಗಿ $w-u=0$ ಹಾಗು $v-u=0$, ಇದರಿಂದ ನಮಗೆ ಸಿಗುವುದು $u=v=w$.

ಆದ್ದರಿಂದ: *P, Q, R ಬಿಂದುಗಳು BC, CA, AB ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಸಮ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಭಾಗಿಸಿವೆ.*

ಇದೇ ಉತ್ತರವನ್ನು ಆರ್‌ಎಮ್‌ಒ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ ನಮಗೆ ಕಂಡುಬರುವುದೆಂದರೆ ತ್ರಿಕೋನ $\triangle P_iQ_jR_k$ ಹಾಗೂ ತ್ರಿಕೋನ $\triangle ABC$ ಎರೆಡಕ್ಕೂ ಒಂದೇ ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರ ಇರುತ್ತದೆ, ಆದರೆ $i = j = k$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ. ಅಂದರೆ ತ್ರಿಕೋನವು $P_iQ_jR_k$ ರೂಪದಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ. ಹಾಗಾಗಿ ಇಲ್ಲಿ ಈ ರೀತಿಯ 10 ತ್ರಿಕೋನಗಳಿವೆ. ■

ಟಿಪ್ಪಣಿ: ತ್ರಿಕೋನ ABCದ ಆಕಾರವು ಈ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಎಲ್ಲಿಯೂ ಸಂಬಂಧಿಸಿಲ್ಲ! ಹಾಗಾಗಿ ನೀಡಿರುವ ತ್ರಿಕೋನವು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಕೋನವೆಂಬ ಮಾಹಿತಿಗೆ ಇಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಪ್ರಸ್ತುತತೆ ಇಲ್ಲ. ತ್ರಿಕೋನವು ಯಾವುದೇ ಆಕಾರದಲ್ಲಿದ್ದರೂ ಇದೇ ಪರಿಹಾರ ಸಿಗುತ್ತಿತ್ತು.

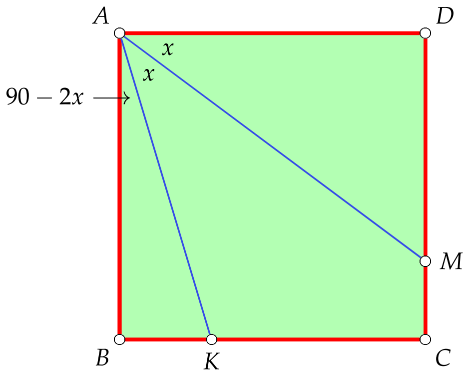


ಚಿತ್ರ 3

ಸಮಸ್ಯೆ 2 ರ ಪರಿಹಾರ

ಈ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ನಾವು ಮೂರು ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ನೀಡಲಿದ್ದೇವೆ! ಪ್ರಾಯಶಃ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯನ್ನು ಬಳಸುವ ಮೊದಲನೆಯ ಪರಿಹಾರವೇ ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ನೇರ ಮತ್ತು ಸರಳವಾದದ್ದು.

ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ರೀತ್ಯಾ ಪರಿಹಾರ : $\measuredangle KAM$ನ್ನು x ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ. ಆಗ $\measuredangle MAD$ ಸಹ x ಆಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು $\measuredangle BAK = 90^\circ - 2x$ ಆಗುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 4 ನೋಡಿ).



ಚಿತ್ರ 4

ಚತುರ್ಭುಜವಾದ $ABCD$ಯ ಭುಜಗಳ ಅಳತೆ a ಘಟಕ ಆಗಿರಲಿ. ಈಗ ನಮಗೆ ಲಬ್ಧ ಅಂಶವೆಂದರೆ :

$$\begin{aligned} AK &= \frac{AB}{\cos(90^\circ - 2x)} = \frac{a}{\sin 2x}, \\ BK &= a\tan(90^\circ - 2x) = a \cdot \frac{\cos 2x}{\sin 2x}, \\ DM &= a\tan x. \end{aligned}$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಸಾಧಿಸಬೇಕಾದ ಸಮೀಕರಣವು ಈ ಕೆಳಕಂಡ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿದೆ :

$$\frac{1}{\sin 2x} = \frac{\cos 2x}{\sin 2x + \tan x}. \tag{6}$$

ಇದು ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿತವಾಗುತ್ತದೆ.

$$\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x} = \tan x,$$

$$\text{ಅಂದರೆ,}\quad \frac{2\sin^2 x}{2\sin x\cos x} = \tan x.$$

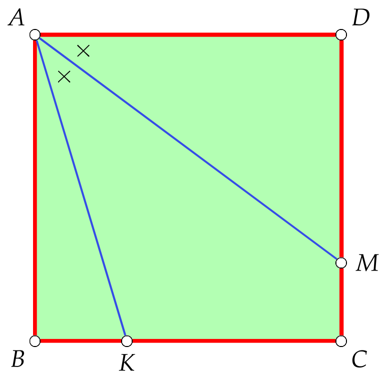
ಆದರೆ ಇದು ತ್ವರಿತವಾಗಿ ದೊರೆತುದು! ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವು ಸತ್ಯ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿದಂತಾಯಿತು. ■

ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಪರಿಹಾರ: ಎರಡನೆಯ ಪರಿಹಾರವು ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ದತ್ತ ಚೌಕದ ಬಾಹುಗಳ ಅಳತೆ 1 ಮಾನ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ, ಚಿತ್ರದ ಬಲಗಡೆಯಲ್ಲಿ ನೀಡಿರುವ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ (ಚಿತ್ರ 5 ನೋಡಿ) ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಿ ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ರೇಖೆಗಳಾದ AK ಮತ್ತು AM ಗಳ ಇಳಿಜಾರುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಇರುತ್ತವೆ.

$$AK\text{ಯ ಇಳಿಜಾರು} = \frac{0-1}{k-0} = -\frac{1}{k},$$

$$AM\text{ನ ಇಳಿಜಾರು} = \frac{m-1}{1-0} = m-1$$



$A = (0, 1),\ B = (0, 0)$

$C = (1, 0),\ D = (1, 1)$

$K = (k, 0)$

$M = (1, m)$

$\measuredangle KAM = \measuredangle MAD$

ಚಿತ್ರ 5

ADಯ ಇಳಿಜಾರು 0 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿತ ಸೂತ್ರದ ಅನ್ವಯ

$$\frac{(m-1)-(-1/k)}{1+(m-1)(-1/k)} = \frac{0-(m-1)}{1+0\cdot(m-1)},$$

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿದರೆ

$$\frac{k(m-1)+1}{k-m+1} = -(m-1).$$

ಎಂದು ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ. m ಗೆ ಸಂಬಂಧಿತವಾಗಿ k ಯನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸರಳಗೊಳಿಸಿದಾಗ

$$2k(m-1) = (m-1)^2 - 1, \quad \therefore\ k = \frac{m(2-m)}{2(1-m)}.$$

ಎಂದು ದೃಢವಾಗುತ್ತದೆ.

AM ರೇಖೆಯು $\measuredangle KAD$ ಯ ಛೇದಕವಾಗಬೇಕಾದರೆ ಇದು k ಮತ್ತು m ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಕ್ರಮವಾಗಿದೆ. ಈಗ $AK = BK + DM$ ಆಗಬೇಕಾದರೆ k ಮತ್ತು m ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಕ್ರಮ ಹೇಗಿರಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ದತ್ತ ಅಂಶಗಳು ಹೀಗಿವೆ:

$$AK = \sqrt{k^2+1}, \quad BK = k, \quad DM = 1-m.$$

$AK = BK + DM$ ಸಮೀಕರಣವು $AK^2 = BK^2 + DM^2 + 2\,BK\cdot DM$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿದೆ. ಎಂದರೆ,

$$k^2 + 1 = k^2 + m^2 - 2m + 1 + 2k(1-m),$$

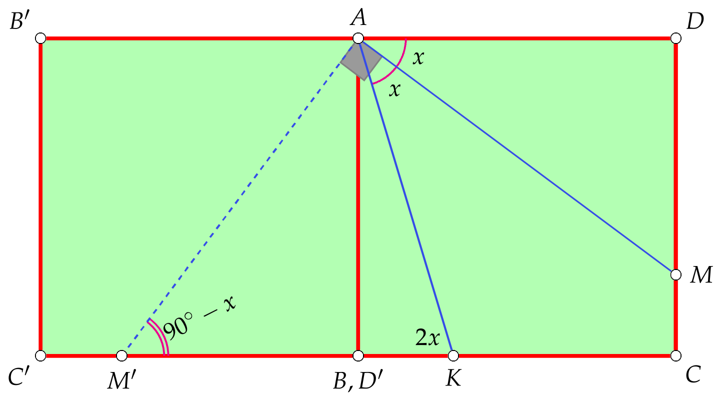
ಸರಳಗೊಳಿಸಿದಾಗ,

$$2k(1-m) = 2m - m^2, \quad \text{ಎಂದರೆ,} \quad k = \frac{m(2-m)}{2(1-m)}.$$

ನಾವು ಮೊದಲು ಗಳಿಸಿದ ಕ್ರಮವನ್ನೇ ಇಲ್ಲಿಯೂ ಪಡೆದಿದ್ದೇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ತನ್ಮೂಲಕ ನಾವು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದಾದ ಅಂಶವೆಂದರೆ AM ರೇಖೆಯು $\measuredangle KAD$ ಯನ್ನು ಛೇದಿಸಿದರೆ ಮಾತ್ರ $AK = BK + DM$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ■

ಶುದ್ಧ ರೇಖಾಗಣಿತ ರೀತ್ಯಾ ಪರಿಹಾರ : ಶುದ್ಧ ರೇಖಾಗಣಿತ ರೀತ್ಯಾ ಮೂರನೆಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಮಂಡಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಸಂಬಂಧಿತ ವಿಷಯವನ್ನು ಮುಕ್ತಾಯಗೊಳಿಸುತ್ತೇವೆ. ಎಂದಿನಂತೆಯೇ, ಈ ವಿಧದ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಕಷ್ಟವಾದರೂ, ಕಂಡುಹಿಡಿದ ನಂತರ ಬಹಳ ಸರಳ ಎನಿಸುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಇಂತಹ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಅಮಿತ ಆನಂದದಾಯಕ. ಏಕೆಂದರೆ ಇಂತಹ ಪರಿಹಾರಗಳೇ ಸ್ವಯಂ ಸುಂದರವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಈ ಪರಿಹಾರಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿತ ರಚನೆಯನ್ನು ಚಿತ್ರ 6 ರಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

ನಾವು ಈ ಇಡೀ ಸಂರಚನೆಯನ್ನು (ಎಂದರೆ AK ಮತ್ತು AM ಖಂಡಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಚೌಕ $ABCD$) ಬಿಂದು Aಅನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರಿಸಿಕೊಂಡು ಗಡಿಯಾರದ ನಡೆಯ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ $90°$ ಕೋನದಲ್ಲಿ ತಿರುಗಿಸಿದೆವು. (ಇಲ್ಲಿ ಶೃಂಗಗಳಾದ $ABCD$ ಯನ್ನು



ಚಿತ್ರ 6

ಗಡಿಯಾರದ ನಡೆಯ ವಿರುದ್ಧ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ನೇಮಿಸಲಾಗಿದೆ ಎಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ). ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದಂತೆ ಚೌಕವನ್ನು ತಿರುಗಿಸಿದಾಗ ಶೃಂಗಗಳಾದ B, C, D, K, M ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ B', C', D', K', M' ಆಗಿ ಪರಿವರ್ತನೆಗೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. ಶೃಂಗ D' ಶೃಂಗ B ಯೊಂದಿಗೆ ಮಿಳಿತವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಆದ್ದರಿಂದ $M'B = MD$ ಆಗುತ್ತದೆ. KAM ಅನ್ನು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಪರಿಹಾರದಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಿರುವಂತೆಯೇ x ಎಂದು ಗುರುತಿಸೋಣ. ಈಗ ಸರಳವಾಗಿ ಪರಿಶೀಲಿಸಿದಾಗ (ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಿದಾಗ) ಕಂಡುಬರುವ ಅಂಶಗಳೆಂದರೆ $\measuredangle AKB = 2x$, ಮತ್ತು $\measuredangle M'AK = 90^\circ - x$. ತನ್ಮೂಲಕ $\measuredangle KM'A = 90^\circ - x$ ಎಂಬುದು ವ್ಯಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆ. ಈಗ $\measuredangle KM'A = \measuredangle M'AK$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $AK = M'K$ ಆಗಿರಲೇಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ $AK = BK + DM$. ಎಂದು ಸಾಬೀತಾಗುತ್ತದೆ. ■

ದ ಕಮ್ಯುನಿಟಿ ಮ್ಯಾಥಮ್ಯಾಟಿಕ್ಸ್ ಸೆಂಟರ್ (ಕೋಮ್ಯಾಕ್) ಎಂಬುದು ರಿಷಿವ್ಯಾಲಿ ಎಜುಕೇಶನ್ ಸೆಂಟರ್ (ಆಂಧ್ರಪ್ರದೇಶ) ಮತ್ತು ಸಹ್ಯಾದ್ರಿ ಸ್ಕೂಲ್ (ಕೆಎಫ್ಐ) ಸಂಸ್ಥೆಗಳ ವಿಸ್ತೃತ ಅಂಗವಾಗಿದೆ. ಅದು ಗಣಿತ ಶಿಕ್ಷಣ ಶಿಬಿರಗಳನ್ನು ಹಮ್ಮಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ರಾಜ್ಯ ಸರ್ಕಾರ ಹಾಗೂ ಸರ್ಕಾರೇತರ ಸಂಸ್ಥೆಗಳಿಗೆ ಬೋಧನ ಸಾಮಗ್ರಿಗಳನ್ನು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಿಕೊಡುವ ಕೈಂಕರ್ಯದಲ್ಲಿಯೂ ತೊಡಗಿದೆ. ಕೋಮ್ಯಾಕ್‌ನ ಸಂಪರ್ಕ ಕೊಂಡಿ: shailesh.shirali@gmail.com.

ಅನುವಾದ : ಎನ್. ರಾಮನಾಥ್