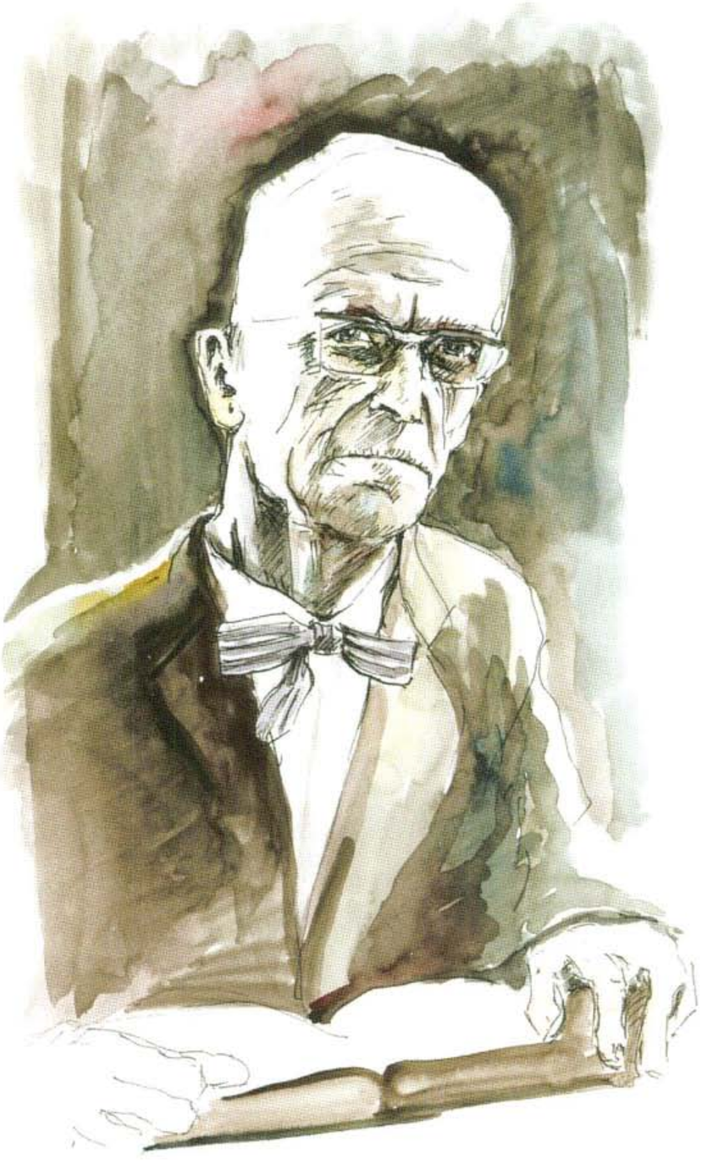
Hellmuth Kneser

Gesammelte Abhandlungen

Collected Papers



Watercolour painting by Karl H. Hofmann

Hellmuth Kneser

Gesammelte Abhandlungen
Collected Papers

Herausgegeben von / Edited by
Gerhard Betsch · Karl Heinrich Hofmann

Walter de Gruyter · Berlin · New York

Editors

Gerhard Betsch
Mathematisches Institut
Universität Tübingen
Auf der Morgenstelle 10
72076 Tübingen
Germany
E-Mail:
Gerhard.Betsch@t-online.de
Private address: Furtbrunnen 17
71093 Weil im Schönbuch
Germany

Karl Heinrich Hofmann
Fachbereich Mathematik
Technische Universität Darmstadt
Schlossgartenstr. 7
64289 Darmstadt
Germany
E-Mail:
hofmann@mathematik.tu-darmstadt.de

♾ Printed on acid-free paper which falls within the guidelines of the ANSI to ensure permanence and durability.

Library of Congress Cataloging-in-Puplication Data

Kneser, Hellmuth.
[Papers. Selections]
Hellmuth Kneser : Gesammelte Abhandlungen : collected papers / edited by Gerhard Betsch, Karl Heinrich Hofmann.
p. cm.
Papers in German and French; commentaries in English.
Includes bibliographical references.
ISBN-13: 978-3-11-016653-8 (acid-free paper)
ISBN-10: 3-11-016653-4 (acid-free paper)
1. Topology. 2. Functions of several complex variables. I. Title: Gesammelte Abhandlungen. II. Title: Collected papers. III. Betsch, Gerhard, 1934– IV. Hofmann, Karl Heinrich. V. Title.
QA611.K57 2005
514–dc22
2005025651

ISBN-13: 978-3-11-016653-8
ISBN-10: 3-11-016653-4

Bibliographic information published by Die Deutsche Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data is available in the Internet at <http://dnb.ddb.de>.

Printed in Germany.
Printing and binding: Hubert & Co. GmbH & Co. KG, Göttingen

Preface

In the 19th and 20th centuries mathematics progressed at a speed unprecedented in history. One has to throw a glance back at ancient Greece to observe mathematical developments of comparable historic impact. As early as 1900, the volume of accumulated mathematical information began to exceed the capacity of most individuals. If one looks for works or biographies of single mathematicians who successfully steered against this tide, retaining a global view over the wide horizons of their field, then one will find HELLMUTH KNESER as eminent. This is evidenced by his works and the testimonials about him, in particular the excellent obituaries by HELMUT SALZMANN[1] and HELMUT WIELANDT[2]. They show the high esteem in which this extraordinary scholar was held. The time is overdue to pick up the thread a quarter of a century later, and to make HELLMUTH KNESER's work available to the mathematical public at large. This is the purpose of the present edition. In recent years there has been a considerable outpouring of handbooks and historical surveys on the mathematics of the 20th century and on the development of topology in particular. But the editors believe that the impact of HELLMUTH KNESER's work is not yet fully appreciated. In a similar vein, KNESER's contributions to the theory of several complex variables are largely forgotten. One of the reasons may well be that HELLMUTH KNESER published in German and continued to do so after 1945 when English became the language of scholarly communication in mathematics. In several recent publications authors confirmed the point of view that HELLMUTH KNESER's works are overdue for a re-evaluation. Therefore it appears important to us that his papers are collected and their impact on 20th century mathematics is made evident. The time is ripe for several reasons: On the one hand, from the distance of time, the recollections of the person and his influence can concentrate and focus on the essentials, while, on the other, at this juncture, contemporary witnesses can still speak up on biographical experiences, on the context of KNESER's research, on his ingenuity for posing the right questions and to open up avenues for their solutions. Quite a few of KNESER's works were published in journals and series which are not easily accessible; therefore, a collection of his works may be particularly welcome.

In his obituary of June 22, 1974,[3] HELMUT WIELANDT called for a collection of KNESER's papers to be assembled at the library of the department of mathematics at

[1] *Das Ende einer Ära. Zum Tod von Professor Hellmuth Kneser*, Schwäbisches Tagblatt, 28. August 1973.

[2] *Hellmuth Kneser in Memoriam*, Aequationes Mathematicae 11 (1975), 120a–120c, and *Hellmuth Kneser*, Jahrbuch 1974 der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, 87–89, see also: B. Huppert und H. Schneider (eds.), *Helmut Wielandt, Mathematische Werke/Mathematical Works*, Vol. 2: Linear Algebra and Analysis, de Gruyter, Berlin 1996, 521–523, 524–526.

[3] *Obituary for Hellmuth Kneser: An Address at the University of Tübingen*, Manuscript of June 22, 1974.

Tübingen. This collection was never entirely completed, and, in any event, it would have been a merely local resource.

Commentaries that elucidate the importance and impact of KNESER's works should contribute to the usefulness of this edition, notably as the language in which they are presented is English. The editors owe a great debt of gratitude to all these contributors who shared their expertise on various aspects of HELLMUTH KNESER's papers with the readers and users of this collection.

At the turn from the 19th to the 20th century, DAVID HILBERT (1862–1943) gave the famous address in which he formulated 23 problems, that were to become a legend. He did not only describe the status of mathematical research at the time, but indeed determined its direction for half a century to come. His command of all the mathematics known at the time gave him the authority to take this groundbreaking step. Another characteristic of HILBERT's universality is the almost incredible number of his Ph.D. students, numbering, as it were, 69. HELLMUTH KNESER was one of them and matured in this climate of mathematical fermentation.

Still in his early youth, HELLMUTH KNESER must have made a daring resolution. On June 22, 1974, in his obituary for KNESER, HELMUT WIELANDT describes it as follows:

> *The width of the horizon, which was characteristic for the mathematical life in the circle of Klein and Hilbert, agreed with his manifold interests and gifts to such an extent that he arrived at a remarkable decision: He renounced specialisation. He desired to gain an overview and a comprehension of all parts of his discipline... He approached the realisation of his resolution, called reckless by himself 30 years later, to such a degree that he amazed his colleagues...*[4]

In the twenties HELLMUTH KNESER was one of the most universal scholars among the German mathematical community. Yet the subsequent explosion of mathematical knowledge exceeded even his capacity. In an autobiographical text[5] HELLMUTH KNESER observes himself:

> *[In Göttingen] my mathematical education evolved in the midst of the diverse currents of stimuli more than abundantly offered by the local academic teachers as well as by the numerous equally important visitors from all over the world. So I acquired an overview over a handsome portion of mathematics; in this regard I could feel superior to my coevals. Perhaps the price I paid was giving up the raw power that others may draw from a wise restriction to a specialty.*

[4] Die Weite des Gesichtsfeldes, die das mathematische Leben im Umkreis von KLEIN und HILBERT kennzeichnete, entsprach seinen vielseitigen Interessen und Fähigkeiten in einem solchen Maße, daß er einen bemerkenswerten Entschluß faßte: Er verzichtete darauf, sich zu spezialisieren. Er wünschte über alle Teile seiner Wissenschaft Übersicht und Urteil zu gewinnen... Der Verwirklichung dieses, wie er selbst 30 Jahre später sagte, verwegenen Wunsches sollte er in einem Grade nahekommen, der seine Fachgenossen mit Staunen erfüllte ...

[5] Böhm, W. Ernst (ed.), *Forscher und Gelehrte*, Battenberg Verlag, Stuttgart, 1966, p. 116.

There were two areas to which I remained sufficiently faithful during the twenties and thirties. Topology attracted my attention through its captivating intuitive problems, whose degree of difficulty could then be assessed only incompletely. The stupendous development of this area, that was in full ascent at the time, went counter to some of my intuitions that I had formed of its future run. This may have contributed to the fact that I participated in this development with occasional contributions only, but in the end took part in it merely as an interested by-stander.

Around 1920, the theory of analytic functions, now [1966] called complex analysis, had reached, notably through the work of Hartogs—to name but one name—the potential of unfolding in a grandiose fashion. This insight imposed itself to the observers, not too numerous at the time, who had taken notice of the status of this theory. It was to it that I devoted a number of publications from 1926 on. Of these my lay-out of a theory of entire and meromorphic function pleased me most, notably as W. Stoll, after the Second World War, recast and generously enlarged it.[6]

Remarkably, in his later years, KNESER was still able to view mathematics from a high vantage point. The variety of subjects to which he contributed through decades is stunning: theoretical physics, topology, the theory of functions of one and several variables, theory of Lie groups, ordinary and partial differential equations. A new facet of KNESER's contributions to mathematics emerged after the Second World War. The rule of National Socialism in Germany and its total defeat in the Second World War had devastating effects on the mathematical culture in Germany; after the war, there was a massive demand for establishing various fields in which German mathematics had fallen behind. Among these was stochastics and mathematical economy. HELLMUTH KNESER not only felt called upon to diagnose such deficits but to promote vigorously their remedy. He was equally active in conveying to the general public the importance

[6] Meine Ausbildung [in Göttingen] vollzog sich zwischen den verschiedenen Strömungen des überreichen Angebots von Anregungen, das von den ansässigen akademischen Lehrern und den zahlreichen ebenso bedeutenden Besuchern aus aller Welt ausging. So erwarb ich eine Übersicht über einen hübschen Teil der Mathematik und konnte mich in dieser Hinsicht der Mehrzahl meiner Altersgenossen überlegen fühlen. Der Preis dafür bestand vielleicht in dem Verzicht auf die Stoßkraft, die mancher andere aus der klugen Beschränkung auf ein Spezialgebiet gewinnt.

Zwei Gebieten habe ich im Laufe der zwanziger und dreißiger Jahre einige Treue bewahrt. Die Topologie zog mich an durch die fesselnden anschaulichen Probleme, deren Schwierigkeitsgrad vielfach noch kaum abzuschätzen war. Die damals in vollem Anstieg befindliche gewaltige Entwicklung dieses Gebietes widerlegte gewisse Vorstellungen, die ich mir von dem zukünftigen Verlauf gebildet hatte; das mag dazu beigetragen haben, daß ich an jener Entwicklung nur mit gelegentlichen Beiträgen, sonst als interessierter Zuschauer teilgenommen habe.

Die Theorie der analytischen Funktionen, jetzt komplexe Analysis genannt, war um 1920 (nach den Arbeiten von Hartogs – um nur einen Namen zu nennen –) reif zu einer großen Entfaltung; diese Erkenntnis drängte sich den – nicht eben zahlreichen – Beobachtern auf, die von dem Stande dieser Theorie Kenntnis nahmen. Ihr galt von 1926 an eine Reihe von Veröffentlichungen, von denen mein Entwurf einer Theorie der ganzen und der meromorphen Funktionen (1936 und 1938) die meiste Freude machte, besonders dadurch, daß nach dem zweiten Weltkrieg W. Stoll ihn neu begründete und großzügig erweiterte.

of mathematics for a modern community and to work for good teaching of mathematics in schools.

A revitalisation of an open communication of the "two cultures"[7] is a pressing concern of both parties today. In a highly acclaimed address to the International Congress of Mathematicians in Berlin 1998 the prominent German writer HANS MAGNUS ENZENSBERGER described the image of mathematics in the eyes of the public in these terms:[8]

> *There is surely no other field in which the cultural time lag is so enormous. Popular consciousness trails research by centuries. Indeed, one can state dispassionately that great segments of the population have never progressed beyond the mathematical levels of the ancient Greeks. An equivalent backwardness in other fields—medicine, say, or physics—would arguably be perilous. Less directly this could be said of mathematics also, for never has a civilisation been so infused with mathematical methodology—right down to its everyday life—and so dependent on it as ours.*

In his own inimitable way, KNESER always contributed to bridging the gap between the two cultures. His many-faceted personality impressed his colleagues, coworkers, and students alike. We shall give a brief biographical sketch below; this edition is not the place to elaborate the details of his biography. We intend to offer a contribution to this topic elsewhere, but we hope to have explained our motivation for this edition.

The editors greatly appreciate the cooperation and the moral support of numerous authors who have provided texts shedding light on the achievements of this extraordinary mathematician and the impact his research has had on the course of 20th century research in several areas.

First and foremost, the editors thank all the contributors who authored the commentaries on individual articles or groups of texts by HELLMUTH KNESER. They are particularly grateful to HELLMUTH KNESER's sons. MARTIN KNESER supported them in their work on this collection as strongly and as actively as he could; the editors are profoundly saddened by the tragic fact that he did not live to see it completed. They thank HUBERT and ANDREAS KNESER for their warm assistance in providing them with a portrait (~1932) of HELLMUTH KNESER's Greifswald period that was not known to the mathematical community, and for giving their permission to print it; they have been very supportive of the entire project as well.

The editors express their gratitude to the publisher personalities of DR. MANFRED KARBE and DR. IRENE ZIMMERMANN for their accompanying the project of this collection from its beginning with their professional advice, collaboration and en-

[7] Snow, C. P., *The two cultures*, Cambridge University Press, 1993.

[8] *Drawbridge up: Mathematics—A Cultural Anathema*, German and English; translated from the original German by Tom Artin, A K Peters Ltd., Natick, Massachusetts, 1999, p. 31; German original: Enzensberger, H. M., *Zugbrücke außer Betrieb. Die Mathematik im Jenseits der Kultur. Eine Außenansicht*, Frankfurter Allgemeine Zeitung, 29. August 1998, Beilage, I–II.

couragement, and to the publisher, Verlag Walter De Gruyter in Berlin for publishing this book.

But they also acknowledge the active support of many persons who have, in one form or another contributed to the collection: Johannes André, Benno Artmann, Paul Conrad, D. van Dalen, Hartmut Ehlich, Moritz Epple, David B. A. Epstein, Jürgen Flachsmeyer, Martin Fuchs, Erich Glock, Fritz Häge, Erhard Heil, Max Häussler, Bertram Huppert, Horst Dieter Ibisch, Erwin O. Kreyszig, Wilfried Lagler, John Martin, John Milnor, Hans-Joachim Nastold†, Fritz Nestle, Karl Nickel, Karl Offenhäuser, Walter Piesch, Bernd Prätor, Andrew A. Ranicki, Heinrich Reichardt, Constance Reid, Helmut Salzmann, Peter Schreiber, Reinhard Siegmund-Schultze, Wilhelm Stoll, Heinrich Strecker, Olaf Tamaschke, Rüdiger Thiele, Walter Vogel, Karl Zeller.

Finally, the editors acknowledge the cooperation of the following institutions: Bundesarchiv Koblenz, Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Staatsbibliothek zu Berlin – Handschriftenabteilung, Universitätsarchiv Göttingen, Universitätsarchiv Tübingen, Universitätsbibliothek Tübingen.

Tübingen and Darmstadt, April 2005 *Gerhard Betsch and Karl H. Hofmann*

Contents

(Numbers in brackets refer to the bibliography on pp. 917–923)

Review Articles

Hellmuth Kneser: Biographical notes

Gerhard Betsch and Karl H. Hofmann

On April 16, 1898, HELLMUTH KNESER was born in Dorpat, a city of the Hanseatic League, now Tartu in Estland. His father was JULIUS CARL CHRISTIAN ADOLF KNESER (1862–1930), a professor of mathematics at the University of Dorpat, who later held professorial positions in Berlin and Breslau (today Wrocław in Poland). HELLMUTH's mother was LAURA KNESER, née BOOTH. In 1927 KNESER married HERTHA ADELHEID CLARA KNESER, née SCHEURLEN. The couple had three sons, Martin (1928–2004), Hubert (born 1930), and Andreas (born 1933). HERTHA KNESER came from a distinguished Swabian family of professors, public officials and judges.

After some private tutoring HELLMUTH KNESER attended primary school and high school at Breslau. From spring 1916 through autumn 1918 he was enrolled at the University and Institute of Technology in Breslau, where his principal teachers were his father ADOLF and ERHARD SCHMIDT. These were the final years of World War I; for reasons of health HELLMUTH KNESER was not drafted into military service. In 1918 young KNESER transferred to the University of Göttingen, where DAVID HILBERT was the dominating mathematician of the time. The mathematics faculty at Göttingen included EDMUND LANDAU, GUSTAV HERGLOTZ, and the emeritus FELIX KLEIN. In the summer 1919 EMMY NOETHER completed her "Habilitation", that is, her official qualification for university teaching. And for the winter semester 1920-21, RICHARD COURANT joined the faculty as full professor.

In the Göttingen environment HELLMUTH KNESER progressed with remarkable speed. Under the formal direction of HILBERT's he completed a dissertation on the foundations of quantum dynamics. In fact KNESER worked independently; HILBERT wrote a referee's report on the dissertation and conducted the oral examination which was held on the 21st of March, 1921. On October 1 of the same year HELLMUTH KNESER was appointed "Personal Assistant" to RICHARD COURANT; in this capacity he fulfilled various administrative duties such as supervising the institute library, support work for the major professor, and tutoring students. This appointment initiated a close personal relationship between COURANT and KNESER.

As early as December 1, 1922 KNESER had completed his "Habilitation", was made "Privatdozent", and thus became a member of the teaching faculty. Main results of his habilitation thesis were published in [9–24b] (see KNESER's Bibliography). Soon HELLMUTH KNESER established a high reputation as a mathematical scholar.

In 1925 he was awarded a fellowship of the International Education Board (Rockefeller Foundation) which enabled him to spend the summer of that year with NIELS NIELSEN in Copenhagen. On the 1st of October 1925, at the age of 27, he was appointed Full Professor of Mathematics at the University of Greifswald, on the coast of the Baltic Sea. In 1932 and 1933 he occupied the position of the Dean of the "Philosophische Fakultät" (School of Liberal Arts and Sciences) at this university.

A decisive turn in KNESER's career was brought about in 1937 by the offer to succeed the geometer KARL KOMMERELL at the University of Tübingen in southwestern Germany, which he accepted. He remained in Tübingen through his 1966 retirement until his death on August 23, 1973. In 1942 he declined a prestigious offer by the University of Munich to succeed CONSTANTIN CARATHÉODORY.

In the post-war years 1951–52 he was Dean of the "Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät" (School of Mathematics and Sciences) of the University of Tübingen, a position he had previously held at Greifswald.

From 1949 through 1972 he was a member of the Advisory Board of Mathematische Zeitschrift (volumes 51–129). From 1952 on he was an editor of Archiv der Mathematik (Basel), and from 1968 an editor of Aequationes Mathematicae.

In 1954, HELLMUTH KNESER was President of the Deutsche Mathematiker Vereinigung (German Mathematical Union); from 1953 to 1956 he was a member of the board of this organisation. In 1958 he was Director of Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach. In the following years he was a member of the council of this institution.

HELLMUTH KNESER's achievements received their due recognition in the form of memberships in prestigious academies. In 1957 he was elected ordinary member of the Heidelberg Academy of Sciences. He was a corresponding member of the Academy of Sciences in Göttingen, and of the Academy of Sciences at Helsinki; furthermore, he was honorary member of the Belgian Mathematical Society (Société Mathématique de Belgique).

The following is a listing of persons having acquired a Ph.D. degree or the "venia legendi" (Habilitation) under HELLMUTH KNESER's supervision.

Ph. D. students and candidates for "Habilitation"

Who?	**Where?**	**Doctorate**	**Habilitation**
Reinhold Baer (1902–1979)	Göttingen	1925	
Wilhelm Süß (1895–1958)	Greifswald		1928
Johannes Krzoska (*1907)	Greifswald	1933	
Helmut Urban	Greifswald	1934	
Rudolf Witt (*1907)	Greifswald	1935	
Günter Pickert (*1917)	Tübingen		1948
Karl Nickel (*1924)	Tübingen	1949	

Wilhelm Friedrich Stoll (*1923)	Tübingen	1953	1954
Walter Vogel (*1923)	Tübingen	1955	1960
Irvine Noel Baker (1932–2001)	Tübingen	1957	
Karl Heinrich Hofmann (*1932)	Tübingen	1958	1962
Horst Dieter Ibisch (*1932)	Tübingen	1961	1966

It should be recalled in this context that HELLMUTH KNESER was only 27 years old when REINHOLD BAER received his doctorate under his supervision.

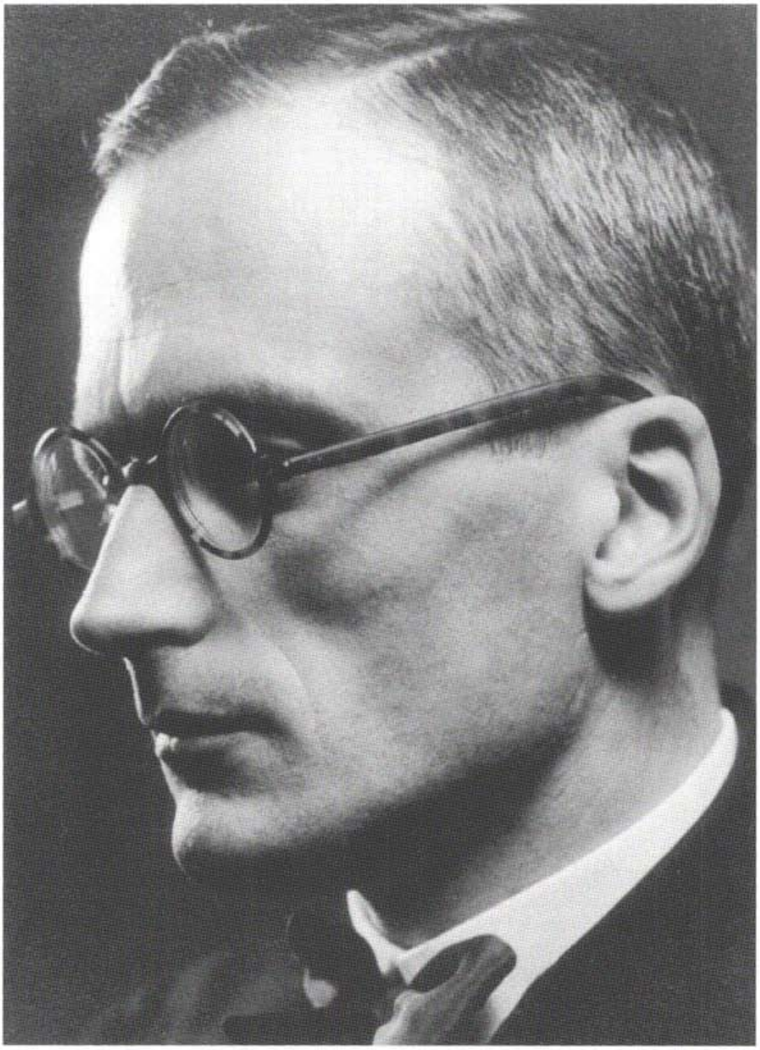
Furthermore it should be noted that HELLMUTH KNESER was the Second Reader of the dissertations, submitted to the University of Tübingen, of the following 8 mathematicians: Wolfgang Walter (1956), Helmut Salzmann (1957), Erich Glock (1961), Wilhelm Niethammer (1964), Peter Zahn (1965), Frieder Schwenkel (1966), Horst Zimmer (1966), and Manfred Reimer (1968).

Karl H. Hofmann, Fachbereich Mathematik, Technische Universität Darmstadt, Schlossgartenstr. 7, 64289 Darmstadt, Germany

E-mail: `hofmann@mathematik.tu-darmstadt.de`

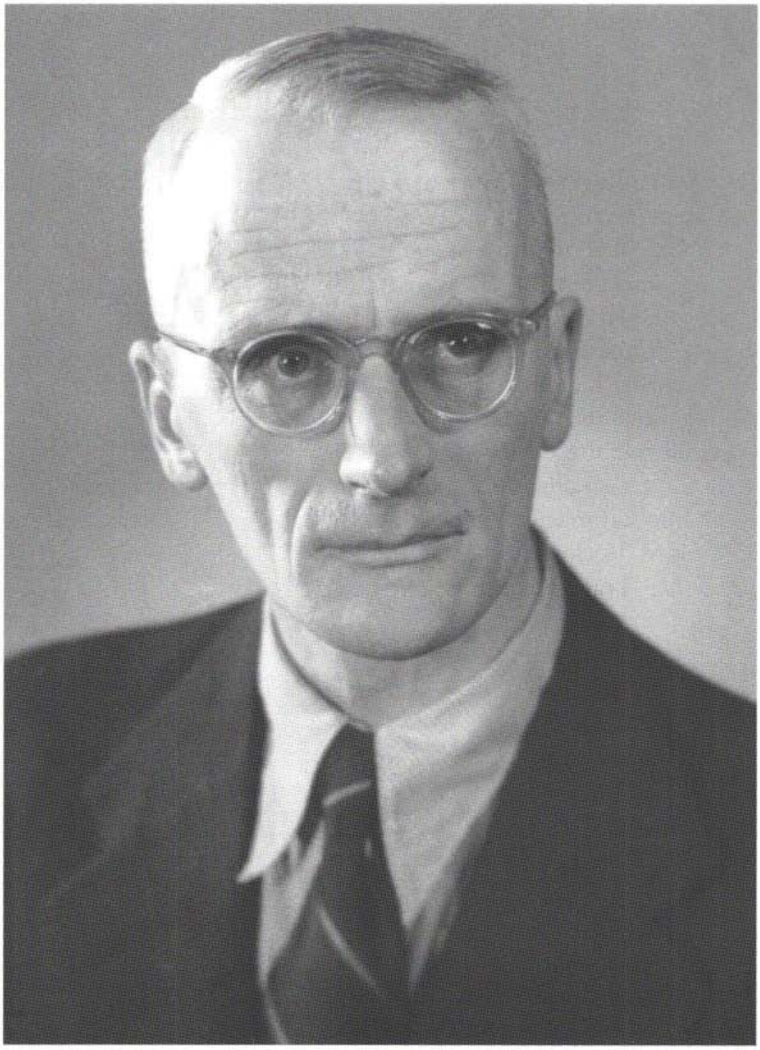
Gerhard Betsch, Furtbrunnen 17, 71093 Weil i. S., Germany

E-mail: `Gerhard.Betsch@t-online.de`



Agnes Domnick

Hellmuth Kneser around 1932



Universitätsarchiv Tübingen

Hellmuth Kneser in 1950

Antrittsrede [101–57]

Sitzungsber. Heidelberger Akad. Wiss., Jahresheft 1957/58, 25–27

Hellmuth Kneser

Für die ehrenvolle Wahl zum Mitglied sage ich der Akademie meinen tiefempfundenen Dank. Pflichtgemäß berichte ich über meine Entwicklung und in Auswahl über meine Arbeiten, so wie ich sie sehe und beurteile.

Die ersten stärkeren Einflüsse auf mein wissenschaftliches Werden gingen von meinen akademischen Lehrern Adolf Kneser und Erhard Schmidt aus. Adolf Kneser, mein Vater, hat meine Hinwendung zur Mathematik vor sich gehen lassen, aber nicht anregend gefördert, und zwar, wie ich vermute, aus einem wohlerwogenen Grundsatz heraus. Im Studium gab er mir die Grundlagen; in der allgemeinen Haltung zur Wissenschaft und zu akademischen Angelegenheiten hat sein lebendiges Vorbild und die Erinnerung daran bestimmend auf mich eingewirkt. In Erhard Schmidts Vorlesungen bekam ich den ersten Eindruck von der Eleganz und der Tragweite der modernen begrifflichen Methoden in der Mathematik.

Auf die Frage, wem unter meinen Lehrern ich meine weitere Formung zu verdanken habe, wäre die Antwort zu vielfältig für die heutige Gelegenheit. In Göttingen, wo ich die zweite Hälfte meiner Studienzeit zubrachte, herrschte in den Jahren nach dem ersten Weltkrieg ein mathematisches Leben von einer Fülle, wie sie damals nur an ganz wenigen Orten zu finden war. Das war eine Gefahr für einen werdenden Mathematiker, in dem sich der verwegene Wunsch entwickelte, über alle Teile seiner Wissenschaft und ihr System Übersicht und Urteil zu gewinnen, in jedes Teilgebiet forschend selbst eingreifen zu können. Diese jugendliche Einstellung hielt mich davon zurück, mich einem der dort tätigen Arbeitskreise, dem um Landau etwa oder um Emmy Noether anzuschließen; zu deutlich bemerkte ich die Einseitigkeit, die ein solcher Anschluß bei manchen meiner Altersgenossen mit sich brachte.

So kann ich mich nicht eines Mannes Schüler nennen; auch bei Hilbert kommt mir dieser Titel nicht zu, obwohl ich, nach Vorarbeiten auf geometrischen Gebieten, die Anregung zu meiner Doktorarbeit von ihm erhielt. In Hilbert bereitete sich damals seine letzte große Leistung vor: die Beweistheorie; sie war zur Heranziehung von jungen Mitarbeitern noch nicht genügend entwickelt. Aber aus seinem immer regen Interesse an den Prinzipien der Physik heraus forderte er mich auf, zu sehen was eine gewisse briefliche Mitteilung von Carathéodory über periodische Felder in der Variationsrechnung für die Quantentheorie zu bedeuten habe. Meine Arbeit, auf die Hilbert keinen Einfluß nahm, stellte in ihrer schließlichen Gestalt die überraschend engen Grenzen fest, in denen die mathematischen Formulierungen der damaligen Quantentheorie überhaupt nur anwendbar waren; sie bestärkte von der mathematischen Seite her das bei Physikern schon bestehende Verlangen nach neuen Formulierungen, die denn auch nach wenigen Jahren von den Erneuerern der Quantentheorie aufgestellt wurden.

Die Wahl meiner weiteren Arbeitsgebiete stand unter dem Einfluß des Strebens nach allseitiger Pflege der Mathematik. Den Vorrang erhielten, neben kleineren Beiträgen zu verschiedenen Gebieten, die Topologie und die Theorie der analytischen Funktionen mehrerer Veränderlicher. Beide faßte ich früh ins Auge; beide schienen mir hinter hoch ausgebildeten Nachbargebieten in der Entwicklung zurückzustehen und lebhafte Fortschritte in naher Zukunft in Aussicht zu stellen, eine Erwartung, die sich bestätigt hat. An der Topologie fesselte mich dazu die Spannung zwischen der schwer greifbaren gestaltlichen Gegebenheit und der erstrebten quantitativen Kennzeichnung. Von meinen Leistungen auf diesem Gebiet erwähne ich eine. Als es mir gelang, die regulären Kurvenscharen auf geschlossenen Flächen vollständig anzugeben, ergab sich gewissermaßen von selbst die Existenz einer geschlossenen Kurve in jeder Schar auf dem Kleinschen Schlauch. Die Methode ist seitdem nicht wieder angewandt worden, doch kann man, so meine ich, noch weitere Erfolge von ihr erwarten.

Unter meinen funktionentheoretischen Arbeiten möchte ich die Theorie der ganzen und meromorphen Funktionen mehrerer Veränderlicher herausheben. Nach den grundlegenden Leistungen von Poincaré, Cousin, Hahn und Gronwall hatten S. Bergmann, H. Cartan und andere gezeigt, daß man Teile der bei einer Veränderlichen hoch ausgebildeten Theorie auf mehrere Veränderliche übertragen kann. Die Ergebnisse befriedigten unter anderem deshalb noch nicht, weil sie keinen expliziten Ausdruck einer ganzen Funktion durch ihre Nullstellen lieferten, so wie es bei einer Veränderlichen die durch Hadamard vervollständigte Produktformel von Weierstraß tat. Meine Idee war einfach, ja naiv: bei Weierstraß wird der Logarithmus der Funktion ausgedrückt durch eine Summe über die isolierten Nullstellen der Funktion; bei mehreren Veränderlichen muß ein geeignetes Integral über die stetig ausgedehnte Nullstellenmannigfaltigkeit dasselbe leisten. Mein hartnäckiges Suchen nach einem solchen Integral führte zum Ziel, nachdem ich das Hilfsmittel einer Kähler-Metrik herangezogen hatte. Der gehörige Ausbau der dabei ausgebildeten Methoden ergab ferner die erste Stufe im Aufbau einer Theorie, die als die natürliche Übertragung von Rolf Nevanlinnas Theorie der meromorphen Funktionen auf das Gebiet mehrerer Veränderlicher angesprochen werden darf. Mein Schüler W. Stoll baute die Theorie aus und erweiterte ihren Gültigkeitsbereich in hohem Maße.

Nach dem zweiten Weltkrieg widmete ich einen Teil meiner Arbeitskraft der Theorie der Spiele. Es waren nur in zweiter Linie die mathematischen Reize der Theorie, die mich dazu antrieben. Stärker wirkte die Überzeugung, daß dieser neue Zweig der Mathematik der Wirtschaftswissenschaft, ja sogar der Soziologie wesentliches zu sagen habe. In Deutschland wurde er damals noch nicht gepflegt; mir schien es nötig, daß auch die deutsche Forschung auf diesem Gebiet den Anschluß gewönne. Durch werbende Vorträge und ein paar Veröffentlichungen habe ich diesen Anschluß fördern können.

Mathematical Articles

Eine Erweiterung des Begriffes „konvexer Körper“ [1–21a]

Math. Ann. **82** (1921), 287–296
[JFM 48.0840.04]

In seiner Arbeit über „Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme“ [1]) definiert Herr Steinitz die konvexe Punktmenge in der projektiven Geometrie des Raumes von n Dimensionen folgendermaßen (Bd. 146, S. 34): „Eine Punktmenge A heißt konvex, wenn von den beiden durch zwei Punkte von A bestimmten Strecken jedesmal die eine ganz zu A gehört und wenigstens eine äußere Ebene (Element vom Index $n - 1$) existiert, d. h. eine solche, die keinen Punkt von A enthält“, und fügt hinzu: „Dieser einschränkende Zusatz ist nötig; sonst würden Punktmengen wie die auf einer Seite einer hyperbolisch gekrümmten Fläche zweiter Ordnung, die von den sonst als konvex bezeichneten Mengen ganz verschieden sind, mit zu diesen gerechnet werden.“

Im folgenden werden auch solche Punktmengen als konvex bezeichnet, bei denen die einschränkende Bedingung nicht erfüllt ist; die, bei denen sie erfüllt ist, mögen „konvex im gewöhnlichen Sinne“ heißen. Obwohl bei dieser Erweiterung die bekannten Schlüsse nicht mehr anwendbar sind, gelten doch einige allgemeine Sätze, mit deren Hilfe sich eine Übersicht über die im Falle $n = 3$ hinzutretenden Arten ergibt, die sich dahin zusammenfassen läßt, daß in der Tat im wesentlichen nur die durch hyperbolisch gekrümmte Flächen zweiter Ordnung bestimmten Punktmengen hinzukommen. Hierin ist der Satz von Herrn C. Juel enthalten, daß jede Regelfläche zweiter Ordnung algebraisch ist [2]). Einen Satz, der bei etwas schärferen Voraussetzungen genau dem Satze 5 entspricht, beweist Herr B. P. Haalmeyer in seiner Dissertation [3]).

---

[1]) Journal f. d. r. u. ang. Math. **143**, S. 129f.; **144**, S. 1f.; **146**, S. 1f.

[2]) Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, 7. Række 1, Nr. 6.

[3]) Bijdragen tot de theorie der elementairoppervlakken. Amsterdam 1917.

§ 1.

Allgemeines.

Zunächst ist klar, daß die Komplementärmenge B einer konvexen Punktmenge A ebenfalls konvex ist; denn die Definition läßt sich auch so aussprechen: liegen zwei Punkte von A und zwei von B auf einer Geraden, so dürfen die beiden Punktepaare sich nicht trennen.

Durch vollständige Induktion wird bewiesen:

Satz 1. *Gehören $n+1$ linear unabhängige Punkte $P_0, P_1, \ldots, P_n$ zu der konvexen Punktmenge* A, *so ist ein jeder von ihnen, z. B. P_0, Ecke eines n-dimensionalen Simplex, dessen innere Punkte sämtlich zu* A *gehören. Darin ist enthalten, daß P_0 Häufungspunkt innerer Punkte von* A *ist*[4]).

Der Satz ist für $n = 1$ richtig; er wird für $n = N-1$ angenommen und für $n = N$ bewiesen. In der durch $P_1, P_2, \ldots, P_N$ bestimmten linearen Mannigfaltigkeit Λ gibt es dann ein $N-1$-dimensionales Simplex Σ, dessen innere Punkte zu A gehören; denn der Durchschnitt von Λ und A ist konvex. Die homogenen Koordinaten $x_0 : x_1 : \ldots : x_N$ seien so gewählt, daß $x_0 = 0, x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0, \ldots, x_N \geqq 0$ die Punkte von Σ und $x_0 \neq 0$, $x_1 = x_2 = \ldots = x_N = 0$ den Punkt P_0 kennzeichnet. Ist der Punkt Q mit den Koordinaten $0, \xi_1, \ldots, \xi_N$ in Σ enthalten $(\xi_i \geqq 0)$, so gehören alle Punkte $(x_0 > 0, \xi_1, \ldots, \xi_N)$ oder alle Punkte $(x_0 < 0, \xi_1, \ldots, \xi_N)$ zu A. Die Punkte Q, von denen das erste gilt, bilden die Menge M_1; die, von denen das zweite gilt, die Menge M_2. M_1 und M_2 bedecken zusammen ganz Σ. Hat M_1 innere Punkte, so gehört ein Simplex P in Σ ganz zu M_1, das durch $x_0 = 0, y_1 \geqq 0, y_2 \geqq 0, \ldots, y_N \geqq 0$ dargestellt sei, wobei $y_1, \ldots, y_N$ linear unabhängige Linearformen von $x_1, \ldots, x_N$ sind. Dann gehört das ganze N-dimensionale Simplex $x_0 \geqq 0, y_1 \geqq 0, y_2 \geqq 0, \ldots, y_N \geqq 0$ zu A: die Behauptung trifft zu. Hat aber M_1 keinen inneren Punkt, ist M_2 also in Σ überall dicht, so liegen in jedem N-dimensionalen Simplex: $a x_0 + x_1 + \ldots + x_N = 0$ $(a \geqq 0)$, $x_1 \geqq 0, \ldots, x_N \geqq 0$ die Punkte von A überall dicht. Nach dem für $N-1$ gültigen Satze 1 kann der Durchschnitt von B mit $a x_0 + x_1 + \ldots + x_N = 0$ als konvexe Punktmenge keinen Punkt im Inneren dieses Simplex enthalten (er müßte dann dort innere Punkte haben, A wäre nicht überall dicht); d. h. alle inneren Punkte des Simplex $x_0 \leqq 0$, $x_1 \geqq 0$, $x_2 \geqq 0, \ldots, x_N \geqq 0$ gehören zu A. Damit ist der Satz bewiesen.

Hat daher B innere Punkte und erweitert man die konvexe Punktmenge A durch Hinzunahme der nicht in ihr enthaltenen Häufungspunkte

[4]) Wegen der Begriffe Simplex, Umgebung, innerer Punkt, abgeschlossen siehe Steinitz, besonders **146**, S. 32f.

zu der abgeschlossenen Punktmenge A′, der *abgeschlossenen Hülle* von A, so hat A′ keine anderen inneren Punkte als A; denn ist P nicht innerer Punkt von A, so ist P Häufungspunkt von Punkten und daher auch von inneren Punkten der konvexen Punktmenge B (Satz 1 wird auf B angewandt), d. h. P ist nicht innerer Punkt von A′.

A′ *ist ebenfalls konvex*[5]). Werde angenommen, es trennen sich auf einer Geraden die Punktepaare P, R und Q, S, und es gehören P und R zu A′, Q und S aber nicht, sind also innere Punkte von B. In jeder Umgebung von P bzw. R gibt es Punkte P_1 bzw. R_1 von A. Wählt man diese Umgebungen genügend eng, so enthält die Gerade $P_1 R_1$ in der Umgebung der inneren Punkte Q und S von B Punkte Q_1 bzw. S_1 von B, die durch P_1 und R_1 getrennt werden. Wäre also A′ nicht konvex, so wäre es auch nicht A.

Haben also A und B innere Punkte, so erhält man A aus der abgeschlossenen konvexen Punktmenge A′, indem man einen Teil der Begrenzung von A′ wegläßt. Hat aber A (bzw. B) keinen inneren Punkt, so ist A (B) nach Satz 1 in einer linearen Mannigfaltigkeit von weniger als n Dimensionen enthalten; das Problem ist reduziert, da B (A) als Komplementärmenge voll bestimmt ist. Man darf sich also auf den erstgenannten Fall beschränken.

Die konvexe Punktmenge A habe demnach innere Punkte, ebenso die Komplementärmenge B. Die gemeinsame Begrenzung von A und B, d. h. der Durchschnitt der abgeschlossenen konvexen Punktmengen A′ und B′ sei Γ. Gehört eine Strecke PQ einer Geraden g ganz zu Γ, so gehört g ganz zu A′ oder ganz zu B′. Denn gehört R auf g zu A′ und nicht zu B′, S auf g zu B′ und nicht zu A′, ist also R innerer Punkt von A′, S von B′, und werden etwa P und R durch Q und S getrennt, so wählen wir je eine Folge innerer Punkte P_i und Q_i von A′ und B′, die bezüglich gegen P und Q konvergieren. Auf der Geraden $P_i Q_i$ liegen für genügend großes i innere Punkte R_i und S_i von A′ und B′ in der Umgebung von R bzw. S derart, daß P_i und R_i, zu A′ gehörig, durch Q_i und S_i getrennt sind, die als innere Punkte von B′ nicht zu A′ gehören. Dies ist aber unmöglich. Enthält daher der Durchschnitt Δ von Γ mit einer linearen Mannigfaltigkeit Λ von l Dimensionen innere Punkte bezüglich Λ, d. h. enthält Δ ein l-dimensionales Simplex Σ, so ist jeder Punkt S von Σ Häufungspunkt innerer Punkte (bezüglich Λ) von Δ. Ist P ein Punkt von Δ außerhalb Σ, so gehört von jeder Geraden PS, die P mit einem inneren Punkte S von Σ verbindet, mindestens eine Strecke PS ganz zu Δ; denn die Gerade PS hat mit Γ eine (S enthal-

[5]) Vgl. Steinitz, **143**, S. 150.

tende) Strecke gemeinsam, gehört also ganz zu A' (bzw. B') und trifft Γ und damit Δ genau in der Strecke, die sie mit B' (A') gemeinsam hat. Genau wie beim Beweise des Satzes 1 folgt daraus, daß es in jeder Umgebung eines Punktes von Δ ein Gebiet in Λ gibt, das von Δ überall dicht und wegen der Abgeschlossenheit von Δ vollständig bedeckt wird. Sind P und Q Punkte von Δ, so gibt es also eine Folge Q_i innerer Punkte von Δ, die nach Q konvergiert. Wie schon bewiesen wurde, muß immer von den beiden Strecken PQ_i, also wegen der Abgeschlossenheit von Δ auch von den beiden Strecken PQ, mindestens eine ganz zu Δ gehören; Δ ist konvex, wenn es innere Punkte bezüglich Λ hat.

Zwei nicht zu Δ gehörige Punkte von Λ lassen sich durch eine Strecke außerhalb Δ verbinden. Jeder Punkt dieser Strecke gehört zu genau einer der Mengen A' und B'; da diese abgeschlossen sind, gehört die ganze Strecke zu A' und nicht zu B' oder zu B' und nicht zu A'. Zwei Punkte von Λ außerhalb Δ gehören also beide zu A' (oder beide zu B'). Die Punkte von Δ sind A' und B' gemeinsam, und es folgt:

Satz 2. *Hat der Durchschnitt Δ der gemeinsamen Begrenzung Γ von A' und B' mit einer l-dimensionalen linearen Mannigfaltigkeit Λ bezüglich Λ innere Punkte, d. h. enthält Δ ein l-dimensionales Simplex, so gehört Λ ganz zu A' oder ganz zu B', und Δ ist konvex.*

Es habe Λ nun $n-1$ Dimensionen, sei etwa durch $x_0 = 0$ gegeben. Δ habe in Λ innere Punkte, so daß Λ ganz etwa zu A' gehört. Auf der Geraden g sei E Punkt von Δ, F innerer Punkt von Δ, P kein Punkt von Δ, also in n Dimensionen innerer Punkt von A'. In P, nicht aber in E und F sei $x_n = 0$. Man kann zu E und F je eine Umgebung derart bestimmen, daß die Verbindungsgerade zweier Punkte daraus einen inneren Punkt P' von A' (in der Umgebung von P) enthält. Nimmt man einen inneren Punkt Q von B' mit $\frac{x_0}{x_n} > 0$ in der Umgebung von E, und läßt sich in jeder Umgebung von F ein innerer Punkt R von B' mit $\frac{x_0}{x_n} < 0$ finden, so werde R so nahe an F gewählt, daß der Schnitt S der Geraden QR mit Λ zu Δ und damit zu A' gehört. Dann liegen die Punkte P' und S, die zu A' gehören, getrennt durch Q und R, die nicht zu A' gehören. Das kann nicht sein. Gibt es also in jeder Umgebung von E Punkte von B' mit $\frac{x_0}{x_n} > 0$, so gehören in der Umgebung von F alle Punkte mit $\frac{x_0}{x_n} < 0$ zu A'. Gäbe es in jeder Umgebung von F innere Punkte von A' mit $\frac{x_0}{x_n} > 0$, so würden auf der Verbindungsgeraden eines solchen Punktes T mit einem Punkte U von B' mit $x_0 \neq 0$ der Schnitt mit $\Lambda(x_0 = 0)$ und U zu B' gehören und durch T und den Schnitt mit $x_0 + p x_n = 0$, die für kleines $p > 0$ beide zu A' und nicht zu B' gehören, getrennt. Daher gehören in der Umgebung von F alle Punkte mit $\frac{x_0}{x_n} < 0$ zu A', alle mit $\frac{x_0}{x_n} > 0$ zu B', und dasselbe gilt für jeden Punkt der im Inneren von Δ verlaufenden Strecke EF. Auch in der Umgebung von E gehören alle Punkte $\frac{x_0}{x_n} < 0$ zu A'. Denn gäbe es eine Folge $E_i \to E$ innerer Punkte von B' mit $\frac{x_0}{x_n} < 0$, so würden auf den Verbindungsgeraden $E_i F_i$ mit den Punkten einer Folge $F_i \to F$ mit $\frac{x_0}{x_n} > 0$, die also schließlich nur innere Punkte von B' enthält, E_i und F_i durch Punkte P_i in der Umgebung von P und T_i in Δ getrennt, die beide zu A' gehören. Demnach gilt

Satz 3. *Hat Λ $n-1$ Dimensionen, Δ in Λ innere Punkte, so daß Λ ganz etwa zu A' gehört, so ist B' in der Umgebung eines Punktes von Δ ganz auf eine Seite von Λ beschränkt, wenn es durch diesen Punkt eine Gerade gibt, von der eine Strecke im Inneren, eine andere außerhalb von Δ verläuft.*

Nebenher folgt daraus, daß Δ ganz Λ erfüllt, wenn eine unpaare Kurve, etwa eine Gerade, ganz im Inneren von Δ verläuft.

§ 2.

Die Fälle $n = 1, 2, 3$.

Für $n = 1$, in der Geraden, ist der einzige Typus einer abgeschlossenen konvexen Punktmenge, die ebenso wie ihre Komplementärmenge innere Punkte hat, die Strecke mit Einschluß der Endpunkte. Verzichtet man auf Abgeschlossenheit, so kann ein Endpunkt oder beide wegbleiben. Bei der leeren Menge und dem einzelnen Punkt sind keine inneren Punkte vorhanden; bei der ganzen Geraden und der Geraden mit Ausschließung eines Punktes hat die Komplementärmenge keine inneren Punkte. Derartige Mengen mußten nur hier erwähnt werden; fortan sind sie immer schon bei kleinerem n erledigt.

Es sei $n = 2$, A' eine abgeschlossene konvexe Punktmenge mit inneren Punkten; die abgeschlossene Hülle B' der Komplementärmenge B habe auch innere Punkte. Zunächst enthalte die Begrenzung Γ kein Geradenstück; dann hat sie auf einer Geraden nur keinen, einen oder zwei Punkte. Sei $P(x_1 = x_2 = 0)$ ein Punkt von Γ. Nehmen wir an, es gäbe keine Gerade, die nur einen Punkt von Γ enthält, so ist für jede Gerade $x_2 = \lambda x_1$ der Wert $\frac{x_0}{x_2} = \xi(\lambda)$ bestimmt, der ihren zweiten Schnitt (außer P) mit Γ angibt, und zwar sind für ein festes λ entweder alle Punkte $\frac{x_0}{x_1} < \xi$ innere Punkte von A', alle Punkte $\frac{x_0}{x_1} > \xi$ innere Punkte von B', oder umgekehrt. Gilt für einen Wert λ das eine, so gilt es auch für genügend benachbarte und daher für alle Werte. Es treffe also etwa das erste für alle λ zu. Dies steht für große positive oder für große negative λ im Widerspruche damit, daß es auf der Geraden $x_1 = 0$ einen zweiten Schnitt $x_0 = \mu x_2$ gibt, so daß alle Punkte der Geraden mit $\frac{x_0}{x_2} < \mu$ innere Punkte von A′ (oder B′), alle Punkte mit $\frac{x_0}{x_2} > \mu$ innere Punkte von B′ (oder A′) sind. Es muß also eine Gerade geben, die Γ in genau einem Punkte P trifft; sie gehöre ganz zu A′. In nicht homogenen Koordinaten sei $y = 0$ die Gerade, $x = y = 0$ der Punkt P. Ein Dreieck, bei geeigneter Koordinatenwahl etwa $|x| \leqq y$, $0 \leqq y \leqq 1$, gehört ganz zu B′ (nach Satz 1). Gibt es in jeder Umgebung von P Punkte, also auch innere Punkte P_i von B′ mit $y < 0$, so verbinde man sie mit dem Punkte Q $(x = 0,\ y = 1)$, der ebenfalls zu B′ gehört. Der Schnitt von $P_i Q$ mit $x = 0$ gehört zu A′, also die durch das Unendliche gehende Strecke $P_i Q$ zu B′. Diese Strecken kommen jedem Punkte der Strecke $(x = 0,\ y < 0$ oder $y > 1)$ beliebig nahe, so daß diese Strecke und damit die ganze Gerade $x = 0$ zu B′ gehört. In P schneiden sich also zwei Gerade, deren eine ganz zu A′, deren andere ganz zu B′ gehört. Liegt nun R mit P und einem inneren Punkte S von A′ (oder von B′) in gerader Linie, so zeigt die Verbindungsgerade von R mit einem geeigneten Punkte der Umgebung von S, daß auch R und wegen der Abgeschlossenheit und nach Satz 1 jede Gerade durch P, auf der außer P ein Punkt von A′ (bzw. B′) liegt, ganz zu A′ (bzw. B′) gehört. Da P nicht der einzige Punkt von Γ ist, enthält Γ eine ganze Gerade, was hier noch ausgeschlossen ist. Es bleibt nur übrig, daß B′ in der Umgebung von P auf $y \geqq 0$ beschränkt ist. Da die Gerade $y = 0$ sonst im Inneren von A′ verläuft, liegt die Gerade $y = -p$ für kleines $p > 0$ ganz im Inneren von A′: B′ ist konvex im gewöhnlichen Sinne.

Nunmehr enthalte Γ ein Geradenstück, etwa $y = 0$, $0 \leqq x \leqq 1$. Nach Satz 2 gehört die Gerade $y = 0$ ganz etwa zu A′, und wenn Γ nicht die ganze Gerade enthält, so liegt nach Satz 3 in der Umgebung jener Strecke B′ ganz auf einer Seite von $y = 0$, etwa $y \geqq 0$. Die Gerade $y = -p$ verläuft wieder ganz im Inneren von A′: B′ ist im gewöhnlichen Sinne konvex.

Enthält schließlich Γ eine Gerade, etwa $y = 0$, so ergeben die Verbindungsgeraden eines inneren Punktes von A′ mit zwei inneren Punkten von B′, die nicht mit ihm in gerader Linie liegen, zwei weitere Punkte von Γ. Von ihrer Verbindungsgeraden gehören drei Punkte, also eine Strecke zu Γ. Gehörte diese Gerade nicht ganz zu Γ, so könnte nach dem vorigen Absatze Γ auch nicht die Gerade $y = 0$ enthalten. Es gehören daher zwei Gerade, etwa $x = 0$ und $y = 0$ zu Γ. Ist etwa in einem inneren Punkte von A' $xy > 0$, so gehören alle Punkte $xy \geqq 0$ zu A', alle Punkte $xy \leqq 0$ zu B', mit der selbstverständlichen Erweiterung auf die Punkte der unendlich fernen Geraden. Hiermit ist bewiesen:

Satz 4. *Enthält eine abgeschlossene konvexe Punktmenge in der Ebene ebenso wie ihre Komplementärmenge innere Punkte, so enthält sie eine Gerade im Inneren oder läßt eine Gerade frei, oder sie ist ein Winkelraum, d. h. der eine der beiden Teile, in die die projektive Ebene durch zwei Gerade zerlegt wird.*

Im zweiten Falle ist die Punktmenge im gewöhnlichen Sinne konvex, im ersten und dritten ist es die Komplementärmenge. Auch bei Verzicht auf Abgeschlossenheit ergibt sich nichts Neues: eine aus dem Winkelraum durch Weglassen eines geeigneten Teils der Grenzpunkte entstehende konvexe Punktmenge ist im gewöhnlichen Sinne konvex, wenn sie den Scheitel nicht enthält; sonst ist es die Komplementärmenge.

Sei jetzt $n = 3$; A' und B' (in gewohnter Bezeichnung) haben innere Punkte.

1. Es gebe eine Ebene Λ ($x_0 = 0$), deren Durchschnitt Δ mit Γ innere Punkte hat; Λ gehöre (nach Satz 2) ganz zu A'.

a) Ist $\Delta = \Lambda$, P innerer Punkt von A', Q von B', so trifft Γ eine Ebene durch PQ nach Satz 4 in ihrem Schnitt mit Λ und in einer weiteren Geraden. Zwei solche Ebenen liefern zwei sich schneidende, in Γ, aber nicht ganz in Λ gelegene Gerade g und h [6]). Durch jeden Punkt R in der Ebene E von g und h läßt sich eine Ebene legen, die innere Punkte von A' und B', aber keinen der Schnittpunkte von g und Λ, h und Λ, g und h enthält. In dieser Ebene kann Γ nach Satz 2 keine inneren Punkte haben. Γ enthält aber in ihr eine Gerade und die beiden Schnittpunkte mit g und h, also deren Verbindungsgerade und damit R. Γ enthält also zwei Ebenen, etwa $x_0 = 0$ und $x_3 = 0$. Ist $x_0 x_3 > 0$ in einem inneren Punkte von A', so gehören alle Punkte $x_0 x_3 \geqq 0$ zu A', alle Punkte $x_0 x_3 \leqq 0$ zu B': A' ist ein Winkelraum zwischen zwei Ebenen.

b) Ist $\Delta \neq \Lambda$, so ist Δ nach Satz 2 konvex und enthält nach der aus Satz 3 gezogenen Folgerung keine Gerade im Inneren. Nach Satz 4 sind zwei Fälle möglich.

α) Läßt Δ eine Gerade in Λ, etwa $x_0 = x_3 = 0$ frei, so gehören nach Satz 3 in der Umgebung von Δ etwa alle Punkte $\frac{x_0}{x_3} \geqq 0$ zu A', und für kleines $p > 0$ ist die Ebene $x_0 = -p x_3$ von B' frei; B' ist konvex im gewöhnlichen Sinne.

β) Ist Δ ein Winkelraum, etwa $x_1 x_2 \geqq 0$, so gehören nach Satz 3 in

[6]) Sollten P, Q und der Schnitt von g und Λ in gerader Linie liegen, so legt man die zweite Ebene durch P und einen Punkt Q' nahe bei Q.

der Umgebung jedes Punktes von Δ außer $x_1 = x_2 = 0$ etwa alle Punkte $\frac{x_0}{x_1 + x_2} \geqq 0$ zu A' (die Gerade $x_1 + x_2 = 0$ trifft Δ nur in $x_1 = x_2 = 0$). Liegt nun ein Punkt $P\,(x_0 \neq 0)$ mit $x_0 = x_1 = x_2 = 0$ und einem inneren Punkte Q von A' in gerader Linie, so kann man P mit solchen inneren Punkten Q_0 der Umgebung von Q verbinden, daß die Verbindungsgerade PQ_0 Δ in einem Punkte $\frac{x_1 + x_2}{x_3} > 0$ oder < 0 trifft. Je nach der Lage von P und Q zeigt auf der Geraden PQ_0 die Betrachtung des Punktes Q_0, eines inneren Punktes $\frac{x_0}{x_1 + x_2} \geqq 0$ von A', des Schnittes mit Δ, der auch zu B' gehört, und des Punktes P, daß auch P zu A' gehört. Demnach besteht A' genau aus den Punkten der Geraden, die $x_0 = x_1 = x_2 = 0$ mit den Punkten der abgeschlossenen konvexen Punktmenge verbinden, in der A' die Ebene $x_3 = 0$ schneidet; A' ist ein „konvexer Kegel".

2. In allen anderen Fällen enthält A' nach Satz 2 in jeder Ebene eine abgeschlossene konvexe Punktmenge, B' ebenfalls eine solche, die mit der ersten keinen inneren Punkt gemeinsam hat, Γ die gemeinsame Begrenzung. Es wird behauptet, daß durch jeden Punkt von Γ eine ganz zu Γ gehörige Gerade geht, wenn nicht A' oder B' im gewöhnlichen Sinne konvex ist. (Dies trifft auch in den bisher gefundenen Fällen zu.) Legt man nämlich durch einen Punkt P $(x_0 = x_1 = x_2 = 0)$ von Γ eine Ebene Λ $(x_0 = 0)$, so sind die folgenden Fälle möglich:

a) Λ enthält nicht innere Punkte von A' und von B', etwa keinen inneren Punkt von A'.

α) Λ schneidet Γ in einer ganzen Geraden. Die Behauptung trifft zu.

β) Der Durchschnitt von Λ und A' ist eine gerade Strecke, die etwa die Gerade $x_3 = x_0 = 0$ nicht trifft. Wäre nun A' in der Umgebung dieser Strecke nicht auf eine Seite von Λ, etwa $\frac{x_0}{x_3} \geqq 0$, beschränkt, so gäbe es zwei verschiedene Punkte Q, R der Strecke und je eine Folge Q_i, R_i innerer Punkte von A', die bezüglich mit $\frac{x_0}{x_3} > 0$ und $\frac{x_0}{x_3} < 0$ gegen Q und R konvergieren. Der Schnitt der Geraden $Q_i R_i$ mit $x_0 = 0$ gehört zu A'; also müßte die äußere, d. h. die von $x_3 = 0$ getroffene Strecke $Q_i R_i$ und, entgegen der Annahme, die ganze Gerade QR zu A' gehören. Es ist also A' in der Umgebung der Strecke in Λ etwa auf $\frac{x_0}{x_3} \geqq 0$ beschränkt und die Ebene $x_0 + p x_3 = 0$ für kleines $p > 0$ von A' frei, A' im gewöhnlichen Sinne konvex.

γ) Λ enthält von A' keinen Punkt außer P. Ist A' in der Umgebung von P etwa auf $\frac{x_0}{x_3} \geqq 0$ beschränkt, so ist die Ebene $x_0 + p x_3 = 0$ von A' frei. Sonst gibt es ein Tetraeder mit einer Ecke in P, das ganz zu

A' gehört, und eine von der anderen Seite von Λ her gegen P konvergierende Folge innerer Punkte P_i von A'. Die Betrachtung der Verbindungsgeraden von P_i mit den Punkten des Tetraeders zeigt, daß jede Gerade durch P und einen anderen Punkt des Tetraeders ganz zu A' gehört. Verbindet man ferner einen inneren Punkt Q von A' mit den Punkten dieser Geraden, so sieht man, daß jede Gerade PQ ganz zu A' gehört: A' ist ein konvexer Kegel, und es gehört daher die Verbindungsgerade von P mit einem weiteren Punkte von Γ (dieser ist vorhanden) ganz zu Γ.

b) Λ schneidet A' und B' in je einer konvexen abgeschlossenen Punktmenge mit inneren Punkten, deren gemeinsame Begrenzung Δ ist; P gehört zu Δ.

α) Ist Δ ein Geradenpaar, so ist die Behauptung erfüllt.

β) Δ ist eine konvexe Kurve, deren Innengebiet etwa zu A', deren Außengebiet zu B' gehört. Ist g eine Stützgerade an Δ in P, so hat g mit Δ und Γ nur P oder eine P enthaltende Strecke gemeinsam, und in der Umgebung von P oder dieser Strecke liegt A' auf einer Seite von g. Da die Punkte von Λ außer denen von Δ innere Punkte von A' oder B' sind, bleibt dies bestehen, wenn man Λ um g dreht, solange keiner der besprochenen Fälle eintritt. Dies muß aber geschehen; denn nach Drehung um 180^0 liegen die Punkte von A' in Λ auf der anderen Seite von g. Damit ist dieser Fall auf die anderen zurückgeführt und die Behauptung vollständig erwiesen.

Gibt es nun eine Ebene Λ, die Γ in genau einer Geraden g trifft, so gehört Λ ganz etwa zu B'. A' kann nicht in der Umgebung jedes Punktes von g auf einer Seite von Λ liegen; denn durchläuft man g, so kommt man von einer Seite von Λ auf die andere. Liegen also in jeder Umgebung von P (auf g) Punkte von A' beiderseits Λ, so zeigt sich genau wie unter (2aγ), daß A' ein konvexer Kegel mit der Spitze in P ist.

Nunmehr enthalte jede Ebene, die eine Gerade g von Γ enthält, noch eine zweite h. Gehen drei Gerade g, h, j von Γ durch einen Punkt P, so kommt man auf schon erledigte Fälle. Liegen nämlich g, h, j in einer Ebene, so hat Γ in dieser innere Punkte. Gehen alle Gerade von Γ durch P, so sind A' und B' konvexe Kegel. Ist l eine Gerade von Γ, die nicht durch P geht, m die zweite Gerade, in der Γ eine P nicht enthaltende Ebene durch l trifft, so bildet l oder m mit zweien der Geraden g, h, j ein Dreieck, und in der Ebene dieses Dreiecks hat Γ innere Punkte. Gehen daher keine drei Gerade von Γ durch einen Punkt, so schneiden sich nicht zwei von den zweiten Geraden t, u, v, die drei Ebenen durch eine Gerade g von Γ mit Γ außer g gemein haben. Dreht man eine Ebene M um t, so ist die zweite Gerade w, in der M und Γ sich schneiden.

durch die Schnitte mit u und v bestimmt: w gleitet längs der drei windschiefen Geraden t, u, v, d. h. w durchläuft eine Schar reeller Erzeugender einer Fläche zweiter Ordnung. Ist $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$ die Gleichung dieser Fläche und in einem inneren Punkte von A' $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 > 0$, so legt man Gerade durch diesen Punkt und sieht, daß A' aus den Punkten $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \geqq 0$, B' aus den Punkten $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \leqq 0$ besteht.

Das Ergebnis über den Fall $n = 3$ ist also:

Satz 5. *Eine abgeschlossene konvexe Punktmenge in drei Dimensionen mit inneren Punkten, die nicht den ganzen Raum erfüllt, deren Komplementärmenge also innere Punkte hat, ist im gewöhnlichen Sinne konvex, oder enthält eine Ebene ganz im Inneren, ist also die abgeschlossene Hülle der Komplementärmenge einer im gewöhnlichen Sinne konvexen, abgeschlossenen Menge, oder ist ein konvexer Kegel, oder besteht aus den Punkten auf der einen Seite einer geradlinigen Fläche zweiter Ordnung.*

Nicht abgeschlossene konvexe Punktmengen, die ebenso wie ihre Komplementärmenge innere Punkte haben, können sich von diesen Typen nur durch den Wegfall von Grenzpunkten unterscheiden, wobei die Bedingung zu erfüllen ist, daß von einer der Begrenzung ganz oder teilweise angehörenden Geraden die ganze Gerade oder die Gerade bis auf einen Punkt oder eine Strecke mit oder ohne Endpunkte oder ein Punkt oder kein Punkt zur Punktmenge gehört.

(Eingegangen am 20. 7. 1920.)

Untersuchungen zur Quantentheorie [2–21b]

Math. Ann. **84** (1921), 277–302
[JFM 48.0916.02]

Einleitung.

Bei der quantentheoretischen Behandlung mechanischer Probleme wird die Gesamtheit der bei verschiedener Wahl der Anfangsbedingungen mechanisch möglichen Bewegungen in bestimmter Weise eingeteilt in „Elementargebiete der Wahrscheinlichkeit". Die auf den Grenzen dieser Gebiete verlaufenden Bewegungen gelten als „statistisch ausgezeichnet". Auf welche Weise diese Einteilung vorzunehmen ist, darüber geben die *Quantenvorschriften* Auskunft, die von verschiedenen Forschern in verschiedenen Fassungen aufgestellt werden. Es drängen sich dabei die folgenden Fragen auf, zu deren Klärung die vorliegende Arbeit beitragen soll.

1. *Welche Voraussetzungen muß ein mechanisches System erfüllen, damit eine bestimmte Quantenvorschrift darauf anwendbar wird?*

Hierbei ist hervorzuheben, daß die qualitativen Voraussetzungen über Regularität der Bewegung und Verlauf im Endlichen in der physikalischen Literatur vielfach nicht erwähnt werden, da sie bei den meisten Systemen erfüllt sind, die analytisch vollständig behandelt werden konnten.

2. *Wenn eine Quantenvorschrift in zwei verschiedenen Koordinatensystemen anwendbar ist, ergibt sie dann dasselbe?*

3. *Wenn zwei Quantenvorschriften auf dasselbe System angewandt werden können, ergeben sie dann dasselbe?*

Im ersten Teile werden diese Fragen bezüglich der von Sommerfeld[1]), P. S. Epstein[2]), Schwarzschild[3]) und anderen aufgestellten Quantenvorschriften behandelt. Nachdem zu diesem Zwecke die Grundtatsachen aus

[1]) Sitzungsber. d. Kgl. Bayr. Ak. d. Wiss. 1915, S. 425f., 459f.
[2]) Ann. d. Phys. (4), **51** (1916), S. 489f.
[3]) Sitzungsber. d. Kgl. Preuß. Ak. d. Wiss. 1916, S 548f.

der Hamilton-Jacobischen Integrationstheorie kurz berührt sind, wird die Frage 1 bezüglich der Vorschrift von Sommerfeld und Epstein durch eine von T. Levi-Civita[4]) aufgestellte Bedingung beantwortet (§ 3). Sodann wird die genannte Vorschrift durch Einführung der Winkelvariablen auf die von Schwarzschild zurückgeführt und damit die Frage 3 bejahend beantwortet. Dasselbe geschieht mit der Frage 2 dadurch, daß (§ 5) gezeigt wird, daß die Vorschrift von Schwarzschild in jedem Koordinatensystem zu demselben Ergebnis führt. Schließlich (§ 6) werden zwei weitere Quantenvorschriften ebenfalls auf die von Schwarzschild zurückgeführt, die sich demnach als die eindringendste herausstellt.

Der zweite Teil beschäftigt sich mit der Vorschrift von Planck[5]). Da diese, wie Epstein[6]) gezeigt hat, die Schwarzschildsche umfaßt, sind nur die Fragen 1 und 3 zu erörtern. Zunächst (§ 7) wird die Bedeutung der *Ergodenhypothese* und der Existenz eindeutiger Integrale aufgewiesen, dann (§ 8) mit topologischen Hilfsmitteln gezeigt, daß bei zwei Freiheitsgraden die Plancksche Vorschrift nicht weiter reicht als die von Schwarzschild. Schließlich (§ 9) werden bei einem System, das in einem Grenzfalle der Schwarzschildschen Vorschrift zugänglich wird, Reihenentwicklungen für die eindeutigen Integrale aufgestellt, deren Koeffizienten bis auf einen gewissen Teil vollkommen bestimmt sind. Da sich auch diese mit Hilfe der *Adiabatenhypothese* festlegen lassen, ist auch hier die Frage 3 mit ja beantwortet.

I. Besondere Quantenvorschriften.

§ 1.

Vorbereitungen.

Die mechanischen Systeme, von denen die Rede sein wird, sollen die folgenden Voraussetzungen erfüllen. Der Zustand des Systems $\mathfrak{S}$ ist eindeutig bestimmt durch die Werte, die den n allgemeinen Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_n$ beigelegt werden; dagegen kann verschiedenen Werten q der gleiche Zustand entsprechen. Der Einfachheit halber soll nur der Fall der „winkelartigen“ Koordinate q_i betrachtet werden, in dem zu den Werten $q_1, \ldots, q_{i-1}, q_i + 1, q_{i+1}, \ldots, q_n$ derselbe Zustand des Systems $\mathfrak{S}$ gehört wie zu den Werten $q_1, \ldots, q_i, \ldots, q_n$. Ein Beispiel hierfür ist das Azimut bei Polarkoordinaten eines Punktes, das noch mit 2π zu dividieren ist. Eine winkelartige Koordinate braucht keine zyklische zu sein. Die Koordinaten dürfen alle Werte eines Gebietes annehmen (die winkel-

[4]) Math. Ann. **59** (1904), S. 383f.

[5]) Ann. d. Phys. (4), **50** (1916), S. 385f.

[6]) Sitzungsber. d. Kgl. Preuß. Ak. d. Wiss. 1918, S. 435f.

artigen sind unbeschränkt), wobei das System nur einen Teil der möglichen Zustände zu durchlaufen braucht. Doch soll es möglich sein, mit endlich vielen Koordinatensystemen dieser Art jeden Zustand von $\mathfrak{S}$ darzustellen und insbesondere werden nur solche Bewegungen betrachtet, die ganz im Inneren des Gebietes verlaufen, in dem eines dieser Koordinatensysteme gilt.

Die Bewegung werde durch ein Variationsprinzip

$$\delta \int L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1; \ldots, \dot{q}_n)\, dt = 0, \tag{1}$$

d. h.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1'}$$

bestimmt, worin die Lagrangesche Funktion L in jedem Koordinatensystem eine im Gültigkeitsgebiet reguläre Funktion der Argumente ist. Durch diesen Ansatz werden auch Bewegungen umfaßt, bei denen die Kraft von der Geschwindigkeit abhängt, wie die Bewegung eines elektrisch geladenen Körpers im Magnetfelde.

§ 2.

Kanonische Variable.

Die Variationsaufgabe (1) wird in bekannter Weise auf übersichtlichere Formen gebracht. Zunächst ist sie gleichbedeutend mit der Aufgabe

$$\delta \int L(q_1, \ldots, q_n, r_1, \ldots, r_n)\, dt = 0 \tag{2a}$$

mit den unbekannten Funktionen $q_1, \ldots, q_n, r_1, \ldots, r_n$ und den Nebenbedingungen

$$\dot{q}_i - r_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{2a'}$$

Multipliziert man die linken Seiten dieser Gleichungen mit unbestimmten Funktionen λ_i und fügt sie zum Integranden L hinzu, so ist eben wegen (2a')

$$\delta \int \Big(L(q, r) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (\dot{q}_k - r_k) \Big)\, dt = 0, \tag{2b}$$

und weil (2b) identisch in $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gilt, folgt rückwärts (2a). Die Variationsgleichung für r_i lautet

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q, r) - \lambda_i = L_{\dot{q}_i}(q, r) - \lambda_i = 0. \tag{2b'}$$

Setzt man hieraus λ_i ein, so wird

$$\delta \int \Big(L(q, r) + \sum_{k} L_{\dot{q}_k}(q, r) \cdot (\dot{q}_k - r_k) \Big)\, dt = 0. \tag{2c}$$

Hier kommen zwar, wie schon in (2a), nicht mehr n sondern $2n$ unbekannte Funktionen vor, doch treten die Ableitungen der einen Reihe (r) gar nicht, die der anderen linear auf, so daß die Variationsgleichungen von der ersten Ordnung werden. Die Koeffizienten von $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$, die „Impulse“ $p_1, \ldots, p_n$ werden an Stelle von $r_1, \ldots, r_n$ eingeführt; es wird gesetzt:

$$L_{\dot{q}_i}(q, r) = p_i, \qquad \sum_k p_k r_k - L(q, r) = H(q, p).$$

Um dies zu ermöglichen, werde vorausgesetzt, daß in jedem Koordinatensystem die Geschwindigkeiten $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ sich als reguläre Funktionen der Größen q, p darstellen, wenn diese die Werte des Gültigkeitsgebiets annehmen. Das ist z. B. der Fall, wenn L ein Polynom zweiten Grades in $\dot{q}_1, \ldots, q_n$ mit definitem quadratischem Teil ist. Die Variationsforderung hat dann die kanonische Form

$$\delta \int \Big(\sum_k p_k \dot{q}_k - H(q, p)\Big) dt = 0; \tag{3}$$

die Variationsgleichungen sind

$$\dot{q}_i = H_{p_i}, \qquad \dot{p}_i = -H_{q_i}. \tag{3'}$$

Sogleich ergibt sich das Energieintegral

$$\frac{dH}{dt} = 0, \qquad H(q, p) = \alpha.$$

Bei der kanonischen Form des Variationsprinzipes und der Bewegungsgleichungen ist an die Stelle der Funktion L die gleichfalls von $2n$ Argumenten abhängende Funktion H getreten. Die quantentheoretisch vollständig behandelten Probleme sind nun, wie sich zeigen wird, die, bei denen sich solche kanonische Veränderliche einführen lassen, daß H nur von der einen Reihe abhängt.

§ 3.

Hamiltonsche Differentialgleichung. Trennung der Variablen.

Die Lösung der Variationsaufgabe (1) oder (3) kommt bekanntlich mit dem Auffinden einer vollständigen Lösung der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) - \frac{\partial W}{\partial t} = 0$$

überein, d. h. einer solchen Lösung $W(q_1, \ldots, q_n, t, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, die von n Parametern $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ derart abhängt, daß es zu gegebenen Werten $t, \overset{0}{q}, \overset{0}{p}$ im Gültigkeitsgebiete immer ein Wertsystem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ gibt, so daß

$$\frac{\partial W(\overset{0}{q}, t, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{\partial q_i} = \overset{0}{p}_i$$

ist. Die Lösungen der Bewegungsgleichungen (3′) ergeben sich durch Elimination aus

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \qquad \frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i, \qquad \frac{\partial W}{\partial t} = H(q, p).$$

Da $H = \alpha$ ein Integral ist, setzt man

$$W = S(q, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) + \alpha t$$

und kommt zu der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung des Jacobischen Prinzips

$$(4) \qquad H(q, p) = \alpha, \qquad p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i},$$

deren vollständige Integration wiederum mit der der Gleichungen (3′) gleichbedeutend ist.

In den Fällen, wo diese Integrationsmethode zum Ziele geführt hat, war die vollständige Lösung S immer von der Gestalt

$$(5) \quad S = S_1(q_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) + S_2(q_2, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) + \ldots + S_n(q_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Die Bedingungen, die dafür notwendig sind, hat T. Levi-Civita[4]) aufgestellt. Setzt man nämlich (5) in (4) ein und differenziert nach q_i und dann nach q_k $(k \neq i)$, so wird

$$H_{q_i} + \frac{\partial^2 S_i}{\partial q_i^2} H_{p_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

$$H_{q_i q_k} + \frac{\partial^2 S_i}{\partial q_i^2} H_{p_i q_k} + \frac{\partial^2 S_k}{\partial q_k^2} H_{q_i p_k} + \frac{\partial^2 S_i}{\partial q_i^2}\frac{\partial^2 S_k}{\partial q_k^2} H_{p_i p_k} = 0$$
$$(i = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots n).$$

Elimination der zweiten Ableitungen von S ergibt

$$(6) \quad H_{p_i} H_{p_k} H_{q_i q_k} - H_{p_i} H_{q_k} H_{q_i p_k} - H_{q_i} H_{p_k} H_{p_i q_k} + H_{q_i} H_{q_k} H_{p_i p_k}$$
$$= - \begin{vmatrix} 0 & H_{q_i} & H_{p_i} \\ H_{q_k} & H_{q_i q_k} & H_{p_i q_k} \\ H_{p_k} & H_{q_i p_k} & H_{p_i p_k} \end{vmatrix} = 0.$$

Da die Lösung S eine vollständige sein soll, muß die Funktion H den $\frac{n \cdot n-1}{2}$ Differentialgleichungen (6) für alle Argumentwerte genügen.

Gelten umgekehrt die Gleichungen (6), so findet man eine vollständige Lösung von (4) in der Form (5) auch ohne Benutzung von Potenzreihen in folgender Weise. Sind irgendwelche Anfangswerte $\overset{0}{q}_1, \ldots, \overset{0}{q}_n, \overset{0}{p}_1, \ldots, \overset{0}{p}_n$ gegeben, die nur keine der Ableitungen H_{p_i} zu Null machen, so definiere man p_1 als Funktion der q durch

$$p_1(\overset{0}{q}_1, q_2, \ldots, q_n) = \overset{0}{p}_1$$

und die Differentialgleichung

$$\frac{\partial p_1}{\partial q_1} = -\frac{H_{q_1}}{H_{p_1}}(1).$$

Dabei soll hier und im folgenden eine Klammer (l) bedeuten, daß den Argumenten $q_{l+1}, \ldots, q_n, p_{l+1}, \ldots, p_n$ die Anfangswerte $\overset{0}{q}, \overset{0}{p}$ beizulegen sind. Schritt für Schritt wird p_i durch

$$p_i(q_1, \ldots, q_{i-1}, \overset{0}{q}_i, q_{i+1}, \ldots, q_n) = \overset{0}{p}_i, \qquad \frac{\partial p_i}{\partial q_i} = -\frac{H_{q_i}}{H_{p_i}}(i)$$

als eine in einer Umgebung der Anfangswerte reguläre Funktion der Argumente q definiert, die offenbar nur von $q_1, \ldots, q_i$ abhängt. Daß p_i von q_i allein abhängt, zeigt sich so. Weiß man, daß p_1 nur von q_1, p_2 nur von $q_2, \ldots, p_{i-1}$ nur von q_{i-1} abhängt, so ist für jedes $k \leqq l \leqq i$

$$(7) \quad \frac{\partial}{\partial q_l}\frac{H_{q_k}}{H_{p_k}}(l) = \frac{H_{q_k q_l}}{H_{p_k}}(l) - \frac{H_{q_k} H_{p_k q_l}}{H^2_{p_k}}(l) + \frac{\partial p_l}{\partial q_l}\left(\frac{H_{p_k p_l}}{H_{p_k}}(l) - \frac{H_{q_k} H_{p_k p_l}}{H^2_{p_k}}(l)\right).$$

Nun ist

$$\frac{\partial p_l}{\partial q_l} = -\frac{H_{q_l}}{H_{p_l}}(l);$$

also verschwindet die rechte Seite von (7) zufolge den Gleichungen (6). Setzt man nacheinander in (7) $l = i, l = i-1, \ldots, l = k+1$, so erhält man

$$(7') \qquad \frac{H_{q_k}}{H_{p_k}}(i) = \frac{H_{q_k}}{H_{p_k}}(i-1) = \ldots = \frac{H_{q_k}}{H_{p_k}}(k).$$

Jetzt ist

$$\frac{\partial^2 p_i}{\partial q_i \partial q_k} = -\frac{\partial}{\partial q_k}\frac{H_{q_i}}{H_{p_i}}(i)$$

$$= -\frac{H_{q_i q_k}}{H_{p_i}}(i) + \frac{H_{q_i} H_{p_i q_k}}{H^2_{p_i}}(i) - \left(\frac{H_{q_i p_k}}{H_{p_i}}(i) - \frac{H_{q_i} H_{p_i p_k}}{H^2_{p_i}}(i)\right)\frac{H_{p_k}}{H_{q_k}}(k).$$

Nach (7′) darf man die letzte Klammer (k) durch (i) ersetzen, und so verschwindet die rechte Seite nach (6). Für $q_i = \overset{0}{q}_i$ ist aber p_i konstant gleich $\overset{0}{p}_i$, $\frac{\partial p_i}{\partial q_k} = 0$, so daß überall $\frac{\partial p_i}{\partial q_k} = 0$ wird, d. h. p_i nur von q_i abhängt. Setzt man also

$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i, \qquad S_i = \int_{\overset{0}{q}_i}^{q_i} p_i \, dq_i,$$

so ist

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial S_i}{\partial q_i} = p_i,$$

$$\frac{\partial}{\partial q_i} H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = H_{q_i} + H_{p_i}\frac{\partial^2 S}{\partial q_i^2} = H_{q_i} - H_{p_i}\frac{H_{q_i}}{H_{p_i}} = 0,$$

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = H(\overset{0}{q}, \overset{0}{p}) = \alpha;$$

S ist eine vollständige Lösung der Gleichung (4) in der Gestalt (5).

Nachträglich läßt sich die Bildung der Funktion S sehr leicht überblicken. Man löst die Gleichung $H(q_i, p_i) = \alpha$ nach p_i auf und erhält p_i als Funktion von q_i, die durch die Kurve $H = \alpha$ in der q_i-p_i-Ebene dargestellt wird. Für die Trennung der Variablen ist es kennzeichnend, daß sich der Punkt (q_i, p_i) nicht nur augenblicklich in der Richtung dieser Kurve bewegt, sondern dauernd auf ihr verbleibt. Liegt auf der Kurve kein Punkt $H_{q_i} = H_{p_i} = 0$ und führt sie aus dem Gültigkeitsgebiet hinaus, so verläßt der Punkt (q_i, p_i) das Gebiet. Kommt es daher auf Bewegungen an, die dauernd im Gültigkeitsgebiete verlaufen, so muß die Kurve entweder einen Punkt $H_{q_i} = H_{p_i} = 0$ enthalten — das ist nur bei isolierten Anfangswerten $\overset{0}{p}_i$ der Fall — oder sie muß ganz im Inneren des Gültigkeitsgebietes liegen. Das kann sie bei der Regularität der Funktion H nur, wenn sie geschlossen ist. Ist die Koordinate q_i winkelartig, so muß entsprechend die Kurve $H(q_i, p_i) = \alpha$ durch Verschiebung längs der q_i-Achse um eine ganzzahlige Strecke m in sich übergehen. Der Beweis dafür, daß $m = 1$ ist, soll nur angedeutet werden. Ist $\mathfrak{C}$ eine Kurve dieser Art und R ein Punkt außerhalb von $\mathfrak{C}$, so dreht sich der Strahl RP asymptotisch um 180^0, wenn der Punkt P die Kurve $\mathfrak{C}$ von $q_i = -\infty$ bis $q_i = +\infty$ durchläuft. Je nachdem, ob dies im positiven oder negativen Sinne geschieht, heiße es: R liegt über oder unter $\mathfrak{C}$. Ist $\mathfrak{D}$ eine andere Kurve der gleichen Art, die $\mathfrak{C}$ nicht schneidet, und liegt ein Punkt von $\mathfrak{D}$ über $\mathfrak{C}$, so liegt jeder Punkt von und über $\mathfrak{D}$ auch über $\mathfrak{C}$, ja auch jeder Punkt einer gewissen Umgebung von $\mathfrak{D}$. Nimmt man nun an, daß eine Kurve $H = \alpha$ erst durch m-malige Verschiebung um die Strecke 1 in sich übergeht, so wendet man dies auf diese Kurve und die aus ihr durch Verschiebung um die Strecken $1, 2, \ldots, m$ hervorgehenden Kurven an, so folgt, daß jeder Punkt in der Umgebung der m-ten Kurve, die ja mit der ursprünglichen zusammenfällt, über dieser liegt, was offenbar nicht zutrifft. Es müßten sich also zwei dieser m Kurven schneiden, d. h. auf der Kurve $H = \alpha$ müßte ein Doppelpunkt, ein Punkt $H_{q_i} = H_{p_i} = 0$ liegen. Eine Kurve $H = \alpha$, auf der kein solcher Punkt liegt, geht daher schon durch Verschiebung um 1 in sich über.

§ 4.

Die Quantenvorschrift nach Sommerfeld und Epstein.

Die Quantenvorschrift in der Gestalt, wie sie Sommerfeld[1]) zuerst angewandt und P. S. Epstein[2]) genauer ausgeführt hat, lautet:

($\mathfrak{A}$) *Statistisch ausgezeichnet sind die Bewegungen, bei denen in jeder q_i-p_i-Ebene die Kurve $H = \alpha$, die Bahnkurve des Punktes (q_i, p_i), eine Fläche umschließt, die ein ganzes Vielfaches des*

elementaren Wirkungsquantums h ist; oder, analytisch ausgedrückt,
(𝔄) *bei denen*

$$P_i = \oint p_i \, d q_i = n_i h$$

ist.

Dabei bedeutet das Zeichen $\oint$, daß längs der geschlossenen Kurve $H = \alpha$, auf der sich der Punkt (q_i, p_i) bewegt, in der Richtung der wirklichen Bewegung integriert wird. Betrachtet man p_i als mehrdeutige Funktion von q_i, bestimmt durch die Gleichung $H = \alpha$, so ist der Integrationsweg auf der Riemannschen Fläche dieser Funktion geschlossen und geht durch ihre Verzweigungspunkte. Verschiebt man ihn aber ins Komplexe, so daß er ganz im Regularitätsgebiete verläuft, so erkennt man, daß P_i ebenso wie p_i von den Anfangswerten $\overset{0}{p}$ an der Stelle $\overset{0}{q}$ regulär abhängt.

Ist q_i eine winkelartige Koordinate, und ist die Kurve $H = \alpha$ nicht geschlossen — dann würde das soeben Gesagte gelten —, sondern geht sie durch Verschiebung um die Strecke 1 in der q_i-Richtung in sich über, so bildet man nach der gewöhnlichen Übung

$$P_i = \int_0^1 p_i \, d q_i .$$

Dieser Wert ist nicht eindeutig bestimmt: ersetzt man die Lagrangesche Funktion L durch $L + c\dot{q}_i$ — dabei bleiben die Bewegungsgleichungen ungeändert —, so erhalten p_i und P_i den beliebigen Zuwachs c. Nun ist bei nicht winkelartigen Koordinaten der Wert $P = 0$ dadurch ausgezeichnet, daß die Kurve $H = \alpha$ sich auf einen Punkt zusammenzieht, in dem $H_{q_i} = H_{p_i} = 0$ ist. Verlangt man dasselbe bei winkelartigen Koordinaten, so ist dadurch die Konstante eindeutig festgelegt, wenn die Kurve $H = \alpha$ nur für einen Wert α durch einen Punkt $H_{q_i} = H_{p_i} = 0$ geht. Dies trifft zu in dem Falle der zyklischen Koordinate, d. h. wenn H von q_i nicht abhängt und H_{p_i} nur für einen Wert p_i verschwindet.

Die Vorschrift (𝔄) wird im allgemeinen nur dann ausführbar sein, wenn die n Größen $P_1, \ldots, P_n$ voneinander unabhängig sind; hinge eine Anzahl von ihnen von den übrigen ab, so wären dadurch, daß man diesen die Werte $n_i h$ beilegt, die Werte der ersteren bestimmt und im allgemeinen keine Vielfachen von h. Es werde nunmehr vorausgesetzt, daß $P_1, \ldots, P_n$ voneinander unabhängig sind. In die Funktion $S(q_1, \ldots, q_n, \overset{0}{p}_1, \ldots, \overset{0}{p}_n)$ kann man statt der Anfangswerte $\overset{0}{p}$ die Größen $P_1, \ldots, P_n$ einführen und erhält so

$$S(q, \overset{0}{p}) = S'(q, P).$$

Als Funktion der P ist S' in der Umgebung eines Wertsystems regulär; als Funktion der q ist dS' endlichvieldeutig und S' erhält bei Fortsetzung längs geschlossener Wege die Zuwächse $P_1, \ldots, P_n$.

Setzt man

$$(8)\qquad Q_i = \frac{\partial S'}{\partial P_i}, \qquad p_i = \frac{\partial S'}{\partial q_i},$$

so ist

$$\sum_{i=1}^{n} P_i dQ_i - \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i = d\Big(\sum_{i=1}^{n} P_i Q_i - S'(q, P)\Big);$$

man hat eine kanonische Transformation, sobald man weiß, daß sich in einem Gebiete die Werte q, p und Q, P eineindeutig entsprechen. Nun wurden in § 3 die Impulse p in einer Umgebung der Werte $\overset{0}{q}, \overset{0}{p}$ als reguläre Funktionen der q und der Anfangswerte $\overset{0}{p}$ definiert, die für $q_i = \overset{0}{q}_i$ in diese Werte übergingen. Die Funktionaldeterminante der p nach den $\overset{0}{p}$ ist also 1 für $q_i = \overset{0}{q}_i$; daher können in einer Umgebung dieser Werte die p statt der $\overset{0}{p}$ in die Funktion $S(q, \overset{0}{p})$ eingeführt werden. In dieser Umgebung hängen daher die Q und P regulär von q und p ab. Die Funktionaldeterminante ist, in verständlicher Abkürzung,

$$\frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, p)} = \begin{vmatrix} \left(\dfrac{\partial^2 S'}{\partial P_i \partial q_k}\right) & \left(\dfrac{\partial P_i}{\partial q_k}\right) \\ \left(\dfrac{\partial^2 S'}{\partial P_i \partial p_k}\right) & \left(\dfrac{\partial P_i}{\partial p_k}\right) \end{vmatrix}.$$

Die Differentiationen sind so zu verstehen, daß S' zuerst als Funktion der q und P nach P_i, dann als Funktion der q und p nach q_k bzw. p_k, und P_i als Funktion der q und p differenziert wird. Setzt man $q_i = q_i$, so ist $S' = 0$ für alle Werte P oder $\overset{0}{p}$; daher verschwinden an dieser Stelle die Elemente des linken unteren Teilquadrates. Die Elemente des linken unteren Teilquadrates bleiben an der Stelle $q_i = \overset{0}{q}_i$ ungeändert, wenn man die Reihenfolge der Differentiationen umkehrt: es ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial q_k}\frac{\partial S'}{\partial P_i} = \frac{\partial}{\partial q_k}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial p_l}\frac{\partial p_l}{\partial P_i} &= \sum_{l=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 S}{\partial p_l \partial q_k}\frac{\partial p_l}{\partial P_i} + \frac{\partial S}{\partial p_l}\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial p_l}{\partial P_i}\right)\right] \\ &= \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial p_l}\frac{\partial p_l}{\partial P_i} + \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial p_l}\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial p_l}{\partial P_i}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial P_i}\left(\frac{\partial S}{\partial q_k}\right) + \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial p_l}\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial p_l}{\partial P_i}\right),\end{aligned}$$

und hier verschwindet das zweite Glied bei $q_i = \overset{0}{q}_i$, da dann $S = 0$ ist und nicht von p abhängt. Die Determinante wird daher

$$\frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, p)} = \frac{\partial(\overset{0}{p})}{\partial(P)} \cdot \frac{\partial(P)}{\partial(\overset{0}{p})} = 1,$$

die Einführung der Q, P an Stelle der q, p ist eine kanonische Transformation. Da bei einer solchen die Funktionaldeterminante überall 1 ist, kann die vieldeutige Abhängigkeit zwischen q, p und Q, P nur dadurch zuwege kommen, daß der Punkt q, p einen geschlossenen Weg beschreibt. Bleibt dieser in einer genügend engen Umgebung der Punkte $p_i = \frac{\partial S(q, \overset{0}{p})}{\partial q_i}$, d. h. der Punkte, die der Punkt $\overset{0}{q}, \overset{0}{p}$ im Verlaufe der Bewegung möglicherweise trifft, so vermehrt sich S um eine Summe von Größen P. Da $\frac{\partial P_i}{\partial P_k} = 1$ oder $= 0$ ist, je nachdem $i = k$ oder $i \neq k$ ist, entsprechen einem Wertsystem q, p Werte Q, die sich um ganze Zahlen unterscheiden.

Es soll nunmehr bewiesen werden, daß bei festem P die Koordinaten Q jedes Wertsystem annehmen, und zwar ist nur von den Wertsystemen die Rede, die durch Fortsetzung im Reellen erreichbar sind. Es genügt, dies von den Werten $0 \leqq Q_i \leqq 1$ zu beweisen; denn wenn die Werte $Q_i = a$ angenommen werden, so werden es auch die Werte $Q_i = a_i + m_i$ mit ganzzahligen m_i. Man führe auf der Kurve $H = \alpha$ in der q_i-p_i-Ebene einen Parameter R_i ein, der sich stetig wachsend um 1 vermehrt, wenn der Punkt (q_i, p_i) die Kurve einmal im Sinne der wirklichen Bewegung durchläuft. Dann sind sämtliche q und p eindeutige stetige periodische Funktionen der R. Die Q dagegen sind eindeutig und stetig mit der Eigenschaft

$$Q_i(R_1, \ldots, R_{k-1}, R_k + 1, R_{k+1}, \ldots, R_n) = Q_i(R_1, \ldots, R_n) + \delta_{ik}$$
$$(\delta_{ik} = 1, \quad \text{wenn} \quad i = k, \quad \delta_{ik} = 0, \quad \text{wenn} \quad i \neq k),$$

so daß $R_i - Q_i$ eindeutige stetige periodische Funktionen der R und als solche beschränkt sind. Ist also durchweg

$$|R_i - Q_i| < M,$$

so betrachte man die Funktionen Q_i in dem Würfel

$$-(M+1) \leqq R_i \leqq M + 1.$$

Nach einem Satze von Brouwer[7]) wird jedes Wertsystem $|Q_i| \leqq 1$ mindestens in einem Punkte des Würfels angenommen. Durch Vermehrung

[7]) Es ist der „Hilfssatz“ in der Arbeit Math. Ann. 71 (1911), S. 161f. Man sieht sofort, daß genau der hier gebrauchte Satz bewiesen, obgleich in etwas geringerem Umfange ausgesprochen ist. Etwas weniger bequem wären ähnliche Sätze von P. Bohl (Journ. f. d. r. u. ang. Math. 127 (1905), S. 173f., insbesondere § 3) anzuwenden. Daß hier, im Gegensatze zu der eingehenden rechnerischen Behandlung ähnlicher Fragen bei Staude (Math. Ann. 29 (1887), S. 468f.; Journ. f. d. r. u. ang. Math. 105 (1889), S. 298 f.) und Stäckel (Journ. f. d. r. u. ang. Math. 128 (1905), S. 222 f.) ein bloßer Existenzbeweis gegeben ist, fällt nicht schwer ins Gewicht, da man die Q analytisch von ihrer Definition her kennt.

der Q und R um ganze Zahlen zeigt sich, daß jedes Wertsystem der Q angenommen wird. Da die Funktionaldeterminante der Q, P nach den q, p überall 1 ist, können die q, p in der Umgebung jedes Wertsystems der Q als reguläre Funktionen der Q (bei festen P) dargestellt werden. Eine in der Umgebung jedes Punktes des einfach zusammenhängenden Bereichs aller rellen Q eindeutige Funktion ist aber überhaupt im Reellen eindeutig: so hat man q, p als im Reellen durchweg reguläre Funktionen der Q. Nun konnte man durch Fortsetzung im Reellen bei Rückkehr zu denselben Werten q, p bei festen P die Q um beliebige ganze Zahlen m_i vermehren; daher gehören zu den Werten $Q_i + m_i$ dieselben Werte der q und p wie zu Q_i: *die ursprünglichen Koordinaten sind reguläre periodische Funktionen der Q.*

Nach der Definition der P sind diese längs der Bahnkurve konstant; so folgt aus den Bewegungsgleichungen

$$\dot{P}_i = -H_{Q_i} = 0$$

— hier sind Q, P statt q, p in H einzuführen —, daß H nur von den P abhängt. Demnach ist

$$\dot{Q}_i = H_{P_i} = \mathfrak{N}_i$$

zeitlich konstant; die Q sind lineare Funktionen der Zeit. Dieser Bewegungstypus, bei dem die ursprünglichen Koordinaten periodische Funktionen von n linearen Funktionen der Zeit sind, heißt der bedingt periodische.

Die Größen $\mathfrak{N}_i$ heißen die mittleren Bewegungen. Sollte zwischen ihnen identisch, d. h. für alle Werte P, eine Anzahl linearer Gleichungen der Form

$$m_1 \mathfrak{N}_1 + \ldots + m_n \mathfrak{N}_n = 0 \tag{9}$$

mit ganzzahligen Koeffizienten m, die nicht alle Null sind, bestehen, so kann man durch eine ganzzahlige lineare Substitution $\mathfrak{N}_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \mathfrak{N}'_k$ mit der Determinante 1 bewirken, daß ein Teil der Größen $\mathfrak{N}'$ identisch verschwindet und zwischen den übrigen — es seien dies $\mathfrak{N}'_1, \ldots, \mathfrak{N}'_s$ — keine Gleichung der Form (9) gilt. Übt man diese Substitution auf die Q und die kontragrediente auf die P aus — das ist eine kanonische Transformation —, so erhält man ein Koordinatensystem mit denselben ausgezeichneten Eigenschaften — es werde gleich wieder mit Q, P bezeichnet —, in dem

$$\mathfrak{N}_{s+1} = \mathfrak{N}_{s+2} = \ldots = \mathfrak{N}_n = 0$$

ist, d. h. H nur von $P_1, \ldots, P_s$ abhängt, und zwischen $\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_s$ keine Gleichung (9) identisch besteht.

§ 5.

Die Quantenvorschrift nach Schwarzschild. Eindeutigkeit der Quantenvorschrift.

Schwarzschild[3]) benutzte die hier gefundenen kanonischen Variablen, die „Winkelvariablen" Q und die zugehörigen Impulse P, die „Wirkungsvariablen", um allgemein, auch für die „entarteten" Fälle, d. h. die, in denen $s < n$ ist, die Quantenvorschrift folgendermaßen auszusprechen:

($\mathfrak{B}$) *Hat man ein System kanonischer Variablen Q, P derart, daß H (die Energie) nur von den P abhängt, und sind die Q winkelartige Koordinaten (siehe § 1), bestehen ferner zwischen den mittleren Bewegungen $\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_s$ ($\mathfrak{N}_i = H_{P_i}$) keine Gleichungen (9) für alle Werte P, während $\mathfrak{N}_{s+1} = \ldots = \mathfrak{N}_n = 0$ ist, so sind die Bewegungen mit*

$$P_i = \overset{0}{P}_i + n_i h \qquad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

statistisch ausgezeichnet.

Die Konstanten $\overset{0}{P}_i$ sollen dabei die von Planck so genannten Singularitäten des Phasenraumes bezeichnen. Ist man auf dem in § 4 verfolgten Wege über die Trennung der Variablen in der Hamiltonschen Gleichung (4) zu den Koordinaten Q, P gelangt, so sind die Singularitäten $P_i = 0$ daran zu erkennen, daß sich in ihrer Umgebung die q, p als Funktionen der Q, P verzweigen. Wenn dies, wie es bei den bisher genauer behandelten Fällen zutrifft, die einzigen Verzweigungen sind, so sind dadurch in der Tat die Konstanten $\overset{0}{P}_i$ eindeutig festgelegt. Gegen die Bezeichnung „Singularitäten des Phasenraumes" könnte eingewandt werden, daß das Bild der Bewegung etwa bei $P_1 = 0$ keine anderen Besonderheiten aufweist, als wenn den P solche Werte beigelegt werden, daß eine Gleichung (9) besteht. Im „Lagenraume" der q allein ist freilich das Bild ein anderes.

Es erhebt sich die Frage, ob die Vorschrift ($\mathfrak{B}$) in verschiedenen Koordinatensystemen zu demselben Ergebnis führt. Sei also $Q_1', \ldots, Q_n'$, $P_1', \ldots, P_n'$ ein zweites Koordinatensystem mit denselben Eigenschaften, bei dem zwischen den von Null verschiedenen mittleren Bewegungen $\mathfrak{N}_1', \ldots, \mathfrak{N}_{s'}'$ keine Gleichung der Form (9') identisch besteht. Die besonderen Wertsysteme der Q, P, für die zwischen den $\mathfrak{N}$ oder $\mathfrak{N}'$ eine solche Gleichung besteht, sind die Nullstellen der abzählbar unendlich vielen nicht identisch verschwindenden analytischen Funktionen $m_1 \mathfrak{N}_1 + \ldots + m_s \mathfrak{N}_s$ und $m_1 \mathfrak{N}_1' + \ldots + m_{s'} \mathfrak{N}_{s'}$ (mit allen ganzzahligen Werten m, außer $m_1 = m_2 = \ldots = 0$). Sie bilden die Vereinigungsmenge von abzählbar unendlich vielen Mengen des Maßes Null, die selbst das Maß Null hat.

Daher liegen die Wertsysteme (Q, P), für die keine jener Gleichungen gilt, überall dicht. Wählt man die Bahnkurve durch einen solchen Punkt, so kommt sie nach dem Annäherungssatze von Kronecker[8]) jedem Wertsysteme der $Q_1 \ldots Q_s$ bis auf ganze Zahlen beliebig nahe; sie bedeckt im Phasenraume der q, p ein s-fach ausgedehntes analytisches Gebilde $\mathfrak{G}$ überall dicht. Aus der Betrachtung der Q' folgt, daß das Gebilde s'-fach ausgedehnt ist; also ist $s = s'$.

Hält man jetzt alle Q und P außer Q_i fest und vermehrt Q_i um 1, so beschreibt der entsprechende Punkt des Phasenraumes eine geschlossene Kurve auf dem Gebilde $\mathfrak{G}$. Es müssen also $P_1', \ldots, P_n', Q_{s+1}', \ldots, Q_n'$ festbleiben, während Q_k' $(k \leqq s)$ einen ganzzahligen Zuwachs α_{ik} erfährt. Die Funktion $C_k = \sum_{i=1}^{s} \alpha_{ik} Q_i - Q_k'$ ist daher periodisch in $Q_1, \ldots, Q_s$ und als reguläre Funktion beschränkt. Da $\dot{C}_k = \sum_{i=1}^{s} \alpha_{ik} \mathfrak{N}_i - \mathfrak{N}_k'$ zeitlich konstant ist, C_k aber nicht unbegrenzt anwachsen kann, ist $\dot{C}_k = 0$; C_k ist längs einer Bahnkurve, und da diese jedem Wertsysteme $Q_1, \ldots, Q_s$ bis auf ganze Zahlen beliebig nahe kommt, für alle $Q_1, \ldots, Q_s$ konstant: es ist

$$Q_k' = \sum_{i=1}^{s} \alpha_{ik} Q_i + C_k.$$

Da dasselbe von der Umkehrung gilt:

$$Q_k = \sum_{i=1}^{s} \beta_{ik} Q_i' + C_k',$$

ist die Determinante $|\alpha_{ik}| = \pm 1$.

Das Bisherige gilt für überall dicht verteilte Wertsysteme $Q_{s+1}, \ldots, Q_n$, $P_1, \ldots, P_n$. Da die Q' stetig von den Q, P abhängen, sind die ganzen Zahlen α_{ik} überall dieselben. Führt man daher Q'', P'' ein durch die kanonische Transformation

$$Q_k'' = \sum_{i=1}^{s} \alpha_{ik} Q_i, \qquad P_i = \sum_{i=1}^{s} \alpha_{ik} P_k'' \qquad (i, k = 1, \ldots, s)$$

$$Q_i'' = Q_i, \qquad P_i'' = P_i \qquad (i = s+1, \ldots, n),$$

so ist

$$\left.\begin{aligned} Q_i' &= Q_i'' + \varphi_i(P_1'', \ldots, P_n'', Q_{s+1}'', \ldots, Q_n'') \\ P_i' &= \qquad\; \psi_i(P_1'', \ldots, P_n'', Q_{s+1}'', \ldots, Q_n'') \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

[8]) Werke 3, 1 (Berlin 1899), S. 31f.

Damit dies eine kanonische Transformation ist, muß

$$\sum_{i=1}^{n}(P_i'\,dQ_i' - P_i''\,dQ_i'') = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\psi_i - P_i'' + \sum_{l=1}^{n}\psi_l\frac{\partial\varphi_l}{\partial Q_i''}\right)dQ_i'' + \sum_{l=1}^{n}\psi_l\frac{\partial\varphi_l}{\partial P_i''}dP_i''\right]$$

ein vollständiges Differential sein. Es ist also

$$\frac{\partial}{\partial Q_k''}\left(\psi_i - P_i'' + \sum_{l=1}^{n}\psi_l\frac{\partial\varphi_l}{\partial Q_i''}\right) = \frac{\partial}{\partial Q_i''}\left(\psi_k - P_k'' + \sum_{l=1}^{n}\psi_l\frac{\partial\varphi_l}{\partial Q_k''}\right).$$

Ist $i \leqq s$, so bleibt nur

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial Q_k''} = 0,$$

d. h. $P_1', \ldots, P_s'$ hängen nur von den P'' ab. Weiter wird

$$\frac{\partial}{\partial P_k''}\left(\psi_i - P_i'' + \sum_{l=1}^{n}\psi_l\frac{\partial\varphi_l}{\partial Q_i''}\right) = \frac{\partial}{\partial Q_i''}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial\varphi_l}{\partial P_k''},$$

d. h. für $i \leqq s$ ist $\frac{\partial\psi_i}{\partial P_k''} = 1$ oder 0, je nachdem ob $i = k$ oder $i \neq k$ ist;

$$\psi_i = P_i'' + a_i,$$

worin a_i von keiner der Variablen Q'', P'' mehr abhängt. Man hat also

$$P_i = \sum_{k=1}^{s}\alpha_{ik}P_k'' = \sum_{k=1}^{s}\alpha_{ik}(P_k' - a_k),$$

woraus man sieht, daß die Quantenvorschrift ($\mathfrak{B}$) beim Übergange von Q, P zu Q', P' in eine Vorschrift derselben Form, nur natürlich mit anderen ganzen Zahlen n_i und anderen Werten $\overset{0}{P}$, übergeht, *daß also die Vorschrift* ($\mathfrak{B}$) *in der Tat vom Koordinatensystem unabhängig ist.*

§ 6.

Weitere Formulierungen der Quantenvorschrift.

Eine Formulierung der Quantenvorschrift, die auf kein besonderes Koordinatensystem Bezug nimmt, wurde von Einstein[9]) für zwei Freiheitsgrade gegeben. Für n Freiheitsgrade lautet sie (in einer Fassung, die dem Verfasser von Herrn Prof. Hilbert mitgeteilt wurde):

($\mathfrak{C}$) *Die statistisch ausgezeichneten Bewegungen sind diejenigen, die in Feldern des Jacobischen Prinzips verlaufen, deren Feldintegral S (die Lösung der Gleichung* (4)) *die folgende Eigenschaft hat: alle durch Fortsetzung im Reellen erreichbaren Zweige der vieldeutigen*

[9]) Ber. d. D. Phys. Ges. 1917, S. 82f.

(𝔈) *Funktion S entstehen aus endlich vielen durch Addition gewisser Konstanten, der Perioden, die ganze Vielfache des elementaren Wirkungsquantums sind.*

Auch diese Vorschrift ist nur da anwendbar, wo die von Schwarzschild ausreicht. Um sie nämlich anwenden zu können, wird man voraussetzen müssen, daß man eine vollständige Lösung S der Gleichung (4) hat, deren n Perioden voneinander unabhängige Funktionen der Parameter sind; denn sonst könnte man den Perioden nicht mit Sicherheit die Werte $n_i \cdot h$ beilegen. Unter diesen Voraussetzungen werden die Schlüsse des § 4 bis ins einzelne anwendbar. Man führt die Perioden als $P_1, \ldots, P_n$ an Stelle der Parameter in die Funktion S ein. Da S eine vollständige Lösung ist, ist die durch

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \qquad Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i}$$

gegebene Transformation im kleinen umkehrbar. Genau wie in § 4 zeigt man, daß die q, p von den Q periodisch abhängen, und daß die Funktion H die Q nicht enthält. Damit ist die Vorschrift (𝔅) anwendbar, und wenn $P_i = 0$ die einzigen Singularitäten sind, sind auch die Konstanten $\overset{0}{P}_i$ festgelegt.

Auf die Vorschrift (𝔅) kommt man auch, wenn man nur weiß, daß das kinematische Bild der Bewegung das einer bedingt periodischen ist, d. h. daß die Koordinaten $q_1, \ldots, q_n$ und demzufolge auch die Impulse $p_1, \ldots, p_n$ periodische Funktionen (mit der Periode 1) von n linearen Funktionen $w_1, \ldots, w_n$ der Zeit sind, die jedes Wertsystem annehmen:

$$q_i = q_i(w_1, \ldots, w_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n), \qquad p_i = p_i(w_1, \ldots, w_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$
$$w_i = \mathfrak{N}_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \cdot t + \delta_i.$$

(Die Größen α und δ sind Integrationskonstante.) Es soll angenommen werden, daß kein entarteter Fall vorliegt, daß keine Gleichung von der Form (9) für alle Werte der α gilt.

Die Quantenvorschrift wird hier so ausgesprochen:

Statistisch ausgezeichnet sind die Bewegungen, für die

(𝔇) $$\Pi_i = \int_0^1 \sum_{l=1}^{n} p_l \frac{\partial q_l}{\partial w_i} dw_i = n_i h$$

ist.

Durch Zurückführung auf den vorigen Fall soll bewiesen werden, daß die Größen Π_i, wenn sie voneinander unabhängig sind, in der Tat die kanonischen Variablen P_i vorstellen, die in der Vorschrift (𝔅) auftreten, wobei sich zugleich ergibt, daß die Π von den w nicht abhängen.

Das ist längst bekannt, z. B. erwähnt es Schwarzschild[3]); doch scheint in den vorliegenden Arbeiten kein Beweis dafür gegeben zu sein. Benutzt wird eine Überlegung, die bei Einstein[9]) angedeutet ist, aber einer wesentlichen Ergänzung bedarf. Hat man nämlich gezeigt, daß

$$\sum_{k=1}^{n} p_k\, d q_k = \sum_{k,l=1}^{n} p_k \frac{\partial q_k}{\partial w_l} d w_l$$

ein vollständiges Differential ist, so setzt man

$$d S = \sum_{k=1}^{n} p_k\, d q_k .$$

Führt man in S die q statt der w ein, so ist S eine Lösung der Gleichung (4); sie ist vollständig, weil die q und p alle Werte annehmen, und ist periodisch mit den n Perioden Π_i, die unabhängig sein müssen, damit die Vorschrift ($\mathfrak{D}$) angewandt werden kann. Damit $\Sigma p\, dq$ ein vollständiges Differential ist (und dies ist bei Einstein nicht bewiesen), müssen die Größen

$$\frac{\partial}{\partial w_i} \sum_{l=1}^{n} p_l \frac{\partial q_l}{\partial w_k} - \frac{\partial}{\partial w_k} \sum_{l=1}^{n} p_l \frac{\partial q_l}{\partial w_i} = \sum_{l} \left(\frac{\partial p_l}{\partial w_i} \frac{\partial q_l}{\partial w_k} - \frac{\partial p_l}{\partial w_k} \frac{\partial q_l}{\partial w_i} \right) = [w_k, w_i],$$

die Lagrangeschen Klammerausdrücke, verschwinden. Sie sind konstant längs jeder Bahnkurve; denn es ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[w_k, w_i] &= \sum_{l} \mathfrak{N}_l \frac{\partial}{\partial w_l} [w_k, w_i] \\ &= \sum_{l,s} \mathfrak{N}_l \left(\frac{\partial^2 p_s}{\partial w_k \partial w_l} \frac{\partial q_s}{\partial w_i} - \frac{\partial^2 p_s}{\partial w_i \partial w_l} \frac{\partial q_s}{\partial w_k} + \frac{\partial p_s}{\partial w_k} \frac{\partial^2 q_s}{\partial w_i \partial w_l} - \frac{\partial p_s}{\partial w_i} \frac{\partial^2 q_s}{\partial w_k \partial w_l} \right). \end{aligned}$$

Setzt man hier ein, was sich durch Differenzieren der Bewegungsgleichungen ergibt:

$$\sum_{l} \mathfrak{N}_l \frac{\partial q_i}{\partial w_l} = H_{p_i}, \qquad \sum_{l} \mathfrak{N}_l \frac{\partial p_i}{\partial w_l} = - H_{q_i},$$

$$\sum_{l} \mathfrak{N}_l \frac{\partial^2 q_i}{\partial w_l \partial w_s} = \sum_{l} \left(H_{p_i q_l} \frac{\partial q_l}{\partial w_s} + H_{p_i p_l} \frac{\partial p_l}{\partial w_s} \right),$$

$$\sum_{l} \mathfrak{N}_l \frac{\partial^2 p_i}{\partial w_l \partial w_s} = - \sum_{l} \left(H_{q_i q_l} \frac{\partial q_l}{\partial w_s} + H_{q_i p_l} \frac{\partial p_l}{\partial w_s} \right),$$

so hebt sich rechts alles weg. Die Klammern sind also konstant längs jeder Bahnkurve. Wenn keine Gleichung (9) besteht, müssen sie daher als stetige, periodische Funktionen der w überhaupt konstant sein; und da dies für überall dicht liegende Wertsysteme der α eintritt, ist es immer der Fall. Daher ist

$$[w_k, w_i] = \int_0^1\int_0^1 [w_k, w_i]\, dw_i\, dw_k$$
$$= \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial w_i}\sum_l p_l \frac{\partial q_l}{\partial w_k} - \frac{\partial}{\partial w_k}\sum_l p_l \frac{\partial q_l}{\partial w_l}\right) dw_i\, dw_k$$
$$= \int_0^1 \sum_l p_l \frac{\partial q_l}{\partial w_k}\, dw_k \Bigg|_{w_i=0}^{w_i=1} - \int_0^1 \sum_l p_l \frac{\partial q_l}{\partial w_i}\, dw_i \Bigg|_{w_k=0}^{w_k=1},$$

und hier sind beide Glieder Null wegen der Periodizität der Integranden in w_i und w_k. Damit ist die Zurückführung auf den vorigen Fall und damit auf die Vorschrift ($\mathfrak{B}$) geleistet.

II. Allgemeine Quantenvorschrift. Eindeutige Integrale.

§ 7.

Die allgemeine Quantenvorschrift von Planck.

Planck hat[5]) eine Quantenvorschrift angegeben, die sehr allgemein gehalten ist und von gar keiner besonderen Eigenschaft des mechanischen Systems Gebrauch macht. Sie lautet:

Man bestimme eine Anzahl von Funktionen $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$ der Koordinaten q und Impulse p und zerlege den Phasenraum durch die Hyperflächen

$$\begin{array}{l} \Phi_1 = c_{11},\quad \Phi_1 = c_{12}, \ldots \\ \Phi_2 = c_{21},\quad \Phi_2 = c_{22}, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_r = c_{r1},\quad \Phi_r = c_{r2}, \ldots \end{array} \qquad (\mathfrak{E})$$

in Teilgebiete, die Elementargebiete der Wahrscheinlichkeit. Statistisch ausgezeichnet sind diejenigen Bewegungen, die zugleich in je einer der Grenzflächen aus jeder der r Reihen verlaufen, d. h. für die

$$\Phi_i = c_{i n_i}$$

ist, worin $n_1, \ldots, n_r$ ganze Zahlen sind.

Dabei werden den Funktionen Φ und den Konstanten c noch zusätzliche Bedingungen auferlegt, die sich auf die Singularitäten und das Volumen des Phasenraumes beziehen. Doch soll hierauf nicht näher eingegangen werden.

Von den Grenzflächen $\Phi_i = c_{ik}$ wird verlangt, daß sie von keiner Bahnkurve des Systems geschnitten werden und daß jede Bahnkurve durch einen ihrer Punkte ganz in ihnen liegt, d. h. $\Phi_i = c_{ik}$ muß eine „relation invariante“

im Sinne von Poincaré[10]) sein. Praktisch wird man das aber selten behaupten können, wenn man nicht weiß, daß jede Fläche $\Phi_i = c$ mit beliebigem c diese Eigenschaft hat, d. h. daß Φ_i ein Integral der Bewegungsgleichungen ist, und so dürfte es auch bei Planck gemeint sein.

Nun kann man aber nicht jedes Integral zur Durchführung der Vorschrift ($\mathfrak{E}$) benutzen. Um erwarten zu dürfen, daß $\Phi = c$ eine reguläre Fläche darstellt, wird man verlangen, daß Φ in einem Gebiete, das alle Punkte $\Phi = c$ im Inneren enthält, eindeutig ist. So kommt man zu der Frage nach den in dem eben festgesetzten Sinne eindeutigen Integralen und vermutet, daß z. B. bei einem mechanischen Systeme, das, wie das beim Dreikörperproblem mit unbestimmter störender Masse der Fall ist, außer dem Energieintegral kein eindeutiges Integral hat, die Einteilung nach ($\mathfrak{E}$) nur mit diesem einen Integral bewirkt werden muß.

Ähnliche Folgerungen werden bei der Betrachtung der statistisch ausgezeichneten Bewegungen durch die Ergodenhypothese nahegelegt. Sie lautet in der Fassung, die hier zugrunde gelegt werden soll:

Sind $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$ die einzigen eindeutigen Integrale des Systems, d. h. gibt es kein weiteres von ihnen unabhängiges, so gibt es eine Bahnkurve, die jedem Punkte des zusammenhängenden Gebietes $\Phi_1 = c_1, \ldots, \Phi_r = c_r$ beliebig nahe kommt, außer wenn das Wertsystem c_i einer gewissen Menge vom Maße Null angehört.

Hätte man nun eine ausgezeichnete Bewegung durch $\Phi_i = c_i$ und etwa eine zusätzliche Bedingung, eine „relation invariante" $\Psi_{r+1} = c_{r+1}$, so festgelegt, daß die Bahnkurve nicht jedem Punkte $\Phi_i = c_i$ beliebig nahekommt, so würde eine beliebig kleine Störung, d. h. Änderung der Anfangswerte der q, p, genügen, um zu bewirken, daß die Bahnkurve einem Punkte $\Phi_i = c_i$, von dem sie vorher stets um eine endliche Strecke entfernt blieb, so nahe kommt, wie man will. Eine auf diese Weise ausgezeichnete Bewegung würde also unstabil sein. Will man dies vermeiden, so muß man sich darauf beschränken, die statistisch ausgezeichneten Bewegungen dadurch festzulegen, daß man einer Anzahl eindeutiger Integrale bestimmte Werte erteilt.

§ 8.

Existenz zweier eindeutigen Integrale bei $n = 2$.

Hat das mechanische System zwei Freiheitsgrade und gibt es zwei unabhängige eindeutige Integrale, so läßt sich die Frage der Einteilung des Phasenraumes und der ausgezeichneten Bahnen mit Hilfe von topo-

[10]) Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, 1 (Paris 1892), S. 45f.

logischen Sätzen auf schon behandelte Fälle zurückführen, wenn man gewisse allgemeine Voraussetzungen über das Verhalten der Bahnkurven macht.

Die Bahnkurve durch einen Punkt des Phasenraumes liege ganz in einem im Endlichen gelegenen Gebiete $\mathfrak{G}$; ebenso jede Bahnkurve durch einen genügend benachbarten Punkt.

Sind nun $\Phi(q_1, q_2, p_1, p_2)$ und $\Psi(q_1, q_2, p_1, p_2)$ zwei unabhängige eindeutige Integrale, so sind nicht überall alle Determinanten der Matrix

$$\begin{pmatrix} \Phi_{q_1} & \Phi_{q_2} & \Phi_{p_1} & \Phi_{p_2} \\ \Psi_{q_1} & \Psi_{q_2} & \Psi_{p_1} & \Psi_{p_2} \end{pmatrix}$$

Null. Es wird vorausgesetzt, daß für ein Wertsystem (a, b) und demnach für jedes genügend benachbarte in keinem Punkte von $\mathfrak{G}$ mit $\Phi = a$, $\Psi = b$ alle diese Determinanten verschwinden; doch sollen Φ und Ψ diese Werte in einem Punkte von $\mathfrak{G}$ annehmen, durch den eine der oben erwähnten Bahnkurven geht. Dann bestimmen die Gleichungen $\Phi = a'$, $\Psi = b'$ für jedes Wertepaar (a', b'), das von (a, b) hinreichend wenig verschieden ist, eine in $\mathfrak{G}$ reguläre analytische Fläche $\mathfrak{F}$ (zweifach ausgedehntes Gebilde). Nimmt man noch an, daß auf $\mathfrak{F}$ kein Punkt $H_{q_1} = H_{q_2} = H_{p_1} = H_{p_2} = 0$ liegt — und das ist in der Tat so, wenn eines der Integrale Φ, Ψ mit H identisch ist —, so hat man in den Bahnkurven eine auf $\mathfrak{F}$ überall reguläre Kurvenschar, d. h. eine Umgebung jedes Punktes von $\mathfrak{F}$ läßt sich eineindeutig und stetig so auf eine Umgebung eines Punktes der Ebene abbilden, daß die Bahnkurven in parallele Grade übergehen.

Liegt $\mathfrak{F}$ ganz im Gebiete $\mathfrak{G}$, so muß sie als überall reguläre Fläche geschlossen sein. Projiziert man auf die q_1-q_2-Ebene, so hat man dort eine einparametrige Schar von Extremalen des Jacobischen Prinzips mit derselben Energiekonstanten, d. h. ein Feld. Das Feldintegral S, die Lösung von (4), ist gegeben durch $dS = p_1\,dq_1 + p_2\,dq_2$. Hier sind p_1, p_2 endlichvieldeutig, da die reguläre geschlossene Fläche $\mathfrak{F}$ nur mit endlich vielen Blättern über der q_1-q_2-Ebene liegen kann. Also ist S eine periodische Lösung, wie sie in § 6 behandelt wurde. Eine topologische Überlegung (vgl. Anhang) zeigt genauer, daß die Fläche $\mathfrak{F}$ eine einseitige oder zweiseitige Ringfläche ist und sich daher die Perioden der Funktion S aus einer oder zweien ganzzahlig linear zusammensetzen. Diese hätte man, sofern sie unabhängig sind, Vielfachen von h gleichzusetzen.

Erstreckt sich die Fläche $\mathfrak{F}$ aus dem Gebiete $\mathfrak{G}$ heraus, so kann durch eine endliche Anzahl regulärer Kurven ein ganz im Endlichen gelegenes Stück von $\mathfrak{F}$ begrenzt werden, das den in $\mathfrak{G}$ enthaltenen Teil von $\mathfrak{F}$ enthält. Aus gewissen Voraussetzungen über die ganz in $\mathfrak{G}$ enthaltenen Bahnkurven auf $\mathfrak{F}$ (sie sind im Anhang genau ausgesprochen und besagen in ungenauer Ausdrucksweise, daß die in $\mathfrak{G}$ verlaufenden und die $\mathfrak{G}$ verlassenden Bahnkurven reinlich zu trennen sind) folgt, daß auf $\mathfrak{F}$ immer eine geschlossene Bahnkurve liegt. In der Umgebung $\mathfrak{U}$ eines Punktes des Phasenraumes, durch den eine solche geht, sollen als Koordinaten eingeführt werden: Φ, Ψ, und zwei weitere x und y, analytische Funktionen der q, p, von denen y ebenso wie Φ und Ψ längs jedes Bahnkurvenstückes in $\mathfrak{U}$ konstant ist. Die Bahnkurve $\Phi = a$, $\Psi = b$, $y = 0$ sei geschlossen. Verfolgt man sie, bis sie wieder in $\mathfrak{U}$ eintritt, so ist auf ihr wieder $\Phi = a$, $\Psi = b$, $y = 0$. Verfolgt man eine andere Bahnkurve, so müssen zwar Φ und Ψ, als im gesamten Phasenraume eindeutig beim k-ten Wiedereintritt in $\mathfrak{U}$ dieselben Werte haben, dagegen wird im allgemeinen y einen anderen Wert y_k annehmen. Die Differenz $y_k - y$ ist eine reguläre Funktion der Argumente Φ, Ψ, y, und ihre Nullstellen geben die periodischen Lösungen, die geschlossenen Bahnkurven.

Unter den analytischen Flächen $y_k - y = 0$ im Raume der Φ, Ψ, y hat mindestens eine einen reellen Mantel, auf dem Φ und Ψ voneinander unabhängig sind. Denn sonst bestände die Gesamtheit der reellen Werte Φ, Ψ, für die in $\mathfrak{U}$ $y_k - y = 0$ ist, aus abzählbar unendlich vielen Punkten und analytischen Kurvenstücken. Da man ganz $\mathfrak{F}$ mit endlich vielen Gebieten $\mathfrak{U}$ bedecken kann, würde dasselbe von der Gesamtheit der Werte Φ, Ψ gelten, für die es überhaupt geschlossene Bahnen in einer gewissen Umgebung von $\mathfrak{F}$ gibt. Diese Gesamtheit hätte also das Maß Null, während es doch für jedes Wertepaar in der Umgebung von $\Phi = a$, $\Psi = b$ geschlossene Bahnen geben mußte. Es kann also ein Teil einer Fläche $y_k - y = 0$ dargestellt werden durch

$$y = Y(\Phi, \Psi),$$

wo die Funktion Y in einem gewissen Bereiche regulär ist. Man darf annehmen, daß für $y > Y$ auch $y_k > Y$ ist; denn sonst würde y_{2k} das Gewünschte leisten. Da $y_k - y$ eine nicht identisch verschwindende reguläre Funktion ist, die für $y = Y$ Null wird, gibt es ein Gebiet

$$0 < y - Y \leqq \varepsilon, \quad |\Phi - a| \leqq \varepsilon, \quad |\Psi - b| \leqq \varepsilon, \quad x = 0,$$

in dem etwa $y_k - y < 0$ ist. (Sollte statt dessen $y_k - y > 0$ sein, so ist bei der folgenden Betrachtung nur t durch $-t$ zu ersetzen.) Man verfolge die Bahnkurven von den Punkten dieses Gebietes bis zum k-ten Wiedereintritt in $\mathfrak{U}$ und zwar bis zum Schnitte mit $x = 0$.

Geht man von jedem Punkte der genannten Kurvenstücke zu dem, den er innerhalb der Zeit $T (> 0)$ erreicht, so erhält man eine Teilmenge von geringerem Inhalt. Denn die beschriebene Menge enthält mit jedem Punkte auch den Teil der Bahnkurve durch ihn, die er für positive Zeiten durchläuft, und in der zweiten Menge sind die Punkte $x = \delta$, $y = Y + \varepsilon - \delta$ mit genügend kleinem $\delta > 0$ nicht enthalten. Dies Ergebnis steht aber im Widerspruche mit der Tatsache, daß der Inhalt des Phasenraumes eine Integralinvariante ist, und es bleibt nur übrig, daß jede Bahnkurve geschlossen ist. Im ganzen ergibt sich also:

Hat ein System von zwei Freiheitsgraden außer dem Energieintegral noch ein eindeutiges Integral, und gibt es für jedes Wertepaar, das man diesen Integralen beilegt, eine Bahnkurve, die ganz im Endlichen verläuft und gewisse Voraussetzungen erfüllt (*vgl. Anhang*), *so wird man entweder auf den Fall periodischer Felder* (§ 6) *geführt, oder sämtliche Bewegungen sind periodisch.*

§ 9.

Anschluß an ein bedingt periodisches System.

Bei einem mechanischen System, dessen Bedingungen analytisch von einem Parameter μ abhängen, und das für $\mu = 0$ in ein bedingt periodisches übergeht, sollen die eindeutigen Integrale mit Hilfe von Reihenentwicklungen verfolgt werden, die sich bei Poincaré[11]) finden.

Ist in dem ursprünglichen Variationsprinzip (1)

$$L = L_0 + \mu L_1 + \mu^2 L_2 + \ldots$$

eine Reihe die für kleine μ im Gültigkeitsgebiete konvergiert, und hängen $L_1, L_2, \ldots$ nicht von den $\dot{q}$, sondern nur von den q ab, so ist jedes für $\mu = 0$ kanonische Koordinatensystem auch für $\mu \neq 0$ kanonisch. (Diese besondere Art der Abhängigkeit von μ ist in der Praxis die wichtigste: von dieser Art ist z. B. das astronomische Dreikörperproblem oder ein System, wie ein Atommodell, auf das man ein elektrisches Feld wirken läßt.) Ist das System für $\mu = 0$ bedingt periodisch, so führt man die Winkelvariablen ein und hat:

$$H = H_0 + \mu H_1 + \mu^2 H_2 + \ldots,$$

worin H_0 nur von $P_1, \ldots, P_s$ und $H_1, H_2, \ldots$ von den Q periodisch abhängen.

Soll nun ein eindeutiges Integral $\Phi(Q, P, \mu)$, das analytisch von μ und periodisch von den Q abhängt, zur Ausführung der Quantenvorschrift benutzt werden, so ist zu verlangen, daß es für $\mu = 0$ in eines der sonst benutzten $P_1, \ldots, P_s$ übergeht; es sei etwa $\Phi(Q, P, 0) = P_1$. Damit Φ ein Integral ist, ist notwendig und hinreichend, daß der Poissonsche Klammerausdruck

$$(H, \Phi) = \sum_{k=1}^{n} (H_{Q_k} \Phi_{P_k} - H_{P_k} \Phi_{Q_k})$$

---

[11]) a. a. O. [10]) Chap. V.

überall verschwindet. Man entwickelt H und Φ in Reihen, die nach Potenzen von μ und trigonometrischen Funktionen der Q fortschreiten, und deren Koeffizienten in dem gemeinsamen Regularitätsgebiet von H und Φ reguläre Funktionen der P sein müssen:

$$
\begin{aligned}
H &= H_0 + \mu H_1 + \mu^2 H_2 + \dots \\
H_r &= \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{m_n=-\infty}^{+\infty} A^{(r)}_{(m_1,\dots,m_n)} e^{2\pi\sqrt{-1}(m_1 Q_1 + \dots + m_n Q_n)} \\
&= \sum_{(m)} A^{(r)}_{(m)} \zeta_{(m)} \qquad (r = 1, 2, \dots)
\end{aligned}
$$

$$
(10) \qquad
\begin{aligned}
\Phi &= \Phi_0 + \mu \Phi_1 + \mu^2 \Phi_2 + \dots \\
\Phi_0 &= P_1, \quad \Phi_r = \sum_{(m)} G^{(r)}_{(m)} \zeta_{(m)} \qquad (r = 1, 2, \dots).
\end{aligned}
$$

Es handelt sich darum, aus der Bedingung

$$
\begin{aligned}
(H, \Phi) = (H_0, \Phi_0) &+ \mu\{(H_0, \Phi_1) + (H_1, \Phi_0)\} \\
&+ \mu^2\{(H_0, \Phi_2) + (H_1, \Phi_1) + (H_2, \Phi_0)\} + \dots = 0
\end{aligned}
$$

die Abhängigkeit der gesuchten Koeffizienten G von den bekannten A zu erhalten. Von selbst ist

$$(H_0, \Phi_0) = (H_0, P_1) = 0.$$

Die Glieder erster Ordnung in μ geben

$$(H_0, \Phi_1) + (H_1, \Phi_0) = 2\pi\sqrt{-1} \cdot \sum_{(m)} \left\{ -\sum_{k=1}^{n} m_k \mathfrak{N}_k \cdot G^{(1)}_{(m)} + m_1 A^{(1)}_{(m)} \right\} \zeta_{(m)},$$

oder, da alle Koeffizienten der trigonometrischen Reihe Null sein müssen:

$$G^{(1)}_{(m)} \cdot \sum_{k=1}^{n} m_k \mathfrak{N}_k = m_1 A^{(1)}_{(m)}.$$

Man sieht: in dem Gebiete der P, in dem H und Φ regulär sind, muß $m_1 A^{(1)}_{(m)}$ überall da verschwinden, wo $\sum_{k=1}^{m} m_k \mathfrak{N}_k$ verschwindet. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so können die Wertsysteme der P, für die $\Sigma\, m_k \mathfrak{N}_k = 0$ ist, nicht zum Regularitätsgebiete des Integrals Φ gehören. Kann man beweisen, wie es Poincaré beim Dreikörperproblem getan hat, daß solche Werte (für die verschiedenen Indexsysteme (m)) überall dicht liegen, so weiß man, daß es ein Integral Φ nicht gibt. Jedenfalls sind die Koeffizienten G eindeutig bestimmt bis auf die, bei denen nur diejenigen Indizes $m_{s+1}, \dots, m_n$ von Null verschieden sind, die zu den identisch verschwindenden mittleren Bewegungen $\mathfrak{N}_{s+1}, \dots, \mathfrak{N}_n$ gehören; denn wie vorher ist angenommen, daß zwischen $\mathfrak{N}_1, \dots, \mathfrak{N}_s$ keine lineare Gleichung (9) identisch besteht.

Die Glieder zweiter Ordnung in μ liefern:

$$2\pi\sqrt{-1}\sum_{(m)}\sum_{k=1}^{n} m_k \mathfrak{N}_k G^{(2)}_{(m)} \zeta_{(m)}$$

$$+ 2\pi\sqrt{-1}\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{(m)}\frac{\partial A^{(1)}_{(m)}}{\partial P_k}\zeta_{(m)}\cdot\sum_{(m)} m_k G^{(1)}_{(m)}\zeta_{(m)} - \sum_{(m)} m_k A^{(1)}_{(m)}\zeta_{(m)}\cdot\sum_{(m)}\frac{\partial G^{(1)}_{(m)}}{\partial P_k}\zeta_{(m)}\right\}$$

$$- 2\pi\sqrt{-1}\sum_{(m)} m_1 A^{(2)}_{(m)}\zeta_{(m)} = 0\,,$$

$$G^{(2)}_{(m)}\cdot\sum_{k=1}^{n} m_k\mathfrak{N}_k = m_1 A^{(2)}_{(m)} - \sum_{(m')+(m'')=(m)}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A^{(1)}_{(m')}}{\partial P_k} m_k'' G^{(1)}_{(m'')} - \sum_{k=1}^{n} m_k' A^{(1)}_{(m')}\frac{\partial G^{(1)}_{(m'')}}{\partial P_k}\right\}$$

Die unendlichen Summen durften dabei gliedweise multipliziert und umgeordnet werden, da sie als Fouriersche Reihen regulärer Funktionen absolut konvergieren.

Man sieht schon an diesen Formeln für die Koeffizienten $G^{(1)}$ und $G^{(2)}$, was allgemein eintritt. (Die allgemeinen Formeln sollen nicht aufgeschrieben werden, da sie doch keine tiefere Einsicht vermitteln.) Aus der Formel für $G^{(r)}_{(m)}$ folgt, daß die rechte Seite, ein Ausdruck, der den Koeffizienten $A^{(r)}_{(m)}$ und die unendlich vielen Koeffizienten $A^{(1)}_{(m')}, \ldots, A^{(r-1)}_{(m')}$ mit beliebigen m' enthält, im Regularitätsgebiete überall da verschwinden muß, wo $\sum_k m_k \mathfrak{N}_k$ verschwindet. Weiß man aber selbst, daß dies zutrifft (man weiß es, wenn die Verhältnisse der mittleren Bewegungen $\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_n$ konstant sind und keine Gleichung (9) zwischen ihnen gilt), so ist damit für die Existenz eines Integrales Φ noch wenig gewonnen; denn die Konvergenz der Potenzreihe in μ mit den so verwickelt gebauten Koeffizienten müßte erst bewiesen werden.

Immerhin läßt sich das Folgende aussagen. Die Koeffizienten $G^{(r)}_{(m)}$ werden eindeutig bestimmt, bis auf die, bei welchen $m_1 = \ldots = m_s = 0$ ist. Hat man also ein Integral Φ, so kann man diese Koeffizienten um so kleine Beträge ändern, daß die Konvergenz der Reihe erhalten bleibt, und erhält so ein anderes Integral, das auch für $\mu = 0$ in ein P übergeht.

Diese Unbestimmtheit kann durch Anwendung der Adiabatenhypothese von P. Ehrenfest [12]) behoben werden. Sie lautet bekanntlich:

Quantentheoretisch erlaubte Zustände gehen bei adiabatischer Beeinflussung in quantentheoretische erlaubte Zustände über.

Setzt man die Existenz der eindeutigen Integrale voraus, so kann man hieraus Folgerungen ziehen, ohne den Begriff „adiabatisch“ zu benutzen, der erst mathematisch zu fassen wäre. Wird nämlich μ zeitlich

[12]) Ann. d. Phys. (4), 52 (1916).

geändert, geht aber die Bewegung während dessen gemäß den Bewegungsgleichungen vor sich, so ist:

$$\dot{\Phi} = \sum_{l=0}^{\infty} (\mu^l \dot{\Phi}_l + l \mu^{l-1} \dot{\mu} \Phi_l) = \dot{\mu} \sum_{l=0}^{\infty} l \mu^{l-1} \Phi_l .$$

Ist nun für $\mu = 0$ die Quantenvorschrift durch $P_1 = n_1 h$ gegeben, so wird man allgemein $\Phi = n_1 h$ verlangen und ansetzen

$$\sum_{l=1}^{\infty} l \mu^{l-1} \Phi_l = 0 .$$

Ob dies allgemein erfüllt werden kann, ist nicht sicher. Erfüllt werden kann aber die Forderung, daß $\dot{\Psi} = 0$ ist im Mittel für alle Zustände mit den gegebenen Werten $P_1, \ldots, P_n, Q_{s+1}, \ldots, Q_n$, d. h. daß

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 \dot{\Psi} \, dQ_1 \ldots dQ_s = \frac{d}{dt} \int_0^1 \ldots \int_0^1 \Psi \, dQ_1 \ldots dQ_s = 0$$

ist. Setzt man nämlich

$$\Psi = \Phi - \int_0^1 \ldots \int_0^1 \Phi \, dQ_1 \ldots dQ_s ,$$

so ist die Differenz $\Phi - \Psi$ von den einzigen zeitlich veränderlichen Größen $Q_1, \ldots, Q_s$ unabhängig; Ψ ist ebenfalls ein Integral, wenn man μ festhält. Bei veränderlichem μ dagegen ist offenbar die obige Forderung erfüllt. Stellt man die Reihenentwicklung (10) für Ψ auf, so sieht man, daß die Koeffizienten $G_{(m)}^{(r)}$ dieselben sind wie bei Φ, bis auf die mit $m_1 = m_2 = \ldots = m_s = 0$, die sämtlich verschwinden. Gerade diese Koeffizienten waren unbestimmt geblieben und sind nunmehr festgelegt. Dadurch wird die Konvergenz nicht gestört; denn Ψ ist regulär, wenn es Φ ist.

Man hat demnach die folgende Quantenvorschrift:

Man bilde die Reihe (10) *und die entsprechenden mit $P_2, \ldots, P_s$ statt P_1 und setze die unbestimmten Koeffizienten gleich Null. Wenn diese Reihen in einem Gebiete gleichmäßig konvergieren, stellen sie dort Integrale dar. Diese Integrale setze man gleich Vielfachen von h.*

Anhang.

Topologische Hilfssätze.

Der eine topologische Hilfssatz aus § 8 hieß:

Eine geschlossene Fläche, auf der eine überall reguläre Kurvenschar liegt, ist eine ein- oder zweiseitige Ringfläche.

Man lege auf der Fläche eine Anzahl q von Kurvenstücken, die „Querstücke“, die nirgends eine Scharkurve berühren, derart daß jedes

Stück einer Scharkurve, dessen Länge eine gegebene Schranke überschreitet, mindestens ein Querstück trifft. (Die genauere Beschreibung dieser Konstruktion würde zu weit führen und bietet keine Schwierigkeiten.) Zwei auf einer Scharkurve aufeinander folgende Schnitte mit Querstücken sollen verschiedenen Querstücken angehören; und legt man die Scharkurve durch einen Endpunkt eines Querstücks, so sollen die beiderseits benachbarten Schnitte mit Querstücken nicht an den Enden liegen. Man ziehe von jedem Ende eines Querstücks die Scharkurve nach beiden Seiten bis zum nächsten Schnitte mit einem Querstück und wende auf die durch diese Scharkurvenstücke und die Querstücke bewirkte Einteilung die Eulersche Polyederformel an. Ecken sind die $2q$ Endpunkte der Querstücke und die $4q$ Endpunkte der von dort ausgehenden Scharkurvenstücke. Kanten sind zunächst die q Querstücke. Durch jeden Endpunkt der $4q$ Scharkurvenstücke wird ein Querstück geteilt, die Kantenzahl um 1 vermehrt. Dazu kommen noch die $4q$ Scharkurvenstücke selbst; das macht $9q$ Kanten. An jedem Querstück liegen zunächst zwei Flächen ($2q$). Durch jedes Scharkurvenstück wird die Zahl um eins vermehrt; das macht $6q$. So ist aber jede Fläche doppelt gezählt: es bleiben $3q$. Die Eulersche Formel ergibt:

$$6q - 9q + 3q = 0,$$

d. h. die Fläche ist eine ein- oder zweiseitige Ringfläche.

Der zweite Hilfssatz behauptet die Existenz einer geschlossenen Scharkurve in einer überall regulären Kurvenschar auf einer regulären berandeten Fläche. Vorausgesetzt wird dabei die Existenz einer Scharkurve oder einer Menge von Scharkurven $\mathfrak{C}$, deren Entfernung vom Rande immer über einer positiven Schranke bleibt und die die folgenden Eigenschaften hat. Nennt man die Punkte P erreichbar, die mit einem Randpunkte durch eine Kurve verbunden werden können, die außer etwa P keinen Punkt oder Häufungspunkt von $\mathfrak{C}$ enthält, so soll sich um jeden inneren Punkt Q der Fläche eine Umgebung $\mathfrak{U}$ (das topologische Bild einer Kreisscheibe $\mathfrak{U}'$, deren Mittelpunkt Q entspricht) angeben lassen, so daß einer der folgenden Fälle eintritt:

1. Kein Punkt von $\mathfrak{U}$ ist erreichbar.
2. Jeder Punkt von $\mathfrak{U}$ ist erreichbar; kein Punkt von $\mathfrak{U}$ gehört zu $\mathfrak{C}$.
3. Jeder Punkt von $\mathfrak{U}$ ist erreichbar; in $\mathfrak{U}$ gehören zu $\mathfrak{C}$ nur die Punkte des Scharkurvenstückes durch Q, das einem Durchmesser von $\mathfrak{U}'$ entspricht.
4. Das Scharkurvenstück durch Q, Bild eines Durchmessers von $\mathfrak{U}'$, teilt $\mathfrak{U}$ in zwei Teile, deren einer erreichbar, deren anderer unerreichbar ist.

Konstruiert man noch zu jedem Randpunkte R eine „Halbumgebung“, d. h. das topologische Bild eines Halbkreises, dessen Mittelpunkt R, dessen begrenzender Durchmesser einem Stück der Randkurve entspricht und deren sämtliche Punkte erreichbar sind (das geht, nach der ersten Voraussetzung), so läßt sich die Fläche mit endlich vielen dieser Umgebungen $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_r$ bedecken. Gibt es unerreichbare Punkte, so sei Y ein Grenzpunkt, d. h. gemeinsamer Häufungspunkt erreichbarer und unerreichbarer Punkte. Man sieht leicht, daß jeder Punkt der Scharkurve durch Y auch Grenzpunkt ist. Eine der Umgebungen $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_r$ enthält Y; sie ist vom Typus 4 und heiße $\mathfrak{B}'$. Der Austrittspunkt der Scharkurve durch Y ist in einer weiteren Umgebung $\mathfrak{B}''$ enthalten, die wieder vom Typus 4 ist. Fährt man so fort, so erhält man eine endliche Anzahl von Umgebungen $\mathfrak{B}$ vom Typus 4 derart, daß sich die in ihnen liegenden Grenzkurvenstücke überdecken, so daß kein Ende unbedeckt bleibt: man hat eine geschlossene Kurve, die der Schar angehört.

Sind alle Punkte erreichbar, so nimmt man einen Punkt von $\mathfrak{C}$. Die ihn enthaltende Umgebung $\mathfrak{B}$ ist vom Typus 3. Durch Anwendung desselben Verfahrens auf die Gebiete $\mathfrak{B}$ vom Typus 3 erhält man wieder eine geschlossene Scharkurve.

(Eingegangen am 22. 7. 1921.)

Untersuchungen zur Quantentheorie [3–21c]

Jahrbuch d. Phil. Fakultät in Göttingen 1 (1921), 1–4

Bei der quantentheoretischen Behandlung mechanischer Probleme stellt man sich die folgende Aufgabe: es soll die Gesamtheit der möglichen Bewegungen auf bestimmte Art in Gebiete eingeteilt und zugleich aus dieser Gesamtheit ein Teil ausgesondert werden. Auf welche Art diese Aufgabe zu lösen ist, darüber geben die Quantenvorschriften Auskunft. Sie beziehen sich teilweise nur auf besondere mechanische Systeme: mit diesen besonderen Quantenvorschriften beschäftigt sich der erste Teil der Arbeit.

Zunächst werden die allgemeinen Voraussetzungen erörtert, denen die Systeme zu genügen haben. Die Vorschrift von Sommerfeld[1]) und Epstein[2]) (Vorschrift 𝔄) bezieht sich auf Systeme, bei denen die Hamiltonsche Differentialgleichung des Jacobischen Prinzips

$$H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) = \alpha, \quad p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$$

Trennung der Variablen zuläßt, d. h. eine vollständige Lösung von der Form

$$S = S_1(q_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) + \cdots + S_n(q_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

besitzt. Die hierfür von T. Levi-Civita[3]) als notwendig aufge-

1) Sitzungsber. d. Kgl. Bayr. Ak. d. Wiss. 1915, S. 425 f., 459 f.

2) Annalen der Physik, IV. Folge, Bd. 51 (1916), S. 489 f.

3) Math. Annalen, Bd. 59 (1904), S. 383 f.

stellte Bedingung wird als hinreichend erwiesen. Die Vorschrift ($\mathfrak{A}$) lautet:

> Die n Perioden $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$ der vieldeutigen Funktion S werden Vielfachen der Planckschen Konstante h gleichgesetzt:
>
> $$\Pi_i = n_i h.$$

Sind die Perioden Π_i unabhängige Funktionen der Parameter $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, so werden in bekannter Weise die „Winkel-“ und „Wirkungsvariablen“ Q_i und $P_i = \Pi_i$ eingeführt, die die folgenden Eigenschaften haben: die ursprünglichen Koordinaten hängen von den Q periodisch mit den Perioden 1 ab, und die Hamiltonsche Funktion H (Energie) enthält nur die P. Auf diese Variablen bezieht sich die Quantenvorschrift von Schwarzschild [1]) (Vorschrift $\mathfrak{B}$), in der die vorige enthalten ist.

Auf die Vorschrift ($\mathfrak{B}$) werden zwei weitere Fassungen zurückgeführt. Die eine ($\mathfrak{C}$) rührt im wesentlichen von Einstein [2]) her:

> Hat man eine bis auf additive Konstante endlichvieldeutige Lösung S, so werden diese Konstanten zu Vielfachen von h gemacht.

Die andere ($\mathfrak{D}$) bezieht sich auf allgemeine bedingt periodische Systeme:

> Sind die Lösungen der Bewegungsgleichungen von der Gestalt

$$q_i = q_i(w_1, \ldots, w_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)$$
$$p_i = p_i(w_1, \ldots, w_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)$$
$$w_i = \gamma_i t + \delta_i,$$

wo die q und p von den w periodisch abhängen, so wird gesetzt

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial q_k}{\partial w_i} dw_i = n_i h.$$

Schließlich wird gezeigt, daß die Vorschrift ($\mathfrak{B}$) vom Koordinatensysteme unabhängig ist.

Der zweite Teil der Arbeit handelt von der allgemeinen Quantenvorschrift ($\mathfrak{E}$) von Planck [3]):

> Man teile den Phasenraum der q, p in Gebiete durch Hyperflächen

---

1) Sitzungsber. d. Kgl. Preuß. Ak. d. Wiss. 1916, S. 548 f.

2) Ber. d. D. Phys. Ges. 1917, S. 82 f.

3) Ann. d. Phys. IV, Bd. 50 (1916), S. 383 f.

$$\begin{array}{ll} \Phi_1 = c_{11}, & \Phi_1 = c_{12}, \ldots, \\ \Phi_2 = c_{21}, & \Phi_2 = c_{22}, \ldots, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \Phi_r = c_{r1}, & \Phi_r = c_{r2}, \ldots, \end{array}$$

die jede Bahnkurve durch einen ihrer Punkte ganz enthalten. Durch Überlegungen, die die Ergodenhypothese benutzen, wird es nahegelegt, daß die Funktionen Φ Integrale des Systems sind. Damit die Hyperflächen regulär sind, müssen die Integrale Φ in bestimmtem Sinne eindeutig sein. Es erhebt sich also die Frage nach den eindeutigen Integralen.

Hat ein System von zwei Freiheitsgraden zwei unabhängige eindeutige Integrale Φ und Ψ, so bestimmen die Gleichungen $\Phi = a$, $\Psi = b$ für allgemeine Werte a, b eine reguläre Fläche $\mathfrak{F}$. Liegt diese ganz im Endlichen, so muß sie geschlossen sein. Auf der Fläche $\mathfrak{F}$ ist $dS = p_1 dq_1 + p_2 dq_2$ ein vollständiges Differential: man wird sofort auf die Vorschrift ($\mathfrak{E}$) geführt. Erstreckt sich $\mathfrak{F}$ ins Unendliche, so kommt man auf den trivialen Fall exakt periodischer Bewegung, wenn man über die Bahnkurven die folgenden, für die Anwendungen einigermaßen zulässigen Annahmen macht. Es gibt eine Menge $\mathfrak{C}$ von Bahnkurven, die ganz im Inneren eines im Endlichen befindlichen, von endlich vielen regulären Randkurven begrenzten Stückes von $\mathfrak{F}$ liegen. Nennt man die Punkte erreichbar, die mit einem der Ränder durch eine Kurve verbunden werden können, die höchstens einen Endpunkt mit $\mathfrak{C}$ gemeinsam hat, so gibt es zu jedem Punkte von $\mathfrak{F}$ eine Umgebung, die entweder ganz erreichbar ist und höchstens ein Stück einer Kurve aus $\mathfrak{C}$ enthält, oder ganz unerreichbar ist, oder durch ein Kurvenstück aus $\mathfrak{C}$ in einen erreichbaren und einen unerreichbaren Teil zerlegt wird.

Zum Schluß werden Systeme behandelt, die sich von bedingt periodischen wenig unterscheiden, d. h. die von einem Parameter μ abhängen und für $\mu = 0$ bedingt periodisch werden. Sind Q_i, P_i die Winkel- und Wirkungsvariablen für $\mu = 0$, so müssen die eindeutigen Integrale, die man zur Durchführung der Vorschrift ($\mathfrak{E}$) benutzt, für $\mu = 0$ in einige der P übergehen. Denkt man ein Integral, das für $\mu = 0$ etwa in P_1 übergeht, nach Potenzen von μ und trigonometrischen Funktionen der Q entwickelt [1]), so sind die Koeffizienten ohne weiteres zu berechnen, bis auf

1) Vgl. H. Poincaré, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, T. 1. (Paris 1892), Chap. V.

einige von ihnen, die unbestimmt bleiben. Das Integral existiert nur dann, wenn alle diese Koeffizienten als Funktionen der P einen gemeinsamen Regularitätsbereich haben und die mit ihnen gebildete Reihe konvergiert. Die unbestimmten Koeffizienten werden mit Hilfe der Adiabatenhypothese von P. Ehrenfest [1]) eindeutig festgelegt. Bei diesen Systemen ist daher die Vorschrift (𝔈) genau auf eine Weise durchzuführen.

1) Ann. d. Phys. IV. Bd. 52 (1916).

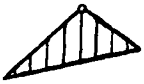
Kurvenscharen auf geschlossenen Flächen [4–21d]

Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **30** (1921), *83–85*
[JFM 48.0666.03]

3. H. Kneser: Kurvenscharen auf geschlossenen Flächen.

Poincaré hat zuerst die Frage nach dem Gesamtverlauf der reellen Lösungen von Differentialgleichungen mit topologischen Mitteln behandelt (J. de math. (3) 7, 8; (4) 1, 2). Es werden systematisch zunächst *reguläre Kurvenscharen auf geschlossenen Flächen* untersucht.

Zu jedem Punkte einer geschlossenen Fläche $\mathfrak{F}$ gebe es eine Umgebung, die sich topologisch derart auf ein ebenes Gebiet abbilden läßt, daß die Kurven der Schar in parallele Gerade $x = \text{const.}$ übergehen. Eine Kurve, die sich in dieser Abbildung durch eine Gleichung $y = f(x)$ mit stetigem f darstellt, heiße Querkurve. Es gelingt, die Fläche $\mathfrak{F}$ durch Querkurven in eine endliche Anzahl Elementarflächenstücke zu zerlegen, die sich in der genannten Weise auf Dreiecke abbilden lassen, deren Seiten einander paarweise zugeordnet sind. Ist F die Anzahl der Flächen, E die der verschiedenen Ecken, K die der Seiten dieser Einteilung, so ist also



$$3F = 2K.$$

An jedem Dreieck ist eine Ecke ausgezeichnet, an der eine Scharkurve in das Dreieck eintritt (vgl. Fig.), und jede Ecke ist an zwei Flächen ausgezeichnet: es ist

$$F = 2E.$$

In der Eulerschen Formel wird daher

$$k = E - K + F = 0,$$

d. h. *eine Fläche $\mathfrak{F}$, auf der eine reguläre Kurvenschar liegt, ist eine einseitige oder zweiseitige Ringfläche.* (Bei Kurvenscharen mit Singularitäten wird jedem Ausnahmepunkt eine Zahl zugeordnet, und k ist gleich der Summe dieser Zahlen, vgl. Dyck, Math. Ann. 32.)

Die weitere Untersuchung macht es möglich, *alle topologisch verschiedenen Kurvenscharen aufzuzählen.*

1. *Ist keine Scharkurve geschlossen, so kann man die Kurvenschar auf folgende Weise erzeugen.* Man ordne die Randpunkte des Einheitsquadrates $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$ einander zu, wie in Fig. 1 angedeutet ist — dadurch entsteht eine zweiseitige Ringfläche —, und bestimme eine Kurvenschar durch die Differentialgleichung $dy : dx = c$ mit irrationalem c. Von den sämtlich ungeschlossenen Scharkurven ersetze man endlich oder abzählbar unendlich viele durch je einen Streifen nebeneinander laufender ungeschlossener Scharkurven.

Insbesondere *enthält eine reguläre Kurvenschar auf einer einseitigen Ringfläche immer mindestens eine geschlossene Kurve.*

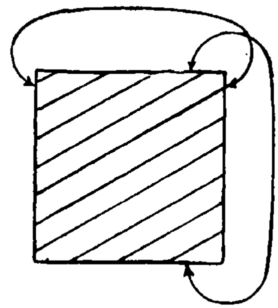


Fig. 1.

2. *Sind geschlossene Scharkurven vorhanden, so wird die Fläche $\mathfrak{F}$ durch eine Anzahl von ihnen in ein oder zwei Bänder nach Fig. 2b und endlich viele Bänder nach Fig. 2a und 3 zerlegt. Jedes Band nach Fig. 3 zerfällt wiederum in endlich oder abzählbar viele Bänder nach Fig. 3a und 3b.*

Die in den Figuren dargestellten Rechtecke — es sei in jedem Falle $0 \leqq y \leqq 1$, $|x| \leqq \alpha$ — sollen dabei durch die angedeutete Ränderzuordnung

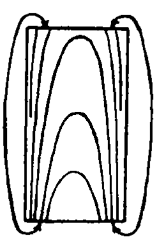


Fig. 2a.

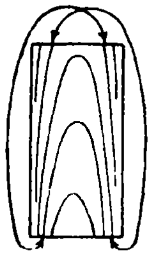


Fig. 2b.

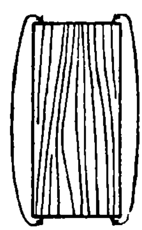


Fig. 3.

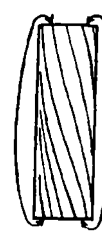


Fig. 3a.

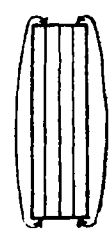


Fig. 3b.

zu Bändern gemacht werden, und zwar in Fig. 2b zu einem Möbiusschen Bande, sonst zu gewöhnlichen zweiseitigen Bändern. Die Kurvenschar in Fig 3 ist definiert durch die Gleichung

$$x = \varphi(y, x_0),$$

in der φ eine stetige Funktion im Gebiete $0 \leqq y \leqq 1$, $|x_0| \leqq \alpha$ ist, die bei festem y jeden Wert $|x| \leqq \alpha$ genau einmal annimmt und die Randbedingungen

$$\varphi(y, \pm \alpha) = \pm \alpha, \quad \varphi(0, x_0) = x_0$$

erfüllt. Die Kurvenscharen in Fig. 2a und 2b bzw. 3a bzw. 3b sind definiert durch die Differentialgleichungen

$$dx : dy = \alpha^2 - x^2 : x, \quad = \alpha^2 - x^2, \quad = 0.$$

Stimmen zwei Kurvenscharen in den hier gegebenen Eigenschaften überein, so lassen sie sich topologisch aufeinander abbilden.

In der Diskussion bemerkt Hamburger (Berlin), daß er sich mit einer in vielfacher Hinsicht ähnlichen topologischen Untersuchung befaßt habe. Er habe stetige Kurvennetze, das sind zwei übereinander ausgebreitete stetige Kurvenscharen, auf geschlossenen Flächen vom Zusammenhang der Kugelflächen (kurz Flächen vom Typus K) betrachtet und nach den möglichen Singularitäten des Netzes gefragt; hierbei werden als reguläre Punkte des Netzes diejenigen definiert, welche eine hinreichend kleine Umgebung besitzen, die sich eineindeutig und stetig auf einen Teil eines Netzes mit quadratischen Maschen abbilden läßt. — Von den mannigfaltigen Resultaten, auf die man bei diesen Untersuchungen geführt wird, werden zwei Sätze angeführt. Satz I: Sind alle Punkte eines auf einer Fläche vom Typus K ausgebreiteten Netzes reguläre Punkte bis auf einen Punkt N, über den nichts vorausgesetzt sei, so kann man schließen, daß alle Kurven des Netzes durch N gehen. Beispiel: Man lege in einem Punkt N einer Kugeloberfläche an diese zwei Tangenten; dann schneiden die Ebenenbüschel durch diese beiden Tangenten auf der Kugelfläche ein Netz von den in Satz I beschriebenen Eigenschaften aus. — Ein zweiter Satz erscheint dadurch bemerkenswert, daß er sich unmittelbar auf das System der Krümmungslinien auf Flächen vom Typus K anwenden läßt. Satz II: Hat ein stetiges Kurvennetz auf einer Fläche vom Typus K nur endlich viele Singularitäten, und ist eine hinreichend kleine Umgebung einer jeden dieser Singularitäten eineindeutig und stetig auf die Umgebung eines der Nabelpunkte des mit dem Netze der Krümmungslinien überdeckten Ellipsoides (aber nicht Rotationsellipsoides) abbildbar, so hat das Netz genau vier Singularitäten.

Kneser erwidert, daß die genannten Sätze aus den einfacheren über Kurvenscharen folgen. Die größere Verwicklung bei den Netzen rührt daher, daß man, um die beiden Scharen zu trennen, unter Umständen eine zweiblättrige Überlagerungsfläche betrachten muß, die in singulären Punkten verzweigt sein kann.

Neuer Beweis des Vierscheitelsatzes [6–22b]

Christiaan Huygens **2** (1922–23), 315–318
[JFM 48.0779.03]

1. *Auf jeder geschlossenen, von Doppelpunkten freien ebenen Kurve C mit stetiger Krümmung liegen mindestens vier Scheitel, d. h. Punkte extremer Krümmung.*

Dieser Satz ist von A. KNESER [1]) bewiesen worden mit Hilfe räumlicher Betrachtungen und des Satzes von MÖBIUS über die Wendepunkte eines unpaaren Kurvenzuges in der projektiven Ebene. Die späteren Beweise [2]) beziehen sich nur auf Eilinien. Der folgende Beweis ist von dieser Beschränkung frei und verläuft, im Gegensatz zum ersten, ganz in der Ebene. Der zu Grunde liegende Gedanke ist durchaus anschaulich und läszt sich ein gutes Stück weit an einer allgemeinen JORDAN'schen Kurve verfolgen. Dasz dabei ein vergleichsweise so schwierig zu erreichendes Hilfsmittel benutzt wird wie der JORDAN'sche Kurvensatz, darf nicht wunder nehmen und macht den Beweis nicht unnötig verwickelt, da dieser Satz unter den anfangs genannten Voraussetzungen einfach genug ist.

2. Es sei C eine JORDAN'sche Kurve, gegeben durch ein Paar stetiger Funktionen $x(t)$, $y(t)$ mit der Periode l, und G das von C begrenzte Gebiet, das, wie alle vorkommenden Punktmengen, mit Einschlusz der Grenze betrachtet werden soll. Ein Teilbogen von C wird bestimmt durch $t_1 \leqq t \leqq t_2$; wir nennen $t_2 - t_1$ seine Länge. Unter den Kreisen, die durch einen Punkt P von C gehen und ganz in G verlaufen, gibt es mindestens einen, K_P, der durch einen weiteren Punkt von C geht, oder, wenn kein solcher vorhanden ist, den gröszt möglichen Durchmesser hat (er kann

---

1) Festschrift, H. Weber gewidmet (Leipzig 1912), S. 170 f.

2) Auszer den in W. BLASCHKE, Vorlesungen über Differentialgeometrie I (Berlin 1921), S. 16 genannten Stellen noch W. VOGT, Journal für die reine und angewandte Mathematik 144 (1914), S. 239 f.

auch, z. B. in den ausspringenden Ecken eines Vielecks, den Durchmesser 0 haben). Die Punkte, bei denen der zweite Fall eintritt, sollen Punkte R heiszen. Wir behaupten:

Wenn C keinen Kreisbogen enthält, so giebt es mindestens zwei Punkte R.

3. Dies beweisen wir mit Hilfe des folgenden Verfahrens. Ist ein Bogen $B = PQ$ auf C gegeben, derart dasz K_P mit B nur P und Q gemeinsam hat, so finden wir entweder einen Punkt R auf B oder einen Teilbogen $B' = P'Q'$ von B mit höchstens der halben Länge und der Eigenschaft, dasz ein Kreis $K_{P'}$ mit B' nur P' und Q' und mit C nur Punkte von B gemeinsam hat.

Der Bogen B bildet nämlich mit den beiden seine Endpunkte P und Q verbindenden Bögen von K_P zwei JORDAN'sche Kurven, deren eine die Kreisscheibe umfaszt. Der diese schlieszende Kreisbogen heisze L, das von ihr begrenzte Gebiet H. Es ist in G enthalten, da die Begrenzung zu G gehört, und in der Umgebung jedes inneren Punktes von B gehören dieselben Punkte zu H wie zu G.

Wir beschreiben einen zu dem Mittelpunkte S von B gehörigen Kreis K_S und behaupten, dasz er ganz in H verläuft. Liegt nämlich ein Punkt S' von K_S auszerhalb des Gebietes H, so verfolgen wir K_S von S' aus nach beiden Seiten bis zu den ersten zu H gehörigen Punkten S'' und S'''. Die Punkte S'' und S''' müssen auf dem Kreisbogen L liegen; denn liegt einer auf B auszerhalb von L, ist er also innerer Punkt von B, so fallen in seiner Umgebung G und H zusammen, liegen die ihm auf K_S benachbarten und auszerhalb von H gelegenen Punkte auch auszerhalb von G, was nicht der Fall ist. Wenn daher K_S das Gebiet H verläszt, so geschieht dies auf dem Kreisbogen L in genau zwei Punkten. Der Kreis K_S zerfällt in zwei Bögen, von denen der auszerhalb der Scheibe K_P gelegene auch auszerhalb von H liegt. Der andere Bogen liegt aber ganz in der Scheibe K_P und kann nicht durch S gehen. Durch diesen Widerspruch fällt die Annahme, K_S verliesze den Bereich H.

Die gemeinsamen Punkte von K_S und C liegen also auf B. Ist S der einzige Treffpunkt, so ist S ein Punkt R. Gibt es einen anderen, T, so liegt auf dem Bogen B zwischen S und T ein Punkt U auszerhalb von K_S; sonst würde der Kreisbogen ST zu C gehören. Der gröszte U enthaltende und bis auf die Endpunkte von K_S freie Teilbogen von ST ist der gewünschte Bogen B'. Er ist ein Teilbogen einer der beiden Hälften PS und QS von B und hat daher höchstens die halbe Länge von B.

4. Wenn nicht alle Punkte von C Punkte R sind, so haben wir einen in G verlaufenden Kreis, der mindestens zwei Punkte von C enthält, und mindestens zwei Bögen B_1 und B_2, wie B in Nr. 3. Auf jeden von ihnen wenden wir das Verfahren dieses Abschnittes an und brechen es ab, wenn es einen Punkt R liefert. Sonst wiederholen wir es an dem Bogen B' und fahren so fort. Das gibt auf B_1 und B_2 je einen Punkt R oder eine Folge einander einschlieszender Teilbögen $B^{(i)}$, deren jeder höchstens die halbe Länge des vorhergehenden hat und die daher gegen einen Punkt V konvergieren. Ein in G verlaufender Kreis durch V, insbesondere ein Kreis K_V, kann nach Nr. 3 nur Punkte von $B^{(i)}$, d.h. keinen Punkt auszer V, mit C gemeinsam haben; V ist ein Punkt R und kann deshalb mit keinem Endpunkt von B zusammenfallen. Damit ist der Satz aus Nr. 2 bewiesen.

5. Ist C eine stetig gekrümmte geschlossene Kurve ohne Doppelpunkt, so musz jeder Kreis K_P die Kurve in P berühren; sonst würde er C schneiden und G verlassen. In einem Punkte R ist K_R der Krümmungskreis von C. Rechnen wir nämlich die Krümmung nach innen positiv, so gilt der folgende bekannte Hilfssatz:

Ist ein C in V berührender Kreis K stärker gekrümmt als C in einer Halbumgebung von V, so liegt der nach derselben Seite gehende Teil von K in einer Umgebung von V in G.

Um diesen Satz ohne schärfere als die hier benutzten Voraussetzungen zu beweisen, führen wir durch eine geeignete Koordinatentransformation den Punkt V in den Anfangspunkt, den Kreis K in einen Kreis $x^2+(y-r)^2=r^2$ über, derart dasz C durch $y=f(x)$, K durch $y=g(x)$ dargestellt wird, die Punkte $y \geqq f(x)$ zu G gehören und die genannte Halbumgebung in $x>0$ liegt. Dann ist die Krümmung k von C eine stetige Funktion von x und $\leqq \frac{1}{r}$ für $x>0$. Die Funktion f bestimmen wir aus der Differentialgleichung

$$\frac{f''}{(1+f'^2)^{3/2}}=k,$$

mit den Anfangsbedingungen $f(0)=f'(0)=0$, durch zukzessive Approximation:

$$f(x) = \lim_{n=\infty} f_n(x), \quad f_0(x) = 0,$$

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x d\xi \int_0^\xi k(\eta) \{1 + f_n'(\eta)^2\}^{3/2} d\eta,$$

woraus sich schrittweise die Ungleichungen

$$f_n(x) \leqq g(x), \quad f(x) \leqq g(x)$$

ergeben, d.h. der Kreis K verläuft in der Halbumgebung in G.

Ist nun ein in R berührender Kreis K nicht der Krümmungskreis in R, so ist er entweder schwächer gekrümmt als C in einer Vollumgebung und wird dann bei R auszerhalb von G verlaufen; oder er ist stärker gekrümmt, dann kann man einen gröszeren berührenden Kreis angeben, der in der Umgebung von R in G liegt. Auszerhalb dieser Umgebung ist aber der erste Kreis frei von C; es gibt daher einen gröszeren Berührungskreis, der ganz in G liegt, K ist nicht der Kreis K_R.

Es ist noch zu zeigen, dasz in den beiden nach Nr. 2 vorhandenen Punkten R, oder wenigstens beliebig nahe bei ihnen, die Krümmung ein Maximum hat. Wäre es anders, so würde sie mit der Entfernung von R nach mindestens einer Seite monoton zunehmen, also gröszer sein als die von K_R, und K_R würde nach dem Hilfssatze G verlassen.

Zwischen diesen zwei Gröszwerten nimmt die Krümmung an mindestens zwei Stellen kleinste Werte an; es gibt also auf C mindestens vier Scheitel.

Über die Lösungen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, das der Lipschitzschen Bedingung nicht genügt [7–23]

Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl. 1923, 171–174
[JFM 49.0302.03]

Peano[1] erkannte, daß bei einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$(1) \qquad y_i' = f_i(x, y_1, \ldots, y_n) = f_i(x, y) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

schon die Stetigkeit der Funktionen f_i hinreicht, um die Existenz von Lösungen zu sichern, die gegebene Anfangswerte — etwa $y_i(0) = 0$ — annehmen, daß aber diese Lösungen nicht eindeutig bestimmt zu sein brauchen, wenn nicht weitere Bedingungen — etwa die von Lipschitz — erfüllt sind. Im Falle einer einzigen Differentialgleichung ist ziemlich leicht zu sehen, daß die Lösungen jeden Zwischenwert annehmen; d. h. wenn y_1 und y_2 zwei Lösungen mit dem gegebenen Anfangswert sind und $y_1(a) < \eta < y_2(a)$ ist, so gibt es eine Lösung mit demselben Anfangswert, die bei a den Wert η annimmt[2]. Im folgenden beweise ich den Satz über Differentialsysteme, der für $n = 1$ den eben genannten ergibt, nämlich:

Die Gesamtheit der Wertsysteme (y_i), die für $x = a$ von den bei $x = 0$ verschwindenden Lösungen des Systems (1) angenommen werden, ist ein Kontinuum im Raume der y.

Den bloßen Existenzbeweis kann man auf die folgende Weise recht einfach führen. Wir beschränken die Variablen x und y_i zunächst auf ein Gebiet $0 \leqq x \leqq c$, $|y_i| \leqq c$, in dem die Funktionen f_i stetig sind und absolut unter einer Schranke $M\,(> 1)$ liegen, dann auf ein Gebiet

$$(2) \qquad 0 \leqq x \leqq a < \frac{c}{M}, \quad |y_i| \leqq c,$$

teilen die x-Strecke durch die Teilpunkte $x = \frac{\nu a}{r}$ $(\nu = 1, \ldots, r-1)$ und kon-

[1] Math. Ann. **37** (1890), S. 182 f.; vgl. G. Mie, Math. Ann. **43** (1893), S. 553 f.
[2] Siehe W. F. Osgood, Monatsh. f. Math. u. Phys. **9** (1898), S. 331 f.

struieren zu jeder Teilung ein System stetiger, stückweise linearer Funktionen

$$(3)\qquad y_{ir}(0)=0\,,\; y_{ir}(x)=y_{ir}\left(\frac{\nu a}{r}\right)+\left(x-\frac{\nu a}{r}\right)f_i\left(\frac{\nu a}{r}\,,\; y_{ir}\left(\frac{\nu a}{r}\right)\right)$$
$$\left(\frac{\nu a}{r}\leqq x\leqq\frac{(\nu+1)a}{r}\right).$$

Diese Funktionen verbleiben in dem Gebiet (2) und haben gleichmäßig beschränkte Differenzenquotienten. Einem allgemeinen Konvergenzsatze zufolge[1] kann man aus dieser unendlichen Folge von Funktionensystemen eine gleichmäßig konvergierende Teilfolge auswählen, und man erhält für die Grenzfunktionen y_i durch Vertauschung der Grenzübergänge

$$\int_0^x f_i(\xi\,,\; y(\xi))\,d\xi = y_i(x)\,,$$

d. h. die Grenzfunktionen befriedigen das System (1).

Um den oben genannten Satz zu beweisen, müssen wir dies Verfahren etwas erweitern. Nicht jede Lösung erhält man nämlich auf diese Art, wie schon das Beispiel $y'=y^{2/3}$ mit der Anfangsbedingung $y=0$ zeigt. Wohl aber können wir jede Lösung y_i mit Hilfe stetiger, stückweise quadratischer Funktionen annähern: wir setzen

$$(3')\qquad y_{ir}(x)=y_{ir}\left(\frac{\nu a}{r}\right)+f_i\left(\frac{\nu a}{r}\,,\; y\left(\frac{\nu a}{r}\right)\right)\left(x-\frac{\nu a}{r}\right)+\alpha_{ir\nu}\left(x-\frac{\nu a}{r}\right)^2\quad\left(\frac{\nu a}{r}\leqq x\leqq\frac{(\nu+1)a}{r}\right)$$
$$\alpha_{ir\nu}=\frac{r^2}{a^2}\left[y_i\left(\frac{(\nu+1)\,a}{r}\right)-y_i\left(\frac{\nu a}{r}\right)-\frac{a}{r}f_i\left(\frac{\nu a}{r}\,,\; y\left(\frac{\nu a}{r}\right)\right)\right].$$

Zur Abschätzung der Koeffizienten $\alpha_{ir\nu}$ machen wir von der Stetigkeit der Funktionen f_i Gebrauch. Sie drückt sich aus durch die Ungleichheiten

$$|f_i(x+\theta h\,,\; y_i+\theta_i h)-f_i(x\,,\; y_i)|\leqq L(h)\qquad(|\theta|\leqq 1\,,|\theta_i|\leqq 1)\,,$$

die für alle x und y im Gebiete (2) gelten, und in denen $L(h)$ eine mit h gegen Null konvergierende Funktion ist. Damit ist

$$\alpha_{ir\nu}=\frac{r^2}{a^2}\int_{\frac{\nu a}{r}}^{\frac{(\nu+1)a}{r}}\left\{f_i(\xi\,,\; y(\xi))-f_i\left(\frac{\nu a}{r}\,,\; y\left(\frac{\nu a}{r}\right)\right)\right\}d\xi\,,$$

$$(4)\qquad |\alpha_{ir\nu}|\leqq\frac{r^2}{a^2}N\left(\frac{a}{r}\right),$$

wenn

$$N(x)=\int_0^x L(M\xi)\,d\xi$$

[1] Er ist zu einem Teil von Ascoli, Atti della R. Acc. dei Lincei 1885, zum anderen von Osgood l. c.[2] ausgesprochen und bewiesen worden.

gesetzt wird, so daß

$$\lim_{x\to 0} \frac{N(x)}{x} = 0$$

ist. Dann haben wir

$$|y'_{ir}| \leq M + \frac{2a}{r} \cdot \frac{r^2}{a^2} N\left(\frac{a}{r}\right) = M + \frac{2r}{a} N\left(\frac{a}{r}\right).$$

Wählen wir also r so groß, daß

$$2\frac{r}{a} N\left(\frac{a}{r}\right) \leq \frac{c - Ma}{a}$$

wird, so ist

$$|y'_{ir}| \leq \frac{c}{a}, \quad |y_{ir}| \leq c.$$

Die Annäherungsfunktionen y_{ir} verlassen also das Gebiet (2) nicht und haben gleichmäßig beschränkte Differenzenquotienten. Dies gilt von allen Funktionen (3'), bei denen die Größen $\alpha_{ir\nu}$ den Ungleichungen (4) genügen, sonst aber beliebig gewählt sind. Wählen wir aus einer Folge solcher Funktionensysteme ($r = 1, 2, \ldots$) eine gleichmäßig gegen Grenzfunktionen y_i konvergierende Teilfolge aus, so ist

$$\begin{aligned}
\int_0^x f_i(\xi, y_i(\xi))\, d\xi &= \lim_{r\to\infty} \int_0^x f_i(\xi, y_{ir}(\xi))\, d\xi \\
&= \lim_{r\to\infty} \int_0^{\left[\frac{rx}{a}\right]\frac{a}{r}} f_i(\xi, y_{ir}(\xi))\, d\xi \\
&= \lim_{r\to\infty} \left\{ \frac{a}{r} \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{rx}{a}\right]} f_i\left(\frac{\nu a}{r}, y_{ir}\left(\frac{\nu a}{r}\right)\right) + A_r \right\} \\
&= \lim_{r\to\infty} \left\{ y_{ir}\left(\left[\frac{rx}{a}\right]\frac{a}{r}\right) + B_r + A_r \right\} \\
&= \lim_{r\to\infty} \{ y_{ir}(x) + C_r + B_r + A_r \},
\end{aligned}$$

worin die Größen

$$|A_r| \leq r \int_0^{\frac{a}{r}} L\left(\frac{c}{a}\xi\right) d\xi = a \cdot \frac{Mr}{c} \cdot N\left(\frac{c}{Mr}\right),$$

$$|B_r| \leq \sum_{\nu=0}^{r-1} |\alpha_{ir\nu}| \left(\frac{a}{r}\right)^2 \leq rN\left(\frac{a}{r}\right),$$

$$|C_r| \leq \frac{c}{r}$$

mit wachsendem r gegen Null streben. Also ist

$$\int_0^x f_i(\xi, y_i(\xi))\,d\xi = \lim_{r\to\infty} y_{ir}(x) = y_i(x);$$

die Grenzfunktionen befriedigen das System (1).

Die Gesamtheit der von den bei $x = 0$ verschwindenden Lösungen von (1) bei $x = a$ angenommenen Werte bildet eine abgeschlossene Punktmenge S, wie schon Peano bewies. Wäre sie kein Kontinuum, sondern ließe sie sich in zwei fremde abgeschlossene Mengen Q und R mit positivem Abstand d zerlegen, so definieren wir eine auf S nirgends verschwindende, auf Q positive und auf R negative, stetige Funktion des Punktes P, z. B. durch

$$F(P) = (PR) - (PQ),$$

worin die Klammern Abstände bezeichnen. Auf Q ist nämlich $F \geqq d$, auf R aber $F \leqq -d$. Für genügend großes r gibt es dann Annäherungsfunktionen $\overline{y_{ir}}$ und $\underline{y_{ir}}$, so daß

$$F(\overline{y_{ir}}(a)) > 0, \quad F(\underline{y_{ir}}(a)) < 0$$

ist. Bei veränderlichen $\alpha_{ir\nu}$ hängen aber die Werte $F(y_{ir}(a))$ stetig von diesen ab; daher gibt es bei genügend großem r Annäherungsfunktionen y_{ir}, für die

$$F(y_{ir}(a)) = 0$$

ist. Eine gleichmäßig konvergente Teilfolge definiert eine Lösung y_i von (1), die

$$F(y_i(a)) = 0$$

ergibt; die Funktion F muß doch auf S verschwinden, d. h. S ist ein Kontinuum.

Ausgegeben am 7. August 1923.

Ein topologischer Zerlegungssatz [8–24a]

Proc. Konink. Nederl. Akad. Wetensch. **27** (1924), 601–616

Die BROUWERsche Übertragung des JORDANschen Kurvensatzes auf Räume beliebiger Dimensionenzahl besagt, dass der n-dimensionale Raum von jeder in ihm liegenden $(n—1)$-dimensionalen geschlossenen Mannigfaltigkeit in zwei Teile zerlegt wird [1]). Fragt man, welche geschlossenen n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten diese Eigenschaft haben, so lautet die Antwort:

Satz 1. *Eine geschlossene n-dimensionale Mannigfaltigkeit* M^n $(n > 1)$ *wird dann und nur dann von jeder in ihr liegenden geschlossenen* $(n—1)$*-dimensionalen Mannigfaltigkeit zerlegt, und zwar in zwei Teile, wenn ihre* BETTI*sche Zahl erster Dimension den Wert eins hat und die Torsionszahlen erster Dimension — wenn solche vorhanden sind — sämtlich ungerade sind.*

Ich beweise diesen Satz im kombinatorischen Sinne, d. h. unter der Voraussetzung, dass M^n durch ein endliches Zellengebäude gegeben ist und M^{n-1} sich aus Zellen dieses Gebäudes zusammensetzt. In § 1 leite ich die Grundeigenschaften der "Umgebungskomplexe" ab, was bisher anscheinend noch nicht geschehen ist [2]); die folgenden Paragraphen erbringen schrittweise den Beweis für Satz 1.

Der Gedankengang des Beweises lässt sich etwa folgendermassen andeuten, wenn auch die Ausführung in Einzelheiten anders ausfällt. Ist eine M^n nicht zerlegende M^{n-1} gegeben, so verbinden wir zwei „nahe" bei einem Punkte von M^{n-1} und „auf verschiedenen Seiten von M^{n-1}" gelegene Punkte durch eine M^{n-1} nicht treffende Kurve und vervollständigen diese zu einer M^{n-1} in einem Punkte „durchschneidenden" geschlossenen Kurve. Unter den Voraussetzungen von Satz 1 ist diese, eine geeignete ungerade Anzahl Male genommen, Rand einer in M^n gelegenen Fläche. Diese Fläche können

1) Beweis des JORDANschen Satzes für den n-dimensionalen Raum, Math. Ann. 71 (1911), S. 314—319.

2) Vgl. E. BILZ, Beiträge zu den Grundlagen der kombinatorischen Analysis situs (Math. Zschr. 18 (1923), S. 1—41).

wir so legen, dass sie M^{n-1} nur in geschlossenen und auf dem Rand der Fläche endenden ungeschlossenen Kurven trifft. Auf dem Rande liegt aber als einziger Treffpunkt der eine ungerade Anzahl Male zu zählende Durchstosspunkt, und jedes Mal geht von ihm eine ungerade Zahl Schnittkurven aus. Das geht nicht an, weil jede ungeschlossene Kurve zwei Endpunkte hat.

Sind die Voraussetzungen von Satz 1 nicht erfüllt, so hat die ABELsche Gruppe der Homologieklassen erster Dimension einen Charakter, der die Werte ± 1 und keine anderen annimmt. Es gelingt, einen M^n nicht zerlegenden Komplex $(n-1)^{\text{ter}}$ Dimension C^{n-1} zu konstruieren, derart dass ein geschlossener Weg, der C^{n-1} in k Punkten durchschneidet, als Element der Homologiengruppe der Charakter $(-1)^k$ hat. Vermöge dieser Eigenschaften gelingt es weiter, die Singularitäten des Komplexes C^{n-1} aufzulösen, ohne dass er dabei seine vorher genannten Eigenschaften verliert, d.h. aus ihm eine M^n nicht zerlegende M^{n-1} abzuleiten.

§ 1. *Umgebungskomplexe.*

Wir benutzen die Begriffe des n-dimensionalen Komplexes C^n, der n-dimensionalen Sphäre S^n, des n-dimensionalen Elementarraumes E^n und der internen Transformation (abgekürzt i. T.), die durch gleichzeitige vollständige Induktion nach n zu definieren sind [1]).

Der Umgebungskomplex (abgekürzt UC) einer Zelle k-ter Dimension Z^k in einem Komplex C^n $(k < n)$ entsteht, wenn wir jeder von Z^k berandeten [2]) Zelle Z^l $(k < l \leq n)$ von C^n eine Zelle Z^{l-k-1} entsprechen lassen und die Berandungsbeziehungen in dem Sinne aufrecht erhalten, dass, wenn Z^l dem Rande von Z^m $(l < m)$ angehört, auch die Z^l entsprechende Zelle Z^{l-k-1} dem Rande der Z^m entsprechenden Zelle Z^{m-k-1} angehören soll. Der UC von Z^k in C^n werde mit $UC_{Z^k}(C^n)$ bezeichnet. Um die Bezeichnung Umgebungs*komplex* zu rechtfertigen, müssen wir beweisen:

---

[1]) Man findet die Definitionen bei BILZ a.a.O., § 5. Wir weichen nur darin von den BILZ'schen Definitionen ab, dass wir die Forderungen **64***b* und *c* weglassen, die eine, weil sie in dem nötigen Umfange als Satz **2** bewiesen werden wird, die andere, weil auch ohne sie die wesentlichen Sätze bestehen bleiben.

[2]) Der Kürze halber sagen wir, Z^k berandet Z^l, wenn Z^k der Rand-S^{l-1} von Z^l angehört, also nicht notwendig den vollen Rand von Z_l bildet.

Satz 2. *$UC_{Z^k}(C^n)$ ist ein Komplex, d.h. der Rand jeder seiner Zellen Z^r ist eine S^{r-1}.*

Fassen wir den UC unabhängig von seiner geometrischen Bedeutung nur als Zusammenstellung von Zellen auf, die durch Berandungsbeziehungen verknüpft sind, so gilt die Formel

$$UC_{Z^l}(C^n) = UC_{Z^{l-k-1}}(UC_{Z^k}(C^n)), \quad \ldots \ldots \quad \text{(I)}$$

wenn Z^k eine Randzelle von Z^l, also $k < l < n$, und Z^{l-k-1} die der Zelle Z^l auf $UC_{Z^k}(C^n)$ entsprechende Zelle ist. Um nämlich $UC_{Z^k}(C^n)$ zu bilden, behalten wir von C^n nur die von Z^k berandeten Zellen bei, vermindern die Dimension um $k+1$ und lassen die Berandungsbeziehungen ungeändert. Da Z^k als Randzelle von Z^l auch jede von Z^l berandete Zelle berandet, sind jedenfalls die von Z^l berandeten Zellen beibehalten worden, und zwar werden sie jetzt von Z^{l-k-1} berandet. Die rechte Seite der Gleichung (I) entsteht, wenn wir nur diese Zellen mit ihren Berandungsbeziehungen beibehalten und die Dimension je um $l-k-1+1$ vermindern. Im ganzen haben wir also genau die von Z^l berandeten Zellen beibehalten und ihre Dimension um $k+1+l-k-1+1 = l+1$ vermindert. Das gibt aber genau $UC_{Z^l}(C^n)$.

Was ist nun der Rand von Z^{l-k-1} auf $UC_{Z^k}(C^n)$? Wir erhalten ihn, indem wir von den Zellen von $UC_{Z^k}(C^n)$ nur die Randzellen von Z^{l-k-1}, d.h. die aus den Randzellen von Z^l hervorgegangegen Zellen herausgreifen. Damit haben wir aber den UC von Z^k in der Z^l berandenden Sphäre S^{l-1}. Satz 2 ist also zurückgeführt auf

Satz 3(m).

$$UC_{Z^k}(S^m) = S^{m-k-1}.$$

Zugleich mit Satz 3(m) beweisen wir

Satz 4(m). *Ist Z^k eine innere Zelle des Elementarraumes E^m, so gilt*

$$UC_{Z^k}(E^m) = S^{m-k-1}.$$

Satz 5(m). *Ist Z^k Randzelle von E^m, so gilt*

$$UC_{Z^k}(E^m) = E^{m-k-1},$$

und zwar entspricht einer von Z^k berandeten inneren bezw. Randzelle von E^m eine innere bezw. Randzelle von E^{m-k-1}.

Man bestätigt die Sätze $3(m)$ bis $5(m)$ unmittelbar, wenn S^m bezw. E^m in der Normalgestalt vorliegt. Diese besteht bekanntlich [1]) aus zwei Zellen jeder Dimension von der nullten bis zur m-ten, nur beim Elementarraum E^m nur einer Z^m, wobei jede Zelle jede von höherer Dimension berandet; und im Falle des Elementarraumes ist jede Zelle von niedrigerer als der m-ten Dimension Randzelle. Bildet man einen UC, so erhält man genau, wie es Satz $3(m)$ bezw. $5(m)$ behauptet, eine S^{m-k-1} bezw. einen E^{m-k-1} (Satz $4(m)$ kommt nicht zur Anwendung, da keine inneren Zellen vorhanden sind).

Es seien nun die Sätze $3(n)$, $4(n)$, $5(n)$ gültig für $n < m$ und für $n = m$ bei einer bestimmten Darstellung vom S^m bezw. E^m; wir beweisen sie für jede S^m oder E^m, die aus der vorliegenden durch eine i.T. hervorgeht. Haben wir dies für $k = 0$ geleistet, so folgen die Sätze für grösseres k. Ist nämlich Z^0 ein Punkt auf dem Rande von Z^k so folgt aus (1), wenn Z^{k-1} die Z^k auf $UC_{Z^0}(S^m)$ bezw. $UC_{Z^0}(E^m)$ entsprechende Zelle ist,

$$UC_{Z^k}(S^m) = UC_{Z^{k-1}}(UC_{Z^0}(S^m))$$

bezw.

$$UC_{Z^k}(E^m) = UC_{Z^{k-1}}(UC_{Z^0}(E^m)).$$

Sind die Sätze für Z^0 bewiesen, so steht rechts in der Klammer eine S^{m-1} oder ein E^{m-1}, je nachdem ob Z^0 innere oder Randzelle ist. Nach Satz $5(m)$, angewandt auf Z^0, ist Z^{k-1} zugleich mit Z^k innere oder Randzelle. Nach Satz $3(m-1)$, $4(m-1)$ oder $5(m-1)$ steht nun rechts eine S^{m-k-1} oder, wenn Z^k Randzelle von E^m ist, ein E^{m-k-1}, was zu beweisen war.

Der UC eines Punktes Z^0 ändert sich bei i.T. nur dann, wenn eine von Z^0 berandete Zelle Z^k transformiert wird. Es werde etwa Z^k in Z_1^k und Z_2^k geteilt durch eine Zelle Z^{k-1}, deren Rand eine auf der Randsphäre S^{k-1} von Z^k gelegene S^{k-2} ist, die S^{k-1} in E_1^{k-1} und E_2^{k-1} zerlegt, sodass Z_i^k $(i=1,2)$ von Z^{k-1} und E_i^{k-1} begrenzt wird. UC_{Z_0} ändert sich nur, wenn Z^0 auf S^{k-2} liegt. Nach den Sätzen $3(k-1)$, $3(k-2)$, $5(k-1)$ sind dann die Bilder von S^{k-1}, S^{k-2}, E_i^{k-1} auf UC_{Z^0} bezüglich Sphären bezw. Elementarräume $\overline{S}^{k-2}$, S^{k-3}, E_i^{k-2}. Auf UC_{Z^0} wird bei der i. T. eine von $\overline{S}^{k-2}$ begrenzte Z^{k-1} ersetzt durch Z^{k-2}, begrenzt von S^{k-3}, und die Zellen Z_i^{k-1} $(i = 1, 2)$, begrenzt von

[1]) Siehe Bilz, a. a. O., Nr. 79, 80.

Z^{k-2} und E_i^{k-2}, d. h. UC_{Z^0} erleidet eine i. T.: die Sätze **3** (m), **4** (m), 5 (m) bleiben gültig. Genau entsprechend beweist man, dass UC_{Z^0} eine i. T. erfährt, wenn bei der i. T. zwei Zellen vereinigt werden.

Wird bei der i. T. eine Strecke Z^1 in zwei Strecken Z_1^1 und Z_2^1 geteilt und ein Punkt Z^0 neu eingeführt, so erhalten wir UC_{Z^0}, indem wir in UC_{Z^1} die Dimension jeder Zelle um eins erhöhen und zwei Punkte, die Bilder von Z_1^1 und Z_2^1, hinzufügen, die alle Zellen höherer Dimension beranden. Es ist also noch zu beweisen.

Satz 6 (m). *Erhöht man in einer S^{m-1} bezw. einem E^{m-1} die Dimension jeder Zelle um eins, und fügt man zwei alle anderen Zellen berandende Punkte Z_1^0 und Z_2^0 hinzu, so ergibt sich eine S^m bezw. ein E^m.*

Der Satz 6 (n) gilt offenbar für $n=1$ und wenn S^{n-1} bezw. E^{n-1} in der Normalgestalt vorliegt. Er sei bewiesen für $n<m$; dann zeigen wir, dass bei i. T. von S^{m-1} bezw. E^{m-1} auch S^m bezw. E^m eine i. T. erfährt. In der Tat, haben bei der Teilung einer Zelle Z^k $(k \leq m-1)$, S^{k-1}, S^{k-2}, E_i^{k-1} dieselbe Bedeutung wie vorher, so bilden die den Zellen von S^{k-1}, S^{k-2}, E_i^{k-1} entsprechenden Zellen von S^m bezw. E^m zusammen mit Z_1^0 und Z_2^0 nach Satz 6 $(k-1)$ und 6 $(k-2)$ je eine S^k, S^{k-1}, E_i^k; daher bewirkt die i. T. von S^{m-1} bezw. E^{m-1} eine i. T. von S^m bezw. E^m, wodurch diese wieder in eine S^m bezw. E^m übergeht. Dasselbe gilt bei Vereinigung zweier Zellen.

Damit sind endlich die Sätze 2 bis 6 bewiesen.

Wir brauchen noch den folgenden

Satz 7. *Jede i.T. eines $UC_{Z^k}(C^n)$ lässt sich durch eine i.T. von C^n bewirken. Ist $k=0$, und besteht die i.T. von UC_{Z^k} nur in Teilungen, so lässt sie sich bewirken durch Teilungen in C^n, bei denen keine von Z^0 berandete Strecke betroffen wird, wenn nur anfangs keine zwei Strecken beide Endpunkte gemeinsam haben.*

Wir teilen jede von Z^k berandete Zelle in folgender Weise. Jede Z^{k+1} wird geteilt durch eine Zelle $\overline{Z}^k$, die von derselben S^{k-1} berandet wird wie Z^k. (Diesen Schritt unterlassen wir nur, wenn es sich im Falle $k=0$ darum handelt, die zweite Behauptung zu beweisen). Haben wir alle von Z^k berandeten Zellen bis herauf zur l-ten Dimension geteilt, so teilen wir jede von Z^k berandete Z^{l+1}

durch eine Zelle $\overline{Z}^l$, deren Rand besteht aus S^{k-1} und allen den Zellen $\overline{Z}^r$, deren entsprechende Z^{r+1} Randzellen von Z^{l+1} sind. Bei diesen Teilungen hat sich UC_{Z^k} nicht geändert. Wollen wir nun in UC_{Z^k} eine i.T. ausführen, etwa Z^{l-k-1}, das Bild von Z^l, teilen durch eine Z^{l-k-2}, deren Rand eine auf der Rand-S^{l-k-2} von Z^{l-k-1} gelegene und diese in zwei E^{l-k-2} zerlegende S^{l-k-3} ist, so teilen wir $\overline{Z}^{l-1}$ durch eine $\overline{Z}^{l-2}$, deren Rand besteht aus S^k und denjenigen $\overline{Z}^r$, deren zugehörigen Z^{r+1} auf UC_{Z^k} die Zellen von S^{l-k-3} entsprechen, darauf teilen wir Z^l durch eine Z^{l-1}, deren Rand besteht aus den Zellen: $\overline{Z}^{l-2}$ mit ihren Randzellen ($\overline{S}^{l-3}$), Z^k mit ihren Randzellen (S^{k-1}) und zu jeder $\overline{Z}^r$ von S^{l-3} die zugehörige $\overline{Z}^r$. Auf UC_{Z^k} wird damit Z^{l-k-1} geteilt durch Z^{l-k-2}, das Bild von Z^{l-1}, und der Rand von Z^{l-k-2} is die vorgegebene S^{l-k-3}. Sollen zwei Zellen Z_1^{l-k-1} und Z_2^{l-k-1} von UC_{Z^k} durch Beseitigung der gemeinsamen Randzelle Z^{l-k-2} vereinigt werden, so vereinigen wir die entsprechenden Zellen Z_1^l und Z_2^l von C^n durch Beseitigung der gemeinsamen Randzelle Z^{l-1}. Soll eine weitere i.T. auf UC_{Z^k} bewirkt werden, so wiederholen wir das ganze Verfahren. Die Rechtmässigkeit der vorgenommenen i.T. folgt aus den Sätzen:

(A) Lassen wir von einer S^n einen E^n weg, so bleibt ein E^n übrig.

(B) Erhöhen wir in einer S^n (einem E^n) die Dimension jeder Zelle um k und fügen wir eine S^{k-1} hinzu, deren Zellen alle anderen Zellen beranden sollen, so erhalten wir eine S^{n+k} (einen E^{n+k}).

Der Beweis von (A) ist nicht ganz einfach, aber von den folgenden Betrachtungen unabhängig. Ich denke ihn in anderem Zusammenhange zu geben.

Um (B) zu beweisen, transformieren wir S^{k-1} in die Normalgestalt. Das ist durch eine Transformation des ganzen Komplexes möglich, da alle Zellen von S^{k-1} dieselben Zellen, nämlich sämtliche, die nicht zu S^{k-1} gehören, beranden. Hat aber S^{k-1} die Normalgestalt, so folgt (B) durch $(k+1)$-malige Anwendung des Sonderfalles $k=0$, und dieser wurde schon als Satz 6 bewiesen.

Mit Hilfe des Begriffes UC können wir jetzt definieren:

Eine geschlossene n-dimensionale ($n > \sigma$) Mannigfaltigkeit M^n ist ein zusammenhängender C^n, in dem jeder UC_{Z^0} eine S^{n-1} ist. Nach (I) und Satz 3(n—1) ist dann auch jeder UC_{Z^k} eine S^{n-k-1}. Genau wie beim Beweis der Sätze 3 bis 5 zeigt sich, dass eine M^n bei i.T. wieder in eine M^n übergeht, dass der Begriff Mannigfaltigkeit gegenüber Homöomorphie invariant ist.

§ 2. *Zerlegung in höchstens zwei Teile.*

Satz 8(n). *Liegt in einer M^n ($n \geqq 1$) eine M^{n-1}, so lassen sich ein beliebiger Punkt Q von M^{n-1} und ein beliebiger nicht auf M^{n-1} liegender Punkt P nach einer geeigneten Unterteilung von M^n durch einem M^{n-1} nur in Q treffenden Streckenzug verbinden.*

Satz 9(n). *Eine M^n wird durch eine in ihr liegende M^{n-1} in höchstens zwei Teile zerlegt, d.h. von drei beliebigen nicht auf M^{n-1} liegenden Punkten von M^n lassen sich nach einer geeigneten Unterteilung von M^n mindestens zwei durch einen M^{n-1} nicht treffenden Streckenzug verbinden.*

Offenbar gelten die Sätze 8(1) und 9(1), wenn wir, wie es hier zweckmässig ist, unter M^0 nur die S^0, d.h. zwei Punkte verstehen. Es seien die Sätze 8(n—1) und 9(n—1) bewiesen; wir beweisen zuerst 8(n), dann 9(n).

Da M^n ein zusammenhängender C^n ist, können wir P und Q durch einen Streckenzug verbinden. Ist Q_1 der erste auf M^{n-1} liegende Punkt des Streckenzuges, und fällt Q_1 mit Q zusammen, so ist Satz 8 bestätigt. Anderenfalls können wir, da M^{n-1} zusammenhängt, Q_1 und Q durch einen auf M^{n-1} verlaufenden Streckenzug $Q_1 Q_2 \ldots Q_r Q$ verbinden. Von diesem dürfen wir annehmen, dass er keinen Doppelpunkt hat; denn sonst könnten wir ihn durch Weglassen geschlossener Streckenzüge verkürzen. Wir ersetzen den Streckenzug $PQ_1 Q_2 \ldots Q_r Q$ durch einen Zug $PQ_2 \ldots Q_r Q$, dessen Teil PQ_2 die Mannigfaltigkeit M^{n-1} nur in Q_2 trifft. Das geschieht folgendermassen. Auf $UC_{Q_1}(M^n) = S^{n-1}$ ist das Bild von M^{n-1} eine S^{n-2}, also eine besondere M^{n-2}, das der Strecke $Q_1 Q_2$ ein Punkt von S^{n-2}, das der letzten Strecke RQ_1 des Zuges PQ_1 ein nicht auf S^{n-2} liegender Punkt. Nach Satz 8(n—1), angewandt auf S^{n-1}, können wir diese beiden Punkte nach einer geeigneten Unterteilung von S^{n-1} durch einen S^{n-2} nicht treffenden Streckenzug auf S^{n-1} verbinden. Diese Unterteilung von S^{n-1} lässt sich nach Satz 7 bewirken durch eine Unterteilung von M^n, bei der die Strecke $Q_1 Q_2$ nicht geteilt wird. Das bedeutet aber für M^n, dass nach dieser Unterteilung eine Folge von Flächenzellen $Z^2_1, Z^2_2, \ldots Z^2_s$

vorliegt, die sämtlich in Q_1 zusammenstossen, von denen die erste von RQ_1 und die letzte von $Q_1 Q_2$ berandet wird, und von denen jede $Z_i^2 (i = 1, \ldots, s-1)$ mit der folgenden, Z_{i+1}^2 eine von Q_1 ausgehende, nicht auf M^{n-1} liegende Strecke Z_i^1 gemeinsam hat. Jede dieser gemeinsamen Randstrecken Z_i^1 teilen wir durch einen neu eingeführten Punkt T_i und verbinden R mit T_1 durch eine Strecke auf Z_1^2, T_i mit $T_{i+1} (i = 1, \ldots, s-1)$ durch eine Strecke auf Z_{i+1}^2, T_{s-1} mit Q_2 durch eine Strecke auf Z_s^2. Schliesslich ersetzen wir die Strecken RQ_1 $Q_1 Q_2$ des Zuges PQ durch die Strecken RT_1 $T_2 \ldots T_{s-1}$ Q_2; damit haben wir die Anzahl der auf M^{n-1} liegenden Strecken des Zuges um eins vermindert. Wiederholung dieses Verfahrens liefert zuletzt einen Streckenzug PQ, der M^{n-1} nur in Q trifft, wie es Satz 8 behauptet.

Sind nun P_1, P_2, P_3 drei nicht auf M^{n-1} liegende Punkte von M^n, so verbinden wir jeden von ihnen mit einem Punkt Q von M^{n-1} durch einen M^{n-1} nur in Q treffenden Streckenzug, was nach Satz 8 (n) nach einer Unterteilung von M^n möglich ist. Sind $R_1 Q$, $R_2 Q$, $R_3 Q$ die letzten Strecken dieser Züge, so sind deren Bilder auf $UC_Q = S^{n-1}$ drei Punkte, die nicht auf dem Bilde S^{n-2} von M^{n-1} liegen. Nach Satz 9 $(n-1)$, angewandt auf S^{n-2} und die Bilder von $R_1 Q$, $R_2 Q$ und $R_3 Q$ auf S^{n-1}, lassen sich nach einer Unterteilung von S^{n-1} zwei von den drei Punkten, durch einen S^{n-2} nicht treffenden Streckenzug verbinden. Nach Satz 7 lässt sich diese Unterteilung von S^{n-1} durch eine Unterteilung von M^n bewirken. Nach dieser Unterteilung haben wir eine Folge in Q zusammenstossender Flächenzellen $Z_1^2, Z_2^2, \ldots, Z_s^2$, die nicht auf M^{n-1} liegen von denen etwa die erste von $R_1 Q$, die letzte von $R_2 Q$ berandet wird, und von denen jede, Z_i^2 mit der folgenden Z_{i+1}^2 in einer nicht auf M^{n-1} liegenden Strecke Z_i^1 zusammenstösst. Auf Z_i^1 führen wir je einen neuen Punkt T_i ein und verbinden R_1 mit T_1, T_i mit T_{i+1}, T_{s-1} mit R_2, durch je eine Strecke innerhalb der Zellen $Z_1^2, \ldots, Z_s^2$. Damit sind R_1 und R_2, also P_1 und P_2 durch einen M^{n-1} nicht treffenden Streckenzug verbunden, wie es Satz 9(n) behauptet.

§ 3. *Zerlegung in genau zwei Teile.*

Satz 10(n). *Ist bei der Mannigfaltigkeit* M^n $(n > 1)$ *die erste*

BETTIsche *Zahl* $P_1 = 1$, *und sind alle Torsionszahlen erster Dimension ungerade, so wird* M^n *durch jede* M^{n-1} *zerlegt, d.h. wir können durch eine Unterteilung von* M^n *zwei Punkte einführen, die sich durch keinen* M^{n-1} *nicht treffenden Streckenzug verbinden lassen.*

Satz $10(m)$ sei bewiesen für $m < n$. Die Sphäre S^m erfüllt die Voraussetzungen, wenn $m > 1$ ist: es ist $P_1 = 1$ und keine Torsionszahl vorhanden. Im Falle $m = 1$ gilt die Behauptung von Satz 10; denn eine M^1, d.h. eine geschlossene Kurve wird durch jede M^0, d.h. durch irgend zwei Punkte zerlegt (obwohl hier $P_1 = 2$ ist).

Wir wählen einen beliebigen Punkt Q auf M^{n-1}. UC_Q ist eine S^{n-1}, das Bild von M^{n-1} auf UC_Q eine S^{n-2}. Nach Satz $10(n-1)$ können wir S^{n-1} so unterteilen, dass zwei nicht auf S^{n-2} liegende Punkte O_1 und O_2 durch S^{n-2} getrennt werden. Nach Satz 7 können wir die Unterteilung von S^{n-1} durch eine Unterteilung von M^n bewirken. Dann teilen wir die beiden von Q ausgehenden Strecken, deren Bilder O_1 und O_2 sind, durch die Punkte P_1 und P_2 und behaupten: P_1 und P_2 lassen sich durch keinen M^{n-1} nicht treffenden Streckenzug verbinden. Liessen sie sich nämlich verbinden, so würde der verbindende Streckenzug mit den Strecken P_1QP_2 eine geschlossene Kurve bilden, deren Lage in ihrem einzigen Schnittpunkt Q mit M^{n-1} durch die Konstruktion so eingerichtet ist, dass wir in sinngemässer Übertragung der üblichen Ausdrucksweise sagen können, sie durchschneidet M^{n-1} in Q. Unter den Voraussetzungen von Satz 10 ist jede geschlossene Kurve G^1, eine geeignete ungerade Anzahl von Malen genommen, homolog Null, d.h. der vollständige Rand eines Aggregats G^2 orientierter Flächenzellen. Von der Orientierung können wir für unseren Zweck absehen und merken nur an, dass in den Strecken von G^1 eine ungerade, in allen anderen Strecken eine gerade Zahl Zellen von G^2 angrenzen. Liegen nun (wenn $n > 2$ ist) Flächenzellen von G^2 auf M^{n-1}, so ersetzen wir sie durch andere. Ist nämlich Z^2 eine solche, so können wir durch eine Unterteilung von M^n bewirken, dass an Z^2 eine nicht zu M^{n-1} gehörende Z^3 anstösst. Dann teilen wir Z^3 durch eine Flächenzelle Z_1^2, die wir in die Randkurve von Z^2 einspannen, und ersetzen Z^2 als Zelle von G^2 durch Z_1^2.

Ist Z^1 eine auf M^{n-1} liegende Strecke von G^2 und $n > 2$, so ist $UC_{Z^1}(M^n)$ eine S^{n-2}, das Bild von M^{n-1} auf $UC_{Z^1}(M^n)$ eine S^{n-3}, das von G^2 eine gerade Anzahl nicht auf S^{n-3} liegender

Punkte. Nach Satz $9(n-2)$ und $10(n-2)$ wird S^{n-2} durch S^{n-3} in zwei Teile zerlegt. Z^1 heisse Schnittstrecke, wenn in jedem der beiden Teile von S^{n-2} eine ungerade Anzahl dieser Punkte liegt. Ist $n=2$ so besteht UC_{Z^1} aus zwei Punkten und das Bild von G^2 aus einer geraden Anzahl von Punkten. Z^1 heisse Schnittstrecke, wenn je eine ungerade Anzahl mit jedem der beiden Punkte von UC_{Z^1} zusammenfällt.

Ist P ein auf M^{n-1} liegender Punkt von G^2, so ist $UC_P\,(M^n)$ eine S^{n-1}, das Bild von M^{n-1} auf UC_P eine S_1^{n-2}, das von G^2 ein Streckenkomplex C^1, in dessen Punkten immer eine gerade Zahl von Strecken zusammenstösst. Den auf M^{n-1} liegenden Strecken von G^2 entsprechen auf S_1^{n-2} liegende Punkte von C^1. Von einem solchen Punkt R führen in jeden der beiden Teile, in die S^{n-1} nach Satz $8(n-1)$ durch S_1^{n-2} zerlegt wird, eine Anzahl Strecken. Die dem Punkt R entsprechende Strecke von G^2 ist dann und nur dann Schnittstrecke, wenn diese Anzahlen beide ungerade sind. Den Punkten von $UC_{Z^1}\,(M^n)$, die in demselben von S^{n-3} bestimmten Teil liegen, entsprechen auf $UC_P\,(M^n)$ Strecken, die sich nach einer Unterteilung durch eine Folge nicht auf S^{n-2} liegender Strecken und Flächenzellen verbinden lassen, also zu demselben durch S^{n-1} bestimmten Teil von $UC_P\,(M^n)$ gehören. Wir behaupten nun: in Q endigt eine ungerade, in jedem anderen auf M^n liegenden Punkt P von G^2 eine gerade Zahl Schnittstrecken. Auf $UC_P\ (P \neq Q)$ haben wir nämlich einen Streckenkomplex, in dessen Punkten je eine gerade Anzahl Strecken endigt. Dieser lässt sich in eine Anzahl geschlossener Kurven zerlegen, und von diesen muss jede den einen durch S_1^{n-1} auf UC_P bestimmten Teil gleich oft betreten und verlassen, also S_1^{n-2} im ganzen eine gerade Anzahl Male schneiden. Auf UC_Q dagegen haben wir einen Streckenkomplex, in dessen Punkten je eine gerade Zahl Strecken endigt, mit Ausnahme der Punkte O_1 und O_2, die in verschiedenen durch S_1^{n-2} bestimmten Teilen von UC_Q liegen, und in denen je eine ungerade Zahl Strecken endigt. Der Streckenkomplex lässt sich zerlegen in geschlossene Kurven und eine O_1 mit O_2 verbindende Kurve. Die ersteren schneiden S_1^{n-2} eine gerade, die letzte eine ungerade Anzahl Male.

Zählen wir nun die Endpunkte aller Schnittstrecken, so liefert Q einen ungeraden, jeder andere Punkt einen geraden Beitrag. Die Gesamtzahl ist aber gerade, da jede Strecke zwei Endpunkte hat.

Also ist die Annahme, M^n würde durch M^{n-1} nicht zerlegt, zu verwerfen, Satz $10(n)$ ist bewiesen.

§ 4. *Nicht zerlegende Mannigfaltigkeiten.*

Satz 11. *Ist die erste* Bettische *Zahl der Mannigfaltigkeit* M^n $(n > 1)$ *grösser als eins, oder ist eine gerade Torsionszahl erster Dimension vorhanden, so gibt es eine* M^{n-1} *auf* M^n, *die* M^n *nicht zerlegt.*

Um die Voraussetzung auszunutzen, erinnern wir uns an die Bedeutung der Bettischen und Torsionszahlen. Ist P_1 die erste Bettische Zahl, und sind $\tau_1, \ldots, \tau_r$ die Torsionszahlen erster Dimension, so gibt es eine Basis für die gerichteten geschlossenen Wege auf M^n, bestehend aus den Wegen $X_1, \ldots, X_{P_1-1}$, $Y_1, \ldots, Y_r$ derart, dass sich jeder geschlossene gerichtete Weg X bis auf Homologie aus ihnen kombinieren lässt:

$$X \sim \sum_{\nu=1}^{P_1-1} c_\nu X_\nu + \sum_{\nu=1}^{r} d_\nu Y_\nu , \tag{1}$$

und dann und nur dann $X \sim 0$ ist, wenn

$$c_\nu = 0 \; (\nu = 1, \ldots, P_1-1), \; d_\nu \equiv 0 \bmod \tau_\nu \; (\nu = 1, \ldots, r)$$

ist.

Statt der Wege, d.h. der geschlossenen gerichteten Ketten von Zellen abwechselnd nullter und erster Dimension, von denen je zwei aufeinander folgende in der Berandungsbeziehung stehen, betrachten wir jetzt ebensolche Ketten von Zellen abwechselnd n-ter und $(n-1)$-ter Dimension. Jeder solchen Kette

$$Z_1^n \, Z_1^{n-1} \, Z_2^n \ldots Z_r^{n-1} \, Z_1^n \tag{2}$$

ordnen wir einen Weg zu, indem wir auf dem Rande jeder Zelle Z_i^{n-1} einen Punkt P_i bestimmen und jeweils P_i mit P_{i+1} $(i=1,\ldots, r-1)$ durch einen Weg auf dem Rande von Z_{i+1}^n, P_r mit P_1 durch einen Weg auf dem Rande von Z_1^n verbinden. Zwei verschiedene, derselben Kette zugeordnete Wege sind einander homolog. Denn ist $P'_1 P'_2 \ldots P'_r P'_1$ ein anderer der Kette (2) zugeordneter Weg, so verbinden wir jeweils P_i und P'_i durch einen Weg auf dem Rande von Z_i^{n-1}. Da der Rand von Z_i^n eine S^{n-1} ist, so ist der auf ihm gelegene geschlossene Weg $P_{i-1} P_i P'_i P'_{i-1} P_{i-1}$ bezw. für $i=1$ der Weg $P_r P_1 P'_1 P'_r P_r$ homolog Null. Die Addition dieser Homologien ergibt

$$P_1 P_2 \ldots P_r P_1 \sim P'_1 P'_2 \ldots P'_r P'_1 .$$

Wir können also auf die Ketten (2) die Basisdarstellung (1) anwenden. Umgekehrt gehört auch zu jedem Weg $Z_1^0 Z_1^1 Z_2^0 \ldots Z_s^1 Z_1^0$ eine Kette (2). Wir brauchen nur jeder Strecke Z_i^1 des Weges eine von ihr berandete Zelle Z_i^n zuzuordnen und Z_i^n mit Z_{i+1}^n $(i=1, \ldots, s-1)$ durch eine Kette von Z_{i+1}^0 berandeter, Z_s^n mit Z_1^n durch eine Kette von Z_1^0 berandeter Zellen n-ter und $(n-1)$-ter Dimension zu verbinden. Dies ist stets möglich, da die von Z_i^0 berandeten Zellen die Bilder der Zellen von $UC_{Z_i^0}$, einer S^{n-1} sind, und man auf dieser je zwei Zellen $(n-1)$-ter Dimension durch eine Kette von Zellen $(n-1)$-ter und $(n-2)$-ter Dimension verbinden kann. Der so gefundenen Kette kann offenbar nach der oben angegebenen Regel der ursprüngliche Weg, vermehrt um hin und zurück durchlaufene Strecken, also ein dem ursprünglichen homologer Weg, zugeordnet werden.

Der UC einer Z^{n-2} ist eine S^1. Umlaufen wir sie, so erhalten wir eine Kette, der ein verschwindender Weg zugeordnet werden kann: wir brauchen nur für alle Punkte P_i denselben Randpunkt von Z^{n-2} zu nehmen.

Mit Hilfe der Basisdarstellung (1) für die Ketten (2) konstruieren wir einen Komplex $(n-1)$-ter Dimension C^{n-1}, aus dem wir dann eine M^n nicht zerlegende M^{n-1} ableiten werden.

Wir wählen eine Zelle n-ter Dimension Z_1^n. An sie grenze in der Zelle Z_1^{n-1} eine andere, Z_2^n, Diese nehmen wir zu Z_1^n hinzu und setzen fest, dass Z_1^{n-1} nicht zu C^{n-1} gehören soll. Haben wir so die Zellen $Z_1^n, \ldots, Z_r^n$ bekommen, und gibt es noch weitere Zellen n-ter Dimension, so sei unter diesen Z_{r+1}^n eine, die in der Zelle Z_r^{n-1} an eine der Zellen $Z_1^n, \ldots, Z_r^n$ angrenzt. Wir nehmen Z_{r+1}^n hinzu und setzen fest, dass Z_r^{n-1} nicht zu C^{n-1} gehört. Haben wir so alle Z^n erschöpft, so gilt es noch, für die bisher nicht aufgetretenen Z^{n-1} festzusetzen, ob sie zu C^{n-1} gehören oder nicht. Z^{n-1} berande die beiden Zellen Z_k^n und Z_l^n. Jede von diesen ist mit Z_1^n durch eine Kette von Zellen n-ter und $(n-1)$-ter Dimension verbunden, deren Zellen $(n-1)$-ter Dimension nicht zu C^{n-1} gehören. Ist $P_1 > 1$ und c_1 der Wert aus der Basisdarstellung (1) der Kette $Z_1^n \ldots Z_k^n Z^{n-1} Z_l^n \ldots Z_1^n$, so gehöre Z^{n-1} zu C^{n-1} wenn c_1 ungerade ist, sonst nicht. Ist aber $P_1 = 1$ und eine der Torsionszahlen, etwa τ_1 gerade, und d_1 wieder der

Wert aus der Basisdarstellung (1) der Kette $Z_1^n \dots Z_k^n\, Z^{n-1}\, Z_l^n \dots Z_1^n$ so gehöre Z^{n-1} zu C^{n-1} wenn d_1 ungerade ist, sonst nicht. Da d_1 bis auf ein Vielfaches der geraden Zahl τ_1 bestimmt ist, ist damit die Zugehörigkeit eindeutig festgelegt.

Der Komplex C^{n-1} hat die folgenden Eigenschaften:

1. C^{n-1} ist nicht leer. Wählen wir nämlich eine dem Weg X_1 bezw. Y_1 zugeordnete Kette $Z_{i_1}^n Z_{k_1}^{n-1} Z_{i_2}^n \dots Z_{k_r}^{n-1} Z_{i_1}^n$, und ergänzen wir sie zu der Kette $Z_1^n \dots Z_{i_1}^n Z_{k_1}^{n-1} Z_{i_2}^n \dots Z_1^n \dots Z_{k_r}^{n-1} Z_{i_1}^n \dots Z_1^n$, in der bei jeder Zelle $Z_{i_l}^n$ die keine Zelle von C^{n-1} enthaltende Kette $Z_{i_l}^n \dots Z_1^n \dots Z_{i_l}^n$ eingeschaltet ist, so enthält die ergänzte Kette dieselben Zellen von C^{n-1} wie die ursprüngliche. Wäre dies keine, so wären in der Darstellung (1) der Ketten $Z_1^n \dots Z_{i_l}^n Z_{k_l}^{n-1} Z_{i_{l+1}}^u \dots Z_1^n$ immer c_1 bezw. d_1 gerade. In der Darstellung (1) der gesamten Kette hat aber c_1 bezw. d_1 den Wert 1, und dieser ist ($mod.\ \tau_1$) die Summe jener.

2. C^{n-1} zerlegt M^n nicht; denn wir haben ja jede Z^n mit Z_1^n durch eine keine Zelle von C^{n-1} enthaltende Kette verbunden.

3. In jeder Z^{n-2} von M^n stösst eine gerade Anzahl Zellen von C^{n-1} zusammen. Denn umkreisen wir Z^{n-2} durch eine Kette, so ist jeder zugehörige Weg homolog Null, insbesondere in der Basisdarstellung $c_1 = 0$ bezw. $d_1 \equiv 0$; genau wie unter 1. folgt daraus die Behauptung.

Vermöge dieser Eigenschaften gelingt es, die Singularitäten von C^{n-1} aufzulösen, d.h. C^{n-1} so abzuändern, dass sich schliesslich eine M^n nicht zerlegende M^{n-1} ergibt. Eine Zelle Z^k von C^{n-1}, d.h. eine Randzelle einer Z^{n-1} von C^{n-1}, heisse regulär, wenn $UC_{Zk}(C^{n-1})$ eine S^{n-k-2} ist, die $UC_{Zk}(M^n)$, eine S^{n-k-1}, in zwei E^{n-k-1} zerlegt. Eine Z^{n-2} ist also regulär, wenn in ihr genau zwei Z^{n-1} von C^{n-1} zusammenstossen. Ist dies nicht der Fall, ist die Anzahl der an Z^{n-2} anstossenden Z^{n-1} von C^{n-1} (gerade und) grösser als zwei, so üben wir zunächst auf die an Z^{n-2} anstossenden Zellen von M^n die beim Beweis von Satz 7 vorgenommenen Teilungen aus. Danach entspricht jeder von Z^{n-2} berandeten $Z^l (l = n-1, n)$ eine sie berandende $\overline{Z}^{l-1}$. Zwei benachbarte Z^{n-1} von C^{n-1}, d.h.

solche, zwischen denen im Sinne der zyklischen Ordnung auf $UC_{Z^{n-2}}$ keine weitere Z^{n-1} von C^{n-1} liegt, nehmen wir von C^{n-1} weg und ersetzen sie durch diejenigen $\overline{Z}^{n-1}$, die den ihre Bildpunkte auf $UC_{Z^{n-2}}$ verbindenden Strecken entsprechen. Die hierbei neu auftretenden Z^{n-2} von C^{n-1} sind regulär, und die Anzahl der in Z^{n-2} anstossenden Z^{n-1} von C^{n-1} ist um zwei vermindert worden. Daher können durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens schliesslich alle singulären Z^{n-2} aus C^{n-1} beseitigt werden. Auch der abgeänderte C^{n-1} zerlegt M^n nicht; denn betrachten wir die Teilung so, als hätten wir von den an Z^{n-2} anstossenden Zellen kleine Stücke abgetrennt, so wird der Rest sicher nicht von C^{n-1} zerlegt; von den abgetrennten Zellen lässt sich aber jede mit einer Restzelle durch eine C^{n-1} nicht treffende Kette verbinden.

Es seien nun alle Zellen von höherer als k-ter Dimension von C^{n-1} regulär. Gehört die Zelle Z^k zu C^{n-1}, so ist $UC_{Z^k}(C^{n-1})$ ein Komplex C^{n-k-2} auf $UC_{Z^k}(M^n) = S^{n-k-1}$, und wir behaupten, dass dieser aus einer Anzahl M^{n-k-2} besteht. Wir brauchen nur zu beweisen, dass der UC jedes Punktes eine S^{n-k-3} ist. Der Punkt Z^0 sei das Bild der Zelle Z^{k+1} von C^{n-1}. Dann ist nach (1)

$$UC_{Z^0}(UC_{Z^k}(C^{n-1})) = UC_{Z^{k+1}}(C^{n-1}) = S^{n-k-3}.$$

Jeder grösste zusammenhängende Teilkomplex von $UC_{Z^k}(C^{n-1})$ ist also eine M^{n-k-2}, d. h. $UC_{Z^k}(C^{n-1})$ zerfällt in eine Anzahl M^{n-k-2}. Unter diesen suchen wir eine „innerste", d. h. eine von der Art, dass in dem einen der beiden Teile, in die sie (nach Satz 10) $UC_{Z^k}(M^n)$ zerlegt, keine andere Teilmannigfaltigkeit von $UC_{Z^k}(C^{n-1})$ enthalten ist. Ist nämlich Q eine nicht zu $UC_{Z^k}(C^{n-1})$ gehörige Zelle von $UC_{Z^k}(M^n)$, und bezeichnen wir als Inneres einer Teilmannigfaltigkeit M denjenigen durch M bestimmten Teil von $UC_{Z^k}(M^n)$, der Q nicht enhält, so brauchen wir nur von einer Teilmannigfaltigkeit zu einer in ihrem Inneren enthaltenen überzugehen, bis keine solche mehr vorhanden ist, bis wir eine innerste M^{n-k-2} gefunden haben. Jetzt führen wir mit den von Z^k berandeten Zellen die Teilungen aus dem Beweis von Satz 7 aus und ersetzen die den

Zellen von M^{n-k-2} entsprechenen Zellen Z^i von C^{n-1} durch diejenigen Zellen $\overline{Z}^{l-1}$, die die den Zellen des Inneren von M^{n-k-2} entsprechenden Zellen beranden. Auch nach dieser Abänderung wird M^n nicht durch C^{n-1} zerlegt; denn die dem Inneren von M^{n-k-2} entsprechenden von Z^k berandeten Zellen lassen sich nunmehr mit anderen von Z^k berandeten Zellen durch Ketten verbinden, die C^{n-1} nicht überschreiten.

Wir haben noch zu zeigen, dass jede der neu eingeführten Zellen k-ter Dimension $\overline{Z}^k$ von C^{n-1} regulär ist. Durch eine solche Zelle wurde eine nach Voraussetzung reguläre Zelle Z^{k+1} von C^{n-1} geteilt. Ihr UC entsteht also, indem wir in $UC_{Z^{k+1}}$ die Dimension jeder Zelle um eins erhöhen und zwei Punkte hinzufügen. Nach Satz 6 entsteht so aus $UC_{Z^{k+1}}(C^{n-1}) = S^{n-k-3}$ eine S^{n-k-2} und aus jedem der E^{n-k-3}, in die $UC_{Z^{k+1}}(M^n)$ durch $UC_{Z^{k+1}}(C^{n-1})$ zerlegt wird, ein E^{n-k-2}. Durch die folgenden Teilungen wird noch jede Zelle von $UC_{\overline{Z}^k}(M^n)$ geteilt, sodass schiesslich eine in der Art der Oberfläche einer Doppelpyramide geteilte S^{n-k+1} vorliegt: sie besteht aus einer S^{n-k-2} (das ist $UC_{Z^{k+1}}(M^n)$), zwei Punkten P_1 und P_2, den „Spitzen", und zu jeder Zelle von S^{n-k-2} zwei Zellen der nächst höheren Dimension. Nach der Abänderung bildet $UC_{\overline{Z}^k}(C^{n-1})$ auf dieser S^{n-k-1} einen Komplex der folgenden Art: es gehören dazu die Zellen eines auf S^{n-k-2} gelegenen E^{n-k-1} (nämlich eines der beiden E^{n-k-1}, in die $UC_{Z^{k+1}}(M^n)$ durch $UC_{Z^{k+1}}(C^{n-1})$ zerlegt wird) und diejenigen Zellen, die diese mit einer der beiden Spitzen der Doppelpyramide, etwa mit P_1, verbinden. Dass der eine (und daher auch der andere) hierdurch bestimmte Teil von $UC_{\overline{Z}^k}(M^n)$, nämlich die Gesamtheit der E^{n-k-2} mit P_1 verbindenden Zellen ein E^{n-k-1} ist, ist nicht schwer zu beweisen und soll an anderer Stelle gezeigt werden. Damit ist bewiesen, dass $\overline{Z}^k$ eine reguläre Zelle ist. Jetzt besteht aber $UC_{Z^k}(C^{n-1})$ aus einer M^{n-k-2} weniger als vorher, und wir können das Verfahren wiederholen, bis Z^k überhaupt nicht mehr zu C^{n-1} gehört, ohne dabei singuläre Z^k hinzuzubekommen. Dies Verfahren wenden wir nacheinander auf alle Zellen $(n-2)$-ter bis nullter Dimension an und erhalten zum Schluss C^{n-1} in einer

Gestalt mit lauter regulären Zellen, sodass insbesondere jeder UC eines Punktes eine S^{n-2} ist. Es zerfällt also C^{n-1} in eine Anzahl M^{n-1}. Da diese alle zusammen M^n nicht zerlegen, tut es eine von ihnen allein erst recht nicht: wir haben eine M^n nicht zerlegende M^{n-1}, wie es Satz 11 behauptet.

Die Sätze 9, 10 und 11 ergeben zusammen Satz 1.