

4.2. A forogva ütköző labdák

A labdarúgó pályán, illetve ping-pong asztalon kiszámíthatatlanul elpattanó labdák mozgását általában az teszi váratlanná, hogy a labdák már az ütközés előtt is pörögtek.

Nézzünk néhány speciális esetet.

Tegyük fel, hogy a $\underline{v} = (v_{x_0}, v_{y_0})$ sebességgel érkező labda az ütközés síkjára merőleges tengely körül nagy szögsebességgel (ω_0) előre forog (4.4. ábra), és az ütközés a síkra merőleges irányban tökéletesen rugalmas. Ekkor a labda v_y irányú sebessége változatlan marad, x irányú mozgása és forgása azonban az

$$a_x = \frac{\mu K}{m}$$

és

$$\beta = \frac{-\mu K}{\Theta} r$$

mozgásegyenleteknek megfelelően gyorsul. Vegyük észre, hogy a gyors forgás során a labda a forgás miatt csúszik meg a síkon, ezért a súrlódási erő a v_{x_0} sebességgel azonos irányba mutat. Így a τ ütközési idő elteltével sebessége

$$v_x = v_{x_0} + \frac{\mu K}{m} \tau = v_{x_0} + \frac{2\mu m v_{x_0}}{m} \tau \quad (4.11)$$

-re növekszik, miközben forgásának szögsebessége az

$$\omega = \omega_0 - \frac{2\mu m v_x r}{\Theta} \tau \quad (4.12)$$

összefüggés szerint csökken.

Ennek következtében tehát a súrlódó talajfogás ellenére a labda váratlanul lapos szögben pattan előre. Így mozognak az asztaliteniszben a felfelé húzott ütővel megütött labdák. Ha a labdát lefelé húzott ütővel indítjuk (megnyessük), akkor a súrlódási erő a talajfogáskor a v_{x_0} sebességgel ellentétes irányba mutat. Amennyiben a súrlódási együttható elég nagy, akkor az ütközés sorána labda x irányú sebessége akár ellentétesre is változhat. Ennek a következménye az, hogy az erősen megnyesett labdák az asztalra érve nem előre, hanem visszafelé pattannak. Ping-pongozók bizonyára tapasztalták már, hogy az erősen és röviden a háló mögé nyesett labdák időnként visszapattanás után a hálót átugorva a saját térfélre esnek vissza. Még nehezebb észrevenni és így előre kiszámítani a mozgást, ha a labda a v_x tengely körül is pörög az ütközés előtt. Ebben az esetben ugyanis a labda mozgásának síkja is megváltozik, a labda oldalra pattan.

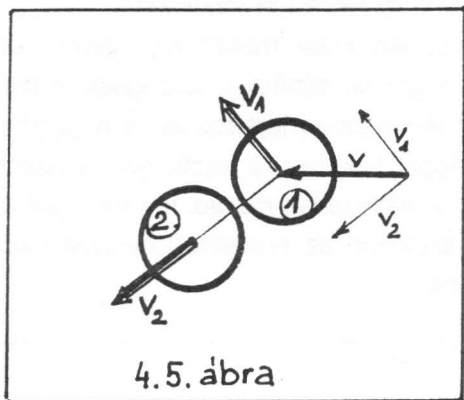
Az asztalitenisz labdák különböző irányú forgásba hozását a szivacs borítású, illetve szivacs és gumiborítású, ún. szoft ütők forgalomba hozása tette lehetővé. Az ütők borítását azóta már nemzetközi megállapodásokkal szabályozták, s jelenleg a versenysportban csak a vékony szivacsra ragasztott recés vagy sima gumiborítású ütők használhatók. Ezekben a borításokon a labda erősen súrlódik, s ezért nagy szögsebességű forgás érhető el. A jó versenyzők az ellenfél ütőjének mozgásából következtetni tudnak a labda forgására, s ennek megfelelően ütik meg az asztalról felpattanó labdát. Az adogató versenyző azonban nagy előnyben van, mert a labdát előre eltervezett módon furcsa pörgésbe hozhatja. *Bátorfi Csilla* szerváit például igen nehéz visszaütni, s még a nemzetközi élvonalban is csak nehezen találták meg az ellenszerét. A szabályok tiltják, hogy a versenyző tenyérből vagy asztal alól adogasson, ez ugyanis kizárná annak a lehetőségét is, hogy az ellenfél az ütő mozgását figyelve készüljön fel a pörgő labda fogadására.

Az asztalitenisz labda mozgását a fizika törvényei szigorúan megszabják, az ütőborítás, az asztal minősége, valamint az ütés erőssége azonban a mozgást kiszámíthatatlanná teszik, ezért bár az alaptörvények megértése fontos, a magas szintű sportteljesítményekhez csak a sok gyakorlás vezethet el.

4.3. A biliárdgolyók fizikája

A biliárd és rex játék művészei bámulatos ügyességgel ütköztetik a meglőköt golyót egy nyugvóhoz úgy, hogy a golyók sokszor „karambolozzanak” illetve a kiválasztott lyukakba hulljanak bele.

A kemény golyóknak a pálya szélével való ütközését az asztalitenisz labdánál áttekintett törvények szabják meg. Érdekes azonban röviden a golyók összeütközésével is foglalkozni. A biliárd és rex asztal posztója mindig nagy súrlódású felület, ezért a golyók mozgását tiszta gördülésnek tekinthetjük. A kemény elefáncsont, illetve műanyag golyók egymással tökéletesen rugalmasan ütköznek, ezért az ütközés folyamatára az impulzusmegmaradási törvény mellett érvényes a mechanikai energiamegmaradás törvénye is.



Vizsgáljuk meg először a 4.5. ábrának megfelelően azt az esetet, amikor a súrlódás mind az ütköző golyók, mind a golyók és a talaj között elhanyagolható. Az ábrán 2-vel a nyugvó, 1-gyel a mozgó golyót jeleltük és a koordinátarendszert úgy vettük fel, hogy a második golyó ütközést előtti v_0 sebessége éppen az y tengely irányába mutasson. A súrlódásmentesség miatt a golyók között csak a centrálisuk irányába mutató erő léphet fel, ezért a második golyónak a centrális irányára merőleges

$$u_2 = v_0 \sin \varphi \quad (4.13)$$

sebességösszetevője változatlan marad, az első pedig ilyen irányú sebességet nem kap. A centrálisba eső sebesség komponensekre a megmaradási tételek az

$$mv_0 \cos \varphi = mv_1 + mu_1 \quad (4.14)$$

illetve

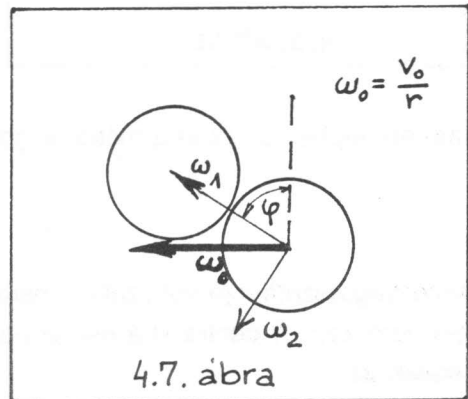
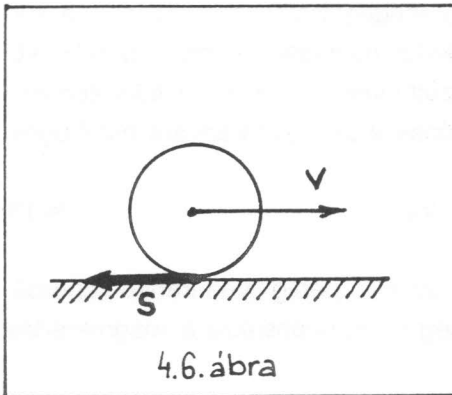
$$\frac{1}{2}mv_0^2 \cos^2 \varphi = \frac{1}{2}mw_1^2 + \frac{1}{2}mu_1^2 \quad (4.15)$$

alakban írhatók fel, ahol w_1 és u_1 rendre az eredetileg nyugvó golyó, illetve mozgó golyó ütközés utáni sebességét jelenti. Az egyenletrendszer megoldásaként az egyenlő tömegű golyók ütközésére vonatkozó jól ismert eredmény adódik, azaz

$$u_1 = 0, \quad w_1 = v_0 \cos \varphi.$$

A kapott eredmény mutatja, hogy ütközés után az első golyónak csak a centrális irányába eső, a másodiknak pedig csak erre merőleges sebessége lesz. E szerint tehát a két golyó merőlegesen pattan el egymástól.

A biliárdjátékosok tapasztalata azonban mást mutat! Az eltérést az okozza, hogy a biliárdasztal posztóján a golyók súrlódva mozognak, s bár ütközéskor a fentiekben leírt folyamat lényegében lejátszódik, s a golyók valóban egymásra merőleges sebességgel indulnak, a tiszta görgdüléssel érkező golyó w_0 szögsebessége azonban változatlan marad, így ez a golyó megcsúszik a posztóborításon. (Természetesen az eredetileg nyugvó első golyó is csúszva indul el a biliárdasztalon.)



Foglalkozunk először a második golyó mozgásával. A 4.6. ábra szerint szögsebesség nélkül csúszva induló golyók mozgása

$$a = \frac{S}{m} \quad (4.16)$$

gyorsulással lassul, a szögsebesség pedig

$$\beta = \frac{Sr}{\Theta}$$

szöggyorsulással gyorsul. Így a sebesség a

$$w_1'(t) = w_1 - at = w_1 - \frac{S}{m} t$$

a szögsebesség pedig az

$$\omega'(t) = \frac{Sr}{\Theta} t \quad (4.17)$$

összefüggés szerint változik. A súrlódási erő azonban csak addig működik, míg a golyó mozgása az $r\omega' = w_1$ feltételeknek eleget tevő tiszta gördülésé nem válik. Ekkor a súrlódási erő zérussá válik, s a golyó egyenletesen mozog tovább. A $\Theta = \frac{2}{5}mr^2$ összefüggést felhasználva a (4.16 és 4.17) képletből azt kapjuk, hogy a golyó

$$w' = w_1 \frac{mr^2}{\Theta + mr^2} = \frac{5}{7} w_1$$

sebességgel, illetve

$$\omega' = \frac{5}{7} \frac{w_1}{r}$$

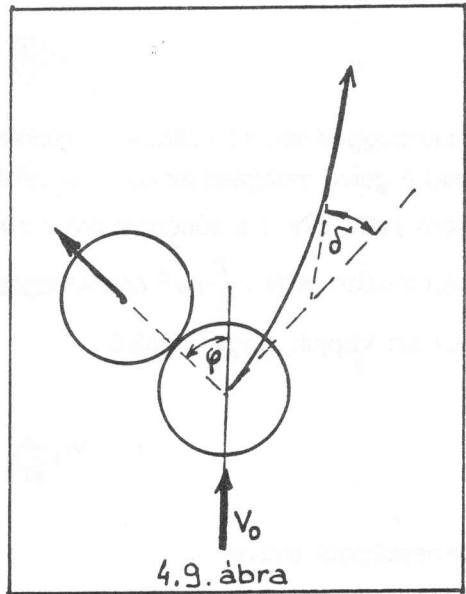
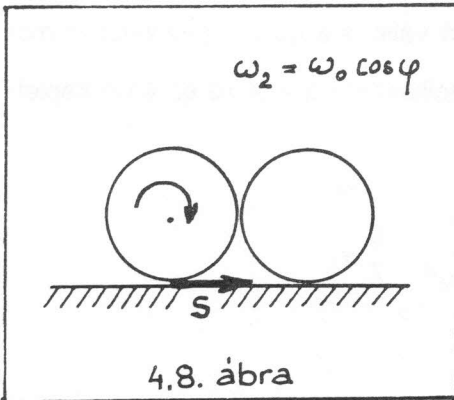
szögsebességgel tisztán gördül a centrális egyenesében. Az eredetileg nyugvó golyó irányán tehát – amint az várható is volt – a súrlódás nem változtat.

Foglalkozzunk most az első golyóval. Ez a golyók centrálisára merőleges sebességgel és az x tengellyel párhuzamos tengely körül forogva, pörögve, csúszva indul. Bontsuk fel a kezdeti $\omega = \frac{v_0}{r}$ szögsebességet a centrális egyenessel párhuzamos és arra merőleges összetevőkre. Az

$$\omega_1 = \omega_0 \cos \varphi$$

szögsebesség komponens éppen a tisztán gördülés feltételét biztosítaná az $u_1 = v_0 \cos \varphi$ sebességhez (4.7. ábra). Az erre merőleges

$$\omega_2 = \omega_0 \sin \varphi$$



szögsebesség miatt azonban a golyó megcsúszik és a 4.8. ábrának megfelelő súrlódási erő miatt szögsebessége csökkenni, a centrálisba eső (eredetileg zérus) sebessége pedig növekedni kezd. Az első golyó esetén alkalmazott gondolatmenethez teljesen hasonló módon a szögsebesség, illetve a sebesség most is addig változik, míg a tiszta gördülés feltételei nem teljesülnek. Az előzőekkel analóg számítás után arra az eredményre juthatunk, hogy a második golyónak az ütközési normálisra merőleges szögsebesség összetevője az

$$\omega'' = \frac{\Theta}{\Theta + mr^2} \omega_0 \sin\varphi = \frac{2}{7} \omega_0 \sin\varphi = \frac{2}{7} \frac{v_0}{r} \sin\varphi$$

értékre csökken, a centrálisba eső sebesség összetevője pedig

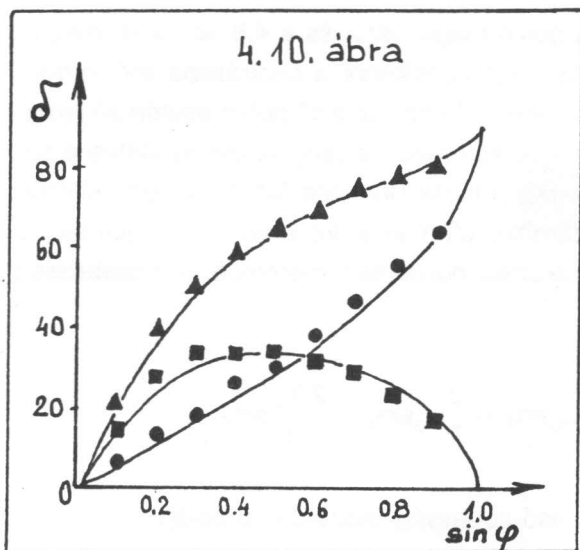
$$v'' = \frac{\Theta r}{\Theta + mr^2} \omega_0 \sin\varphi = \frac{2}{7} v_0 \cdot \sin\varphi$$

nagyságúra nő. Így ez a golyó a 4.9. ábrán látható pályát futja be és eredeti irányához képest δ szögben eltérő irányba mozog, ahol

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{2}{7} \operatorname{tg}\varphi$$

A fenti számítás azt jelenti, hogy a tökéletesen rugalmas billárdgolyók ütközésekor – a súrlódás miatt – elvileg sem érvényes az a szabály, hogy ha egy nyugvó golyóhoz ütköztetünk egy vele azonos méretű másikat, akkor azok ütközés után merőlegesen pattannak el egymástól! Az elpattanás δ szöget a 4.9. ábrának megfelelően

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \delta$$



Érdeemes felfigyel-
 nünk arra, hogy az el-
 pattanás szöge csak a φ
 szögtől függ és a sűrű-
 lődés jellegétől függet-
 len. Ez azt jelenti, hogy
 az irányváltzás tetsző-
 legesen csekély sűrűlő-
 dás mellett bekövetke-
 zik. Természetesen ha a
 sűrűlődés kicsiny, akkor
 a befordulás folyamata,
 azaz a 4.9. ábrán látha-
 tó pálya görbe szaka-

szaka, meghosszabbodik. A 4.10. ábrán a δ szög elméletileg várható értékei láthatók $\sin \varphi$ függvényében.