

CAPITOLO 10

CONDUZIONE E CONVEZIONE

10.1 GENERALITÀ

Come ben noto, quando tra due corpi o tra porzioni di questi vi siano differenze di temperatura, si verificano **spontaneamente** processi di trasmissione di calore verso il corpo, o porzioni, a temperatura inferiore. Processi di trasmissione in senso inverso non possono essere spontanei, in accordo col secondo principio della termodinamica.

Lo studio dettagliato delle modalità di trasferimento del calore è di enorme interesse pratico in molti settori tecnici ed è necessario per poter correttamente valutare i flussi termici trasmessi attraverso l'involucro di un edificio.

Alcuni meccanismi di trasmissione del calore, come nel caso della **conduzione** o della **convezione**, richiedono un *diretto contatto fisico* tra i sistemi interessati, mentre nel caso dell'**irraggiamento** il trasferimento del calore può verificarsi anche attraverso il vuoto assoluto.

La conduzione termica che, da un punto di vista macroscopico, si manifesta come scambio di calore all'interno di corpi solidi, liquidi, gassosi, senza movimento apparente di materia, è dovuta alla cessione di energia cinetica da parte di atomi/molecole presenti in una zona a più alta temperatura verso altri atomi/molecole in zone adiacenti a più bassa temperatura. Nel caso della convezione termica il trasporto di calore tra la superficie di un corpo e un fluido coinvolge un movimento macroscopico di elementi di fluido. Si supponga, ad esempio, il caso di un corpo la cui temperatura superficiale sia superiore a quella del fluido circostante. Lo scambio termico convettivo avviene in diversi stadi: dapprima il calore passa per conduzione dalla superficie ad elementi di fluido adiacenti aumentando la loro temperatura. Gli elementi di fluido riscaldatisi si muovono, poi, verso porzioni di fluido a temperatura minore ove si mescolano cedendo parte della loro energia.

La convezione si distingue in *convezione libera* e *convezione forzata*, secondo la causa che determina il moto. Quando il moto dipende unicamente da differenze di densità innescate da differenze di temperatura, si parla di *convezione naturale o libera*; quando il moto è indotto da qualche agente esterno, una pompa o un ventilatore, il processo è chiamato *convezione forzata*.

Nel caso dell'irraggiamento, infine, si ha scambio termico anche se i corpi interessati non sono a contatto e cioè anche se tra essi vi sia vuoto assoluto o anche un mezzo trasparente come l'aria. Tutti i corpi emettono continuamente energia termica per irraggiamento e l'intensità dell'emissione dipende dalla temperatura e dalla natura della superficie. L'energia radiante si propaga alla velocità della luce ($c = 3 \cdot 10^8$ [m/s]) e presenta una fenomenologia simile a quella delle

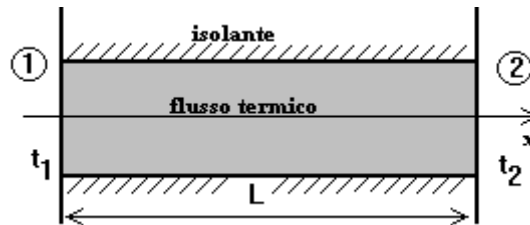
radiazioni luminose; infatti, secondo la teoria elettromagnetica, la luce e l'irraggiamento termico differiscono solo per le loro lunghezze d'onda. Lo scambio termico per irraggiamento diventa meccanismo predominante al crescere della temperatura tra i corpi.

In generale, nella realtà quasi sempre la trasmissione del calore si dimostra fenomeno complesso anche perché quasi sempre si ha a che fare con tutti e tre i meccanismi accennati spesso operanti contemporaneamente. Pertanto, prima di affrontare un qualunque problema di trasmissione del calore è sempre importante individuare correttamente i diversi meccanismi implicati. Oltre a ciò, ogni processo di trasmissione del calore può attuarsi in regime:

- **stazionario**: la temperatura di un qualunque punto del sistema non cambia nel tempo;
- **variabile**: la temperatura di un qualunque punto del sistema è funzione del tempo.

10.1.1 Conduzione termica unidirezionale stazionaria

Si consideri la conduzione del calore lungo una barra di materiale omogeneo (sezione A e lunghezza L). Le facce opposte della barra (sezioni 1 e 2 in figura) siano mantenute a temperature t_1 e t_2 e sia $t_1 > t_2$.



La superficie laterale della barra sia rivestita da un isolante termico per evitare dispersioni laterali di calore. La conduzione del calore si verifica lungo l'asse della barra (direzione x) verso la sezione 2. In condizioni di regime stazionario, la quantità di calore dQ trasmessa nell'intervallo di tempo $d\tau$ è:

$$dQ = \frac{\lambda A (t_1 - t_2)}{L} d\tau$$

ove: λ rappresenta una costante caratteristica del materiale costituente la barra, detta **conducibilità termica** [W/mK]; essa esprime la maggiore o minore *attitudine di un materiale omogeneo a trasmettere calore per conduzione termica*.

La relazione può essere riscritta come:

$$\frac{dQ}{d\tau} = \lambda A \frac{(t_1 - t_2)}{L}$$

per cui se si definisce **flusso termico** ϕ_x l'energia trasmessa per unità di tempo lungo la barra (direzione x); risulta:

$$\varphi_x = dQ / d\tau \quad [\text{J/s}] [\text{W}]$$

Il flusso termico per unità di area o **flusso termico specifico** φ'_x è:

$$\varphi'_x = \frac{\varphi_x}{A} = \frac{\lambda(t_1 - t_2)}{L} \quad [\text{W/m}^2]$$

Quanto osservato può essere espresso nella forma differenziale (**legge di Fourier** per conduzione monodimensionale):

$$\varphi'_x = -\lambda \frac{dt}{dx} \quad [\text{W/m}^2]$$

In regime stazionario infatti, è anche attraverso ogni sezione della barra:

$$\varphi'_x = \text{cost}$$

e quindi, separando le variabili ed integrando tra le sezioni **1** e **2**, si ottiene immediatamente:

$$\varphi'_x (x_2 - x_1) = -\lambda (t_2 - t_1)$$

e ciò in accordo con quanto in precedenza osservato:

$$\varphi'_x = \frac{\lambda(t_1 - t_2)}{L} \quad [\text{W/m}^2]$$

In questo caso (conduzione unidimensionale stazionaria) la temperatura risulta solo funzione di x e cioè: $t = f(x)$.

Osservazioni

- ✓ nella relazione di **Fourier** si introduce il segno – in accordo con la convenzione che considera positivo il flusso termico diretto verso ascisse x crescenti. Infatti, essendo $dt/dx < 0$ ($dt < 0$ e $dx > 0$) per avere affinché $\varphi'_x > 0$ occorre cambiare segno all'espressione;
- ✓ il flusso termico è una grandezza vettoriale (caratterizzata da intensità, direzione, verso) e come tale esprimibile mediante:

$$\vec{\varphi}'_x = -\lambda \frac{dt}{dx} \vec{u}$$

ove: \vec{u} rappresenta il **versore** (vettore unitario nella direzione x).

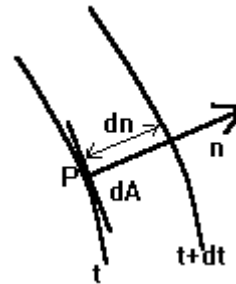
Il rapporto dt/dx è il modulo del vettore normale ad un piano isoterma. Tale rapporto è detto **gradiente di temperatura** nella direzione x (rappresenta la pendenza locale della distribuzione di temperatura $t = t(x)$).

10.1.2 Conduzione pluridirezionale stazionaria

Nel caso più generale di un processo di conduzione stazionaria all'interno di un corpo omogeneo, la temperatura risulta funzione anche delle variabili y e z e cioè $t = f(x,y,z)$ e le superfici isoterme non sono più piani ma superfici curve nello spazio.

Si prenda in esame ora, come rappresentato in figura, una generica superficie isoterma (temperatura t) all'interno di un solido omogeneo interessata ad un processo di conduzione e su questa si individui un'area dA , centrata attorno ad un punto P .

In figura è anche rappresentata la superficie isoterma $t + dt$. La distanza tra le due isoterme sia dn . Il flusso termico nel punto P è perpendicolare alla superficie isoterma dA . In accordo con la relazione di **Fourier**, nel punto P il modulo del flusso termico specifico attraverso è:



$$\phi'_P = -\lambda \frac{dt}{dn} \quad [W/m^2]$$

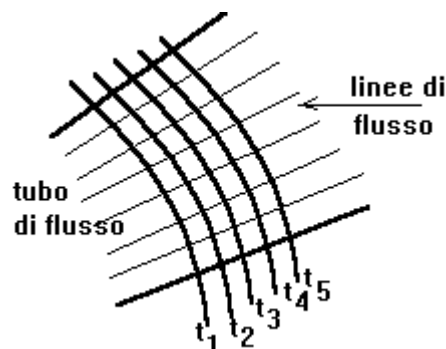
Quando la temperatura è una funzione del tipo $t = f(x,y,z)$, il flusso termico non risulta più solo diretto verso una particolare direzione dello spazio (ad esempio x), ma sarà caratterizzato da componenti $\phi'_x, \phi'_y, \phi'_z$ risultando, in ogni punto, sempre perpendicolare alla superficie isoterma $t = f(x,y,z)$.

La **legge di Fourier in forma vettoriale** può esprimersi nel modo seguente:

$$\vec{\phi}' = -\lambda \frac{dt}{dn} \vec{n} = \vec{\phi}'_x + \vec{\phi}'_y + \vec{\phi}'_z = -\lambda \left[\vec{u} \frac{\partial t}{\partial x} + \vec{i} \frac{\partial t}{\partial y} + \vec{j} \frac{\partial t}{\partial z} \right]$$

Tracciando le normali alle superfici isoterme, si possono evidenziare, come rappresentato in figura, le cosiddette **linee di flusso** che *rappresentano la direzione ed il senso del flusso termico attraverso le superfici isoterme*. L'insieme di queste linee di flusso consente d'individuare nello spazio un elemento di volume, attraverso la superficie laterale del quale non si ha propagazione di calore.

Tale superficie può essere considerata come la parete laterale di un condotto in cui fluisca non un fluido ma dell'energia termica. In questo "tubo di flusso", la portata di energia termica, o flusso termico che transita in condizioni di regime stazionario, è costante.



La conduzione risulta d'importanza rilevante nei solidi; al contrario è trascurabile nei fluidi e in particolare modo negli aeriformi molto rarefatti.

In generale, si osserva che la conducibilità, a rigori, risulta significativa solo nel caso di *materiali omogenei ed isotropi* e variabile con la *temperatura*. Tuttavia, nella maggioranza dei casi che interessano la tecnica, risulta quasi sempre approssimazione sufficiente considerare i materiali omogenei ed isotropi ed inoltre trascurare la dipendenza dalla temperatura assumendo $\lambda = \text{cost}$.

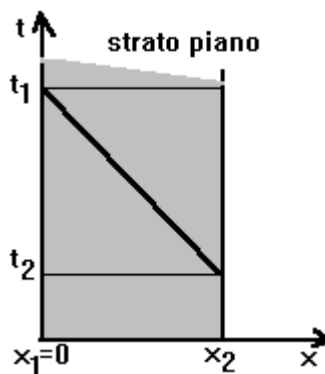
In genere si definiscono “*isolanti*” i materiali la cui conducibilità termica sia $\lambda \leq 0.12$ [W/mK]. È opportuno ancora osservare come la conducibilità di molti materiali da costruzione dipenda dalla loro densità e dal contenuto di umidità.

Nella seguente tabella sono riportati valori indicativi di conducibilità termica a 20 [°C] per alcuni comuni materiali da costruzione.

MATERIALE	DENSITA' ρ [kg/m ³]	CONDUCIBILITA' λ [W/mK]
Acciaio	7860	45
Calcestruzzo	1600 - 2400	1.5
Calcestruzzo cellulare	800	0.3
Pannelli fibra di vetro	15 - 110	0.035
Laterizi	1800	0.9
Legno (abete)	450	0.12
Polistirolo	25	0.035

10.1.3 Conduzione stazionaria in parete piana

Si consideri uno strato piano di materiale omogeneo attraverso il quale si verifichi, in condizioni di regime stazionario, propagazione di calore per conduzione nella direzione x come rappresentato in figura. In queste condizioni, come già osservato, la temperatura di qualunque superficie isoterma risulta costante nel tempo essendo $t = f(x)$.



Dalla relazione di Fourier:

$$\varphi'_x = \text{cost} = -\lambda \frac{dt}{dx}$$

si ha:

$$\varphi'_x dx = -\lambda dt$$

Integrando tra x_1 e x_2 e tra t_1 e t_2 (vedi figura), si ha:

$$\varphi'_x \cdot \int_{x_1}^{x_2} dx = -\lambda \int_{t_1}^{t_2} dt$$

cosicché si ottiene:

$$\varphi'_x (x_2 - x_1) = -\lambda (t_2 - t_1)$$

da cui:

$$\varphi'_x = -\lambda \frac{(t_2 - t_1)}{x_2 - x_1} = -\lambda \frac{(t_2 - t_1)}{L}$$

La temperatura t_x all'ascissa generica x può essere a sua volta espressa in funzione del flusso termico il quale, si noti, è costante attraverso ogni generica sezione x tra x_1 e x_2 . Pertanto, integrando tra i limiti x_1 e x e tra t_1 e t_x , si ottiene:

$$\varphi'_x (x - x_1) = -\lambda (t_x - t_1)$$

se $x_1 = 0$

$$\varphi'_x x = -\lambda (t_x - t_1)$$

da cui, eguagliando le due espressioni del flusso, si ottiene:

$$\varphi'_x = -\lambda \frac{(t_x - t_1)}{x} = -\lambda \frac{(t_2 - t_1)}{L}$$

ricavando t si può scrivere:

$$t_x = t_1 - x \frac{(t_1 - t_2)}{L}$$

In regime stazionario all'interno di uno strato piano la temperatura varia con **andamento lineare**. Ovviamente ciò si accorda con la legge di Fourier in forma differenziale: infatti, se $\varphi'_x = \text{cost.}$, ne consegue che anche $dt/dx = \text{cost.}$ e cioè che t dipende linearmente da x .

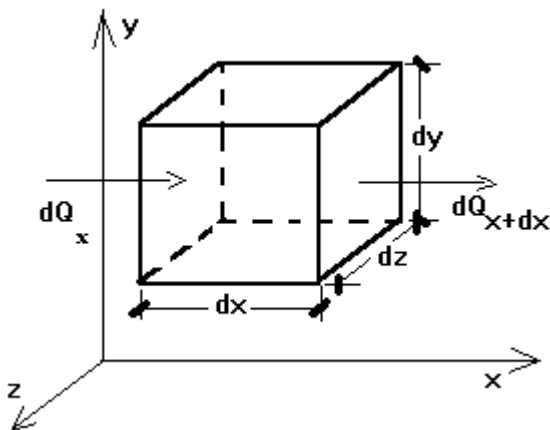
10.1.4 Cenni sul regime variabile

Come precedentemente accennato, la temperatura all'interno di un corpo soggetto ad un processo di conduzione termica in regime variabile dipende dal tempo, oltre che dalla posizione considerata, e cioè la temperatura è una funzione del tipo:

$$t = f(x, y, z, \tau).$$

È opportuno, quindi, accennare a fenomeni di conduzione non a regime, per introdurre un'equazione di validità più generale (**Equazione generalizzata di Fourier**).

Si supponga di considerare, per semplicità, un processo di conduzione del calore nella sola direzione x (*conduzione unidimensionale o unidirezionale*). In questo caso, evidentemente, la temperatura risulterà funzione di due sole variabili, e cioè del tipo $t = f(x, \tau)$. Si consideri un elemento di volume $dV = dx dy dz$ posizionato all'interno di un solido omogeneo, come rappresentato in figura.



Si ipotizzi che l'elemento non vari apprezzabilmente il suo volume dV in conseguenza a variazioni di temperatura. In conseguenza delle ipotesi fatte, l'elemento di volume suddetto può essere interessato a scambi di calore solo attraverso le due facce opposte del cubo (area $dA = dy dz$) poste all'ascissa x e $x + dx$.

L'equazione generalizzata di Fourier per conduzione unidimensionale può ottenersi sulla base di un bilancio termico.

All'istante generico τ risulta:

dQ_x = quantità di calore entrante nell'elemento all'ascissa x

dQ_{x+dx} = quantità di calore uscente dall'elemento all'ascissa $(x+dx)$

dU = variazione di energia interna dell'elemento

Il **I Principio della Termodinamica**, nel caso sia $dL = 0$, fornisce:

$$dQ_x - dQ_{x+dx} = dU$$

Alla variazione di energia interna dU [J] dell'elemento di volume (massa $dm = \rho dV$) è associata una variazione di temperatura che può essere espressa in relazione al calore specifico c del mezzo:

$$dU = c dm dt = c \rho dV dt$$

Sostituendo nell'equazione di bilancio $dQ_x - dQ_{x+dx} = dU$, si ottiene, dopo alcuni passaggi, la seguente equazione :

$$\frac{\lambda}{\rho c} \left[\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \right] = \frac{\partial t}{\partial \tau}$$

Il rapporto a primo membro caratterizza il comportamento a regime variabile del mezzo ed è detto **diffusività termica a**:

$$a = \lambda / \rho c \quad [m^2/s]$$

Nel caso più generale $t = t(x,y,z,\tau)$, con analogo procedimento, si ottiene la seguente relazione (**Equazione generalizzata di Fourier**):

$$a \left[\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right] = \frac{\partial t}{\partial \tau} \Rightarrow a \nabla^2 t = \frac{\partial t}{\partial \tau}$$

ove il simbolo $\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$ sintetizza l'operazione da compiersi sulla funzione $t = f(x,y,z,\tau)$ ed è detto *operatore di Laplace*.

L'**equazione generalizzata di Fourier** presenta grande interesse teorico e pratico nell'edilizia, ad esempio per studiare la trasmissione del calore a regime variabile attraverso le pareti degli edifici. Ovviamente, nel caso di conduzione stazionaria, l'equazione generalizzata si riduce a quanto prima già vista, ad esempio per conduzione monodimensionale stazionaria risulta subito:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$$

E, quindi, si ottiene:

$$\left[\frac{d^2 t}{dx^2} \right] = 0$$

L'integrale generale di questa equazione differenziale è la funzione $t = Ax + B$.

Infatti risulta:

- prima integrazione: $dt/dx = A$ ($A = \text{cost.}$)
- seconda integrazione: $t = Ax + B$

In riferimento a quanto prima considerato (conduzione stazionaria in uno stato piano), è possibile immediatamente determinare i valori delle costanti **A** e **B** per ottenere l'integrale

particolare che fornisce la distribuzione di temperatura nello strato piano. La funzione $t = A x + B$ deve, infatti, valere:

$$t = t_1 \quad \text{per } x = 0$$

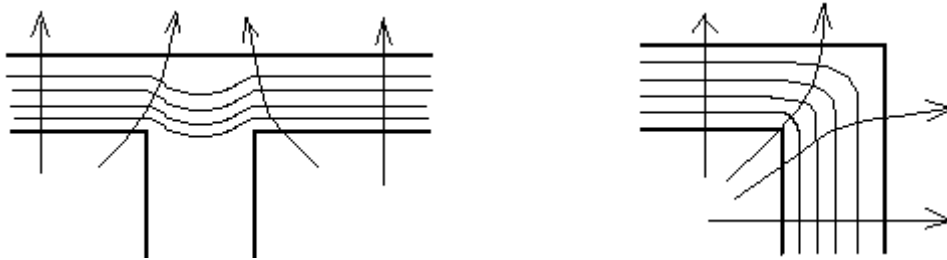
$$t = t_2 \quad \text{per } x = L$$

e, quindi, deve essere: $B = t_1$ e $A = (t_2 - t_1) / L$.

Sostituendo si ottiene:
$$t_x = t_1 - x \frac{(t_1 - t_2)}{L}$$

Come si può osservare si ritrova quanto precedentemente ottenuto, e cioè la temperatura varia linearmente con lo spessore dello strato.

In punti particolari dell'involucro edilizio, quali spigoli, nodi strutturali, pilastri, ecc., il fenomeno della conduzione non sarà più monodimensionale, ma, ad esempio, bidimensionale come rappresentato nelle seguenti figure.



Nel caso più generale (regime variabile) risulterà $t = f(x,y,\tau)$ mentre a regime stazionario sarà $t = f(x,y)$. Questi punti dell'involucro edilizio, ove si ha un addensamento delle linee di flusso termico, costituiscono cammini facilitati per la propagazione del calore rispetto alle pareti circostanti, per cui vengono generalmente detti **Ponti termici**.

È opportuno discutere brevemente il significato fisico della grandezza **diffusività termica** $a = \frac{\lambda}{\rho c}$ che, come si è già visto, caratterizza il comportamento di un materiale in regime variabile.

Il prodotto ρc ha dimensioni fisiche $[J/m^3K]$ e quindi il significato di un **calore specifico volumetrico** (per unità di volume).

Poiché la conducibilità λ rappresenta la proprietà del mezzo di trasmettere calore, la diffusività termica a ha il significato di un rapporto tra le proprietà del mezzo di trasmettere e di accumulare calore.

$$a = \frac{\lambda}{\rho c} = \frac{\text{proprietà di conduzione}}{\text{proprietà di accumulo}}$$

Si può dire che, quando la diffusività termica del mezzo è elevata, una perturbazione termica viene poco ridotta in ampiezza (si dice che è poco smorzata), e risulta quindi avvertibile anche a una notevole distanza dalla superficie.

In generale, la diffusività termica risulta influenzata soprattutto dalla densità del materiale; si osservi infatti che per i materiali normalmente utilizzati in edilizia, la conducibilità λ risulta indicativamente compresa tra 0.05 e 2.5 [W/mK] (varia cioè di due ordini di grandezza), mentre la corrispondente densità ρ varia tra circa 10 e 2500 [kg/m³] (circa tre ordini di grandezza), essendo il calore specifico c quasi costante per tutti i materiali. S'intuisce, quindi, come la diffusività termica dei materiali impiegati nelle strutture edilizie assuma particolare importanza quando si debba valutare l'influenza della variazione della temperatura esterna sugli ambienti.

Questi importanti aspetti del comportamento termico degli edifici possono essere evidentemente indagati in modo esauriente solo sulla base dell'equazione generalizzata di Fourier.

ESERCIZI ED ESEMPI

1) Sulle facce opposte di uno strato piano ($L = 20$ [cm]) viene mantenuta la differenza di temperatura $\Delta t = t_1 - t_2 = 7$ [°C]. Si valuti il flusso termico specifico φ'_x trasmesso nel caso che lo strato sia in calcestruzzo ($\lambda_c = 1.90$ [W/m K]) oppure in polistirolo ($\lambda_p = 0.035$ [W/m K]). Per uno strato piano in regime stazionario si ha:

$$\varphi'_x = -\lambda \frac{(t_2 - t_1)}{L} = \lambda \frac{t_1 - t_2}{L}$$

Nei due casi si ha:

$$\varphi'_c = \lambda_c \frac{(t_1 - t_2)}{L} = 1.90 \frac{7}{.2} = 66.5 \text{ [W/m}^2\text{]}$$

$$\varphi'_p = \lambda_p \frac{(t_1 - t_2)}{L} = .035 \frac{7}{.2} = 1.2 \text{ [W/m}^2\text{]}$$

2) Una differenza di temperatura $\Delta t = t_{p1} - t_{p2}$ è mantenuta sulle facce opposte di una struttura bistrato (rispettivamente \underline{l}_1 (strato 1) e \underline{l}_2 (strato 2)). Se è $\lambda_1 > \lambda_2$ quale sarà l'andamento qualitativo della distribuzione di temperatura attraverso la struttura?

Ovviamente, dovendo essere a regime :

$$\varphi'_{x1} = \varphi'_{x2} = \text{cost}$$

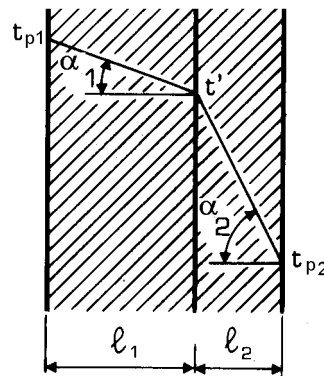
la temperatura varierà con andamento lineare in ciascun strato. Infatti dalla legge di Fourier consegue che:

$$-\lambda_1 \frac{dt}{dx} \Big|_1 = -\lambda_2 \frac{dt}{dx} \Big|_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \frac{(t_{p1} - t')}{l_1} = \lambda_2 \frac{(t' - t_{p2})}{l_2}$$

Poiché $\lambda_1 > \lambda_2$ sarà anche:

$$\frac{dt}{dx} \Big|_1 < \frac{dt}{dx} \Big|_2 \Leftrightarrow \frac{(t_{p1} - t')}{l_1} < \frac{(t' - t_{p2})}{l_2}$$

e cioè, come rappresentato in figura, la pendenza della distribuzione di temperatura sarà minore nello strato **1** ($\tan \alpha_1 < \tan \alpha_2$).



3) Si valuti la **diffusività termica a** del **calcestruzzo** e del **polistirolo**.

$$\text{per il calcestruzzo: } \begin{cases} \lambda_c = 2.0 & \left[\frac{\text{W}}{\text{mK}} \right] \\ \rho_c = 2500 & \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] \\ c_c = 1030 & \left[\frac{\text{J}}{\text{kgK}} \right] \end{cases} \Rightarrow a_c = \frac{\lambda_c}{\rho_c c_c} = 7.5 \cdot 10^{-7} \quad \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right]$$

$$\text{per il polistirolo: } \begin{cases} \lambda_p = 0.035 & \left[\frac{\text{W}}{\text{mK}} \right] \\ \rho_p = 50 & \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] \\ c_p = 1050 & \left[\frac{\text{J}}{\text{kgK}} \right] \end{cases} \Rightarrow a_p = \frac{\lambda_p}{\rho_p c_p} = 6.7 \cdot 10^{-7} \quad \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right]$$

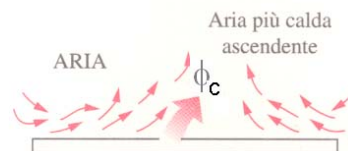
I valori ottenuti non sono molto diversi e quindi, **in condizioni di regime variabile**, i due materiali si comporteranno in modo **simile** come previsto dall'equazione generalizzata di Fourier (solo il valore della diffusività termica **a** caratterizza il comportamento del mezzo).

10.2 CONVEZIONE

Come noto la convezione termica costituisce uno dei meccanismi fondamentali di scambio di calore e si attua tra la superficie di un corpo ed un fluido a diversa temperatura. La causa che provoca il moto del fluido consente una prima distinzione. Si parla, infatti, di **convezione forzata** quando il moto è indotto da dispositivi meccanici quali, ad esempio, pompe, ventilatori, circolatori, agitatori, ecc., come rappresentato in figura .



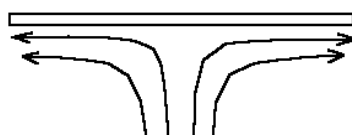
Si parla invece di **convezione naturale** quando la velocità del fluido dipende dalla variazione della sua densità provocata dai gradienti di temperatura presenti nella massa fluida. La figura illustra il moto di un fluido a contatto con una lastra più calda.



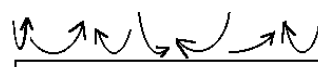
È opportuno osservare che la convezione **naturale**, contrariamente a quanto avviene per la **forzata**, risulta dipendere dalla disposizione della superficie scambiante calore rispetto al fluido; una disposizione può, ad esempio, favorire od ostacolare il moto del fluido, come si può immediatamente comprendere, almeno dal punto di vista qualitativo, paragonando alcune diverse disposizioni di una piastra riscaldata.



caso a)



caso b)



caso c)

- Nel caso **a)** il moto dell'aria verso l'alto avviene senza impedimenti su entrambi i lati della lastra.
- Nel caso **b)** lo scambio termico verso il basso è ostacolato da una stratificazione d'aria calda stazionante sotto la lastra.
- Nel caso **c)**, in cui si attua uno scambio termico verso l'alto, il moto del fluido risulta possibile, anche se evidentemente si verificheranno interferenze tra i moti ascensionali e quelli discendenti.

Se si considera la convezione sia forzata che naturale, si può osservare che lo strato a diretto contatto con la parete riceve da essa energia termica (si supponga, ad esempio, la parete a temperatura maggiore del fluido). Tale strato, a sua volta, cede l'energia termica agli strati attigui più esterni. In definitiva la convezione, nel suo complesso, si stabilisce mediante due meccanismi:

- a)** un meccanismo a livello molecolare di conduzione termica;
- b)** un meccanismo connesso al moto del fluido con mescolamento tra elementi di fluido a diversa temperatura.

Poiché all'interfaccia fluido-parete (direzione y) opera un meccanismo conduttivo, la potenza termica scambiata per convezione può essere espressa mediante la seguente relazione:

$$\varphi_c = -\lambda A \left(\frac{dt}{dy} \right) \Big|_{y=0}$$

Questa relazione è valida sia nel caso di regime laminare che turbolento, perché è comunque sempre individuabile uno strato di fluido fermo a contatto con la parete, attraverso il quale la trasmissione del calore avviene per conduzione. Pertanto lo scambio dipenderà senz'altro dalla conducibilità termica λ del fluido. Tuttavia appare evidente che esso sarà influenzato anche dalle modalità di moto del fluido e cioè, quindi, anche dalle grandezze fisiche e geometriche che concorrono a definirlo quali la densità, la viscosità del fluido, le caratteristiche di forma delle pareti, ecc.

Viene usualmente adottata un'impostazione formale del problema che fa riferimento alla cosiddetta **Legge di Newton** e cioè alla relazione:

$$\varphi_c = A \alpha_c (t_p - t_f) \quad [W]$$

oppure

$$\varphi'_c = \alpha_c (t_p - t_f) \quad [W/m^2]$$

La relazione esprime proporzionalità tra il flusso termico scambiato, la superficie di scambio A e la differenza tra la temperatura della parete t_p e quella del fluido lontano dalla stessa t_f . La costante α_c

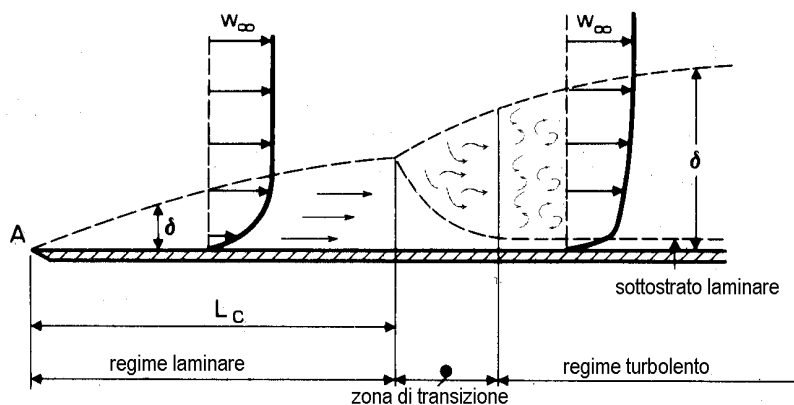
[W/m² K] è detta **coefficiente di convezione**. Eguagliando le due relazioni che esprimono il flusso si ottiene:

$$\alpha_c = \frac{\lambda_f \left. \frac{\partial t}{\partial y} \right|_{y=0}}{t_p - t_f}$$

Questa espressione evidenzia che per determinare il valore locale di α_c è necessario conoscere la distribuzione di temperatura all'interno dello strato di fluido, la qual cosa presenta sovente notevoli difficoltà.

10.2.1 Convezione forzata

Per individuare le principali grandezze che interessano lo scambio termico convettivo, è necessario prima analizzare il moto di un fluido reale in prossimità di una superficie solida. Si consideri, ad esempio, una lastra piana lambita da una corrente di fluido alla stessa temperatura. Si supponga la corrente parallela alla superficie della lastra.



Strato limite idrodinamico

Si osserva, quindi, che i fluidi viscosi hanno la tendenza ad aderire alle pareti solide con cui vengono a contatto rendendo nulla, all'interfaccia, la loro velocità. Pertanto, in prossimità di un corpo solido lambito da un fluido si viene a determinare un rallentamento progressivo degli strati di fluido rispetto alla corrente posta a distanza maggiore.

Lo strato di spessore δ_v , sede di forti gradienti di velocità, è detto **strato limite idrodinamico**. Al di fuori di questo, il campo di velocità **non risente** dei fenomeni indotti dall'adesione del fluido alla superficie e rimane quindi indisturbato.

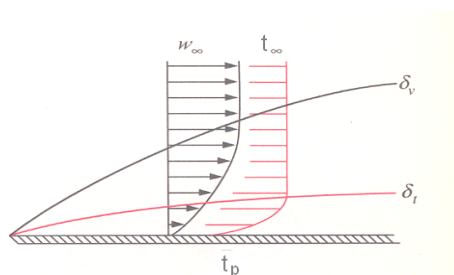
Lo strato limite inizia al bordo di attacco **A**, si estende poi progressivamente come riportato in figura, ed il suo spessore si assume esteso fino alla distanza dalla superficie alla quale la velocità **w** del fluido è il 99% della velocità della corrente indisturbata **w_∞**. Il numero di **Reynolds** in corrispondenza al quale il moto diventa turbolento è detto **Reynolds critico** e il suo valore varia con la geometria.

Per il moto su una lastra piana il suo valore è:

$$\text{Re}_{\text{cr}} = \frac{w_{\infty} \cdot x_{\text{cr}}}{\nu} = 5 \cdot 10^5$$

Nel tratto **x_{cr}**, misurato a partire dal bordo **A**, il moto nello strato limite è **laminare** e la velocità **w** varia in funzione della distanza **y** dalla parete con legge parabolica. A distanza maggiore di **x_{cr}** il regime laminare diviene instabile e, dopo una zona di transizione in cui si avvicinano continuamente i due differenti regimi, lo strato limite si presenta turbolento in ogni punto ad eccezione che in un sottile strato aderente alla parete detto **sottostrato laminare**. Nello strato limite turbolento i profili di velocità sono più complessi mentre nel sottostrato laminare l'andamento delle velocità si considera di solito lineare. In realtà non esiste demarcazione netta tra sottostrato laminare e strato turbolento: si passa gradualmente attraverso una zona intermedia a turbolenza via via più marcata. Se poi il fluido lambisce la superficie della stessa lastra, mantenuta però a diversa temperatura, si verifica un fenomeno aggiuntivo. Elementi di fluido nello strato adiacente alla piastra raggiungeranno l'equilibrio termico con la piastra portandosi alla temperatura **t_p** e scambieranno energia termica con elementi di fluidi contigui e così via. In conseguenza di ciò si svilupperà nel fluido in moto un profilo di temperatura variabile da **t_p**, in corrispondenza della superficie della piastra a **t_∞** a sufficiente distanza da questa. La zona del fluido in moto sulla superficie nella quale risulta significativa la variazione di temperatura nella direzione normale alla superficie viene detta **strato limite di temperatura**. Anche in questo caso il suo spessore **δ_t** si assume esteso fino alla distanza dalla superficie alla quale la differenza **t - t_p** è pari al 99% della differenza **t_∞ - t_p**.

Nella figura seguente si illustra lo sviluppo degli strati limite termico e di velocità per un fluido.



Da quanto sopra esposto si nota come la valutazione del coefficiente di scambio termico convettivo α_c sia sempre piuttosto complessa poiché questo dipende da numerose variabili le quali, nella convezione forzata, sono le seguenti:

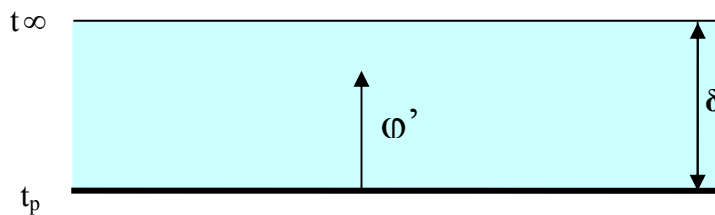
$$\alpha_c = f(\rho, \mu, c_p, \lambda, w, L)$$

ove ρ , μ , c_p , λ sono le caratteristiche termofisiche del fluido, e cioè densità ρ , viscosità dinamica μ , calore specifico c_p , conducibilità termica λ , velocità w e, infine, una lunghezza caratteristica della geometria considerata L . Il rapporto $\mu/\rho = \nu$ rappresenta la viscosità cinematica del fluido e si esprime [m^2/s]. Poiché una relazione tra tutte queste variabili risulterebbe particolarmente complessa, queste si possono raggruppano in gruppi adimensionali e cioè numeri che, per la convezione forzata, sono:

- Numero di Nusselt:
$$Nu = \frac{\alpha_c l}{\lambda};$$
- Numero di Reynolds:
$$Re = \frac{\rho w l}{\mu} = \frac{w l}{\nu}$$
- Numero di Prandl:
$$Pr = \frac{c_p \mu}{\lambda} \quad (\text{solo caratt. fisiche del fluido})$$

I tre gruppi sono numeri adimensionali e, quindi, si sottolinea l'importanza della coerenza delle unità di misura che debbono essere considerate.

Un'interpretazione fisica del numero di Nusselt (sia in convezione forzata che naturale) si può avere considerando lo strato limite di spessore δ sottoposto a differenza di temperatura $t_p - t_\infty$ come mostrato in figura, ove si pone: $t_p > t_\infty$.



La trasmissione di calore attraverso lo strato avviene per convezione quando il fluido è in movimento e per conduzione nel caso limite di fluido in quiete. La potenza termica trasmessa per unità di superficie nei due casi risulterà:

$$\phi'_{\text{conv}} = \alpha_c (t_p - t_\infty)$$

$$\phi'_{\text{cond}} = -\lambda \frac{t_\infty - t_p}{\delta}$$

Il rapporto fra le precedenti relazioni (adimensionali) evidenzia il significato fisico del numero di **Nusselt**:

$$\frac{\Phi'_{\text{conv}}}{\Phi'_{\text{cond}}} = \frac{\alpha_c (t_p - t_\infty)}{\lambda \frac{t_p - t_\infty}{\delta}} = \frac{\alpha_c \delta}{\lambda} = \mathbf{Nu}$$

Il numero di **Nusselt** confronta quindi la potenza scambiata **per convezione** attraverso lo strato limite con quella che sarebbe trasmessa **per pura conduzione** attraverso lo stesso strato. Il valore unitario del numero di Nusselt ($\mathbf{Nu} = 1$) caratterizza quindi la conduzione pura. All'aumentare del Nusselt la convezione scambia calore in modo sempre più efficiente. Ritornando al coefficiente di scambio termico in convezione forzata, i gruppi adimensionali esprimono una dipendenza del seguente tipo:

$$\mathbf{Nu} = \mathbf{f(Re, Pr)}$$

Il legame funzionale tra i vari gruppi è ottenuto mediante i dati sperimentali. Ad esempio, in letteratura si trova la seguente correlazione che esprime il valore medio **Nu** per un fluido in regime turbolento su una lastra piana:

$$\mathbf{Nu} = \mathbf{0.037 Re^{4/5} Pr^{1/3}}$$

Il valore del coefficiente convettivo α_c può ottenersi dal numero di Nusselt al primo membro di tali correlazioni. Si può osservare che, benché il coefficiente α_c sia funzione di sei variabili, risulti ora possibile far riferimento ad una correlazione tra soli tre gruppi adimensionali. Questa riduzione del numero di variabili consente una più agevole e sintetica rappresentazione dei dati ottenuti da esperimenti e la loro generalizzazione, ad esempio a fluidi di diverse proprietà termofisiche.

10.2.2 Convezione naturale

Si consideri, ad esempio, il caso d'aria inizialmente in quiete a contatto con una parete più calda di un edificio: dapprima per un processo di conduzione termica si verifica un aumento della temperatura ed una corrispondente diminuzione di densità degli elementi di fluido più prossimi alla parete; successivamente tali elementi, per azione della **spinta archimedeana**, si muoveranno verso l'alto portandosi verso zone limitrofe a temperatura minore raggiungendo l'equilibrio termico.

Per approfondire quanto accennato è necessario fare riferimento alla **spinta archimedeana (S)** che si determina quando un elemento di fluido non è in equilibrio termico col fluido circostante. Come si vedrà, in riferimento ad un volume unitario di fluido, tale spinta dipende dal prodotto $\beta g \rho \Delta t$, ove β è il **coefficiente di dilatazione termica del fluido**.

Il coefficiente β è definito dalla relazione:

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad [1/K]$$

Per tutte le sostanze risulta sempre $\beta > 0$. Nel *caso di un gas perfetto* sulla base dell'equazione di stato si ottiene immediatamente $\beta = 1/T$.

Si consideri ora un elemento di fluido (volume V , densità ρ_f , temperatura t_f) prossimo ad una parete verticale. Come noto, se non vi è alcuna differenza di temperatura tra la parete ed il fluido, e cioè se la densità del fluido contenuto in questo volume è pari a ρ_f , la spinta idrostatica S applicata all'elemento di volume equilibra la forza peso F , e l'elemento è in quiete. In condizioni di non equilibrio termico la situazione sarà diversa: ad esempio si immagini che la temperatura dell'elemento di fluido sia $t > t_f$, la conseguente $\Delta\rho$ risulta:

$$\Delta\rho = -\beta \rho_f \Delta t < 0$$

e cioè la forza risultante R verso l'alto non sarà più nulla:

$$R = \text{spinta archimedeica} - \text{forza peso}$$

$$R = S - F = \rho_f g V - \rho g V = g V (\rho_f - \rho) = -\Delta\rho \cdot g \cdot V$$

La forza di galleggiamento per unità di volume di fluido risulta:

$$\frac{R}{V} = \frac{S - F}{V} = -\Delta\rho \cdot g = \beta g \rho_f \Delta t$$

$$\frac{R}{V} > 0 \quad \text{se} \quad \Delta T > 0$$

L'entità dello scambio termico per convezione naturale pertanto dipenderà fortemente dal coefficiente β caratterizzante il fluido in questione.

In generale, la convezione naturale dipende da numerosi fattori: tra i principali si citano la dimensione, forma ed orientazione del corpo, la temperatura della superficie e del fluido, le proprietà termofisiche del fluido, quali calore specifico (c_p), conducibilità termica (λ), densità (ρ), viscosità dinamica (μ), coefficiente di dilatazione termica moltiplicato per l'accelerazione di gravità (βg).

Nel caso quindi di **convezione naturale**, e sempre nel caso delle più semplici geometrie del sistema (ad esempio, lastra piana verticale, lastra piana orizzontale e flusso ascendente, etc.), il coefficiente α_c risulterà funzione delle seguenti variabili:

$$\alpha_c = f(L, \beta g \Delta t, \mu, \lambda, c, \rho)$$

ove Δt rappresenta la differenza tra la temperatura della parete e quella del fluido indisturbato. In convezione naturale la velocità w non è più una **variabile indipendente** ma dipenderà dall'entità della spinta archimedeica. Pertanto nella convezione naturale non si farà più riferimento al numero di

Reynolds ma bensì al numero di **Grashof** che esprime la spinta di galleggiamento espressa dalla seguente equazione:

$$\text{Gr} = \frac{\beta g l^3 \Delta t}{\nu^2}$$

Le relazioni adimensionali della convezione naturale sono del tipo:

$$\text{Nu} = C (\text{Gr Pr})^n$$

Il prodotto **Gr Pr** è detto numero di **Rayleigh** e quindi la precedente può essere riscritta:

$$\text{Nu} = C \text{Ra}^n$$

Come si è ricordato, nella convezione forzata il regime del deflusso (laminare o turbolento) è determinato dal valore di **Re**. Nella convezione naturale tale ruolo è determinato dal numero di **Rayleigh**:

- per: **Ra < 10⁹** il regime è **laminare**;
- per: **Ra > 1.2·10¹⁰** il regime è **turbolento**;
- all'interno dell'intervallo si ha un regime di **transizione**.

a) Convezione naturale in regime laminare

A titolo di esempio i dati sperimentali per pareti piane verticali, a temperatura uniforme, larghezza tale da rendere trascurabile l'effetto dei bordi, e per superfici cilindriche verticali, sono ben rappresentati dalla relazione:

$$\text{Nu} = 0.59 \text{Ra}^{1/4}$$

b) Convezione naturale in regime turbolento

La correlazione diventa:

$$\text{Nu} = 0.1 \text{Ra}^{1/3}$$

Il valore del coefficiente medio convettivo α_c può essere sempre ricavato dal numero di **Nusselt** al primo membro di tali correlazioni.

Nella letteratura tecnica sono riportate un gran numero di correlazioni, proposte da autori diversi sulla base delle loro prove sperimentali o di sofisticate indagini teoriche. Esse differiscono tra loro in relazione ai fenomeni in esame (convezione naturale o forzata, regime laminare o turbolento) e alla geometria del sistema. In genere, se non altrimenti specificato, le **proprietà fisiche del fluido** che dipendono dalla temperatura **sono valutate** ad una **temperatura** pari alla **media** tra quella della **parete** e quella del **fluido indisturbato**.

I valori del coefficiente α_c che indicativamente si ottengono nei casi più comuni mediante le correlazioni riportate in letteratura sono riassunti nella seguente tabella.

FLUIDO	TIPO DI CONVEZIONE	α_c [W/m ² K]
Aeriforme	Naturale	5 - 20
	Forzata	30 - 250
Liquido	Naturale	500 - 700
	Forzata	4000 - 8000
Fluido	Ebollizione	20000 - 60000

Per i fluidi più comuni (aria e acqua) e per le più semplici geometrie, talvolta nelle correlazioni adimensionali, possono essere introdotti direttamente i valori numerici delle grandezze termofisiche che caratterizzano questi fluidi, in modo da poter scrivere espressioni d'uso più immediato. Ad esempio, nel caso di convezione forzata laminare su pareti, si può utilizzare per l'aria un'espressione del tipo:

$$\alpha_c = A w^{0.5}$$

ove la costante **A** che dipende dalla geometria del sistema e dalla temperatura media dell'aria congloba tutte le altre grandezze significative. Nel caso di convezione naturale laminare di aria, per pareti verticali si può scrivere:

$$\alpha_c = B \Delta t^{0.25}$$

ove la costante **B** congloba tutte le altre grandezze significative.

ESERCIZI ED ESEMPI

1) La superficie laterale di un edificio (lunghezza **L = 20 [m]**) è investita da una corrente d'aria con **velocità w = 10 [m/s]**. Se l'aria investe tangenzialmente la parete si valuti la distanza dal bordo d'attacco ove si ha la transizione moto laminare-turbolento. Si assuma **t_p = 20 [°C]** e **t_a = 0 [°C]** e si valuti il coefficiente di scambio convettivo α_c .

Il **Reynolds critico** in corrispondenza al quale il moto diventa turbolento vale **Re_{cr} = 5·10⁵** per cui ricavando **x_{cr}** si ottiene:

$$Re_{cr} = \frac{w \cdot x_{cr}}{\nu} \Rightarrow x_{cr} = \frac{5 \cdot 10^5 \cdot \nu}{w}$$

$$x_{cr} = \frac{5 \cdot 10^5 \cdot \nu}{w} = \frac{5 \cdot 10^5 \cdot 1.40 \cdot 10^{-5}}{10} = 0.70 \text{ [m]}$$

Pertanto, essendo la zona di parete con flusso laminare molto piccola rispetto alla zona con flusso turbolento (**x_{cr} << L**), il coefficiente medio di scambio potrà essere stimato con la correlazione di convezione forzata:

$$Nu = 0.037 Re^{4/5} Pr^{1/3}$$

La tabella che segue riassume le grandezze termofisiche dell'aria.

T [K]	ρ [kg/m ³]	c_p [J/kgK]	λ [W/mK]	a [m ² /s]	μ [kg/ms]	ν [m ² /s]	Pr [-]
280	1.271	1004	0.0246	1.95 · 10 ⁻⁵	1.75 · 10 ⁻⁵	1.40 · 10 ⁻⁵	0.717
300	1.177	1005	0.0261	2.21 · 10 ⁻⁵	1.85 · 10 ⁻⁵	1.57 · 10 ⁻⁵	0.712
320	1100	1006	0.0275	2.49 · 10 ⁻⁵	1.94 · 10 ⁻⁵	1.77 · 10 ⁻⁵	0.710
340	1.043	1007	0.0290	2.78 · 10 ⁻⁵	2.03 · 10 ⁻⁵	1.96 · 10 ⁻⁵	0.707

Grandezze termofisiche aria a pressione atmosferica

Dalla tabella per $t = 10$ [°C] ≈ 280 [K] risulta:

$$\nu = 1.40 \cdot 10^{-5} \text{ [m}^2/\text{s}] \Rightarrow \text{Pr} = 0.717$$

Il numero **Re** è:

$$\text{Re} = \frac{wL}{\nu} = \frac{10 \cdot 20}{1.40 \cdot 10^{-5}} = 1.43 \cdot 10^7$$

Il numero **Nu** è:

$$\text{Nu} = 0.037 \text{Re}^{4/5} \text{Pr}^{1/3} = 0.037 \cdot (1.43 \cdot 10^7)^{4/5} \cdot (0.717)^{1/3} = 7228$$

Il coefficiente di scambio è:

$$\alpha_c = \frac{\lambda}{L} \cdot \text{Nu} = \frac{0.0246}{20} \cdot 7228 = 8.7 \text{ [W/(m}^2\text{K)]}$$

$$t_m = \frac{84 + 20}{2} = 52 \text{ [}^\circ\text{C]} = 325 \text{ [K]}$$

2) La piastra verticale di un corpo scaldante (dimensioni altezza **a** = 0.6 [m] e larghezza **b** = 0.6 [m]) è a contatto con aria ambiente alla temperatura di $t_a = 20$ [°C]. La temperatura superficiale della lastra a contatto dell'aria è pari a $t_p = 84$ [°C] mentre l'altra faccia della lastra è termicamente isolata. Si determini il flusso termico scambiato dalla piastra. La temperatura media alla quale valutare le proprietà fisiche dell'aria è:

A questa temperatura si ha:

$$\lambda = 0.028 \text{ [W/(mK)]}$$

$$\nu = 1.82 \cdot 10^{-5} \text{ [m}^2/\text{s]}$$

$$\text{Pr} = 0.709$$

$$\beta = \frac{1}{T_m} = \frac{1}{325} = 0.00308 \text{ [K}^{-1}\text{]}$$

Il numero di Rayleigh **Ra** risulta:

$$\mathbf{Ra} = \mathbf{Gr} \cdot \mathbf{Pr} = \frac{\beta \mathbf{g} \cdot (\Delta t) \cdot \mathbf{a}^3}{\nu^2} \cdot \mathbf{Pr} = \frac{0.00308 \cdot 9.8 \cdot (84 - 20) \cdot (0.6)^3}{(1.82 \cdot 10^{-5})^2} = 1.26 \cdot 10^9$$

Il numero di Nusselt **Nu** è:

$$\mathbf{Nu} = 0.59 \cdot \mathbf{Ra}^{0.25} = 0.59 \cdot (1.26 \cdot 10^9)^{0.25} = 111$$

Il coefficiente medio di scambio α_c è:

$$\alpha_c = \frac{\lambda}{a} \cdot \mathbf{Nu} = \frac{0.028}{0.6} \cdot 111 = 5.1 \text{ [W/(m}^2\text{K)]}$$

Il flusso specifico e il flusso complessivo sono rispettivamente:

$$\varphi'_c = \alpha_c \cdot (t_p - t_a) = 326 \text{ [W/m}^2\text{]}$$

$$\varphi_c = \varphi'_c \cdot \mathbf{A} = 326 \cdot 0.36 = 117 \text{ [W]}$$

ove: $\mathbf{A} = \mathbf{ab} = 0.36 \text{ [m}^2\text{]}$.