



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE ACADÊMICO DO AGRESTE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA

INDACLÉCIO PAULO DOS SANTOS

**ECOLOGIA DE APRENDIZAGEM SOBRE PROBABILIDADE COM ESTUDANTES
DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL**

Caruaru

2019

INDACLÉCIO PAULO DOS SANTOS

**ECOLOGIA DE APRENDIZAGEM SOBRE PROBABILIDADE COM ESTUDANTES
DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemática.

Área de concentração: Educação em Ciências e Matemática.

Orientador: Prof.º Dr. José Ivanildo Felisberto de Carvalho

Caruaru

2019

Catálogo na fonte:
Bibliotecária – Paula Silva - CRB/4 - 1223

S237e Santos, Indaclécio Paulo dos.
Ecologia de aprendizagem sobre probabilidade com estudantes dos anos finais do ensino fundamental. / Indaclécio Paulo dos Santos. – 2019.
159 f.; il.: 30 cm.

Orientador: José Ivanildo Felisberto de Carvalho.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, 2019.
Inclui Referências.

1. Probabilidades. 2. Matemática (Ensino fundamental). 3. Aprendizagem. 4. Projeto experimental. 5. Ecologia. I. Carvalho, José Ivanildo Felisberto de (Orientador).
II. Título

CDD 371.12 (23. ed.) UFPE (CAA 2019-239)

INDACLÉCIO PAULO DOS SANTOS

**ECOLOGIA DE APRENDIZAGEM SOBRE PROBABILIDADE COM ESTUDANTES
DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemática.

Aprovada em: 26/06/2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof.º Dr. José Ivanildo Felisberto de Carvalho (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof.º Dr. Marcus Bessa de Meneses (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof.ª Dr.ª. Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão Santos (Examinadora Externa)
Universidade Federal de Pernambuco

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus familiares, em especial a minha mãe Quitéria por ser meu tudo, e aos meus irmãos Indalécio, Irislécia e Luzia, por todo apoio recebido ao longo de toda minha formação, por acreditarem e torcerem por mim.

A todos os Professores, que tive a honra de conhecer, pois foram eles com suas palavras que ajudaram edificar minha formação. Desta forma também não posso deixar de agradecer as intuições na qual sempre fui e sou bem recebido e pelo total apoio recebido, à Escola Professor Brasiliano Donino da Costa Lima (EREM - Pedra, o IFPE – Campus Pesqueira e a UFPE – CAA.

Aos amigos que construí ao longo da graduação e do mestrado PPGECM da linha de Metodologias da turma 2017, em especial à Franciane Almeida, minha eterna companheira de estudos e estrada, desde a graduação até o mestrado, pois quando nos momentos mais difíceis, foi a ela quem sempre recorri.

A meu orientador, Professor José Ivanildo Felisberto de Carvalho pela boa vontade, paciência e tranquilidade que me direcionou tão bem e sempre acreditou no meu potencial.

À Banca Examinadora, pela disposição, pelas observações e contribuições que foram acrescentadas ao trabalho.

Aos meus colegas de trabalho da Escola Anete Vale de Oliveira da cidade de Pedra – PE, que muito me motivaram, apoiaram e pela troca de ideias que, de uma forma ou de outra, contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho. Em especial, agradeço a toda equipe gestora, na pessoa de Genilda Cavalcanti, Poliana Almeida e Mary Monteiro, pois sem o apoio e compreensão das mesmas esta jornada seria bem mais difícil.

Às professoras Elizana Soares e Miryan Jussara, por toda disponibilidade e dedicação com que se prontificaram a realizar as devidas correções ortográficas.

Agradeço também a minha amada, Sandy Maria, por sua paciência e compreensão nos momentos de ausência.

Por fim, mas não menos importante, muito pelo contrário, agradeço aos meus alunos. São eles que sempre me motivaram a acordar cedo, a aprender mais e a buscar novos métodos e formas de ensinar.

“O que é humildade? É saber que eu e você não somos perfeitas ou perfeitos. Eu gosto dessa palavra porque perfeito em latim significa “feito por completo”, “feito por inteiro”, isto é, “concluído”. E um educador sabe que não está perfeito, não está concluído, não está terminado”. (CORTELLA, 2017, p. 11)

RESUMO

Este estudo tem como objetivo desenvolver e analisar uma sequência de atividades caracterizadas como ecologia de aprendizagem orientada para o ensino e aprendizagem de Probabilidade com estudantes dos 7º e 8º anos finais do Ensino Fundamental. Tal ecologia de aprendizagem faz parte do arcabouço teórico da teoria Design Experiments, sendo composta de uma sequência de atividades para o ensino e aprendizagem de Probabilidade. Foram selecionados 10 estudantes de uma escola pública do estado de Pernambuco matriculados nos referidos anos de escolarização. Metodologicamente, a pesquisa foi dividida em duas etapas (Piloto e Estudo Principal), realizadas por meio de três ciclos envolvendo os conceitos: aleatoriedade, espaço amostral e quantificação e comparação de probabilidades. A partir da análise e discussão dos resultados da implementação dos ciclos foi percebido que, concernente ao conhecimento, os estudantes apresentaram dificuldades em justificar as respostas e criar estratégias para mapear as combinações. Possibilitados pela vivência durante os ciclos, os estudantes apresentam ideias intuitivas, baseadas nas próprias experiências, utilizando estratégias que viabilizaram mapear as possibilidades, apresentando fortalecimento quanto aos argumentos coerentes em suas respostas, utilizando corretamente palavras de um vocabulário probabilístico. Diante desses resultados, acreditamos que esta ecologia de aprendizagem se mostrou uma importante ferramenta para o ensino de Probabilidade, visto que possibilitou o desenvolvimento do conhecimento probabilístico com relação aos conceitos mobilizados pelos ciclos, compreensão da natureza aleatória, raciocínio combinatório e das concepções frequentista e clássica.

Palavras-chave: Probabilidade. Ensino e aprendizagem de probabilidade. Design experiments. Ecologia de aprendizagem.

ABSTRACT

This study aims to develop and analyze a sequence of activities characterized as learning ecology oriented towards Teaching and learning Probability with students of the 7th and 8th grades of Elementary School. This learning ecology is part of the theoretical framework of the Design Experiments Theory, being composed of a sequence of activities for the Teaching and Learning of Probability. Ten students from a public school in the state of Pernambuco enrolled in these grades of schooling were selected. Methodologically, the research was divided in two stages (Pilot and Main Study), carried out through three cycles involving the concepts: randomness, sample space and quantification and comparison of probabilities. From the analysis and discussion of the results of the implementation of the cycles, it was noticed that, regarding the knowledge, the students presented difficulties in justifying the answers and to create strategies to map the combinations. Made possible by the experience during the cycles, the students present intuitive ideas, based on their own experiences, using strategies that made it possible to map the possibilities, presenting fortifications as to the coherent arguments in their answers, correctly using words from a probabilistic vocabulary. Given these results, we believe that this learning ecology showed up to be an important tool for Probability Teaching, since it enabled the development of probabilistic knowledge with relation to the concepts mobilized by the cycles, understanding of the random nature, combinatorial reasoning and the frequentist and classical conceptions.

Keywords: Probability. Teaching and learning of probability. Design experiments. Learning ecology.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –	Sistema de respostas do Jogo caça-níquel (Jogo 1A).....	59
Figura 2 –	O problema das cartas de João.....	60
Figura 3 –	Situação 1: As fichas de Jade.....	61
Figura 4 –	Situação 2: As fichas de Jade.....	62
Figura 5 –	Situação 3: As fichas de Jade.....	62
Figura 6 –	Tabuleiro de Bolinhas.....	63
Figura 7 –	Mapa dos Passeios aleatórios da Mônica.....	70
Figura 8 –	Folheto da atividade Clube de Danças.....	73
Figura 9 –	Jogo Blocos no saco.....	75
Figura 10 –	Registros do mapeamento feito pelos estudantes E e F na Atividade 5.....	92
Figura 11 –	Registros do mapeamento dos estudantes na Atividade 7.....	100
Figura 12 –	Registros do mapeamento feito pelos estudantes A e B na atividade Corrida de cavalos.....	104
Figura 13 –	Registros de algumas quantificações e comparações feitos pelos estudantes D e E na Atividade 12.....	122

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 –	Componente curricular e Habilidades proposta pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC).....	28
Quadro 2 –	Trabalhos publicados na Revista BOLEMA, no período de 2012 a 2017.....	31
Quadro 3 –	Teses e Dissertações publicadas Portal de Periódicos BDTD no período de 2012 a 2017.....	33
Quadro 4 –	Ciclos do Design contendo as Atividades e os Conceitos.....	58
Quadro 5 –	Pares de frases com situações Impossíveis versus Improváveis	66
Quadro 6 –	Tabuleiro da corrida de cavalos.....	69
Quadro 7 –	Relação das atividades e encontro de cada Ciclo.....	81
Quadro 8 –	O problema das cartas de João.....	86
Quadro 9 –	As fichas de Jade	88
Quadro 10 –	Tabuleiro de Bolinhas.....	89
Quadro 11 –	O Jogo do Par ou Ímpar.....	91
Quadro 12 –	Respostas apresentadas pelas duplas na 2ª Situação do Jogo Par ou Ímpar.....	92
Quadro 13 –	Atividade Impossíveis versus Improváveis.....	94
Quadro 14 –	Atividade Os filhos de Romeu e Julieta.....	98
Quadro 15 –	Atividade Corrida de cavalos.....	102
Quadro 16 –	Passeios aleatórios da Mônica – 1ª e 2ª Questões.....	106
Quadro 17 –	Passeios aleatórios da Mônica – 3ª Questão.....	108
Quadro 18 –	Passeios aleatórios da Mônica – 4ª Questão.....	110
Quadro 19 –	Atividade Clube de Danças	116
Quadro 20 –	Bolinhas no saco.....	119
Quadro 21 –	Atividade Blocos no Saco	121
Quadro 22 –	Pontuação final dos estudantes no Jogo Blocos no Saco.....	122

LISTA DE ABREVIATURAS

ed.	edição
et al.	e outro
h/a	horas de aula
Jr.	Júnior
Org.	Organização
p.	página
v.	volume

LISTA DE SIGLAS

AVA	Ambiente Virtual de Aprendizagem
BDTD	Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
BOLEMA	Boletim de Educação Matemática
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CEP	Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos
CNS	Conselho Nacional de Saúde
DCN	Diretrizes Curriculares Nacionais
DE	Design Experiments
EDUMATEC	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco
EJA	Educação de Jovens e Adultos
EOS	Enfoque Ontossemiótico
ETE-PE	Escolas Técnicas Estaduais de Pernambuco
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
IBICT	Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia
IFPE	Instituto Federal de Pernambuco
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
MEC	Ministério da Educação
MIT	Massachusetts Institute of Technology
OBMEP	Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PE	Pernambuco

PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
PSA	Parâmetros na Sala de Aula
SAEB	Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica
SAEPE	Sistema de Avaliação da Educação Básica de Pernambuco
TALE	Termo de Assentimento Livre e Esclarecido
TCC	Teoria dos Campos Conceituais
TCLE	Termo de Consentimento Livre Esclarecido
UFPE	Universidade Federal de Pernambuco
USP	Universidade de São Paulo
UTFPR	Universidade Tecnológica Federal do Paraná

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	PROBABILIDADE: CONCEITOS E UM BREVE CENÁRIO DE ESTUDOS SOBRE O ENSINO E APRENDIZAGEM	21
2.1	Conceituação teórica de probabilidade	21
2.2	As orientações curriculares e o ensino e a aprendizagem de probabilidade	25
2.3	Estado do conhecimento em duas bases de dados: BOLEMA e BDTD	29
2.4	Resultados de pesquisas sobre o ensino e aprendizagem de probabilidade	41
3	APORTE TEÓRICO	48
3.1	Design Experiments (DE)	48
3.2	Demandas cognitivas	50
4	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	53
4.1	Participantes	53
4.2	Coleta dos dados	55
4.3	Delineamento do estudo e os critérios de análise da pesquisa	56
4.4	Sequência de atividades do Design Experiments (DE)	58
5	ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	76
5.1	Estudo piloto: descrição dos ciclos e principais resultados	76
5.2	Ambiente de aprendizagem: análise das atividades desenvolvidas em cada ciclo do Design Experiments (DE)	79
5.2.1	Primeiro ciclo do design: aleatoriedade	81
5.2.2	Segundo ciclo do design: espaço amostral	97
5.2.3	Terceiro ciclo do design: quantificação e comparação de probabilidades	115
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	126
	REFERÊNCIAS	132
	APÊNDICE A – CARTA DE ANUÊNCIA	141
	APÊNDICE B – TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO	142
	APÊNDICE C – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE ESCLARECIDO	144
	APÊNDICE D – CADERNO DE ACOMPANHAMENTO DO ESTUDANTE ...	146

1 INTRODUÇÃO

No dia a dia escolar é possível encontrar diversas ocasiões promotoras de stress e ansiedade que interferem diretamente no processo de ensino e aprendizagem. A este fato, podemos relacionar o ensino de uma determinada disciplina ou um conteúdo específico que acabam gerando sensações desconfortáveis, principalmente aos alunos. Historicamente falando, infelizmente a matemática é a protagonista que assume esse papel de vilã, conhecida principalmente pela aversão e temor gerado na maioria dos estudantes em qualquer parte do mundo (LINS, 2004; CAZORLA e SANTANA, 2005; VIECILI, 2006; ZONTINI e MOCROSKY, 2016). A carga emocional negativa geralmente é atribuída à referida disciplina, como os alunos mesmo costumam dizer, a matemática “é o bicho-de-sete-cabeças”.

Esta aversão provocada nos alunos geralmente se dá pelo ensino engessado e a manipulação automática de fórmulas, que muitas vezes não apresentam significados a eles. De acordo com D’Ambrósio (2017), isso nos leva a refletir sobre a necessidade de se repensar o ensino de matemática em todos os níveis de ensino, bem como na adoção de práticas metodológicas que contribuam com a melhora no aprendizado de conceitos matemáticos na escola básica.

Para que este quadro possa ser modificado, a matemática possa ser apreciada nas escolas e que os alunos compreendam o seu papel de utilidade na vida cotidiana, D’Ambrósio (2017) apresenta duas sugestões:

- I – Integrar a matemática no mundo moderno, discutindo e analisando problemas maiores da humanidade;
- II – Recuperar o lúdico na matemática. (D’AMBRÓSIO, 2017)

Estas sugestões apresentadas por D’Ambrósio corroboram com alguns dos princípios já apresentados pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, a saber:

— No ensino da Matemática, destacam-se dois aspectos básicos: um consiste em relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figuras); outro consiste em relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos. Nesse processo, a comunicação tem grande importância e deve ser estimulada, levando-se o aluno a “falar” e a “escrever” sobre Matemática, a trabalhar com representações gráficas, desenhos, construções, a aprender como organizar e tratar dados.

— Recursos didáticos como jogos, livros, vídeos, calculadoras, computadores e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão, em última instância, a base da atividade matemática. (BRASIL, 1997, p. 19)

Estes princípios apresentados pelos PCN evidenciam a necessidade de tornar o aluno a ser atuante na construção de seu próprio conhecimento, valorizando e estimulando o ser pensante que é (GOES, 2015; DIESEL, BALDEZ e MARTINS, 2017), como também, na adoção de práticas, métodos e recursos que deverão fazer a mediação dos alunos com o conhecimento na aquisição da aprendizagem. Como destaca Brousseau (1996), sobre o papel do professor na Teoria das Situações Didáticas (TSD), que ao criar situações favoráveis o aluno se aproxima da atividade científica, desempenhando o papel de um pesquisador, formulando e testando suas hipóteses, desenvolvendo modelos, teorias e socializando os resultados entre seus pares.

Os PCN dos anos finais do Ensino Fundamental apontam o papel importante da matemática na “vida de todas as pessoas, nas experiências mais simples como contar, comparar e operar sobre quantidades” (BRASIL, 1998, p. 28), sendo uma importante ferramenta na formação das “capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento e raciocínio dedutivo do aluno, na sua aplicação a problemas, situações da vida cotidiana e atividades do mundo do trabalho”, e também nas diversas aplicações em outras áreas de conhecimento (BRASIL, 1998, p. 28). No entanto, o que vemos nas nossas escolas são currículos engessados, repletos de conteúdos complexos, desinteressantes e que aparentemente sem aplicação para a vida social, gerando poucos significados para os estudantes. Entretanto, apesar de muitos professores já utilizarem boas práticas e metodologias, precisamos avançar.

Estas ideias também são reafirmadas na proposta da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que reitera a importância de se “considerar o papel heurístico das experimentações na aprendizagem da Matemática”, “apesar da Matemática ser, por excelência, uma ciência hipotético-dedutiva, porque suas demonstrações se apoiam

sobre um sistema de axiomas e postulados” (BRASIL, 2018, p. 221).

A BNCC propõe a divisão do currículo do Ensino Fundamental em cinco unidades temáticas, correlacionadas, e que orientam a formulação de habilidades a ser desenvolvidas na Educação Básica (BRASIL, 2018): Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas e, Probabilidade e Estatística.

Neste sentido, as motivações que serviram como ponto de parte para o desenvolvimento desta pesquisa, surgiu de experiências vivenciadas no âmbito da sala de aula de uma escola pública do Estado de Pernambuco, onde me¹ deparei com estudantes de duas turmas do 3º ano do Ensino Médio que apresentaram muitas dificuldades em calcular probabilidades simples e desconheciam conhecimentos básicos sobre Probabilidade e Combinatória, o que causou bastante estranheza, visto que se tratava de conceitos que deveriam ter sido vivenciados pelos mesmo ao longo da Educação Básica, mas que por desconhecidos motivos, os estudantes não as vivenciaram e/ou estudaram corretamente.

Deste modo, o presente estudo está centrado no processo de ensino e de aprendizagem da unidade temática de Probabilidade, focando na compreensão de estudantes do 7º e 8º anos do Ensino Fundamental com relação aos significados e conceitos que envolvem o acaso, a formulação de argumentos coerentes e as diversas formas de representações matemáticas, conceitos e habilidades importantes que ultrapassam as paredes do ambiente escolar para se compreender fenômenos, resolver problemas do cotidiano, nas aplicações em diversas áreas da ciência e nas observações sistemáticas de determinados eventos e situações, em especial os de natureza aleatória.

O desenvolvimento de estudos e pesquisas relacionados ao ensino e aprendizagem de Estatística e Probabilidade nas escolas de Ensino Fundamental e Médio, vem crescendo ao longo dos anos e tem contribuído para um campo denominado Educação Estatística (SILVA, CAZORLA e KATAOKA, 2015). Conforme afirmam Walichinski, Santos Jr. e Ishikawa (2014), a Educação Estatística tem a finalidade de promover uma aprendizagem significativa e a importância da estatística nas dimensões política e ética na Educação Básica, contribuindo para o desenvolvimento de competências estatísticas, probabilísticas e também

¹ Neste momento, me coloco na primeira pessoa do singular, por entender que as motivações que impulsionaram a realização deste trabalho, embora particulares, trazem consigo múltiplas vozes, reunindo em si vozes e questionamentos que também são compartilhadas por outros professores e pesquisadores.

combinatória.

No Brasil, a importância dada a Educação Estatística só veio a acontecer quando o ensino de Estatística e Probabilidade passou a ser obrigatório nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) em 1997. Dessa forma, foi introduzido na educação desde os anos iniciais do Ensino Fundamental até o final do Ensino Médio (BRASIL, 1997; BRASIL, 1998; BRASIL, 2000). Sendo apresentado no Ensino Fundamental no bloco de Tratamento da Informação, e no bloco de Análise de dados e Probabilidade no Ensino Médio.

A unidade temática que aborda a Probabilidade e a Estatística, tanto nos PCN (1998) como na BNCC (BRASIL, 2018), exalta a importância do ensino da Estatística pelas suas diversas aplicações no cotidiano, como auxiliar a tomar decisões adequadas, representar e descrever informações de modo mais simples, como também prever fenômenos. Quanto à Probabilidade de forma semelhante, os dois documentos destacam o fato destes conceitos auxiliarem no raciocínio, a compreender a natureza aleatória e fenômenos não determinísticos, análise de possibilidades e confronto de probabilidades, raciocínio combinatório, análises de risco, entre outros (BRASIL, 1998; BRASIL, 2018).

Embora sejam reconhecidos a importância da estatística e da probabilidade na vida em sociedade e muito se tenha avançado em pesquisas, o ensino e a aprendizagem da probabilidade na educação básica segundo diversas pesquisas (BATANERO, 2005; BORBA *et al.*, 2011; SANTOS, 2010; CAMPOS e CARVALHO, 2016), apontam que ainda existem muitos entraves de aprendizagem, restringindo-se a memorização de fórmulas sem o entendimento das propriedades e conceitos envolvidos, sem apresentar significados para os alunos, principalmente quando tratamos do ensino de probabilidade no Ensino Fundamental.

Esse fato se dá geralmente pelos professores não possuírem conhecimentos conceituais ou pedagógicos adequados a respeito da temática Probabilidade, assim o professor não conseguirá desenvolver um trabalho pleno e satisfatório se o mesmo não conhece bem o conteúdo que deve ser ensinado, suas propriedades e aplicações, bem como o currículo pedagógico, os objetivos e as competências que pretende promover para os seus alunos.

A pesquisa de Pietropaolo *et al.* (2015), investigou os conhecimentos e as concepções de um grupo de professores dos anos finais do Ensino Fundamental com relação ao ensino de Probabilidade, e constatou que a maioria deles não

sabem definir o conceito de probabilidade e nem responder atividades envolvendo dados e moedas, utilizando o conceito de probabilidade clássica ou laplaciano.

O mesmo fato também é descrito na pesquisa de doutorado de Carvalho (2017), que os conhecimentos iniciais dos professores dos anos finais do Ensino Fundamental participantes da pesquisa possuem “um nível muito elementar e insuficiente do conhecimento comum do conteúdo sobre probabilidade” (CARVALHO, 2017, p. 136). Essas pesquisas indicam que professores não dominam os conceitos básicos para o nível de escolaridades que estão habilitados para ensinar.

Nas referidas pesquisas, os autores constataram que os professores não conhecem o currículo do Ensino Fundamental e acreditam que o ensino de Probabilidade é realizado apenas no Ensino Médio, muitos até confundindo diretamente com conceitos de análise combinatória. Além de apresentarem baixo índice de conhecimento a respeito do tema, os professores possuem pouco repertório de estratégias para suas aulas, o que se torna um agravante para o ensino, pois além de não reconhecer a importância da Probabilidade no currículo pedagógico, também não reconhecem a importância do mesmo no contexto social.

Este fato contraria aos objetivos propostos por diversos documentos curriculares nacionais e internacionais e nas expectativas de aprendizagem que deveriam ser geradas nos estudantes da Educação Básica.

Em especial, cabe destacar o letramento probabilístico descrito por Gal (2005, p. 45) como os conhecimentos necessários “para lidar com uma gama de situações do mundo real que envolvem interpretação ou geração de mensagens probabilísticas, bem como a tomada de decisões”². No entanto, é necessário descartar o pensamento simplista da ideia de letramento, pois, assim como Gal (2005), Bryant e Nunes (2012) apontam, que a Probabilidade é um conceito complexo e exigem do indivíduo mobilizar competências cognitivas como compreender fenômenos aleatórios, desenvolver o espaço amostral, comparar e quantificar probabilidades e entender as correlações.

Diante do exposto, é importante que surjam inquietações que suscitem a importância de se desenvolver uma proposta de ensino voltada para estudantes que tenham como finalidade além de promover o ensino, tentar compreender os

² Tradução do Autor.

sucessos e fracassos desses indivíduos em meio ao processo de ensino e aprendizagem, buscando estratégias para reparar as falhas ou diminuir as dificuldades que por ventura venham emergir do referido processo.

Partindo da concepção de que a utilização de recursos didáticos poderia ser uma importante ferramenta para auxiliar nos processos de ensino e aprendizagem, e que um ambiente favorável e acolhedor proposto pelo professor que reúne a participação ativa dos estudantes e a interação entre eles, compõem uma ecologia capaz de auxiliar na compreensão e significação dos conceitos mobilizados, tivemos como objetivo principal deste estudo: *Desenvolver e analisar uma sequência de atividades caracterizada como ecologia de aprendizagem orientada para o ensino e aprendizagem de Probabilidade com estudantes dos 7º e 8º anos finais do Ensino Fundamental.*

Decidimos utilizar a metodologia Design Experiments (COLLINS 1990; BROWN 1992, e; COBB *et al.*, 2003), por entendermos que a mesma apresenta subsídios importantes para compreender como os estudantes desenvolvem seu conhecimento e quais as dificuldades encontradas no processo de ensino que interferem na aprendizagem. Para desenvolver uma proposta de ecologia de aprendizagem que permitisse aos discentes experienciar atividades que auxiliem na sua própria educação levando-os a manipularem, refletirem, conjecturarem e testar suas próprias hipóteses.

Para alcançar nosso objetivo geral, levantamos os seguintes objetivos específicos:

- Desenvolver uma sequência de atividades caracterizada como ecologia de aprendizagem para o ensino de Probabilidade;
- Investigar o conhecimento dos alunos em atividades que envolvam aleatoriedade;
- Investigar o conhecimento dos alunos em atividades para compreensão do espaço amostral e as diversas formas de representação;
- Investigar o conhecimento dos alunos em atividades de quantificação de probabilidades simples e comparação da força de duas probabilidades;
- Avaliar se os recursos utilizados no design auxiliaram na compreensão dos conceitos probabilísticos;
- Avaliar o design desenvolvido como proposta de ensino.

Elencamos as seguintes questões de pesquisa deste estudo que nos auxiliaram na busca de atingir nossos objetivos:

- Como raciocinam e quais as dificuldades que alunos dos 7º e 8º ano dos anos finais do Ensino Fundamental apresentam mediante a probabilidade e as noções de aleatoriedade, espaço amostral e quantificação?
- As atividades e os recursos utilizados possibilitaram o conhecimento probabilístico dos alunos?
- Quais aspectos podem ser observados nos alunos quando se integra ao processo de aprendizagem de probabilidade o uso de recursos didáticos?

Com o intuito de responder a estes questionamentos e alcançar nossos objetivos realizamos um levantamento bibliográfico no cenário atual acerca da temática Probabilidade (Capítulo 2), da teoria Design Experiments (Capítulo 3), posteriormente apresentamos a metodologia de pesquisa e o design implementado divididos em três ciclos iterativos (Capítulo 4), por fim apresentamos as análises e discussões dos dados gerados pela pesquisa (Capítulo 5).

2 PROBABILIDADE: CONCEITOS E UM BREVE CENÁRIO DE ESTUDOS SOBRE O ENSINO E APRENDIZAGEM

Neste capítulo faremos uma breve narração da epistemologia do conceito de Probabilidade abarcando os seus diferentes significados. Também apresentaremos uma breve análise do cenário de estudos sobre os processos de ensino e a aprendizagem de Probabilidade na Educação Básica.

2.1 Conceituação teórica de probabilidade

A Teoria da Probabilidade tem origem inicialmente na compreensão e análise de jogos de sorte-azar, recebendo contribuições de diversos matemáticos como Blaise Pascal (1623–1662), Pierre de Fermat (1601–1655), Jacob Bernoulli (1654–1705), Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), Pierre Simon Laplace (1749 – 1827), Lenis Poisson (1781 – 1840), entre outros. A Probabilidade é um dos ramos da Matemática que trata de modelos para representar experimentos ou fenômenos aleatórios, permitindo construir modelos matemáticos que fornecem estratégias para a tomada de decisões.

Atualmente, reconhecida em diversos trabalhos pela sua natureza multifacetada (SANTOS, 2010; CARVALHO, 2017; RODRIGUES, 2018; LIMA, 2018) a probabilidade possui diversos significados históricos, apresentados por Batanero (2005, p. 256), a saber: intuitivo, clássico, frequentista, subjetivo e axiomático.

A concepção intuitiva: É possível perceber as noções intuitivas de probabilidade até mesmo em pessoas que se quer tenham estudado probabilidade ou frequentado uma escola, sejam eles adultos ou crianças. Estando presente desde as primeiras civilizações, as experiências proporcionadas pelos jogos de sorte-azar permitem aos seus praticantes apresentarem ideias intuitivas e expressões coloquiais para justificar a crença em determinadas situações (BATANERO, 2005).

Para Batanero (2005), todas estas noções oriundas das experiências do jogo como a esperança e a ganância, despertaram ao longo do tempo para uma necessidade de quantificar o grau da crença e das ocorrências, recebendo várias interpretações sobre a natureza objetiva como propriedade de um sucesso, e uma natureza subjetiva como o grau da crença pessoal (HACKING (1975), *apud*

BATANERO, 2005).

Podemos perceber a concepção intuitiva em situações em que, por exemplo, uma pessoa acredita ser impossível retirar, de olhos vendados, uma bola branca de um saco que possui mil bolas, mas com as demais bolas sendo de cores diferentes, e que no entanto, a mesma pessoa decide apostar em um jogo da Mega Sena³ onde as chances são muito menores de obter sucesso, pois motivado pela ganância ou esperança, acredita que pode ter ‘a sorte de ganhar’.

A concepção clássica ou Laplaciana: Na definição apresentada por Laplace, a probabilidade (P) é definida pela razão entre números de casos favoráveis e número total de casos possíveis.

$$P = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de resultados possíveis}}$$

Esta definição é utilizada como base inicial para o ensino de probabilidade nas escolas de Ensino Fundamental do Brasil, sendo posteriormente acrescentados os conceitos de espaço amostral e evento em um experimento (ou fenômeno) aleatório. No entanto com limitações, como por exemplo, para calcular a probabilidade de experimentos em que os resultados não são equiprováveis.

O conjunto finito formado por todos os resultados possíveis é chamado espaço amostral (Ω), e qualquer subconjunto desse espaço amostral é chamado de evento (E) e, a probabilidade desse evento (E) acontecer é a razão entre o número de elementos do subconjunto (E) e o número de elementos do espaço amostral (Ω).

$$P(E) = \frac{\text{número de elementos de } E}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$$

Um problema matemático no qual é possível a aplicação da concepção clássica seria: Uma urna possui 4 bolas azuis, 5 bolas vermelhas e 1 bola preta. Qual a probabilidade de ser retirada uma bola desta urna, ao acaso, e ela ter a cor azul?

Esta probabilidade pode ser obtida utilizando a regra de Laplace, dividindo o número de casos favoráveis (4 bolas azuis), pelo número de bolas presentes na urna (10 bolas).

³ Jogo de loteria ofertado pela Banco Caixa Econômica Federal, onde são sorteados 6 números de um universo de 60 números (1 até 60), e o vencedor ganha prêmios caso acerte 4, 5 ou os 6 números sorteados.

A concepção frequentista: Também identificada como concepção empírica, a concepção frequentista utiliza o conceito de frequência relativa, oriundo da estatística, para estimar a probabilidade de um determinado evento através de experimentos aleatórios. Assim, após a realização do experimento aleatório, por um determinado número de tempo ou de repetições, é obtida a frequência relativa para determinar a ocorrência da probabilidade dos eventos desejados.

No entanto, vale destacar que essa ideia espontânea não deve ser considerada uma verdade absoluta da representação da verdadeira probabilidade, uma vez que o experimento aleatório além de não apresentar com certeza as ocorrências dos eventos, e muitas vezes, requer a realização do experimento aleatório com um grande número de repetições.

Deste modo, uma situação possível de se aplicar a concepção frequentista seria: Qual a probabilidade do jogador Lionel Messi cobrar um pênalti e convertê-lo em gol?

Neste caso, a probabilidade frequentista poderia ser determinada pela frequência de ocorrência entre: o número total de pênaltis convertidos, pelo total de pênaltis cobrados pelo jogador ao longo de sua carreira.

A concepção Subjetiva: Esta concepção é utilizada em situações que o experimento não pode ser repetido ou que não pode ser feito dentro das mesmas condições, como afirma Carvalho (2017). Assim, embora não possam ser utilizados os conceitos clássico ou frequentista de probabilidade para solucionar estes casos, a concepção subjetiva faz parte da Teoria da Probabilidade.

Para Batanero (2005), um novo ponto de vista pode ser dado através teoria bayesiana, que permite identificar as probabilidades de um experimento observando suas consequências, no entanto, ficando sujeita a novas informações e ao julgamento ou subjetividade pessoal, a crença ou as experiências particulares.

A presença desta concepção pode ser percebida muitas vezes, por exemplo, em situações do cotidiano, quando se escolhe um número da sorte ao jogar ou apostar. Assim, a possibilidade de ocorrência de um dado evento depende de um sistema conhecimento particular ou escolha pessoal.

A concepção axiomática ou formal: De acordo com Batanero (2005), ao longo da história diversos autores contribuíram para o desenvolvimento da formalização do conceito de probabilidade, mas foi Andrei N. Kolmogorov (1903-1987) que

apresentou em seus trabalhos, a aplicação da ideia de probabilidade em teoria dos conjuntos.

Essa formalização do conceito de probabilidade, utilizada até os dias atuais, é apresentada principalmente aos estudantes do Ensino Médio. E figura como uma ferramenta fundamental para estudar probabilidades de eventos aleatórios abstratos, ou que possua um espaço aleatório imensurável, em que uma pessoa não consiga determinar todos os elementos com rapidez ou facilidade.

A definição formal, apresentada por diversos autores, dentre eles Hazzan (2013) e Dante (2005), pode ser vista como:

Definição: Considerando um espaço amostral finito e não vazio S, e P(A) como a função da probabilidade de ocorrência de um evento A, a P(A) deverá satisfazer os seguintes axiomas:

I: Se A é subconjunto de S ($A \subset S$), então: $0 \leq P(A) \leq 1$

II: A probabilidade do sucesso certo é dado: $P(S) = 1$

III: Se A e B são eventos mutuamente exclusivos ($A \cap B = \emptyset$), então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Dentre algumas situações possíveis a aplicação da concepção formal, podemos apresentar, por exemplo, em um lançamento de um dado numerado de 1 a 6, a probabilidade de:

a) Sair o número 7 é igual a 0, por ser impossível: $P_{(n=7)} = \frac{0}{6} = 0$.

b) Sair um número menor que 7 é igual a 1, pois é um *sucesso certo*: $P_{(n<7)} = \frac{6}{6} = 1$.

c) Sair um número par ou o número 5 é igual a soma das duas probabilidades:

$$P_{(PAR \cup n=5)} = P_{(PAR)} + P_{(n=5)} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$$

Como destaca Lima (2018), as diferentes concepções apresentadas Batanero (2005) coexistem e a utilização da concepção mais adequada depende de cada situação. No Ensino Fundamental, em especial, são abordadas com mais frequência as concepções intuitiva, frequentista e clássica ou Laplaciana, de acordo com os documentos oficiais (BRASIL, 1998; BRASIL, 2018).

Por esta razão, no presente estudo lançaremos mão destas concepções (intuitiva, frequentista e clássica ou Laplaciana), devido a exploração das ideias intuitivas, a compreensão da ideia de chance, da probabilidade frequentista e probabilidade clássica previstas por estes mesmos documentos.

2.2 As orientações curriculares e o ensino e a aprendizagem de probabilidade

Os documentos oficiais vigentes que regem e normatizam os currículos da Educação Básica, destacam a importância do bloco Tratamento da Informação, que compreende o ensino de Estatística e Probabilidade e que também engloba problemas que envolvem contagem e combinatória, como sendo uma necessidade para atender as demandas sociais, no trato de informações do cotidiano, em especial com dados estatísticos e com fenômenos que envolvem o acaso e na formulação de argumentos coerentes a partir da organização de dados e nas diversas formas de representações matemáticas (BRASIL, 1998; BRASIL, 2018).

Em destaque nesta pesquisa, a Probabilidade faz parte do currículo escolar, e possui um papel importante para o processo de ensino e de aprendizagem. Como já destacado anteriormente, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) destacam a importância da Probabilidade no raciocínio, a compreender a natureza aleatória e fenômenos não determinísticos, análise de possibilidades e confronto de probabilidades, raciocínio combinatório, análises de risco, entre outros (BRASIL, 1998; BRASIL, 2018).

Brasil (1998), os PCN para anos finais do Ensino Fundamental, destacam em suas orientações que:

Com relação à probabilidade, a principal finalidade é a de que o aluno compreenda que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que se podem identificar possíveis resultados desses acontecimentos e até estimar o grau da possibilidade acerca do resultado de um deles. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações em que o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis). (BRASIL, 1998, p. 52).

Com a necessidade de uma atualização e de uma padronização que regulamentasse todos os currículos estaduais do Brasil, a BNCC foi desenvolvida para diminuir essas diferenças curriculares interestaduais, tendo orientações para anos finais do Ensino Fundamental bem semelhantes aos PCN:

No Ensino Fundamental – Anos Finais, o estudo deve ser ampliado e aprofundado, por meio de atividades nas quais os alunos façam experimentos aleatórios e simulações para confrontar os resultados obtidos com a probabilidade teórica – probabilidade frequentista. A progressão dos conhecimentos se faz pelo aprimoramento da capacidade de enumeração dos elementos do espaço amostral, que está associada, também, aos problemas de contagem. (BRASIL, 2018, p. 275)

Ao observarmos as orientações para o ensino de Probabilidade presentes nos parâmetros curriculares de matemática para a educação básica e os Parâmetros na Sala de Aula (PSA) do Estado de Pernambuco com base nos PCN, os mesmos orientam para que o ensino proporcione aos estudantes a compreensão da ideia de aleatoriedade e chance e da construção da ideia de probabilidade em situações para que possam realizar inferências e deduções sobre as atividades propostas e que os estudantes possam comparar suas ideias com os demais colegas (PERNAMBUCO, 2012; PERNAMBUCO, 2013).

Em desenvolvimento e em fase de análise final, o novo currículo de matemática do Estado de Pernambuco com base na BNCC, Pernambuco (2019, p. 58), ainda destaca que “o estudante poderá estabelecer o modelo matemático que permite determinar a probabilidade de ocorrência de um evento”, sugerindo que nas atividades propostas pelo professor, os estudantes possam de modo prático experimentar e realizar simulações. Nesta perspectiva, Pernambuco (2019) ainda destaca que estas situações são ótimas oportunidades para se explorar a ideia de combinações.

Porém, vale destacar que embora haja uma diferença temporal de 7 anos entre os dois currículos, eles se baseiem em parâmetros distintos (PCN e BNCC), diversos trechos do novo currículo de Pernambuco (2019) são recortes fieis dos parâmetros curriculares de Pernambuco (2012) e dos PSA de Pernambuco (2013), o que necessita de uma revisão, uma vez que tais currículos abordam os conceitos de probabilidade a partir do 4º ano do Ensino Fundamental, por outro lado, Pernambuco (2012) não possui em seu 9º ano componente referente ao ensino de Probabilidade e nem de Combinatória, por exemplo.

Felizmente, devido a nova reformulação, agora com base na BNCC, Pernambuco (2019), atual currículo em discussão no estado, esteja mais amplo quanto aos componentes curriculares para cada ano, cujo conteúdo de probabilidade está previsto para ser discutido em todos os anos da Educação Básica, por outro lado, o mesmo também faz recortes fieis da BNCC.

No entanto, Borba *et al.* (2011) destacam que embora o ensino com a Estatística, Probabilidade e Combinatória já estejam previstos para a escola básica pelos PCN, as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) de Matemática para formação de professores não sugerem que tais componentes sejam abordados nos cursos de licenciaturas, fato também destacado por Lopes (1999).

Como destacam Oliveira e Cazorla (2008), Borba *et al.* (2011) e Lopes (1999), a restrição destes conteúdos nos cursos de licenciatura, cujo princípio fundamental é formação de professor, acarreta numa formação muitas vezes incipiente, desenvolvimento da aversão sobre tais conteúdos quanto ao ensino dentro da educação básica, ou um ensino deficiente, devido à falta de compreensão e domínio dos conceitos elementares, em especial aos de Probabilidade como pode-se observar nas pesquisas de Pietropaolo *et al.* (2015) e Carvalho (2017).

Outro fator negativo, pode ser percebido na falta de materiais didáticos fornecidos pelas secretarias de educação (quando estas fornecem) e na composição dos livros didáticos que no geral fazem abordagens fragmentas, sem contextualização e sem estimular a experimentação e/ou o mapeamento de espaços amostrais por combinações (BORBA *et al.*, 2011; OLIVEIRA e CAZORLA, 2008).

Desde modo, destacamos a importância da presença do ensino da Educação Estatística nos cursos de licenciatura. Em especial, destacamos o ensino e a aprendizagem de Probabilidade pautada na experimentação e nos procedimentos práticos, que venham servir de suporte para a contextualização, assimilação e compreensão da ideia de chance e aleatoriedade, da interpretação frequentista e construção da ideia de probabilidade.

Pois conforme apontam diversas pesquisas (SANTOS, 2010; LOPES e MENDONÇA, 2016; SANTANA e BORBA, 2017; LIMA, 2018) e em acordo com os documentos oficiais vigentes que regem o ensino da Educação Básica (PERNAMBUCO, 2019; BRASIL, 1998; BRASIL, 2018), as ações didáticas e as experiência probabilística oportunizadas pela escola em sala de aula desde os anos iniciais da educação Básica até os anos finais no Ensino Médio auxiliarão no exercício pleno da cidadania dos estudantes, como pessoas mais participativas e ativas dentro do contexto social, exercendo sua capacidade crítica, reflexiva e criativa (LOPES e MENDONÇA, 2016).

Em vista disso, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) passa a ser um documento delineador para que Estados e Municípios do Brasil possam desenvolver

os próprios currículos contendo componentes curriculares equivalentes e habilidades de aprendizagem essenciais para desenvolvimento do estudante de modo integral ao longo da Educação Básica. No Quadro 1, reunimos os componentes curriculares e as habilidades delimitados pela BNCC para processo de ensino e de aprendizagem de Probabilidade nos anos finais do Ensino Fundamental (6º ao 9º ano), da unidade temática Probabilidade e Estatística.

Quadro 1 – Componente curricular e Habilidades proposta pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

Proposta da Base Nacional Comum Curricular – BNCC		
Ano	Objetos de Conhecimento	Habilidades
6º	<p>Cálculo de probabilidade como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral equiprovável.</p> <p>Cálculo de probabilidade por meio de muitas repetições de um experimento (frequências de ocorrências e probabilidade frequentista).</p>	<p>Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos</p>
7º	<p>Experimentos aleatórios: espaço amostral e estimativa de probabilidade por meio de frequência de ocorrências.</p>	<p>Planejar e realizar experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculo de probabilidades ou estimativas por meio de frequência de ocorrências.</p>
8º	<p>Princípio multiplicativo da contagem.</p> <p>Soma das probabilidades de todos os elementos de um espaço amostral.</p>	<p>Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.</p>
9º	<p>Análise de probabilidade de eventos aleatórios: eventos dependentes e independentes.</p>	<p>Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.</p>

FONTE: Brasil (2018); Edição do Autor (2019).

De acordo com as informações discutidas nesta seção, os objetos de conhecimento e as habilidades reunidas no Quadro 1, abordados pela BNCC (BRASIL, 2018), podemos verificar que tais abordagens estão em conformidade com as concepções históricas de probabilidade apresentadas por Batanero (2005).

Podemos perceber o enfoque direcionado para a compreensão da aleatoriedade bem como reconhecê-la em situações do cotidiano, a realização de experimentos aleatórios, a estimativa de probabilidade por meio de frequência de ocorrências, mapeamento do espaço amostral, reconhecimento que a soma de todas as probabilidades do espaço amostral é igual a 1, o cálculo da probabilidade em uma razão entre o número de casos favoráveis e o total de casos possíveis em um espaço amostral equiprovável e o uso do princípio multiplicativo de Combinatória para auxiliar no mapeamento do espaço amostral. Vale destacar que, embora a concepção intuitiva e logicista sejam abordadas e discutidas com maior ênfase nos anos iniciais do Ensino Fundamental (1º ao 5º ano).

Com intuito de conhecer um pouco da literatura produzida recentemente sobre o Ensino de Probabilidade, para nos auxiliar na organização e desenvolvimento desse estudo, realizamos um estudo do conhecimento em duas bases de dados sobre pesquisas desenvolvidas e aplicadas com estudantes da Educação Básica. Esses estudos serão apresentados a seguir, nas Seções 2.3 e 2.4.

2.3 Estado do conhecimento em duas bases de dados: BOLEMA e BDTD

Com a finalidade de verificar o estado do conhecimento sobre as pesquisas e os trabalhos que procuraram envolver o ensino de Probabilidade, selecionamos duas bases de dados, uma revista de educação matemática que pudesse apresentar resultados de pesquisas acadêmicas em formato de artigos, e um banco de teses e dissertações que reunisse as principais pesquisas publicadas em âmbito nacional e internacional. Por fim, delimitamos as pesquisas desenvolvidas e publicadas nos últimos 5 (cinco) anos, entre os anos de 2012 a 2017.

Selecionamos o periódico online Boletim de Educação Matemática (BOLEMA) devido a sua importância no panorama nacional na área pesquisa em Educação Matemática, e a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) pertencente ao Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia (IBICT),

por também ser uma base de dados muito relevante e que reúne em seu acervo trabalhos desenvolvidos por pesquisadores de diversas universidades do Brasil, em especial dos programas de pós-graduação.

Para filtrar ainda mais esta pesquisa utilizamos como filtro algumas palavras-chaves, identificando também trabalhos escritos em outras línguas.

A princípio, analisamos apenas pesquisas que tiveram como foco o ensino de Probabilidade voltados para os anos finais do Ensino Fundamental (Ensino Fundamental II), no entanto, devido a pequena quantidade de pesquisas desenvolvidas nestes critérios que pré-definimos, optamos por retratar todos os trabalhos encontrados destes dois periódicos, abrangendo toda a Educação Básica: Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio.

O Boletim de Educação Matemática (BOLEMA) é um dos periódicos mais importantes de publicações de trabalhos na área da Educação matemática, e também é um dos mais antigos, tendo sua primeira edição publicada em 1985. Sempre muito bem avaliada, esta revista recebeu da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) o conceito QUALIS A1, nas áreas de Ensino de Ciências e de Educação.

Para realizar o levantamento dos trabalhos publicados, inicialmente buscamos todos as pesquisas publicadas no período 2012 a 2017, posteriormente utilizamos como filtro as palavras-chave: Probabilidade, Ensino de Probabilidade, Letramento Probabilístico, Educação Estatística, Educação Básica, Ensino Fundamental e Ensino Médio. Assim, pudemos identificar a publicação de 6 volumes anuais com 18 números quadrimestrais ao longo desse período, totalizando 392 trabalhos publicados, sendo deste total 24 resenhas (resumos estendidos).

Identificamos assim, 8 trabalhos que abordaram o ensino de Probabilidade, sendo que destes, apenas 2 trabalhos foram aplicados na Educação Básica. No entanto, apesar do baixo número de trabalhos publicados sobre o tema, destacamos que no ano de 2011, foram publicados dois números de uma edição temática especial sobre Educação Estatística e que provavelmente por conta destas edições novas novos trabalhos sobre o tema não tenham sido publicados.

No Quadro 2 a seguir, podemos observar os trabalhos encontrados no período estabelecido:

Quadro 2 – Trabalhos publicados na Revista BOLEMA, no período de 2012 a 2017

Ano	Autor(es)	Título
2014	COSTA, Bruno José Ferreira da TENÓRIO, Thaís TENÓRIO, André	A Educação Matemática no Contexto da Etnomatemática Indígena Xavante: um jogo de probabilidade condicional.
2017	ORTIZ, Claudia Vásquez ALSINA, Ángel	Lenguaje probabilístico: un camino para el desarrollo de la alfabetización probabilística. Un estudio de caso en el aula de Educación Primaria.

FONTE: O Autor (2019).

O artigo desenvolvido por Costa, Tenório e Tenório (2014), tem por objetivo apresentar uma proposta de abordagem para o conteúdo matemático de Probabilidade Condicional baseada no jogo “Adivinhe o número xavante”. Para esta proposta, os autores recorreram a Etnomatemática, uma tendência para o ensino com enfoque sociocultural desenvolvida por Ubiratan D’Ambrósio (1990). Eles buscaram inserir os jogadores (discentes) a conhecerem um pouco a cultura indígena xavante quanto a elementos da matemática xavante associados a elementos de Probabilidade Condicional no momento do jogo.

O jogo foi elaborado na plataforma Scratch desenvolvida e disponibilizada pelo Massachusetts Institute of Technology (MIT). Com mediação implícita do jogo, o aluno passará a desenvolver a noção espontânea de cálculo de probabilidades condicionais, pois o evento das tentativas de descobrir o número (objetivo do jogo) está relacionado ao cálculo da probabilidade de um evento ocorrer sabendo-se que outro evento já ocorreu. Isso aumenta a probabilidade de acertar a resposta, pois a partir da escolha que o estudante fizer, se a resposta estiver errada, o jogo indicará se a resposta certa é um número maior ou menor que a escolha que o estudante acabou de fazer. Costa, Tenório e Tenório (2014), apresentam este jogo como um recurso positivo a ser utilizados por professores da educação básica ao ensino superior, e também conhecerem mais sobre a cultura indígena brasileira e a Matemática xavante de forma lúdica, atendendo as diretrizes curriculares para o ensino obrigatório da história e da cultura indígenas⁴.

Ortiz e Alsina (2017) tiveram como objetivo principal de seu artigo, analisar e descrever como surgiram os primeiros elementos linguísticos durante o processo de

⁴Lei nº 11.645/2008, Art. 26-A: Nos estabelecimentos de Ensino Fundamental e de Ensino Médio, públicos e privados, torna-se obrigatório o estudo da história e cultura afro-brasileira e indígena.

ensino e aprendizagem de probabilidade em um grupo de 20 estudantes do ensino básico com idade entre 7 a 8 anos de uma escola de educação primária do Chile. Os alunos não receberam instruções prévias sobre o assunto de probabilidade. Para esta finalidade, as autoras analisaram a multiplicidade de termos, expressões orais e escritas, símbolos e representações (tabelas e gráficos) utilizados pelos alunos, como forma de verificar a aprendizagem processual dos alunos e como se espera que eles aprendam a noção de probabilidade e de como adquirem a linguagem probabilística associada.

Diante dos dados obtidos, Ortiz e Alsina (2017) concluíram que a formação da linguagem probabilística e o desenvolvimento do raciocínio probabilístico surgem a partir das experiências do cotidiano. Elas destacam até mesmo que a professora da sala reconhece isto e ao longo da aula questiona os alunos, fazendo com que eles procurem expressar seus graus de crença sobre a possibilidade de ocorrência de certos eventos, favorecendo o uso da linguagem cotidiana. Em meio a pesquisa, as autoras destacam como parte dessa linguagem, como os alunos tentam utilizar argumentos mais convincentes para relacionar e explicar os conceitos de impossível, possível, certeza e incerteza com situações do cotidiano e também nas atividades propostas. Elas destacam também que os alunos conseguem assimilar estes conceitos e os relacionam com situações de sorte e azar e de probabilidade.

A Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), foi desenvolvida a partir do Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia (IBICT) em 2002. Ao todo, a BDTD possui 112 instituições parceiras, que compartilham as Dissertações e as Teses produzidas em seus programas de pós-graduação *Stricto sensu*, realizando trocas constantes de arquivos e informação.

Na pesquisa realizada neste periódico, utilizamos como critérios filtradores da pesquisa as mesmas palavras chaves utilizadas no BOLEMA (Probabilidade, Ensino de Probabilidade, Letramento Probabilístico, Educação Básica, Ensino Fundamental, e, Ensino Médio).

Identificamos 72 trabalhos publicados entre 2012 e 2017, que abordaram o conceito de Probabilidade em sua pesquisa. Posteriormente, além da utilização dos filtros, optamos por selecionar apenas trabalhos que tivessem como o foco da pesquisa a educação básica e aplicações de sequências de ensino que tivessem como objetivo a inserção do conceito de Probabilidade na Educação Básica. Desse

modo, identificamos 10 trabalhos voltados para a Educação Básica: 2 trabalhos voltados para a Educação Infantil, 3 para o Ensino Fundamental e 5 voltados para o Ensino Médio, sendo todos estes trabalhos, pesquisas de Dissertações de Mestrado. No Quadro 3, podemos ver a descrição dos trabalhos encontrados:

Quadro 3 – Teses e Dissertações publicadas Portal de Periódicos BDTD, no período de 2012 a 2017.

Ano	Autor(es)	Título
2013	BIAJOTI, Emerson Donizeti	Experimentos probabilísticos: noções de probabilidade no Ensino Fundamental II.
	CANAVEZE, Leila	O ensino-aprendizagem de probabilidade em uma escola pública de Sorocaba/SP.
	LIMA, Felipe Mascagna Bittencourt	O ensino de probabilidade com o uso do problema do jogo dos discos.
	SILVA, Fabrício Menezes Netto da	Jogos no processo de ensino-aprendizagem em probabilidade.
2014	FERNANDES, Rúbia Juliana Gomes.	Estatística e probabilidade: uma proposta para os anos iniciais do Ensino Fundamental.
2015	SILVA, Valdson Davi Moura	Abordagem das noções de probabilidade nos livros do Ensino Fundamental II.
	RAMOS, Caroline Lameza	O ensino de probabilidade com o uso de mágicas fundamentadas matematicamente.
2016	DIAS, Cristiane de Fatima Budek	Ambiente virtual de aprendizagem para o ensino de probabilidade e estatística nos anos iniciais do Ensino Fundamental.
	STRUMINSKI, Luciane Aparecida De Freitas	Uso de jogos no ensino de matemática: uma proposta didática para o ensino de Probabilidade.
2017	PEREIRA, Mailson Matos	Oficinas de Probabilidade e Estatística: Uma proposta de intervenção no ensino e aprendizagem de Matemática.

FONTE: O Autor (2019).

Biajoti (2013) na sua pesquisa de mestrado teve o objetivo de analisar e relatar os resultados de uma investigação didático-pedagógica que utilizava jogos com dados e moedas para desenvolver a linguagem e introduzir o conceito de Probabilidade nos anos finais do Ensino Fundamental. Como apoio metodológico, o autor fundamentou sua pesquisa na Engenharia Didática francesa, proposta por Michèle Artigue no final da década de 80. A pesquisa foi desenvolvida em uma

escola pública estadual no interior do Estado de São Paulo e contou com a participação de 94 alunos divididos em duplas.

Em suas análises, Biajoti (2013) identificou que uma sequência de ensino bem fundamentada e estrutura com o auxílio de dados e moedas possibilitaram a interação dos alunos entre si e com o professor, na busca de soluções e no levantamento de hipóteses para solucionar os problemas apresentados. O autor também identificou que a maioria dos alunos reconhecem situações aleatórias e combinatórias do cotidiano e nas atividades apresentadas, porém alguns costumam cometer equívocos ao se expressarem por utilizarem expressões do cotidiano como respostas, deixando de utilizar uma linhagem probabilística e matemática. Apesar das dificuldades apresentadas pelos alunos, o autor conclui que a sequência de ensino utilizando jogos lhes possibilitou desenvolverem conceitos de Probabilidade, noções de combinações e aleatoriedade.

Canaveze (2013), em sua dissertação, teve como objetivo descrever e analisar um cenário de ensino-aprendizagem do conceito de Probabilidade levando os alunos a visão de eventos determinísticos e aleatórios de fenômenos, bem como, analisar os diferentes métodos de registros. Como aporte teórico e metodológico para desenvolver sua pesquisa a autora utilizou a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. Realizou sua pesquisa com 3 classes do 2º Ano do Ensino Médio de uma escola pública da rede estadual da cidade de Sorocaba-SP.

A autora dividiu sua pesquisa por etapas, iniciou dando aulas nas três classes, posteriormente analisando as tarefas do livro didático e aplicando-as, também ministrou atividades do Caderno do Aluno, material elaborado e disponibilizado pelo Governo do Estado de São Paulo para as escolas públicas estaduais. Para finalizar, Canaveze (2013) realizou experimentos probabilísticos com dados, moedas, bolas coloridas dentro de uma urna e a sequência de ensino “Os passeios aleatórios da Carlinha” (CAZORLA, KATAOKA e NAGAMINE, 2010).

Como ponto de partida da pesquisa, os alunos deveriam apresentar as soluções de um outro modo, sem recorrer exclusivamente a utilização de fórmulas para responder os problemas. Apoiada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, as variações de linguagem para responder os problemas propostos demonstraram a compreensão e o entendimento do assunto por parte dos alunos. Desse modo, em suas análises, Canaveze (2013) identificou que os alunos para

explicitar suas respostas recorreram ao uso da linguagem natural, representação numéricas (fração), tabelas de dupla entrada, representação de desenhos e árvores de possibilidades, o que demonstrou que a maioria dos alunos compreenderam os conceitos de Probabilidade. A autora finaliza fazendo críticas ao Livro Didático e ao Caderno do Aluno por trazerem em sua maioria apenas atividades de probabilidade clássica e pouquíssimas tarefas que explorassem a percepção aleatória e a obtenção destes espaços amostrais.

Na sua dissertação, Lima (2013) teve como objetivo introduzir os conceitos de probabilidades a três classes de Ensino Médio. Para isso, ele utilizou uma sequência de aulas estruturada na metodologia de modelagem, usando o “Problema do Jogo dos Discos” como experimento. Nesse experimento, os alunos deveriam determinar o diâmetro que um disco deveria ter para que, quando um disco fosse lançado aleatoriamente sobre pisos quadrados, o disco tenha determinada probabilidade de interceptar suas linhas de separação (LIMA, 2013; p. 60).

Para isso, o autor propôs que os alunos realizassem o experimento várias vezes e com vários discos de diâmetros diferentes, calculando uma estimativa que permitissem uma boa chance de vitória (o disco ficar dentro do quadrado), e outra alternativa foi que os alunos utilizassem a modelagem gráfica, onde deveriam e a álgebra para encontrar uma probabilidade equiprovável, como metade das chances de vitória.

De acordo com os resultados obtidos em sua pesquisa, Lima (2013) afirma que a relação dos alunos com o experimento permitiu-lhes compreender e perceber um pouco mais as situações aleatórias do cotidiano, e que mesmo não podendo encontrar situação em que a chance de um evento venha a acontecer seja certa, pode ser possível estimar o resultado ou uma probabilidade. O autor também descreve, que após o experimento, os alunos resolveram as atividades proposta do livro didático com mais facilidade e interação entre eles.

Silva (2013), em sua pesquisa de mestrado, tinha como objetivo incentivar boas práticas pedagógicas que procurassem melhorar a aprendizagem de alunos e questionou se ‘o uso dos jogos traz benefícios à aprendizagem dos alunos sobre probabilidades no Ensino Médio’. Para responder este inquietamento, ele desenvolveu uma sequência didática utilizando o jogo “O último passageiro” (baseado em um programa de mesmo nome, da emissora de televisão, Rede TV), aplicando-a em duas turmas do Ensino Médio (2º e 3º Ano) de uma escola da rede

estadual da cidade de Caconde-SP.

De acordo com os resultados obtidos, Silva (2013) concluiu que, é possível proporcionar uma aprendizagem significativa do conceito de Probabilidade através de jogos, destacando o aspecto lúdico e o caráter motivador dos jogos para estimular os alunos. Em suas análises, o autor destaca o protagonismo imposto pelos alunos no decorrer das atividades, desenvolvendo o papel de um 'verdadeiro matemático', propondo soluções e testando suas hipóteses, bem como a evolução na representação da linguagem oral e escrita dos seus raciocínios.

Fernandes (2014) na sua dissertação de mestrado, analisou os impactos de uma Sequência de Estudo voltada para o ensino da Estatística e Probabilidade em uma turma de 35 estudantes do 4º ano do Ensino Fundamental da rede municipal de Curitiba-PR. Tal sequência de estudos foram divididas em três etapas: na primeira delas foi aplicado um pré-teste com 10 questões, na segunda etapa a pesquisadora ministrou aulas contextualizadas discutindo algumas histórias, a socialização com jogos que os próprios alunos trouxeram para a sala de aula, além de discussões sobre situações problemas, com o objetivo de desenvolver o raciocínio probabilístico e estatístico das crianças com a construção de gráficos estatísticos, na terceira etapa aplicado um pós-teste, com as mesmas questões do pré-teste.

Em suas análises, Fernandes (2014) concluiu a Sequência de Estudo pode contribuir na motivação dos estudantes, como fator essencial para o interesse, disposição e entusiasmo ao participar das atividades e interação com seus pares e com o conteúdo, o que justifica o aumento de 40,7% dos acertos do pré-teste (38,2%) para o pós-teste (78,9%). A pesquisadora também aponta para o uso de termos e o uso de ideias essenciais associados a estatística e a probabilidade, como formas de representações gráficas e tabulares, o cálculo da média aritmética, raciocínio combinatório e a determinação do espaço amostral e o cálculo de uma probabilidade.

Por fim, Fernandes (2014) destaca a importância de dar mais ênfase à elaboração de hipóteses, a coleta de dados, a análise e reflexão desses dados, pois desse modo os alunos poderão analisar, interpretar e inferir com mais precisão sobre gráficos estatísticos. Quanto a Probabilidade, a autora destaca que os alunos demonstraram mais compreensão e familiarização, devido as noções básicas de aleatoriedade e sorte, no entanto, ela afirma ser difícil inferir com precisão que os alunos puderam entender noções de probabilidade, como no raciocínio

combinatório, determinando um espaço equiprovável.

Na sua pesquisa de mestrado, Silva (2015) dedicou-se a analisar 3 (três) coleções de livros didáticos, com o objetivo de identificar como estão sendo abordadas as noções de Probabilidade nos livros didáticos do Ensino Fundamental II (do 6º ao 9º Ano). Para realizar a análise dos livros, o autor se fundamenta nas orientações curriculares propostas pelos PCN e o PNLD (Programa Nacional do Livro Didático), para o ensino do bloco de Tratamento de Informação que aborda o ensino de Estatística e Probabilidade. Assim, ele utilizou alguns critérios para analisar os livros como: A abordagem introdutória do conteúdo, a abordagem dos conceitos de Probabilidade, os exercícios resolvidos, os exercícios propostos e a contextualização histórica e sócio cultural.

De acordo com os dados coletados, Silva (2015) identificou que todas as coleções de livros didáticos analisadas abordam o conteúdo de Probabilidade, porém em alguns casos, os livros deixam lacunas quanto a exposição do assunto e limitações nas atividades e situações-problemas resolvidas. Mais precisamente, em uma das coleções, o autor identificou a ausência de uma abordagem introdutória ao conceito de Probabilidade, a ausência de exercícios resolvidos e também a ausência da contextualização histórica e sócio cultural. Silva (2015) destaca o fato de existirem poucas conexões entre concepção de probabilidade clássica como introdução da probabilidade frequentista, em que apenas uma das três coleções faz o uso destas duas concepções ao longo das atividades.

Com o trabalho de Silva (2015) percebemos qual a importância para o professor de se ter ao lado uma boa ferramenta de suporte a educação, para que não necessite ficar buscando em outras coleções por atividades completares, já que os alunos não têm acesso a outros livros didáticos. O autor também chama a atenção de porquê os livros dos professores não apresentam sugestões de aulas interativas e contextualizadas, e assim, o mesmo finaliza apresentando alguns planos de aulas usando jogos e experimentos para que professores possam se apropriar e aplicar em suas aulas, deixando-as mais atrativas.

Em sua pesquisa de mestrado, Ramos (2015), com o objetivo de desenvolver conceitos básicos de Probabilidade em 3 (três) classes do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede estadual da cidade de Jaú-SP utilizou como metodologia de ensino “Mágicas Matemáticas” para promover um ensino mais prazeroso e significativo. Para isso, a pesquisadora utilizou 6 pequenos truques de

magicas, que são: Mágica do Jogo da “Velha”, Mágica do Sinal de Trânsito, Mágica da Adivinhação do Ás, Mágica do Envelope, Mágica das Três Cartas e Mágica da Posição dos Quatro Ases.

O principal objetivo da pesquisadora com esses truques de mágicos era eliminar o fator aleatório mostrando que o resultado poderia sim ser previsto, independente da aleatoriedade da mágica (um experimento aleatório), no entanto, o objetivo dos estudantes era questionar as mágicas e descobrir o segredo de cada truque mágico, apontando como o resultado estava sendo manipulado, provando que sem a manipulação, os resultados do experimento aleatório de cada mágica não poderiam ser determinados. Além de utilizar os pequenos truques de mágica para promover a participação e a interação, Ramos (2015) fez uso de resolução de problemas, que previamente conduziam os alunos a contextualizarem a mágica que estaria por vir.

De acordo com os dados obtidos ao longo das tarefas e do feedback adquirido no decorrer das atividades mágicas, Ramos (2015) concluiu que as atividades contribuíram para um clima motivacional e participação coletiva, aprimorar o conhecimento matemático dos alunos e proporcionar uma dinâmica diferenciada, os conduzindo a reflexão, a proporem e testarem suas hipóteses bem como a investigarem e contestarem as situações apresentadas pelas mágicas. A autora também afirma que a participação dos alunos serviu para revelar defasagens sobre determinados conceitos matemáticos de alunos pouco participativos em suas aulas regulares, como a representação de proporções em frações, realizar combinações e frações semelhantes, por meio de simplificação.

Este fato indica que o professor preocupado com sua prática, em transmitir determinado conhecimento, possui pouco tempo para analisar de forma minuciosa cada um dos seus alunos ao longo de suas aulas, não conseguindo identificar se cada aluno compreendeu o conceito mobilizado, devido as aulas geralmente rotineiras não promoverem uma real participação dos alunos por não possuírem elementos atrativos e motivadores, bem como, pelo tempo de dedicação em preparação das aulas, gasto pela autora na realização de sua dissertação.

Dias (2016), teve como objetivo desenvolver um Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) para promover o ensino de Probabilidade e Estatística nos anos iniciais do Ensino Fundamental tomando como base as diretrizes dos documentos curriculares oficiais e das práticas docentes. Para alcançar este

objetivo, a autora analisou os documentos oficiais para elencar as diretrizes propostas para o bloco de Tratamento de Informação voltado para anos iniciais do Ensino Fundamental. Com base nestas análises, ela entrevistou 37 professores atuantes em 7 escolas da rede municipal de Ponta Grossa-PR, para averiguar as práticas docentes destes professores com relação ao ensino de Probabilidade e Estatística.

Analisando as entrevistas, Dias (2016) identificou que muitos professores não sabem se quer definir, com suas palavras, o que é a Estatística e a Probabilidade, tão pouco caracterizar a importância destes conhecimentos para a vida em sociedade. Alguns professores chegam até a relacionar a Estatística e a Probabilidade erroneamente com outros campos de conhecimento, a este fato a autora atribui a formação incipiente destes professores ou as suas áreas serem de outras licenciaturas sem conexões claras com a matemática.

Diante desses dados, Dias (2016) em conjunto com 17 destes professores, desenvolveram um AVA procurando abordar os conceitos básicos e que os professores consideravam importantes para o Tratamento de Informação. A pesquisadora descreve que apesar dos professores demonstrarem interesse em participar e da necessidade de participarem de uma formação continuada, estes demonstraram receio ao interagirem com a tecnologia. Em suas considerações, Dias (2016) destaca que as discussões e reflexões geradas na construção do AVA são bastante significativas não apenas para a construção do ambiente, mas também para a formação dos professores. A autora ainda destaca que o AVA construído é uma importante ferramenta para o ensino dos alunos dos anos iniciais e também na formação continuada de professores.

Struminski (2016) teve como objetivo apresentar uma proposta didática que concilia as atividades proposta pelo material de apoio do professor elaborado pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo à utilização de jogos, como forma de contribuir para melhorar o processo de ensino e aprendizagem de Probabilidade. Essa pesquisa foi realizada com 20 estudantes do 2º ano do Ensino Médio de uma escola estadual da cidade Itararé-SP.

Como forma de conciliar a análise e a validade de sua proposta, Struminski (2016) analisou os resultados da avaliação bimestral dos estudantes, concluindo que a partir dos dados obtidos é possível inferir se os alunos se familiarizaram com os conceitos, devido ao grande número de acertos. A autora atribui estes resultados ao

ambiente favorável a aprendizagem proporcionada através dos jogos, pois além de quebrarem a rotina de uma aula tradicional, o caráter motivante e interativo proporcionaram aos estudantes se relacionarem entre os alunos, o professor e o objeto em aprendizagem, a Probabilidade.

Pereira (2017), em sua dissertação apresenta os resultados de uma abordagem diferenciada dos conceitos de Probabilidade e Estatística através atividades e oficinas desenvolvidas pelo Projeto Atividades em Estatística (AtivEstat⁵) desenvolvida pela Universidade de São Paulo (USP), que foram adaptadas e aplicadas com uma turma de 22 alunos do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual da cidade de Pombal-PB. Na aplicação de sua pesquisa o autor propôs 5 oficinas (3 oficinas de Estatística e 2 de Probabilidade), cada uma composta por uma sequência de atividades, a serem realizadas e respondidas pelos estudantes.

Nas oficinas propostas o autor apresenta aos alunos situações no qual possa aprimorar seus conceitos sobre Estatística e Probabilidade desde a criação de gráficos e tabelas à análise estatística, utilizando a inferência estatística para argumentar sobre fatos polêmicos para a sociedade atual, como maioria penal, legalização do aborto, o uso dos celulares na escola, etc.

Em suas análises, Pereira (2017) afirma que uma proposta que visa a utilização de ferramentas tecnológicas e o lúdico são essenciais para promoverem um ensino interdisciplinar e promover uma aprendizagem de qualidade. Diante dos resultados obtidos, o autor concluiu que as oficinas e as atividades proporcionaram aos alunos uma melhor reflexão e aproximação dos conteúdos, bem como, compreender na prática como estes conteúdos fazem parte da vida e sua importância para a sociedade em que vivem.

Como proposta para estudos futuros, o autor propõe que esta sequência possa ser readaptada e aplicada por professores em turmas do Ensino Fundamental e Médio e também, trabalhada envolvendo assuntos de outras disciplinas.

A luz dos trabalhos encontrados, tanto no BOLEMA como na BDTD, percebemos a importância da utilização de recursos didáticos, bem como a variação de diversas ferramentas metodologias no buscar do desenvolvimento do ensino

⁵ Disponível em: <https://www.ime.usp.br/ativestat>.

dentro do ambiente escolar em prol da aprendizagem dos estudantes. O que corrobora com nossa proposta de pesquisa. Sendo possível perceber também que um grande desafio a ser alcançado é justamente criar um ambiente favorável a aprendizagem, sendo motivador e instigante, capaz de promover um bem-estar e estimular os estudantes a participarem das atividades e socializarem com seus colegas.

Percebemos também a necessidade de expandir nosso leque de busca, e recorrer a outras pesquisas como fonte de apoio teórico e metodológico, que não estão indexadas as bases de dados que utilizamos, ou que foram publicadas em anos anteriores ao estipulado para esta pesquisa.

Tal levantamento bibliográfico foi realizado no período entre 2017 e 2018, período que antecedeu a execução e análise dos resultados com a aplicação do Design Experiments.

2.4 Resultados de pesquisas sobre o ensino e aprendizagem de probabilidade

Para finalizar, apresentaremos resultados de pesquisas que consideramos importante para o desenvolvimento deste trabalho e que não foram encontradas nas bases de dados escolhidas para o levantamento deste estado do conhecimento. Estes trabalhos podem ser encontrados em outras bases de dados como o Portal de Periódicos e o Banco de Teses e Dissertações da CAPES, o repositório do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da UFPE (EDUMATEC) e outras bases de dados internacionais.

Mapeamos estudos e investigações relevantes para a temática que pretendíamos investigar. Buscamos trabalhos que envolvesse a utilização de recursos didáticos e sequências didáticas como metodologias para o ensino de Probabilidade, devido a proposta da criação de um ambiente que permita aos discentes a manipulação e verificação experimental quanto a probabilidade de situações aleatórias.

Cazorla, Kataoka e Nagamine (2010), propõem em seu trabalho o desenvolvimento de um ambiente virtual de aprendizagem utilizando a sequência de ensino “Os passeios aleatórios da Carlinha”. A proposta desenvolvida pelas autoras é uma adaptação do trabalho inicialmente apresentado por Fernandez e Fernandez

(1999, *apud* KATAOKA, 2010) utilizando a turma da Mônica⁶. Esta sequência reúne um conjunto de atividades que permitem aos alunos compreender os conceitos de aleatoriedade, desenvolvimento do espaço amostral e quantificação de probabilidades, utilizando os conceitos clássicos e frequentistas de probabilidade, também foi utilizada para associar elementos de Estatística como a composição de tabela e distribuição de frequência relativa a representação gráfica das frequências (gráfico de probabilidades).

Devido sua importância, esta sequência vem sendo replicada e readaptada a outros ambientes, computacional utilizando softwares, como o Estatistic R, e em ambientes com papel e lápis (FERREIRA, 2011; CAZORLA, GUSMÃO, KATAOKA, 2011; KATAOKA, 2010).

Dentre os referidos trabalhos, destacamos o de Ferreira (2011), que em sua dissertação de mestrado investigou os conceitos probabilísticos de alunos do 3º ano do ensino médio na cidade de Ibiúna, estado de São Paulo, utilizando os “Passeios Aleatórios da Carlinha” nos ambientes de papel e lápis e computacional, com o uso software R. Para alcançar seus objetivos Ferreira desenvolveu sua proposta com base na Design Experiments de Cobb *et al.* (2003).

Em seus resultados, Ferreira (2011) concluiu que os dois ambientes favoreceram para a compreensão do conceito de aleatoriedades e da probabilidade frequentista, porém o autor destaca que o ambiente computacional amplia a compreensão, pois o software possibilita realizar milhares de lançamentos em pouquíssimo tempo, demonstrando que a quantidade de jogadas feitas importa, e desse modo as probabilidades frequentistas se aproximam da probabilidade real. Por fim, o autor destaca o caráter motivador que as atividades geraram, despertando uma maior autonomia dos alunos na construção do seu próprio conhecimento e estas contribuindo com o desenvolvimento do letramento probabilístico dos alunos.

Bryant e Nunes (2012), em seu relatório intitulado “*Children’s understanding of probability*”, apresentaram uma revisão de literatura acerca de trabalhos referentes ao pensamento probabilístico de crianças. Os autores discorrem que grande parte dos trabalhos analisados apesar de apresentarem boas ideias e tarefas engenhosas, acabam se limitando seja devido ao tempo de aplicação ou a apenas a

⁶A analogia da turma da Mônica para a turma da Carlinha é: Mônica – Carlinha; Horácio – Luiz; Cebolinha – Felipe; Magali – Fernanda; Cascão – Alex e Bidu – Paula.

investigação de um dos conceitos da Probabilidade sem realizar as devidas articulações entre estes com os demais conceitos. Outra escassez também identificada é a falta de trabalhos referentes a identificação de fatores que interferem no aprendizado de Probabilidade.

Pensando na complexidade deste conceito, Bryant e Nunes (2012) apontam para a necessidade de compreender a probabilidade em quatro diferentes aspectos, que são as “demandas cognitivas”:

1. Compreender a natureza e as consequências da aleatoriedade;
2. Formar e categorizar o espaço amostral, essencial para o cálculo de probabilidade e para compreender à natureza da probabilidade e a sua quantificação;
3. Comparar e quantificar probabilidades;
4. Entender correlações entre eventos, o que significa dizer que este entendimento compreende as três competências anteriores.

Ainda cabe destacar que, Bryant e Nunes em colaboração com outros pesquisadores, desenvolveram um manual do professor para o ensino de probabilidade na Educação Básica, o “*Teaching primary school children about probability*” (NUNES *et al.*, 2012). Este manual apresenta uma longa discussão de uma variedade de atividades e jogos aplicados com estudantes de algumas escolas de Oxford na Inglaterra, que envolveram os conceitos de aleatoriedade, espaço amostral e a comparação de quantificação de probabilidades.

Nestas discussões, Nunes *et al.* (2012) destacam o importante papel do professor na sala de aula tanto mediador como motivador, pois ele é o responsável por analisar, explicar, orientar e identificar quando o processo de ensino precisa ser reajustado ou quando os alunos precisam ser reorientados. Os autores também enfatizam que crianças de até 9 anos estão naturalmente propícias e interessadas em pensar e discutir a probabilidade e que são capazes de aprender sobre esse tema. Com base nesta descoberta os autores destacam que o professor deve oportunizar e incentivar estes alunos a explicarem e exporem suas ideias, principalmente se tratando da socialização destas ideias entre seus colegas.

Tonouti (2013) em sua pesquisa, investigou as contribuições de um programa de ensino e de aprendizagem dos conceitos de probabilidade e o desenvolvimento do letramento probabilístico em estudantes do 4º ano do Ensino Fundamental. Para

isso, a autora utilizou um programa de ensino proposto por Nunes et al. (2012). Buscando investigar por meio da resolução de problemas o desenvolvimento dos conceitos aleatoriedade, espaço amostral, quantificação de probabilidade e correlação, cuja pesquisa se dividiu em três intervenções, um ciclo para cada conceito.

Em seus resultados, Tonouti (2013) destaca a participação e colaboração na troca de conhecimento entre os estudantes, principalmente nas tentativas e evoluções quando se aproximam do vocabulário probabilístico durante as discussões e comentários, no entanto, a autora destaca a dificuldade ao se expressarem conforme o nível das atividades aumentaram, assim como as dificuldades apresentadas pelos estudantes ao representar os espaços amostrais que possuíam muitas combinações.

Tonouti (2013) expõe que ao final das intervenções, os estudantes apresentaram uma evolução significativa da compreensão dos conceitos de aleatoriedade, as formas de representação do espaço amostral, resultados significativos, criar estratégias que os possibilitaram mapear todas as combinações, utilizando termos corretos do vocabulário probabilístico e argumentos coerentes, bem como conseguiram também quantificar as probabilidades e correlacionar corretamente a ideia de chance quando diante das possibilidades do espaço amostral. Por fim a autora conclui que o programa de ensino é uma importante ferramenta para propiciar o desenvolvimento dos conceitos probabilísticos.

Santos (2015) buscou compreender as manifestações do trabalho pedagógico com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, dentro de uma perspectiva histórico-cultural e da problematização de tarefas, almejando desenvolver e articular o pensamento probabilístico e o raciocínio combinatório.

Em suas análises, a pesquisadora constatou que os estudantes apresentaram concepções sobre a probabilidade e combinatória, bem como utilizaram corretamente o vocabulário probabilístico para estimar probabilidade através de expressões e porcentagens. A autora também aponta que alguns alunos apresentam concepções acerca dos conceitos frequentista e subjetivista, provavelmente oriundos de suas experiências cotidianas e que algumas destas concepções influenciam na resolução de problemas escolares, na maioria das vezes com pensamento equivocado. Ressalta que a dinâmica de ensino e socialização das ideias permitiram reflexões e (re)significações de conceitos combinatórios e

probabilísticos.

Santos (2015) também descreve a importância dos registros realizados pelos alunos para desenvolver o espaço amostral, articulando o pensamento probabilístico e o raciocínio combinatório, e que a articulação entre a linguagem, as tarefas e o ambiente de aprendizagem são elementos essenciais para promover a aprendizagem e compressão da probabilidade.

Em sua pesquisa, Carvalho (2017, p. 19), procurou “investigar como um programa formativo favorece a construção dos conhecimentos didáticos-matemáticos sobre probabilidade com professores de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental”. Para alcançar tal objetivo, o autor utilizou a teoria do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS) desenvolvida por Juan Godino⁷, conciliando as teorias do Conhecimento Didático-Matemático do professor de matemática, a teoria da Idoneidade Didática e a Engenharia Didática, a fim de desenvolver um estudo completo para analisar e compreender todas as etapas de sua pesquisa.

Durante o processo formativo realizado com 40 professores, Carvalho adaptou sequências de atividades propostas no programa de ensino de Bryant e Nunes (2012) sobre Probabilidade e Risco. Carvalho constatou nesta pesquisa que grande parte dos professores pesquisados não possuem as habilidades e muito destes professores se quer compreendem o conceito de Probabilidade para o nível escolar que estão habilitados para lecionar.

Constatou ainda, que o programa formativo desenvolvido contribuiu para desenvolver os conhecimentos didáticos-matemáticos destes professores e a construção de significados quanto a probabilidade e as noções de aleatoriedade, espaço amostral e a quantificação e comparação de probabilidades. Dentro da perspectiva da teoria EOS, o programa formativo dos professores apresentou alto desenvolvimento das idoneidades epistêmica, cognitiva e interacional.

Em sua pesquisa, Lima (2018) procurou investigar as relações estabelecidas entre os conhecimentos da Combinatória e da Probabilidade e analisar contribuições na exploração de problemas que mobilizam estes conteúdos na Educação de Jovens e Adultos (EJA). O estudo de Lima (2018) envolveu a participação de 24 adultos, estudantes dos Módulos II, IV e EJA Médio 3, pertencentes as modalidades

⁷ Mais informações sobre a Teoria do Enfoque Ontossemiótico, ver Godino, Batanero e Font (2008).

da Educação de Jovens e Adultos.

Para isso, a autora utilizou como suporte os aspectos dos significados, as propriedades invariantes e as representações simbólicas da Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Gerard Vergnaud⁸. Levando em consideração nesta pesquisa, os quatro aspectos das demandas cognitivas apresentados por Bryant e Nunes (2012), acima citados.

Lima (2018) constatou que as principais dificuldades apresentadas por estes estudantes se encontram na compreensão dos conceitos invariantes que envolveu o pensamento combinatório, quanto ao esgotamento de todas as possibilidades. Outra dificuldade também constatada, se deu na comparação de probabilidades diferentes, devido os estudantes não levarem em consideração a proporcionalidade das razões de probabilidade.

Por fim a autora destaca as contribuições da resolução de problemas que englobam a articulação entre a Combinatória e a Probabilidade e o desenvolvimento do raciocínio e compreensão dos estudantes, em especial da EJA, quanto a necessidade de promover discursões entre os estudantes e nas reavaliações das suas representações simbólicas dos espaços amostrais.

Diante dos dados encontrados, percebemos a necessidade se avançar em pesquisa com foco na qualidade do processo de ensino e aprendizagem, afim de proporcionar significados aos estudantes com relação ao conceito de probabilidade nas escolas de Educação Básica, tanto pela baixa quantidade de trabalhos e pesquisas voltadas para a área, como pela necessidade de novas pesquisas que proponham e desenvolvam novas propostas e recursos para o ensino.

Percebemos também, de acordo com os trabalhos encontrados, que um processo de ensino organizado com recursos didáticos, sejam estes jogos, materiais manipuláveis, softwares e sequências de ensino bem estruturadas, apoiadas por uma metodologia de ensino adequada, são capazes de motivar e promover um ensino de qualidade capaz de gerar significados para estudantes de diferentes níveis de ensino, principalmente tratando-se do ensino realizado nas escolas públicas do nosso país.

Este fato corrobora com o objetivo da nossa proposta de pesquisa, pois

⁸ Mais informações sobre a Teoria dos Campos Conceituais (TCC), ver Maia (2000) e Borba e Nunes (2004).

acreditamos que proporcionar a estes estudantes um ambiente motivador, utilizando recursos didáticos, contribuem para tornar o estudante, o principal agente na construção de seu próprio conhecimento, baseado nas experiências e ações que o mesmo desempenha sobre o objeto matemático.

Deste modo, temos como pretensão uma maior variedade dos recursos didáticos apresentados aos estudantes, para que os mesmos possam variar suas possibilidades de interpretação das situações apresentadas em ambiente virtual, papel e lápis, manipulação e verificação em materiais concreto, valorizando seus momentos de fala, suas reflexões e implicações sobre os conteúdos em destaque, para que possamos identificar e analisar em meio a este processo, as dificuldades que interferem na aprendizagem sobre probabilidade e investigar o conhecimento empregado pelos estudantes, para compreender e apresentar uma melhor forma de ensino.

3 APORTE TEÓRICO

Neste capítulo apresentaremos os aportes teóricos que darão suporte ao desenvolvimento do presente estudo, dentre eles a metodologia de pesquisa Design Experiments (BROWN, 1992) e as discutiremos as demandas cognitivas necessárias à compreensão da Probabilidade (BRYANT e NUNES, 2012).

3.1 Design Experiments (DE)

A metodologia Design Experiments (DE), que em português quer dizer experiências de design ou experiências de projeto, tem como precursores, Collins (1990), Brown (1992), Cobb *et al.* (2003) e Collins, Joseph e Bielaczyc (2004). Trata-se de uma metodologia de ensino que envolve modelos de “engenharias de ensino” em que a aprendizagem acontece de modo sistemático dentro de um contexto definido.

Segundo Cobb *et al.* (2003) este contexto projetado está sujeito a testes e revisões e as iterações sucessivas com teorias que desempenham papel semelhante ao da variação sistemática no experimento. Desse modo, o Design Experiments representa um tipo de metodologia que possui o objetivo de analisar processos de aprendizagem de domínios específicos e os significados construídos pelos envolvidos nesses processos (COLLINS, 1990; COBB *et al.*, 2003).

Assim, compreendemos que a pesquisa baseada em Design Experiments pode ser desenvolvida para abordar várias questões teóricas em um processo simultâneo sobre a natureza da aprendizagem de um objeto em contexto. Cobb *et al.* (2003) e Karrer (2006) destacam que esta metodologia não se resume simplesmente a um conjunto de atividades voltadas para a aprendizagem de um conteúdo específico, mas sim uma Ecologia de Aprendizagem, ou seja, um sistema complexo e iterativo que permite ao discente/pesquisador testar hipóteses e conjecturar teorias através das experiências obtidas pelo processo simultâneo do projeto (design), analisando com mais profundidade e com riqueza de detalhes.

Cobb *et al.* (2003) destaca que uma pesquisa baseada em design pode ser dividida em algumas modalidades, de acordo com a finalidade da pesquisa e os sujeitos que farão parte do processo de aprendizagem. Dentre estas modalidades,

os autores destacam:

- Desenvolvimento e aplicação de um design em pequena escala, a qual seja possível a realização de análises com mais profundidade e com riqueza de detalhes;
- Experimentos em sala de aula, em que a equipe de pesquisadores instrui e orienta o professor, que também pode ser um membro da equipe de pesquisa;
- Estudos voltados para analisar a aprendizagem e as potencialidades de professores em formação;
- Estudos voltados para formação continuada, no qual os pesquisadores colaboram com professores atuantes na sala de aula para melhorar o desenvolvimento da comunidade profissional;
- Desenvolvimentos de modelos de reestruturação da unidade escolar, no qual equipe de pesquisa colabora com os professores, gestores e demais membros dessa comunidade escolar, incentivando e apoiando na mudança organizacional.

De acordo com Cobb *et al.* (2003), todas essas modalidades de um Design Experiments possuem cinco pontos convergentes:

- O objetivo de uma metodologia baseada em design é desenvolver de uma classe de teorias para dar suporte a aprendizagem. Tratando-se de um Design Experiments em pequena escala, o objetivo será desenvolver um modelo psicológico no qual os alunos possam desenvolver uma compreensão de um conceito matemático particular diante das tarefas e da prática de ensino colocadas pelo professor;
- A natureza intervencionista da metodologia. Diante da ideia de que um estudo baseado em design tem como proposta a inovação. Um dos objetivos desta metodologia é investigar as possibilidades de melhoria educacional, propondo novas formas de aprendizagem;
- Os aspectos prospectivo e reflexivo. O prospectivo, se refere ao surgimento e implementação de uma hipótese, e o reflexivo, refere-se as análises das conjecturas e hipóteses elaboradas durante o desenvolvimento do experimento em diferentes níveis;

- O caráter cíclico, oriundos dos aspectos prospectivo e reflexivo. Trata-se de uma construção iterativa, que está sujeita a mudanças (redesign) decorrentes das informações, interações, adaptações e feedbacks, ocorridas no processo de ensino e de aprendizagem entre os sujeitos.
- O caráter pragmático, próprio desse tipo de metodologia, com objetivos bem detalhados e precisos, com sistema de análise previamente organizado e adequado para identificar e analisar os problemas e dificuldades encontradas durante o processo.

Diante do exposto, os autores destacam que o principal objetivo de uma pesquisa baseada em design está centrado nas interações que contribuam para a compreensão dos fatores de aprendizagem envolvidos, não centralizando as análises somente nos sucessos ou fracassos decorrentes em meio aos ciclos contínuos do design.

Conforme apontam os autores Brown (1992) e Cobb *et al.* (2003), os ciclos de um Design Experiments são cíclicos e iterativos, isso quer dizer que um ciclo não pode se prender ao desenvolvimento de um único conceito, ou seja, que no desenvolvimento de uma pesquisa de uma pesquisa baseada em Design, os ciclos podem e devem interagir entre os outros ciclos promovendo a mobilização de diversos conceitos e teorias permitindo uma reestruturação e/ou readaptação diante das novas possibilidades que se fizerem necessárias.

Desse modo, diante do interesse de investigar essas interações entre os estudantes e o objeto matemático pesquisado, nos propusemos a desenvolver um Ecologia de Aprendizagem em pequena escala, com foco no desenvolvimento e análise de três ciclos iterativos estruturados com atividades com base nas demandas cognitivas a seguir.

3.2 Demandas cognitivas

Bryant e Nunes (2012) descrevem em seus estudos que a aprendizagem sobre probabilidade exige o desenvolvimento de quatro aspectos cognitivos diferentes, os quais, os autores tratam como “demandas cognitivas”, são elas: compreender a natureza da aleatoriedade; formar e categorizar o espaço amostral; comparar e quantificar probabilidades, e; entender correlações entre eventos.

No entanto, Bryant e Nunes (2012) ainda colocam que, embora se trate de quatro aspectos diferentes, essas demandas estão inter-relacionadas, porém, as três primeiras demandas são essenciais para que se deva analisar e encontrar a solução de qualquer problema de probabilidade e a quarta demanda as vezes é necessária para correlações das correlações entre os eventos envolvidos (SILVA, 2016).

Podemos entender a *aleatoriedade*, como sendo a impossibilidade de uma previsão das chances de ocorrência de um dado evento, ou seja, a imprevisibilidade ou indeterminação da ocorrência deste evento, o que gera as noções de acaso e incerteza. Neste sentido, Bryant e Nunes (2012) destacam a importância do estudo e da compreensão da aleatoriedade, que é bem frequente no cotidiano das pessoas como, por exemplo, nos jogos de cartas, dominó, bingo, sorteios e jogos de loteria, onde o fator aleatório e imprevisível é importante para garantir a igualdade de chances para todos.

O *espaço amostral* pode ser entendido como o conjunto formado por todas as possibilidades e combinações possíveis em uma dada situação. Deste modo, a formação e categorização do espaço amostral está intimamente relacionada com o raciocínio combinatório, cujo desenvolvimento e quantificação de possibilidades do espaço amostral é essencial para o cálculo de probabilidade e para compreender à natureza aleatória (BRYANT e NUNES, 2012; LIMA, 2018).

Para a formação da demanda cognitiva que consiste na *quantificação e comparação de probabilidades*, Bryant e Nunes (2012) apontam que o cálculo da probabilidade exige a compreensão de seu caráter proporcional e que é necessário compreender que a probabilidade é uma quantidade intensiva que não depende de massa da amostra para ser medida. Assim, para comparar a força entre duas ou mais probabilidades é necessário calcular a probabilidade e encontrar razão numérica.

Deste modo, para o cálculo de probabilidade envolvendo conceitos simples, as três primeiras demandas são necessárias e fundamentais.

No entanto, a quarta demanda é essencial, quando em determinadas situações é necessário *entender as correlações* existentes na formação e identificação de eventos dependentes e independentes. Pois como destacam Bryant e Nunes (2012), as correlações existem em muitas situações podem apenas ocorrer aleatoriamente ou ser o resultado de uma verdadeira relação.

Assim, tendo em vista que tais demandas cognitivas são essenciais para o compreensão e desenvolvimento dos conhecimentos de Probabilidade, a presente pesquisa buscou compreender como os alunos do 7º e 8º ano do Ensino Fundamental desenvolvem o conhecimento probabilístico mediante as situações propostas, que envolveram os conceitos de aleatoriedade, espaço amostral e a quantificação e comparação da força de duas probabilidades.

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo será apresentada a metodologia utilizada no desenvolvimento desta pesquisa. Exibiremos a natureza desta pesquisa, os sujeitos envolvidos e o campo de pesquisa, as técnicas utilizadas e descreveremos as etapas na qual a pesquisa foi realizada, bem como a forma e os instrumentos utilizados na coleta dos dados e como foram analisados.

Esta pesquisa teve como objetivo desenvolver, aplicar e analisar uma sequência de atividades caracterizada como ecologia de aprendizagem através de recursos didáticos voltada para o ensino de probabilidade no 7º e 8º anos do Ensino Fundamental baseado na teoria Design Experiments. Com base na visão de uma pesquisa qualitativa, a pesquisa buscará analisar os processos de aprendizagem de domínios específicos de Probabilidade em atividades a serem desenvolvidas por estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental.

D'Ambrósio (1996) conceitua a pesquisa como um elo entre a teoria e prática, e que a pesquisa qualitativa está centralizada no indivíduo, com toda sua complexidade. Assim, D'Ambrósio (1996; 2004) e Borba (2004) destacam que estas interações entre pesquisador e pesquisado, influencia também na qualidade da pesquisa em educação matemática. Vale destacar na pesquisa o caráter experimental no processo de ensino, como fator contribuinte para melhoria da qualidade no ensino e no rendimento escolar, promovendo o desenvolvimento de estudantes críticos, contestadores e investigadores.

4.1 Participantes

O estudo foi realizado com estudantes da Escola Estadual Anete Vale de Oliveira, situada na Rua Elvira Vale De Oliveira, n. 185, Centro, no município de Pedra-PE. O município localiza-se no Agreste Pernambucano, microrregião do Vale do Ipanema, está a uma distância de 232 km da capital do estado, Recife. De acordo com o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE, 2014), a população residente estimada em 2018 era de 22.566 habitantes, cujo espaço territorial é de 803 km².

A Escola Estadual Anete Vale de Oliveira possui 541 estudantes

matriculados no Ensino Fundamental II e EJA (Educação de Jovens e Adultos), neste ano letivo de 2019, conta com um quadro de 33 educadores.

Tratando-se em desempenho educacional, a escola apresenta a média de Proficiência 243.07 em matemática na Prova Brasil, verificado pelo Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB). A escola se encontra no Nível 2, cuja escala vai até o nível 9, a média de proficiência nacional do Brasil é 258.36 (Nível 3), tendo como escala média de referência 400 pontos (INEP/MEC, 2017). No âmbito estadual, por meio do Sistema de Avaliação da Educação Básica de Pernambuco (SAEPE), a escola possui 249,3 de média de proficiência e desempenho, se encontrando no nível Básico, sendo que os níveis são Elementar I, Elementar II, Básico e Desejável, e a escala média de referência é 280 (SAEPE, 2018).

Os estudantes que fizeram parte da pesquisa, são 10 alunos, estudantes do 7º e do 8º ano do Ensino Fundamental, com idades entre 12 e 14 anos. O grupo foi composto por 4 estudantes do 7º ano e 6 estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental na Escola Anete Vale de Oliveira. Sendo este grupo formado por 3 meninas e 7 meninos, dentre eles, apenas um estudante da zona rural, os demais da zona urbana.

A participação destes estudantes se deu de forma voluntária e mediante assinatura de Termo de Assentimento Livre e Esclarecido - TALE (Apêndice B), em carta convite aos alunos e da assinatura de Termo de Consentimento Livre Esclarecido - TCLE (Apêndice C), pelos pais ou responsáveis legais, em atendimento aos aspectos éticos conforme a Resolução 466/12 do Conselho Nacional de Saúde – CNS.

As séries escolhidas foram os 7º e 8º anos do Ensino Fundamental, que por se tratar do nível intermediário dos anos finais do Ensino Fundamental, existem um baixo quantitativo de pesquisas voltadas para estes anos, já que o foco dos pesquisadores geralmente centraliza-se no 9º ano, por ser o último do Ensino Fundamental e ter estudantes considerados mais maduros.

Os alunos envolvidos nesta pesquisa participam de aulas de reforço de forma voluntária, que são abertas aos alunos de 7º, 8º e 9º anos do Ensino Fundamental, e tem como objetivo ajudar no desenvolvimento dos alunos que tem dificuldades nas aulas de matemática e em provas como as Olimpíadas Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e vestibulares para ingresso no

Ensino Médio nos Institutos Federais de Pernambuco (IFPE) e nas Escolas Técnicas Estaduais de Pernambuco (ETE-PE).

A escolha da escola campo de pesquisa se deu por ser o mesmo campo de trabalho do pesquisador⁹, professor do quadro efetivo de funcionários desta instituição. Estas aulas acontecem no contra turno e são ministradas de forma voluntária pelo pesquisador deste trabalho de dissertação.

4.2 Coleta dos dados

O desenvolvimento da pesquisa em campo e a coleta de dados foi realizada no período entre os meses de Setembro e Dezembro de 2018, após todos os participantes assinarem os termos de consentimento livre e esclarecido da pesquisa.

Para iniciar a coleta dos dados foi solicitado a diretora da instituição de ensino campo de pesquisa um termo de anuência, para autorização da pesquisa na instituição Escola Anete Vale de Oliveira (Apêndice A), a fim de obter a autorização para a realização da pesquisa nas dependências da referida instituição e participação dos estudantes na pesquisa.

A coleta de dados se deu por meio de registros de observação do pesquisador (diário de campo), caderno de acompanhamento dos estudantes utilizadas nas intervenções das etapas do design e das gravações em duas câmeras de vídeo e dois gravadores de áudio.

O Design Experiments desenvolvido é constituído por 12 atividades e foi separado em três ciclos, sendo eles Aleatoriedade, Espaço Amostral e a Quantificação e Comparação de Probabilidades, cuja atividades foram disponibilizados no caderno de acompanhamento para registros das resoluções do estudante. Para a aplicação do design, foram necessários 5 encontros, com duração média de 90 minutos cada, configurando 2 horas de aula (h/a) em uma escola de ensino regular.

O delineamento deste trabalho, bem como a descrição das atividades utilizadas em cada ciclo do Design Experiments e os critérios de análise estão

⁹ Por este motivo, me apresentarei no texto como professor-pesquisador em meios aos relatos da pesquisa, pois acredito ser importante destacar o papel desempenhado enquanto pesquisador e pelas relações estabelecidas e construídas enquanto professor titular dos estudantes participantes.

descritos a seguir.

4.3 Delineamento do estudo e os critérios de análise da pesquisa

A pesquisa foi realizada no período de Julho de 2018 a Abril de 2019, cuja coleta dos dados decorreu entre Setembro a Dezembro de 2018 e está dividida em três etapas principais.

Na primeira etapa, essencial a qualquer pesquisa, foram realizados estudos preliminares e desenvolvimentos teóricos, quanto ao conceito em mobilização, a Probabilidade e a metodologia Design Experiments. Neste planejamento o desenvolvimento do design aplicado, foi dividido em três ciclos contínuos, a fim de promover a compreensão e as habilidades dos alunos com relação a aleatoriedade, espaço amostral e a quantificação e comparação de probabilidades, conforme as exigências cognitivas apresentadas por Bryant e Nunes (2012).

A segunda fase, após o desenvolvimento do design, foi realizada um estudo piloto aplicado com dois alunos, um do 7º e o outro do 8º ano do Ensino Fundamental, que ocorreu entre os meses de Setembro e Outubro de 2018. Nesta abordagem, os estudantes responderam as atividades individualmente, mas com aberturas de diálogo e socialização das respostas após o término de cada atividade. Tivemos como objetivo a aplicação das atividades do design para consolidação e/ou reformulação das hipóteses levantadas e a análise *a priori*, com base nas habilidades a serem desenvolvidas sobre o conteúdo de probabilidade e nas hipóteses previamente estabelecidas, que serviram como base de análise dos ciclos do design e um posterior redesign das atividades destes ciclos que, por ventura, se apresentassem conflituosas e/ou ineficazes no processo de ensino e aprendizagem.

Na terceira fase, foi dada continuidade ao desenvolvimento da pesquisa com um grupo de 8 estudantes, entre os meses de Novembro a Dezembro de 2018, com o design já ajustado após a aplicação e análise do estudo piloto. Apesar do número de 8 estudantes iniciais, apenas 6 estudantes participaram ativamente de todos os ciclos do design.

O intuito base desta aplicação, foi motivado pela validação do design como um importante instrumento para o ensino de probabilidade e apresentação de uma versão final do mesmo, após a realização das análises dos dados coletados. Neste

sentido, é importante destacar que também buscamos analisar o desenvolvimento e a interação dos estudantes com atividades nos ambientes papel e lápis com atividades impressas, virtuais com o uso do computador e manipulação de materiais concreto que tiveram como função auxiliar na compressão dos conceitos de Probabilidade. A versão final do caderno de acompanhamento do estudante deste Design Experiments contendo todas as atividades envolvidas, está disponível no Apêndice E.

A seguir descreveremos os ciclos do design e os objetivos traçados a serem alcançados por cada atividade, bem como as atividades e conceitos movimentados em cada ciclo, bem como as mudanças que se fizeram necessárias conforme as informações coletadas na aplicação do estudo piloto.

O presente estudo apresenta caráter qualitativo. Dessa maneira, os dados coletados durante a realização das duas etapas de aplicação do Design Experiments por meio das gravações de áudio, vídeo, registros escritos produzidos pelos participantes e diário de pesquisa do pesquisador, foram analisados qualitativamente, visando identificar os conceitos compreendidos pelos estudantes, mediante as respostas apresentadas por meio do discurso dito e escrito, além das representações e estratégias utilizadas.

Diante destes dados, buscamos compreender suas limitações, reações e estratégias empregadas, a fim de investigar e compreender o conhecimento dos alunos diante de situações que envolvam o conceito de a probabilidade e as noções de aleatoriedade, espaço amostral e a quantificação e comparação de probabilidades divididos em três ciclos iterativos de um Design Experiments.

Para esta finalidade, utilizamos como critério de avaliação os objetivos traçados para cada atividade do design, direcionados *Aleatoriedade*, *Espaço Amostral* e *Quantificação e Comparação de Probabilidades*. Vale destacar, que os objetivos traçados estão de acordo com as habilidades e as expectativas de aprendizagem a serem desenvolvidas por estudantes dos 7º e 8º anos do Ensino Fundamental, previstos pelo Currículo de Matemática da BNCC (BRASIL, 2018) apresentadas na no Quadro 1 da seção 2.2 deste estudo, atentando para as habilidades previstas para o 6º ano, visto que precisamos utilizar atividades que mobilizassem os conceitos para deste nível.

Deste modo, foram realizadas análises qualitativas de natureza probabilistas dos desempenhos dos participantes, buscamos compreender o conhecimento e as

dificuldades apresentadas pelos estudantes na resolução das atividades do design, visto que esta dificuldade reflete na compreensão dos conceitos probabilísticos, interferindo assim no desenvolvimento das habilidades a serem construídas acerca destes conceitos.

4.4 Sequência de atividades do Design Experiments (DE)

O design foi dividido em três ciclos, aplicado em cinco encontros com duração média de 90min cada. Com base na proposta de uma ecologia de aprendizagem que permitam aos alunos formular, testar e conjecturar as teorias que forem sendo desenvolvidas ao longo do experimento. Para o desenvolvimento dos ciclos do design, reunimos atividades desenvolvidas por Carvalho (2017), Santos (2010, 2015), Kataoka (2010), Fernandes (1999) e algumas das atividades do programa de ensino de Nunes *et al.* (2012) sobre Probabilidade.

No Quadro 4, podemos observar cada ciclo do design contendo as atividades e as noções e conceitos a serem desenvolvidos dentro de cada ciclo.

Quadro 4 – Ciclos do Design contendo as Atividades e os Conceitos

Ciclos do Design	Atividade	Noções e Conceitos Associados
1º CICLO Aleatoriedade	(1) Jogo dos caça-níqueis (2) O problema das cartas de João (3) As fichas de Jade (4) Tabuleiro de bolinhas (5) Jogo do par ou ímpar (6) Impossíveis versus Improváveis	<ul style="list-style-type: none"> ■ Natureza aleatória ■ Previsibilidade ■ Tipos de Eventos <ul style="list-style-type: none"> ▪ Possível ▪ Certo ▪ Impossíveis ▪ Improváveis ▪ Mais ou menos provável ▪ Iguamente prováveis
2º CICLO Espaço Amostral	(7) Os filhos de Romeu e Julieta (8) Corrida de cavalos (9) Passeios aleatórios da Mônica	<ul style="list-style-type: none"> ■ Espaço amostral <ul style="list-style-type: none"> ▪ Mapeamento das possibilidades ▪ Forma de representação ■ Raciocínio combinatório ■ Quantificação de uma probabilidade <ul style="list-style-type: none"> ▪ Concepção frequentista ▪ Concepção clássico
3º CICLO Quantificação e Comparação de Probabilidades	(10) Clube de danças (11) Bolinhas no saco (12) Blocos no saco	<ul style="list-style-type: none"> ■ Espaço amostral <ul style="list-style-type: none"> ▪ Mapeamento ▪ Forma de representação ■ Quantificação de uma probabilidade ■ Comparação entre duas probabilidades <ul style="list-style-type: none"> ▪ Inferência sobre as chances entre dois eventos

FONTE: O Autor (2019).

A seguir, apresentaremos a composição do design dividido em três ciclos, bem como as atividades que compõe cada ciclo, acompanhadas dos materiais utilizados e do objetivo traçado para cada atividade.

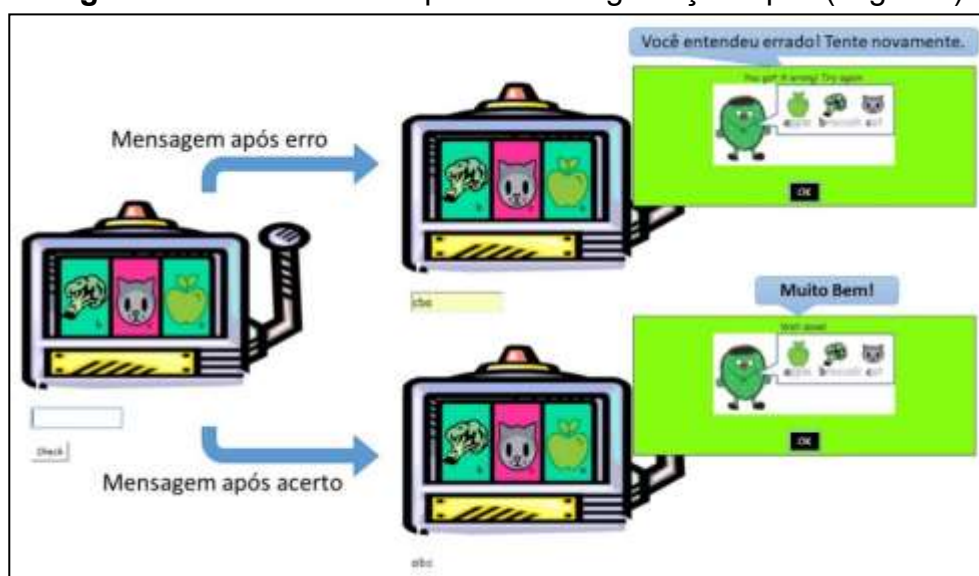
1º CICLO: ALEATORIEDADE

Para a realização deste ciclo, foram abordadas atividades que englobaram conceitos de natureza aleatória, verificação de padrões previsíveis e aleatórios e diferentes tipos de eventos aleatórios (possível, certo, impossíveis, improváveis, mais provável, menos provável, igualmente prováveis).

Atividade 1: Jogo dos caça-níqueis

Este jogo foi desenvolvido por Nunes *et al.* (2012), propôs que os estudantes analisassem uma ‘máquina caça-níquel’ e inferissem a ordem que entenderam como a correta dos dados apresentados na máquina e, por meio da experiência que adquiriram ao longo de cada rodada, analisassem se é possível identificar o padrão lógico de cada sequência. Ao todo, são 6 máquinas, porém 2 destas máquinas geram dados aleatórios, não obedecem a nenhum padrão. Desse modo, os estudantes foram levados a reconhecer e explicar os padrões de repetição das máquinas em que o resultado pode ser determinado, e explicar porque as outras máquinas não possuíam padrão, seguindo uma ordem aleatória.

Figura 1 – Sistema de respostas do Jogo caça-níquel (Jogo 1A).



FONTE: Nunes *et al.* (2012); Edição do Autor (2019).

Objetivo: Analisar e identificar fenômenos aleatórios e padrões previsíveis em um jogo de computador.

Materiais: Software Jogo dos caça-níqueis (auto executável); Computador para uma dupla; Lápis; Folheto para registro das jogadas, estratégias e decisões.

Atividade 2: O problema das cartas de João

O problema das cartas de Nunes *et al.* (2012), apresentou uma situação em um ambiente virtual, no qual um determinado número de cartas divididos em dois grupos de cores separadamente, ao serem embaralhadas algumas vezes tem a tendência de se misturarem, embora mantendo a quantidade de cartas e as cores originais acabem desfazendo a ordem original.

Problema: João tem 8 cartas: 4 com frentes verdes e 4 com frentes lilás. Então ele embaralha as cartas algumas vezes. O que é a mais provável de acontecer?

Figura 2 – O problema das cartas de João



FONTE: Adaptação de Nunes *et al.* (2012);

Objetivo: Reconhecer fenômenos aleatórios e não previsíveis pós embaralhamento de cartas em um jogo de computador.

Materiais: Software da atividade problema das cartas (Animação em slide com hiperlink); Computador para uma dupla; Lápis; Folheto para registro.

Atividade 3: As fichas de Jade

Desenvolvida por Nunes *et al.* (2012) em ambiente virtual como um jogo de computador, esta atividade apresenta três situações que permitiram aos estudantes discutirem as possibilidades de ocorrência de um determinado evento, procurando se o evento pode ser determinado ou não. A 1ª situação apresentada aos estudantes trazia uma situação de natureza aleatória não podendo ser previsto, enquanto a 2ª e a 3ª situações o resultado pode era previsível.

Inicialmente a atividade foi desenvolvida através do software PowerPoint em um modelo auto executável, e posteriormente os estudantes em duplas, utilizaram a mesma quantidade de fichas coloridas para auxiliar no processo de representação de suas respostas, fazendo o registro de suas conclusões no folheto de registro.

1ª Situação: Jade tem 4 fichas: todas elas são pretas de um lado e brancas do outro. Ela joga as fichas para cima que caem ao chão.

Figura 3 – Situação 1: As fichas de Jade



Jade lança 4 fichas ao ar:

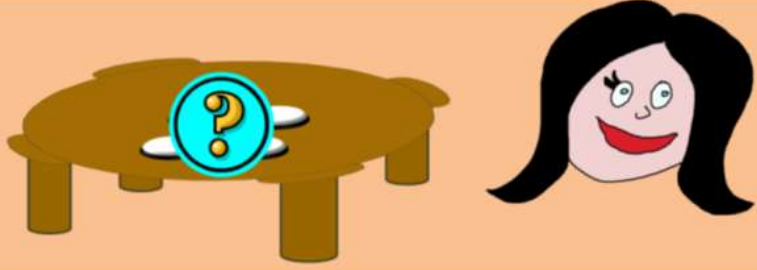
<input type="checkbox"/>	Todas as fichas cairão com o lado preto voltado para cima
<input type="checkbox"/>	É uma mistura: algumas fichas cairão com o lado preto para cima e outras com o lado branco para cima.
<input type="checkbox"/>	Todas as fichas cairão com os lados brancos virados para cima

10

FONTE: Adaptação de Nunes *et al.* (2012).

2ª Situação: Jade coloca as mesmas 4 fichas na mesa com o lado branco virado para cima. Em seguida, ela vira cada ficha. Como elas ficarão agora?

Figura 4 – Situação 2: As fichas de Jade



Depois ela vira todas elas

Todas as fichas terão seu lado branco voltado para cima

É uma mistura: algumas das fichas terão o lado branco para cima e outras o lado preto para cima

Todas as fichas terão seu lado preto voltado para cima

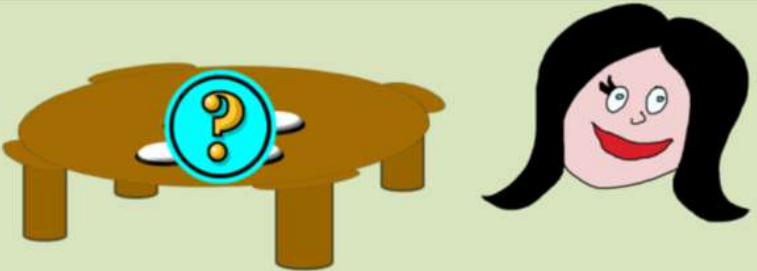
Metade das fichas terá o lado branco voltado para cima e metade o lado preto voltado para cima

11

FONTE: Adaptação de Nunes *et al.* (2012).

3ª Situação: Jade coloca as mesmas 4 fichas na mesa com o lado branco voltado para cima. Em seguida, ela vira metade das fichas. Como as fichas ficarão agora?

Figura 5 – Situação 3: As fichas de Jade



Depois ela vira a metade delas:

Todas as fichas terão seu lado branco voltado para cima

É uma mistura: algumas das fichas terão o lado branco para cima e outras o lado preto para cima

Todas as fichas terão seu lado preto voltado para cima

Metade das fichas terá o lado branco voltado para cima e metade o lado preto voltado para cima

12

FONTE: Adaptação de Nunes *et al.* (2012).

O que há de diferente, em relação ao resultado, na primeira situação comparada com as outras duas situações?

Objetivo: Analisar e identificar fenômenos aleatórios e determinísticos em um jogo de computador, bem como estimar a ocorrência nas situações previsíveis.

Materiais: Software PowerPoint com atividade das fichas de Jade (Animação em slide com hiperlink auto executável); Computador para uma dupla; Lápis; Folheto para registro; Quatro fichas coloridas para cada dupla.

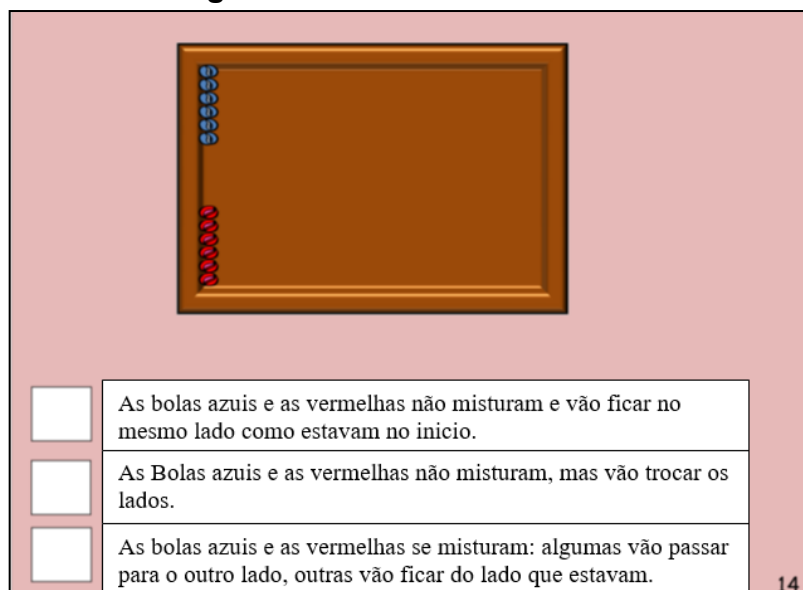
Atividade 4: Tabuleiro de bolinhas

O problema do tabuleiro de Nunes *et al.* (2012), também descreveu uma situação de natureza aleatória, assim como na primeira situação das “Fichas de Jade”, a atividade teve o objetivo de levar o estudante a reconhecerem um fenômeno de natureza aleatória.

Para a aplicação do estudo piloto, foi utilizado um tabuleiro construído em papelão e isopor, e utilizados bolinhas de gude coloridas para fazer o experimento do problema e comprovação das respostas apresentadas pelos estudantes. Diante da facilidade apresentada no estudo piloto, na aplicação principal não foi feito uso do tabuleiro.

Problema: Eu tenho um tabuleiro com bolas nas extremidades: de um lado as bolas são azuis e do outro lado as bolas são vermelhas. Agora eu tiro a partição e inclino o tabuleiro muitas vezes (movendo de um lado para o outro) depois de eu ter feito isso: o que é mais provável de acontecer com as bolas?

Figura 6 – Tabuleiro de Bolinhas



FONTE: Adaptação de Nunes *et al.* (2012).

Objetivo: Reconhecer um fenômeno aleatório e a imprevisibilidade na disposição das bolinhas por meio de um jogo de computador.

Materiais: Software PowerPoint com atividade das fichas de Jade (Animação em slide com hiperlink auto executável); Computador para uma dupla; Lápis; Folheto para registro; Tabuleiro de isopor; 12 bolinhas de gude em duas cores.

Atividade 5: Jogo do par ou ímpar

A situação a seguir é uma atividade desenvolvida por Santos (2015), acrescida de uma das atividades também de Santos (2010), e teve por objetivo promover uma apropriação de termos do vocabulário probabilístico. Esperávamos com essa atividade que os alunos pudessem compreender alguns termos trabalhados nas atividades anteriores e pensar em outros. Esperávamos também que, com essa discussão, os estudantes desenvolvessem e analisassem o espaço amostral de possibilidades para verificação de suas respostas. Sendo esta atividade dividida em duas situações.

1ª Situação: Escreva todas as possibilidades de um jogo de par ou ímpar entre dois colegas. Cada jogador só pode usar os dedos de uma das mãos.

2ª Situação: Considerando os possíveis resultados de um jogo de par ou ímpar entre dois colegas – em que cada jogador só pode usar os dedos de uma de suas mãos –, classifique com uma das palavras do quadro abaixo os acontecimentos citados:

<i>Impossível – pode ser – possível – bastante provável – certo – se espera que – seguro – há alguma possibilidade – há alguma probabilidade – incerto</i>
--

- a) A soma ser um número ímpar:
- b) A soma ser um número menor do que 10:
- c) A soma ser o número 12:
- d) A soma ser um número maior do que 0:
- e) A soma ser o número 0:
- f) Os colegas apresentarem números de dedos distintos:
- g) Os colegas apresentarem números de dedos iguais:

Objetivo: Promover uma melhor compreensão acerca de termos do vocabulário probabilístico, bem como compreender o raciocínio combinatório das possibilidades num jogo de par ou ímpar.

Materiais: Lápis; Folheto de atividades e registro.

Atividade 6: Impossíveis versus Improváveis

Esta atividade é uma adaptação da proposta desenvolvida por Carvalho (2017) e objetivou discutir a o termo impossível e improvável mediante duas situações aparentemente de mesma natureza, reconhecendo que impossível se trata de uma situação que não tem nenhuma chance de ocorrer e improvável como alguma situação que embora seja muito difícil de ocorrer, ainda assim tem alguma probabilidade. Desse modo, tivemos como objetivo discutir e diferenciar esses tipos de eventos, pois é comum muitos estudantes e adultos inferirem que devido à baixa possibilidade de algo acontecer ou ser feito, acreditar que será sempre impossível.

Assim, os estudantes foram convidados a ler cada par de frases e identificar a sentença impossível e a improvável, por fim, em um momento aberto para discussões, os estudantes apresentaram suas respostas e expuseram as hipóteses que os levaram a esta classificação.

Quadro 5 – Pares de frases com situações Impossíveis versus Improváveis

Fazer um guarda-chuva de vidro.	x	Fazer um guarda-chuva de ar.
Crescimento do adulto até voltar a ser criança.	x	Crescimento do cabelo até os dedos dos pés.
Contagem dos pelos do rabo do cachorro.	x	Contagem das estrelas em uma noite nublada.
Capturar uma sombra.	x	Capturar uma mosca com pauzinhos.
Não comer por 10 dias.	x	Não comer por 10 meses.
Ler os pensamentos de alguém.	x	Ler os lábios de alguém.
Andar sobre um fio de telefone.	x	Andar sobre a água.
Viver sem coração.	x	Viver sem nariz.
Nunca esquecer o nome de ninguém.	x	Saber o nome de alguém sem conhecê-la.
Desbloquear uma porta com a mente.	x	Desbloquear uma porta com um clipe de papel.
Viver por 120 anos.	x	Viver por mil anos.
Ouvir um som antes de ser produzido.	x	Identificar a raça de um cão por seu latido.
Colagem de uma casca de ovo quebrada de volta no ovo.	x	Desembaralhar um ovo mexido.
Uma mulher dando à luz a um canguru.	x	Uma mulher dando à luz a 20 crianças em uma vida.
Falar sem mover os lábios.	x	Falar duas línguas simultaneamente.
Atravessar uma parede.	x	Atravessar o fogo.
Permanecer acordado durante 5 dias.	x	Permanecer acordado por 5 meses.
Ler um livro sem abrir a capa.	x	Ler um livro de cabeça para baixo.

FONTE: Carvalho (2017), adaptação do Autor (2019).

Objetivos: Analisar e discutir a diferença entre eventos impossíveis e improváveis justificando o seu raciocínio.

Materiais: Lápis; Folheto dos pares de frases impossíveis e improváveis.

2º CICLO: ESPAÇO AMOSTRAL

Este ciclo do design teve o objetivo fortalecer o pensamento aleatório e explorar o raciocínio combinatório dos estudantes para o desenvolvimento de um espaço amostral, como formas de representações de todos as situações ou elementos possíveis de um conjunto e explicar as probabilidades de determinados eventos a partir deste espaço. Neste ciclo também foi abordado a quantificação da probabilidade de um evento através da probabilidade frequentista e clássica, tendo em vista o desenvolvimento do terceiro ciclo.

Desse modo, conforme as discussões levantadas durante as resoluções, os

estudantes socializaram as formas que representaram suas respostas com os demais estudantes, e caso momento que apareceu durante as discussões outras formas de representação ou quando houve algum erro no processo de mapeamento, fez-se necessário uma intervenção do professor pesquisador para apresentar outras alternativas de representação.

Ao final deste ciclo, o professor pesquisador realizou um processo de formalização do conceito de probabilidade.

Atividade 7: Os filhos de Romeu e Julieta

Com esta atividade tivemos o objetivo de apresentar um conflito semiótico que rotineiramente aparece em situações aleatórias, quando um evento tem mais chance de ocorrer do que outros, e as possibilidades aparentemente são as mesmas, como na situação-problema dos “Saco dos Doces” (NUNES *et al.*, 2012)¹⁰ e “Jogo do Lobo Mau e da Chapeuzinho” (SANTOS, 2010; 2015)¹¹. Devido a este conflito semiótico, foi necessário que os estudantes tivessem em mente todas as possibilidades do espaço amostral para analisar e resolver a atividade corretamente.

Situação: Romeu e Julieta estão planejando ter três filhos após o casamento. Como sabemos, o sexo do bebê que será gerado não pode ser determinado, sabemos apenas que pode ser do sexo masculino e feminino. Romeu e Julieta estavam pensando nas combinações possíveis dos filhos que teriam entre a quantidade de homens e mulheres.

a) O que você acha que é mais provável de acontecer?

- () Ter os três filhos do mesmo sexo.
- () Ter apenas dois filhos do mesmo sexo.
- () As chances são as mesmas.

Por quê?

b) Você poderia descrever todas as combinações possíveis dos filhos que Romeu e

¹⁰ Samantha pode pegar dois doces de um saco, sem olhar, e há três doces no saco. Há dois doces de sabor morango e um sabor groselha. Seu sabor favorito é morango. Ela pode pegar dois doces de morango ou ela pode pegar um de morango e um de groselha [...] (adaptado por, Carvalho (2017)).

¹¹ Lobo mau propôs o seguinte jogo para Chapeuzinho Vermelho: Cada um lança alternadamente, 10 vezes, uma moeda para cima; Se as duas moedas apresentam cara, a Chapeuzinho ganha 1 ponto; Caso isso não ocorra, o lobo mau é quem ganha 1 ponto [...] (SANTOS, 2015).

Julieta poderiam ter.

c) O que se pode concluir diante dessas combinações?

Objetivos: Mapear todas as combinações sem esquecer nenhuma delas, identificando e quantificando as possibilidades para cada combinação diferente.

Material: Folheto de registro com a situação-problema.

Atividade 8: Corrida de cavalos

O jogo “corrida de cavalos” é uma adaptação da atividade proposta por Santos (2015) e teve o objetivo de gerar uma situação de competição entre os estudantes. Nesta situação, os estudantes precisaram ‘apostar’ em três cavalos numa corrida, com treze cavalos numerados de 1 a 13, porém cada cavalo só andava conforme a soma das faces superiores do lançamento de dois dados.

Assim, conscientes de que o cavalo somente avançava conforme os resultados das somas das faces dos dados, os alunos foram levados a perceber que alguns cavalos tinham mais chances que outros, enquanto outros cavalos não tinham nenhuma chance de avançar. Para chegar a esta conclusão, ao final do jogo, foi proposto aos alunos que eles desenvolvessem o espaço amostral das possibilidades da soma das faces de dois dados, quantificando o valor da chance para cada número.

Regras do jogo:

- Cada jogador aposta em três cavalos, podendo ambos, apostar no mesmo cavalo.
- Alternadamente, os jogadores lançam os dados e calculam a soma dos pontos obtidos na face superior dos mesmos.
- A soma obtida corresponde ao cavalo que avançará uma casa.
- Ganha o cavalo que primeiro alcançar a linha de chegada, independentemente de ser um dos cavalos apostados.

Quadro 6 – Tabuleiro da corrida de cavalos

CHEGADA													
9													
8													
7													
6													
5													
4													
3													
2													
1													
LARGADA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
REGISTRO DAS APOSTAS													

FONTE: Santos (2015, p. 185)

- a) Há algum cavalo que tem mais ou menos chances de vencer que o outro? Justifique sua resposta.
- b) Descreva todas as possibilidades existentes entre a soma de dois dados. Em seguida, quantifique as chances que cada número tem de ocorrer no lançamento.
- c) O registro feito no tabuleiro da corrida e o total de possibilidades para número são semelhantes?

Objetivos: Verificar a existência de espaço amostral não equiprovável, identificando a existência de eventos impossíveis, menos e mais prováveis de ocorrer.

Materiais: Folheto de registro contendo a atividade e o tabuleiro de corrida. Dois dados de cores diferentes. Copinho para lançamento dos dados.

Atividade 9: Passeios aleatórios da Mônica

A atividade proposta é um breve recorte¹² do ambiente virtual de aprendizagem desenvolvida por Cazorla, Kataoka e Nagamine (2010) e adaptada por Kataoka (2010). O objetivo desta atividade foi de levar os estudantes a perceberem a aleatoriedade da atividade e a utilizarem meios próprios para desenvolverem todas as possibilidades (espaço amostral), para que os alunos percebam que uns amigos têm mais chances de serem visitados pela Mônica, do

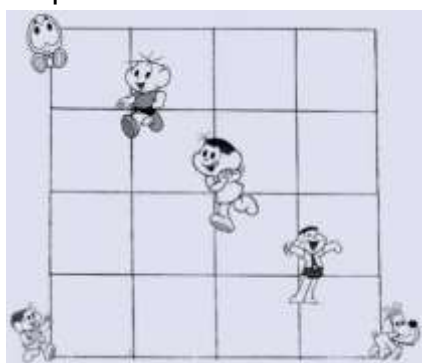
¹² Também foram realizadas algumas adaptações da proposta de Kataoka (2010).

que outros.

Para chegar a esta conclusão os alunos foram convidados a realizar a o experimento de jogar a moeda aleatoriamente um determinado número de vezes, verificando que não havia um padrão existente, e posteriormente sendo solicitados a desenvolverem o espaço amostral de todas as possibilidades para quantificar o número de chances que cada um dos amigos da Mônica tinha de ser visitado.

Estória: “A Mônica e seus amigos moram no mesmo bairro. A distância da casa da Mônica para a casa de Horácio, Cebolinha, Magali, Cascão e Bidu é de quatro quarteirões. A Mônica costumava visitar seus amigos durante os dias da semana em uma ordem pré-estabelecida: segunda-feira, Horácio; terça-feira, Cebolinha; quarta-feira, Magali; quinta-feira, Cascão e sexta-feira, Bidu. Para tornar mais emocionantes os encontros, a turma combinou que o acaso escolhesse o amigo a ser visitado pela Mônica. Para isso, na saída de sua casa e a cada cruzamento, Mônica deve jogar uma moeda; se sair cara (C), andar um quarteirão para o Norte (vertical para cima), se sair coroa (X), um quarteirão para o Leste (horizontal à direita). Cada jogada representa um quarteirão de percurso. Mônica deve jogar a moeda quatro vezes para poder chegar à casa dos amigos” (KATAOKA, 2010).

Figura 7 – Mapa dos Passeios aleatórios da Mônica



FONTE: Kataoka (2010).

1º Qual é a diferença entre a forma antiga da Mônica visitar seus amigos e a nova forma?

2º Todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados?

() Não. Quais são as chances: _____

() Sim. Qual é a chance: _____

Por que vocês acham isso?

3º Seguindo a segunda estratégia da Monica para visitar um amigo, lançando uma moeda quatro vezes: *Se sair cara (C), Mônica andar*á um quarteirão para o Norte (vertical para cima), *se sair coroa (X), um quarteirão para o Leste (horizontal à direita).*

Você e seu/sua colega devem repetir esse experimento 16 vezes e anotar os resultados no quadro abaixo. (Por exemplo, se sair a sequência: cara, cara, coroa, cara, anotar na coluna sequência: CCXC e, na coluna do amigo visitado: Cebolinha).

Repetição	Sequência	Amigo visitado
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

Repetição	Sequência	Amigo visitado
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		

a) De acordo com os resultados do experimento acima, indique na tabela a frequência referente aos amigos visitados.

	Horácio	Cebolinha	Magali	Cascão	Bidu
Frequência Relativa					

b) Qual amigo foi mais vezes visitado pela Mônica? _____

4º Descrever todas as possibilidades existentes que a Mônica pode obter ao lançar uma moeda 4 vezes.

a) De acordo com todas estas possibilidades, indique na tabela a frequência referente aos amigos visitados.

	Horácio	Cebolinha	Magali	Cascão	Bidu
Frequência Relativa					

b) Qual amigo tem mais chance de ser visitado? _____

c) A probabilidade coincidiu com o resultado do experimento? Explique.

Objetivos: Compreender a aleatoriedade da situação-problema, bem como realizar experimento aleatório para obtenção da probabilidade frequentista, mapear espaço amostral, calcular e verificar que as probabilidades de cada amigo ser visitado não

são equiprováveis.

Materiais: Folheto de registro contendo a atividade dos Passeis aleatórios da Mônica.
Uma moeda para cada grupo.

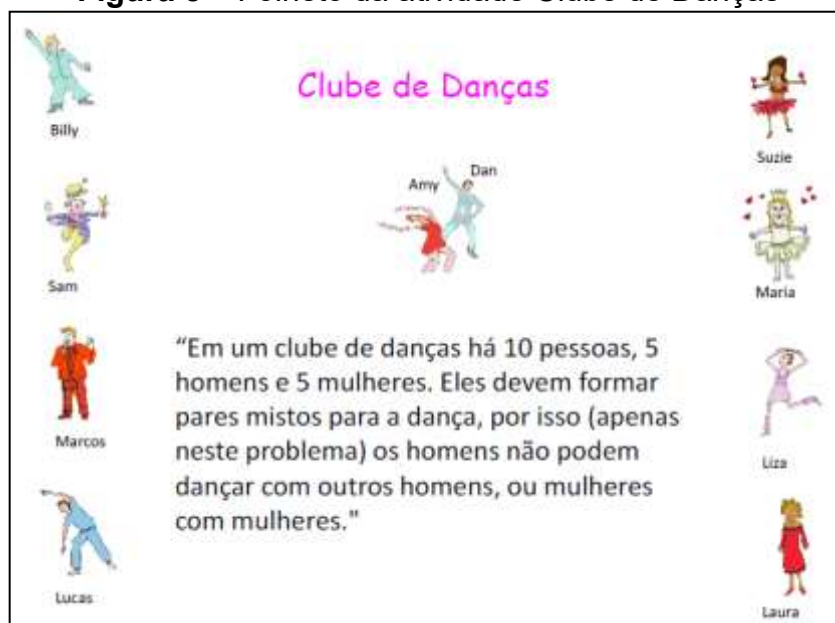
3º CICLO: QUANTIFICAÇÃO E COMPARAÇÃO DE PROBABILIDADES

Após a realização do 2º Ciclo do design, no qual os alunos realizaram o mapeamento do espaço amostral e identificando os eventos e calculando as probabilidades de eventos utilizando os conceitos frequentista e clássico, este ciclo também buscou estimular os estudantes a quantificarem probabilidades, como também utilizando a probabilidade para avaliar as chances entre dois eventos e inferir sobre o que tinha a melhor chance, por meio da comparação das razões de probabilidade.

Atividade 10: Clube de danças

Optamos por utilizar a atividade do Clube de Danças de Nunes *et al.* (2012), por apresentar uma boa compreensão quando relacionado a ideia de combinações, para que os alunos pudessem desenvolver o espaço amostral. Nesta atividade os alunos foram levados a descobrir quantas pares de casais diferentes poderiam ser formados entre 5 homens e 5 mulheres por meio de um sorteio. Podemos também destacar nesta atividade o fato dela permitir identificar os elementos do espaço com mais facilidade, reconhecendo eventos e a quantificação de probabilidades.

Figura 8 – Folheto da atividade Clube de Danças



FONTE: Nunes *et al.* (2012), adaptado por Carvalho (2017).

1. Você consegue verificar:

- a) Quais são as possibilidades de casais a serem formados no sorteio?
- b) Qual número de danças que serão executadas?
- c) Quantas vezes cada pessoa dança?
- d) Qual é a probabilidade de que uma dança seja dançada por casais cujos nomes começam ambos com a mesma letra?
- e) Qual é a probabilidade de que uma dança seja dançada por um casal que ambos estejam vestidos de vermelho?
- f) Qual é a probabilidade de se retirar o primeiro par de dançarinos com Billy no par?

Objetivos: Desenvolver espaço amostral e identificar eventos dentro deste espaço de possibilidades para quantificar probabilidades por meio do significado clássico de probabilidade ou laplaciano.

Materiais: Folheto de registro com as atividades.

Atividade 11: Bolinhas no saco

Esta atividade foi retirada e adaptada de Fernandes (1999) e teve intuito de levar os estudantes a refletirem sobre as chances de se obter o mesmo evento (sair bolinha branca) entre dois espaços amostrais distintos.

A princípio, a proposta do utilizada pelo estudo piloto foi considerada relativamente muito fácil para os estudantes. Deste modo, para aplicação do estudo principal e apresentação da versão final do design utilizamos outra situação que alterasse também a quantidade de elementos em cada espaço amostral, na qual a verificação para inferir sobre a chance de cada espaço os estudantes puderam fazer através da operação de divisão.

Proposta inicial para o Estudo Piloto: *Um saco I contém duas bolas brancas e três bolas pretas, e um saco II contém três bolas brancas e duas bolas pretas. Sem ver, tira-se uma bola de cada um dos sacos.*

Saco I: ○○●●● Saco II: ○○○●●

Proposta final para o Estudo Principal: *Um saco I contém três bolas brancas e quatro bolas pretas, e um saco II contém duas bolas brancas e três bolas pretas. Sem ver, tira-se uma bola de cada um dos sacos.*

Saco I: ○○○●●●● Saco II: ○○●●●

a) De qual dos sacos é mais provável obter uma bola branca?

() Do saco I.

() Do saco II.

() É igualmente provável obter uma bola branca de qualquer dos sacos I e II.

b) Que raciocínio utilizou para responder à pergunta?

Objetivos: Comparar probabilidades examinando o espaço amostral, e optar pela melhor chance utilizando a razão.

Materiais: Folheto de registro contento a atividade; Calculadora.

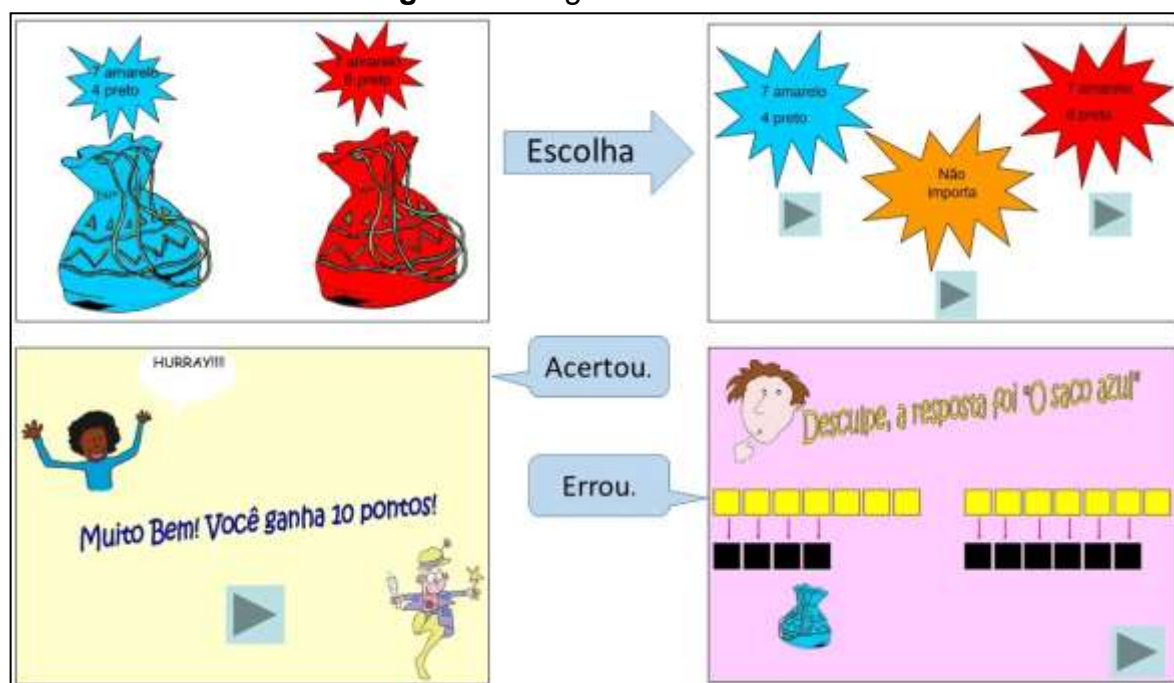
Atividade 12: Blocos no saco

Também desenvolvido por Nunes *et al.* (2012), este jogo tem por objetivo conduzir os estudantes a compararem dois espaços amostrais distintos e escolher o saco que tem a melhor chance de conseguir um bloco amarelo. Para realização desta atividade durante o design, os estudantes precisaram reorganizar a

distribuição destes blocos em uma representação visual utilizando bloquinhos de recado com duas cores diferentes para fazer uma comparação.

Proposta do jogo: Neste jogo existem dois sacos contendo blocos amarelos e pretos. Para ganhar 10 pontos, você tem que pegar o saco no qual achas que lhe dá melhor chance de conseguir um bloco amarelo. Você tem que decidir qual o saco que você vai escolher, o saco vermelho ou o saco azul; ou você pode decidir que poderia ser qualquer um e não importa qual saco – se você acha que eles oferecem a mesma chance.

Figura 9 – Jogo Blocos no saco



FONTE: Nunes *et al.* (2012), adaptação de Carvalho (2017); Edição do Autor (2019).

Objetivos: Comparar probabilidades examinando o espaço amostral e optar pela melhor chance utilizando a razão.

Materiais: Jogo Blocos no saco (Animação em slide de PowerPoint com hiperlink); Computador para uma dupla; Dois blocos de recado de cores diferentes; Folheto para registro das jogadas e decisões.

No capítulo a seguir, a partir das análises realizadas, apresentamos os resultados e discussões do presente estudo com base nos dados coletados a partir da aplicação das atividades deste design.

5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo, são apresentadas as análises e discussões referentes aos dados coletados, a partir da realização dos três ciclos do Design Experiments propostos para esta pesquisa. Este capítulo está dividido em duas seções, sendo que na primeira seção apresentaremos os principais resultados encontrados na aplicação do estudo piloto com 2 (dois) estudantes e as principais mudanças ocorridas motivadas pela dificuldade ou facilidade apresentada pela questão, na segunda seção apresentamos a discussão dos dados coletados na aplicação principal do design com um grupo de 8 (oito) estudantes.

5.1 Estudo piloto: descrição dos ciclos e principais resultados

A aplicação do estudo piloto aconteceu em 3 ciclos, sendo devidos em 5 encontros, tendo cada momento um tempo médio de 90 minutos. Tratando-se em um tempo pedagógico usualmente trabalhado em sala de aula, cada encontro teve duração média de 2 horas aulas (h/a) de 45 minutos. A princípio, foi estimado que seriam necessários 6 encontros para aplicação total da pesquisa, no entanto, isto não foi necessário.

Todos os encontros aconteceram no turno da tarde (contra turno dos estudantes participantes), na escola campo de pesquisa, Escola Anete Vale de Oliveira, dentro da Biblioteca e no Laboratório de Informática.

Para coleta dos dados, utilizamos um caderno de acompanhamento do estudante, uma câmera de filmadora e dois gravadores de áudio, para que não houvesse perda de informações quanto aos diálogos, a fim de guarda das hipóteses, respostas, contestações e discussões que viessem a ocorrer entre professor-pesquisador e estudantes. Com a devida autorização dos estudantes participantes e de seus responsáveis sob assinatura de TCLE.

Como já descrito anteriormente, para este piloto, contamos com a participação voluntária de dois estudantes, um do 7º e outro do 8º Ano do Ensino Fundamental, que chamaremos aqui de P1 e P2, respectivamente.

Antes do início das atividades, foi aberto um espaço de discussões para sanar algumas dúvidas e passar algumas instruções de como funcionaria as intervenções

da pesquisa, o processo de coleta e registro dos dados, para tranquilizar os estudantes quando a câmera e o gravador de áudio, a fim de evitar qualquer constrangimento que pudesse vir a ocorrer. Também foi aberto um espaço para passar algumas instruções sobre o uso do computador notebook¹³ aos estudantes, para que pudesse resolver as atividades com ou sem o uso do mouse.

No ciclo Aleatoriedade do design, tivemos o intuito de investigar o conhecimento dos alunos, bem como buscar compreender o seu raciocínio e suas dificuldades mediante atividades que envolvam o conceito de aleatoriedade. Procuramos assim utilizar atividades de natureza aleatória, para que os estudantes verificassem a existência de padrões previsíveis ou de ordem aleatória, e que pudessem reconhecer diferentes tipos de eventos aleatórios. Também buscamos analisar e estimular em seus discursos a linguagem probabilística através da utilização de terminologias adequadas.

No ciclo Espaço Amostral do design, as atividades tinham como objetivo verificar a existência de espaço amostral não equiprovável, bem como mapear todas as combinações sem esquecer nenhuma delas, identificando e explicando as chances de determinado evento vir a acontecer, a partir deste espaço, verificando a existência de eventos impossíveis, menos prováveis ou mais prováveis de ocorrer. Além do mapeamento do espaço amostral e identificar as possibilidades existentes para cada evento, os estudantes também foram levados a calcular as probabilidades de eventos utilizando os conceitos frequentista e clássico de probabilidade por meio de uma razão.

Para o desenvolvimento do ciclo Quantificação e Comparação de Probabilidades, os estudantes também foram levados a descrever um espaço amostral e quantificar as probabilidades dos eventos apresentados. No entanto, o objetivo principal deste ciclo foi levar os estudantes a utilizar a probabilidade para avaliar as chances entre dois eventos e decidir sobre o que tiver melhor chance, por meio da comparação das razões de probabilidade que haviam encontrado, deste modo investigar o conhecimento e raciocínio aplicados pelos estudantes.

As atividades foram bastante proveitosas e de fácil assimilação. Os estudantes não apresentaram dificuldades que atrapalhassem o desenvolvimento das atividades e o seu aprendizado. O uso do material concreto nos jogos com

¹³ Foi necessário o uso de aparelhos Notebook para aplicação da pesquisa, pois a escola campo de pesquisa se encontra com seu Laboratório de Informática desativado.

dados e a moeda, além da disposição e comando do enunciado de cada atividade contribuiu para a participação dos estudantes, na compreensão dos conceitos de aleatoriedade, da descrição do espaço amostral e da quantificação. No entanto, cabe destacar a resistência em utilizar formas diferentes de representação, mesmo após conhecer outras formas.

Destacamos como ponto negativo o fator introspectivo apresentado pelos estudantes no momento de socialização das atividades, bem como na externalização das ideias utilizadas pelos mesmos no desenvolvimento das atividades. Embora fosse solicitado que os estudantes procurassem falar mais abertamente, expondo suas ideias e teorias, os estudantes se sentiram um pouco tímidos devido a presença do gravador de áudio e da câmera. No entanto, conforme o tempo foi passando e o envolvimento com as atividades foi ficando mais forte, os mesmos foram se soltando, e chegando a falar em tom normal, articulando melhor suas falas buscando ser coerentes ao expor suas teorias sobre as possíveis respostas ou soluções.

Os estudantes demonstraram bom raciocínio lógico ao ler e interpretar as questões, bem como prever possíveis acontecimentos e reconhecendo os padrões nas questões o primeiro ciclo que envolveu o conceito de Aleatoriedade. Como na fala dos próprios estudantes “é a lógica”, que provavelmente se deu pela própria obviedade da atividade e/ou pelo conhecimento dos estudantes fora do ambiente escolar, como embaralhar cartas, mexer com moedas (associando as fichas na Atividade 3) ou brincando no jogo do par ou ímpar.

Nas atividades do segundo ciclo do design, Espaço Amostral, que envolveram a compreensão e mapeamento de combinações do espaço de possibilidades, inicialmente os estudantes não conseguiram estimar previamente que o conjunto de possibilidades seriam bem maiores, tão pouco que as chances estimadas para as situações propostas eram diferentes entre si. Porém, quando levados a descrever as combinações diferentes existentes nas atividades, foram percebendo que existiam um número bem maior de possibilidade das que haviam imaginado. Apesar dos erros cometidos ao mapearem o espaço amostral, esquecendo ou repetindo algumas combinações, acreditamos que os estudantes conseguiram assimilar o princípio de combinação, essencial para compreensão do conceito de Espaço Amostral.

Em meio a estas atividades, também foi possível perceber o fator lúdico na

motivação dos estudantes ao participarem de jogos em atividades com atividades empíricas com recurso didático, utilizando dados e moedas. Nestas atividades, foi possível perceber que facilmente os estudantes reconheciam o fator aleatório, bem como eram capazes de relacionar determinados eventos possíveis ou impossíveis dentro dos jogos sem o mesmo ter sido jogado.

No desenvolvimento das atividades do terceiro ciclo do design, sobre a Quantificação e Comparação de Probabilidades, os estudantes com muita facilidade utilizaram a combinatória para estimar o espaço amostral, bem como também conseguiram quantificar o espaço amostral e os eventos apresentados nas atividades apresentadas. Além de conseguir determinar a razão de probabilidade, os estudantes conseguiram comparar as probabilidades entre os eventos e inferir sobre a que possui a melhor chance. No entanto, os estudantes apresentaram dificuldades quando tiveram que inferir sobre duas probabilidades com espaços amostrais diferentes (denominadores com valores diferentes).

Para este ciclo, vemos a necessidade de uma mudança em duas atividades (11 e 12), a fim de proporcionar aos estudantes uma significação e compreensão mais aprofundada do conceito, realizando a comparação nos momentos de dúvida e/ou confirmação de suas hipóteses, verificando na prática por meio do próprio cálculo matemático da simplificação ou divisão, podendo ser utilizado a calculadora (podendo ser a do celular) como recurso didático.

5.2 Ambiente de aprendizagem: análise das atividades desenvolvidas em cada ciclo do Design Experiments (DE)

A aplicação do design nesta segunda etapa, também aconteceu em 3 ciclos divididos em 5 encontros, tendo cada encontro um tempo médio de 90 minutos cada, assim como na realização do estudo piloto, no entanto, com redistribuição das atividades diferentes de como ocorram no piloto. O tempo pedagógico decorrido também teve duração média de 2 horas aulas (h/a) de 45 minutos, o mesmo tempo decorrido em uma escola de ensino regular. E da mesma forma que o estudo inicial, os encontros também aconteceram no turno da tarde (contra turno dos estudantes participantes), na escola campo de pesquisa, Escola Anete Vale de Oliveira, dentro da Biblioteca.

Para a coleta dos dados também utilizamos o caderno de acompanhamento

do estudante com as atividades impressas e espaço para registro dos estudantes (ajustados conforme as alterações que achamos ser necessária após a aplicação do estudo piloto), duas câmeras filmadoras e dois gravadores de áudio, também com a autorização dos estudantes participantes e de seus responsáveis sob assinatura de TCLE.

Como estimado no projeto inicial, pretendíamos contar nesta etapa com 10 (dez) estudantes do 7º e 8º anos do Ensino Fundamental. No entanto, isto não foi possível. Apesar de serem esclarecido pelo professor-pesquisador, dos objetivos e da importância da pesquisa, bem como dos meios de coleta de dados e da garantia de privacidade da identidade dos estudantes, muitos pais não permitiram a participação dos estudantes interessados em participar. Vale destacar, que isto se deu apenas com os estudantes do 7º ano, visto que o professor-pesquisador não é o professor regular e jamais ministrou aulas a estes estudantes, apenas possui contato com alguns deles nas aulas de reforço destinada as olimpíadas de matemática (OBMEP).

Deste modo, a pesquisa contou com a participação de 8 estudantes, sendo 3 (três) alunos do 7º ano e 5 (cinco) do 8º ano do Ensino Fundamental. Infelizmente, dois estudantes não puderam participar de todos os encontros, um dos estudantes precisou se afastar por motivos de saúde e o outro é um estudante atleta que precisou se afastar para competições. Apesar do afastamento e desistência, os estudantes e seus responsáveis permitiram a utilização dos dados já coletados para que não viessem a comprometer o andamento da pesquisa.

Apenas por caráter organizacional e para preservar a identidade dos estudantes, chamaremos os alunos do 8º ano de A, B, C, D e E, e os estudantes do 7º ano de F, G e H, sendo que os estudantes G e H são os estudantes que não participaram de todos os ciclos do design.

Assim como no estudo inicial, antes do início das atividades foi aberto um espaço de socialização entre os estudantes, bem como estes foram esclarecidos sobre o funcionamento da pesquisa, da coleta e registros dos dados para que os mesmo não se sentissem intimidados pelas câmeras e gravadores. Neste momento também foram repassadas instruções sobre o uso do aparelho computador notebook.

No Quadro 7, está relacionado as atividades desenvolvidas para cada ciclo do design e o dia do encontro ocorrido.

Quadro 7 – Relação das atividades e encontro de cada Ciclo

Ciclo	Encontro	Atividades
Aleatoriedade	1 (29.11.2018)	(1) Jogo do Caça-níquel
	2 (30.11.2018)	(2) O problema das cartas de João
		(3) As fichas de Jade
		(4) Tabuleiro de bolinhas
		(5) Jogo do par ou ímpar
		(6) Impossíveis versus Improváveis
Espaço Amostral	3 (04.12.2018)	(7) Os filhos de Romeu e Julieta (8) Corrida de cavalos
	4 (06.12.2018)	(9) Passeios aleatórios da Mônica
	4 (06.12.2018)	(10) Clube de danças
Quantificação e Comparação de Probabilidades	5 (07.12.2018)	(11) Bolinhas no saco (12) Blocos no saco

FONTE: O Autor (2019).

A seguir, apresentaremos as descrições e análises das atividades desenvolvidas em cada um dos ciclos do design.

5.2.1 Primeiro ciclo do design: aleatoriedade

Para o desenvolvimento do primeiro ciclo do Design Experiments em um Ambiente de Aprendizagem, tivemos como objetivo de investigar o conhecimento de um grupo de estudantes, buscando compreender os seus raciocínios e as dificuldades diante de atividades e situações que envolvessem o conceito de aleatoriedade.

Para esta finalidade, utilizamos 6 atividades de natureza aleatória, no qual os estudantes foram levados a analisarem e reconhecerem padrões situações com padrões previsíveis ou de ordem aleatória, bem como reconhecer diferentes tipos de eventos. As atividades utilizadas foram retiradas e algumas adaptadas de, Nunes *et al.* (2012), Santos (2015) e Carvalho (2017).

Foram necessários a realização de dois encontros (o 1º e 2º encontro), sendo que para o primeiro encontro, contamos com a participação de 7 (sete) estudantes (A, B, C, D, E, G e H), e para o segundo encontro contamos com a participação de 6 (seis) estudantes (A, B, C, G, E e F).

As análises das atividades desenvolvidas, bem como do próprio ciclo, estão descritas a seguir.

Atividade 1 - Jogo do Caça-níquel

Inicialmente foi explicado que o jogo estava em inglês, no entanto, poderia ser jogado normalmente, pois apenas trabalhariam combinações de letras ou números, divididos em seis games diferentes: 1, 1b, 2, 3, 4 e 4b. Somente foi explicado que ao acertar, apareceria a mensagem “Well done!” (Bem Feito!), e que ao errar aparecia a mensagem “You got it wrong! Try again” (Você entendeu errado! Tente novamente).

A aplicação da primeira atividade do primeiro ciclo do design, exigiu o tempo de todo o primeiro encontro. Além do jogo possuir seis games diferentes, com a participação de um grupo maior de estudantes, foi necessário mais tempo para os estudantes dialogarem entre si e tomarem as decisões das combinações, por outro lado, os estudantes se revezavam para fazer as jogadas em cada jogo, já que a atividade estava sendo desenvolvida em duplas.

Para esta atividade, contamos com a participação de 7 estudantes, as duplas formadas foram entre os estudantes A e B, C e D, G e H, e como não foi possível formar uma outra dupla, o estudante E desenvolveu as atividades sozinho neste encontro.

Ao iniciarem as atividades propostas pelo Jogo Caça-níquel, rapidamente as duplas conseguiram assimilar antes mesmo do 5 nível (os jogos possuem 19 níveis cada) e terminar os dois primeiros games (1 e 1b), sendo que a dupla G e H conseguiram terminar os dois games primeiramente e o último a finalizar foi o estudante E, que fez as atividades sozinho. A demora na resolução destes dois games deu-se no momento de explicarem com as próprias palavras, se as jogadas poderiam ser previstas a cada nível ou não, e qual era a regra de formação das sequências. Quando questionados individualmente sobre a formação do game 1, que possui ordem de formação as letras do alfabeto em ordem crescente, as respostas apresentadas pelas duplas foram:

A e B: Previsível, porque segue a ordem alfabética crescente.

C e D: Previsível, a ordem é crescente.

E: Sim [*é previsível*], era uma ordem crescente de letras.

G e H: Sim, era previsível, porque era na ordem crescente do alfabeto.

De modo semelhante, também responderam quando questionado sobre isso no game 1b, como podemos ver nas respostas das seguintes duplas:

E: Sim [*é previsível*], era uma ordem decrescente de letras.

G e H: Sim [*era previsível*], era decrescente.

A única dificuldade apresentada pelos estudantes, ocorreu no momento destas justificativas, ao explicarem se os jogos eram previsíveis ou não, a dupla C e D, e o estudante E, destacaram o fator da ordenação crescente das letras, no entanto, não conseguiram relacionar inicialmente ao alfabeto propriamente dito, mesmo quando questionados sobre que ordem crescente eles estavam falando.

Nos jogos 3 e 4, que apresentavam sequências aleatórias que não poderiam ser previstas (o jogo 3 aleatório em números e o jogo 4 aleatório com letras), os estudantes levaram um certo tempo para reconhecerem que as sequências não poderiam ser previstas, isto fez com que as duplas realizassem várias tentativas até acertar ou aparecer a página com todas as possibilidades existentes, onde puderam eliminar as combinações já testadas e optar por outras até acertar.

Inicialmente, os estudantes começaram a testar algumas possibilidades até acertarem. Diante das conclusões feitas anteriormente, algumas duplas passaram a expor as conclusões que estavam chegando, como podemos perceber nas falas dos estudantes:

B: 'Tá' dando tudo aleatória.

E: Eu 'tô' acertando agora no chute [...], eu pego uma vez, e depois troco pra outra.

H: É aleatória?

Esses estudantes reconheceram que o jogo não era previsível, visto que as sequências tinham formação aleatórias, na fala do estudante E, percebemos a estratégia que os mesmos estavam utilizando para encontrarem a sequência

correta, efetuando várias tentativas, os chutes.

As duplas A e B, e C e D identificaram após alguns níveis do game 2 que a sequência correta aparecia na mensagem de erro, isto fez com que os mesmos realizassem apenas tentativa para identificar a sequência correta, como explicada pelo estudante C: “*Você tenta uma vez, e aí a sequência correta aparece*”. Os estudantes G e H, foram os últimos a perceberem esta sugestão na mensagem de erro. De modo semelhante, os estudantes também reconheceram que as sequências no game 3 também era imprevisível e responderam analogamente ao game 2.

Nos games 4 e 4b, as sequências numéricas eram previsíveis, o game 4 possuía a formação dos números ímpares em ordem crescente seguido dos pares em ordem crescente, de modo contrário, o game 4b possuía a ordem dos números pares em ordem crescente seguido dos ímpares em ordem crescente.

Apesar desta dica que aparece na mensagem de erro auxiliar os estudantes a passarem pelo jogo aleatório evitando muitas tentativas, a mesma prejudicou no julgamento e desenvolvimento dos estudantes, nos games 4 e 4b, pois a dupla C e D e o estudante E passaram a “trapacear”, buscando apenas a sequência correta, mas sem descobrir se a mesma poderia ser previsível. Deste modo, foi preciso intervir, reorientando os estudantes a avaliar se havia a possibilidade de descobrir a sequência sem recorrer as tentativas iniciais para ver a dica na mensagem de erro.

Após o término e análise dos games, o estudante E afirmou que não conseguiu encontrar nenhuma possibilidade para encontrar as sequências nos games 4 e 4b:

E: Não [*é previsível*], era aleatória de números.

Este fato demonstra que o auxílio da dica corroborou para um pré-julgamento do estudante, além da interferência ao buscar estratégias para descobrir a previsibilidade no jogo. Enquanto isso, outras duplas conseguiram explicar parcialmente uma parte para a regra de formação das sequências, como podemos ver nas explicações apresentadas pelos estudantes em seus registros escritos.

C e D: [*Game 4 é*] Previsível porque começa pelos ímpares.
[*Game 4b é*] Previsível porque começa pelos pares.

G e H: *[Game 4]* Sim *[é previsível]* os números ímpares vinham na frente. *[No game 4b]* os pares vinham na frente.

A dupla formada pelos estudantes A e B, foi a única dupla que conseguiu apresentar uma resposta completa e coerente, expondo tanto oralmente como por escrito o raciocínio empregado para descobrir as sequências dos games 4 e 4b.

A e B: *[Game 4 é]* Previsível, se prestar atenção, primeiro os ímpares em ordem crescente, depois os pares na mesma ordem. *[No game 4b é]* Previsível, mas também é preciso atenção, primeiro os pares, em ordem crescente seguido pelos ímpares, também do menor para o maior.

A resposta apresentada por esta dupla expõe o cuidado que os mesmos tiveram ao analisar a composição das sequências nos últimos games, destacando as regras de formação. Por outro lado, podemos também destacar a dificuldade apresentada pelos estudantes ao exporem seus pensamentos ao justificarem e explicarem como encontraram determinadas respostas ou funcionamento do jogo, isto ficou bem evidente na aplicação das próximas atividades e ciclos.

Os resultados encontrados nesta pesquisa, são semelhantes aos encontrados por Carvalho (2017) em uma pesquisa com professores e aos de Tonouti (2013) aplicados com estudantes da Educação Infantil, uma vez que os envolvidos tiveram facilidades a trabalhar com a ordem alfabética, mas apresentando dificuldades com ordens mais complexas, porém buscando estratégias para identificar a existência de um padrão.

Diante dos resultados encontrados ao analisar o desempenho dos estudantes diante do Jogo dos caça-níqueis, podemos perceber que, apesar das dificuldades encontrados nos últimos games, a maioria dos estudantes conseguiram analisar e identificar fenômenos aleatórios, bem como reconhecer padrões previsíveis em um jogo, já na primeira atividade do ciclo de aleatoriedade do design.

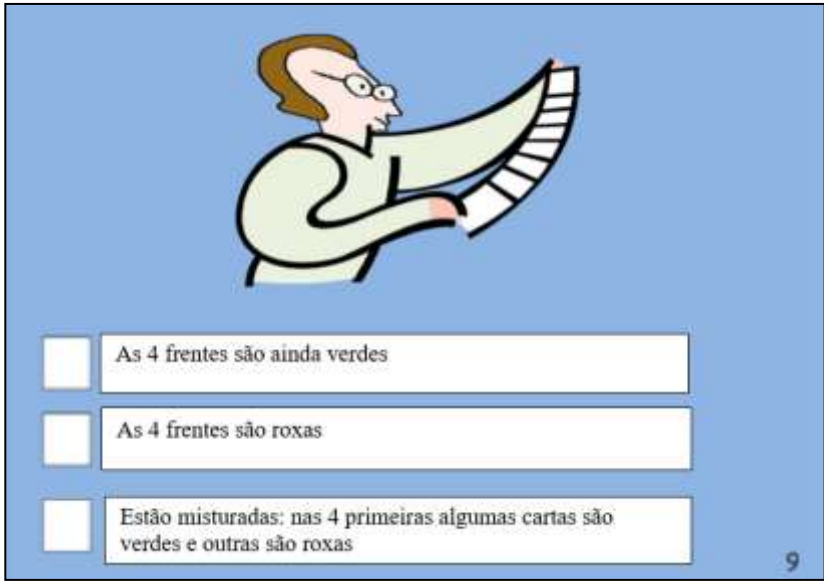
Para o desenvolvimento das atividades 2 a 6, todas do Ciclo de Aleatoriedade, foram aplicadas no segundo encontro. Deste modo, contamos com a participação dos mesmos estudantes, sendo formadas as seguintes duplas: A e B; C e G, e; E e F.

Atividade 2 – O problema das cartas de João

O problema das cartas de Nunes *et al.* (2012), apresenta uma situação em um ambiente de slides de computador, no qual um determinado número de cartas divididos em dois grupos de cores separadamente, ao serem embaralhadas algumas vezes tem a tendência de se misturarem, embora mantendo a quantidade de cartas e as cores originais acabem desfazendo a ordem original. Esta atividade foi colocada como um jogo a ser realizado no computador, mas também com espaço para justificativa no papel.

Quadro 8 – O problema das cartas de João

Problema: João tem 8 cartas: 4 com frentes verdes e 4 com frentes lilás. Então ele embaralha as cartas algumas vezes. O que é a mais provável de acontecer?



As 4 frentes são ainda verdes
 As 4 frentes são roxas
 Estão misturadas: nas 4 primeiras algumas cartas são verdes e outras são roxas

9

FONTE: Nunes *et al.* (2012); Edição do Design Experiments (Apêndice E).

Nesta atividade, todos os estudantes responderam corretamente. A princípio, alguns estudantes tiveram mais dificuldade para reconhecer o caráter aleatório da questão, sendo orientados por colegas de outras duplas, como podemos observar no diálogo entre os estudantes B e C:

B: Se eles vão emborrallar, então como eu vou saber?

C: É isso, vão estar misturadas aleatoriamente.

Em meio ao diálogo, foi possível perceber que o estudante B, não conseguiu

assimilar a princípio que as duas palavras embaralhar e misturar, eram sinônimas, embora fosse possível reconhecer na sua fala de que o mesmo tinha consciência da mistura, mas indagava que não era possível prever a sequência das cartas.

Quanto aos registros escritos, vale destacar as justificativas apresentadas por dois grupos:

A e B: O fato de João ter embaralhado as deixou em ordem aleatória.

C e G: A mistura das cartas fez com que fossem misturadas e ela tinha x% de chances de dar as 4 primeiras rochas ou verdes.

Nestas duas justificativas, é possível perceber que os estudantes passaram a utilizar terminologias de um vocabulário mais matemático para explicar suas respostas, bem como, conseguiram atender ao objetivo estimado para esta atividade, pois os estudantes foram capazes de reconhecer fenômenos aleatórios e não previsíveis após o embaralhamento de cartas em um jogo de computador.

No entanto, quando os estudantes C e G foram questionados sobre a expressão “x% de chances”, o estudante C apenas afirmou que “*é pouca a chance*”. Nesta fala, percebemos que o estudante C além de reconhecer o fator aleatório, conseguiu estimar que eram poucas as chances destes dois eventos acontecerem, porém, o mesmo não conseguiu estimar um valor percentual, dando a este o valor de x como sendo de pouca a probabilidade.

Atividade 3 – As fichas de Jade

Esta atividade tinha como objetivo analisar e identificar fenômenos aleatórios e determinísticos em um jogo de computador, bem como estimar a ocorrência nas situações previsíveis.

Desenvolvida por Nunes *et al.* (2012) em ambiente de slides de computador, como um jogo de computador, esta atividade apresenta três situações que permitem aos estudantes discutirem as possibilidades de ocorrência de um determinado evento, procurando se o evento pode ser determinado ou não. A Situação 1 apresenta aos estudantes uma situação de natureza aleatória (imprevisível), enquanto as Situações 2 e 3, o resultado poderia ser previsto. Como

podemos acompanhá-las do Quadro 9.

Quadro 9 – As fichas de Jade

1ª Situação: Jade tem 4 fichas, todas elas são pretas de um lado e brancas do outro. Ela joga as fichas para cima que caem ao chão. Como elas ficarão após caírem no chão?

2ª Situação: Jade coloca as mesmas 4 fichas na mesa com o lado branco virado para cima. Em seguida, ela vira cada ficha. Como elas ficarão agora?

3ª Situação: Jade coloca as mesmas 4 fichas na mesa com o lado branco voltado para cima. Em seguida, ela vira metade das fichas. Como as fichas ficarão agora?

O que há de diferente, em relação ao resultado, na primeira situação comparada com as outras duas situações?

FONTE: Nunes *et al.* (2012); Edição do Design Experiments (Apêndice E).

As três duplas participantes conseguiram responder as três situações apresentadas corretamente no ambiente de slides para computador, sem precisar jogar mais de uma vez para encontrar a resposta correta. A única dificuldade apresentada por alguns estudantes foi ao justificarem suas respostas por escrito no caderno de acompanhamento, como podemos acompanhar pela fala do estudante C: “*Eu acertei, mas não sei o que escrever*”. Esta mesma dificuldade em expressar um raciocínio por escrito também foi percebida nas primeiras atividades e também na realização do estudo piloto, deste modo intensificamos os diálogos entre os estudantes, levando a buscar primeiro expor verbalmente seu raciocínio e posteriormente fazer este registro no caderno de acompanhamento.

Diante deste exercício, os estudantes conseguiram quebrar um pouco do medo e puderam articular melhor suas palavras. Em seus registros, as justificativas apresentadas quanto a diferença entre os jogos foi bem semelhante, apesar das duplas terem feitos os registros separadamente.

A e B: Na primeira [*situação 1*], Jade jogou as fichas para cima, foi aleatória, não dava pra saber [*o resultado*]. Na segunda e na terceira [*situações 2 e 3*], ela virou as cartas, dava para saber a ordem em que as fichas ficaram.

C e G: Na primeira não dava para prever, mas a segunda e a terceira ‘dava’ pra prever porque ela só virou.

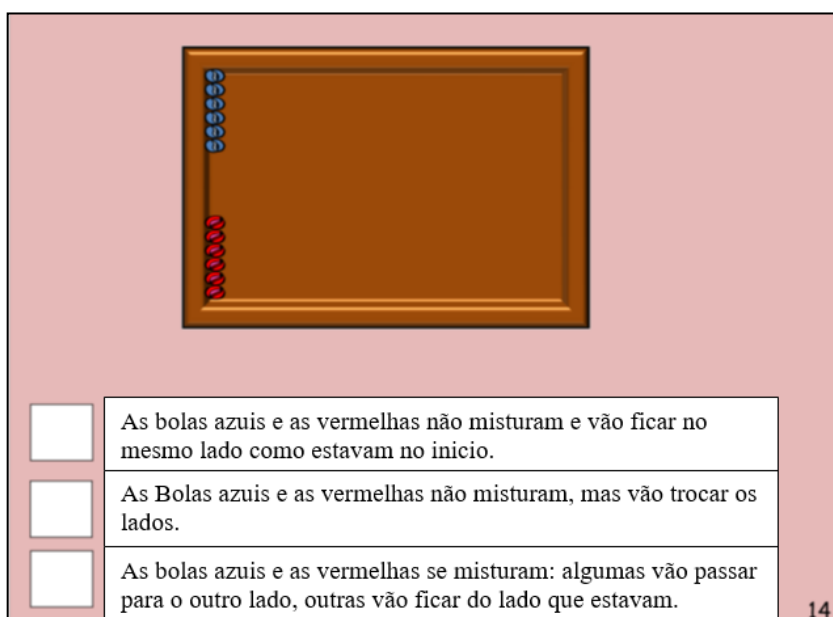
E e F: Porque na situação 1 ele joga as fichas, era totalmente aleatória, já na 2 e a 3 [situações] dava para prever.

Diante dos dados coletados, compreendemos que nosso objetivo foi alcançado, pois os estudantes foram capazes de analisar e identificar o fenômeno aleatório e quando se tratou de eventos determinísticos, os estudantes conseguiram prever estas ocorrências.

Atividade 4 – Tabuleiro de bolinhas

Quadro 10 – Tabuleiro de Bolinhas

Problema: Eu tenho um tabuleiro com bolas nas extremidades: de um lado as bolas são azuis e do outro lado as bolas são vermelhas. Agora eu tiro a partição e inclino o tabuleiro muitas vezes (movendo de um lado para o outro) depois de eu ter feito isso: o que é mais provável de acontecer com as bolas?



<input type="checkbox"/>	As bolas azuis e as vermelhas não misturam e vão ficar no mesmo lado como estavam no início.
<input type="checkbox"/>	As Bolas azuis e as vermelhas não misturam, mas vão trocar os lados.
<input type="checkbox"/>	As bolas azuis e as vermelhas se misturam: algumas vão passar para o outro lado, outras vão ficar do lado que estavam.

14

FONTE: Nunes *et al.* (2012); Edição do Design Experiments (Apêndice E).

Nesta atividade, sem nenhuma dificuldade, todas as duplas conseguiram responder corretamente a atividade apresentada. No entanto, mais uma vez o que veio a dificultar o andamento foi no momento de justificaram por escrito o porquê da resposta dada ser a correta.

Em meios aos diálogos com as duplas, os estudantes foram suscitando as justificativas espontaneamente. Entre as justificativas apresentadas, o estudante B

falou que “*elas (as bolinhas) se misturam porque estão se movimentando aleatoriamente*” e o estudante C explicou que “*é porque se ele virasse de um lado ‘pro’ outro obviamente elas iam se misturar [...]*”.

Após os estudantes exporem suas ideias, no caderno de acompanhamento os estudantes registraram:

A e B: Elas se misturam porque estão se movimentando dentro de uma caixa.

C e G: Porque elas estão se movimentando no tabuleiro.

E e F: Porque se era bolinhas elas se movimentavam com o tabuleiro se mexendo.

Diferentemente da aplicação do estudo piloto, nós optamos por não utilizar o tabuleiro de bolinhas para fazermos a demonstração do experimento, pois no estudo piloto os estudantes conseguiram reagir e responder corretamente sem o auxílio do tabuleiro, deste modo também aconteceu nesta nova etapa, apesar da dificuldade em justificarem as respostas por escrito.

Diante das informações coletadas, conseguimos identificar que os estudantes conseguiram chegar ao objetivo da atividade, sendo capazes de reconhecer um fenômeno aleatório e a imprevisibilidade na disposição das bolinhas em um jogo de computador.

Atividade 5 – Jogo do par ou ímpar

A situação a seguir é uma atividade desenvolvida por Santos (2015), acrescida de uma das atividades também de Santos (2010). Esta atividade tinha como objetivo de promover uma compreensão e apropriação acerca de termos do vocabulário probabilístico, bem como compreender o raciocínio combinatório das possibilidades num jogo de par ou ímpar, desenvolvendo e analisando o espaço amostral de possibilidades, como esperado, a familiarização com um jogo do cotidiano dos estudantes facilitou bastante a compreensão e o desenvolvimento das atividades propostas.

Quadro 11 – O Jogo do Par ou Ímpar

Cada jogador escolhe se quer o 'par' ou o 'ímpar'. Definido isso, os dois jogadores, um de frente para o outro, lançam, ao mesmo tempo, as mãos para frente com valores de 0 a 5 (indicados com a quantidade de dedos das mãos). Se a soma for um número par vence o jogador par, se for um número ímpar, vence o jogador ímpar.

1ª Situação: Escreva todas as possibilidades de um jogo de par ou ímpar entre dois colegas. Cada jogador só pode usar os dedos de uma das mãos.

2ª Situação: Considerando os possíveis resultados de um jogo de par ou ímpar entre dois colegas – em que cada jogador só pode usar os dedos de uma de suas mãos –, classifique com uma das palavras do quadro abaixo os acontecimentos citados:

Impossível – pode ser – possível – bastante provável – certo – se espera que – seguro – há alguma possibilidade – há alguma probabilidade – incerto

- a) A soma ser um número ímpar: _____
- b) A soma ser um número menor do que 10: _____
- c) A soma ser o número 12: _____
- d) A soma ser um número maior do que 0: _____
- e) A soma ser o número 0: _____
- f) Os colegas apresentarem números de dedos distintos: _____
- g) Os colegas apresentarem números de dedos iguais: _____

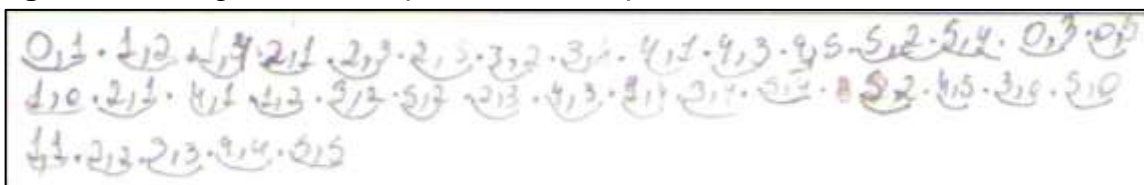
FONTE: Santos (2015)

Na 1ª Situação proposta, os estudantes foram levados a descrever todas combinações dos possíveis resultados existentes em um jogo de par ou ímpar entre dois jogadores. Sem muitas dificuldades, os estudantes conseguiram descrever todas as combinações indicando os pares de números de um possível resultado, no entanto, nenhuma das duplas se preocupou em determinar se o resultado havia sido par ou ímpar, eles apenas transcreveram as combinações em pares.

Dentre as respostas apresentadas, as duplas A e B, e C e G buscaram descrever todas as combinações seguindo a estratégia de fixar o resultado de um jogador e combinar com os possíveis resultados do outro, seguindo a ordem crescente, forma de representação semelhante ao produto cartesiano. Por outro lado, a dupla E e F não seguiram nenhuma estratégia para facilitar as combinações, eles apenas foram descrevendo combinações que lembravam. Vale destacar que, deste modo os estudantes a princípio não apresentaram como resultados possíveis, combinações com os números de dedos iguais. Somente quando comparando sua

resposta com a dupla de estudantes A e B, decidiram acrescentar estes pares, como podemos verificar na Figura 10.

Figura 10 – Registros do mapeamento feito pelos estudantes E e F na Atividade 5



FONTE: Dados da pesquisa.

Na 2ª Situação, os estudantes foram levados a exercitar a linguagem probabilística ao analisar possíveis eventos no jogo de par ou ímpar, buscando exprimir as chances ou força de determinado evento ocorrer. As respostas apresentadas pelos estudantes podem ser acompanhadas na tabela a seguir.

Quadro 12 – Respostas apresentadas pelas duplas na 2ª Situação do Jogo Par ou Ímpar

Respostas das duplas na 2ª Situação	A e B	C e G	E e F
a) A soma ser um número ímpar	Possível	Possível	Possível
b) A soma ser um número menor do que 10	Se espera que	Certe	Pode ser
c) A soma ser o número 12	Impossível	Incerte	Impossível
d) A soma ser um número maior do que 0	Bastante provável	Bastante provável	Bastante provável
e) A soma ser o número 0	Há alguma possibilidade	Pode ser	Pode ser
f) Os colegas apresentarem números de dedos distintos	Bastante provável	Há alguma probabilidade	Pode ser
g) Os colegas apresentarem números de dedos iguais	Pode ser	Há alguma possibilidade	Há alguma possibilidade

FONTE: Dados da pesquisa.

Nesta situação proposta, a maioria das respostas apresentadas pelos estudantes pode ser considerada correta para o evento apresentado. Os estudantes conseguiram analisar a situação e apresentar uma palavra/frase que indicava as chances de cada evento ocorrer, principalmente a dupla A e B que apresentaram as

palavras/frases que melhor se adequavam. No entanto, as outras duplas apresentaram respostas que demonstram que não fizeram a análise das combinações que haviam encontrado para analisar os eventos propostos. São as respostas tachadas acima.

Dentre estas respostas podemos destacar, que ao analisar “a soma ser um número menor do que 10” num jogo de par ou ímpar, a dupla C e G classificou como sendo um evento “certo” o que indica um evento 100% provável, a falha da resposta existe já que o resultado da soma ser exatamente 10. Por outro lado, a dupla E e F classificou com a chance “pode ser”, o que indica pouca probabilidade, quando a probabilidade é bem alta. A dupla C e G também classificou o evento “a soma ser o número 12” como “incerto”, quando deveria ser classificado como impossível já que o maior valor possível para soma é 10. E para o evento “os colegas apresentarem números de dedos distintos”, as duplas também apresentaram palavras que indicavam pouca probabilidade de ocorrer como “há alguma probabilidade” e “pode ser”.

Ao final desta atividade, foi aberto um espaço para que os estudantes pudessem trocar ideias e comparar suas respostas. Neste momento, o professor pesquisador também mostrou no quadro outras formas de representação do espaço de possibilidades em árvore de possibilidade e em tabela, a partir destas representações foi feita a análise das situações do evento para usar uma palavra para expressar as chances.

Diante dos resultados apresentadas, entendemos que os estudantes conseguiram compreender o fator combinatório e desenvolver o espaço de possibilidades no jogo de par ou ímpar através de suas combinações, bem como conseguiram também compreender e estimar com uma palavra/frase do vocabulário probabilístico as chances de um evento ocorrer, embora o fato de não analisar as possibilidades que haviam descoberto anteriormente tenham prejudicado nas suas avaliações. Resultados semelhantes aos encontrados nas pesquisas de Santos (2010, 2015) e Tonouti (2013).

Atividade 6 – Impossíveis versus Improváveis

Esta atividade é uma adaptação da proposta desenvolvida por Carvalho (2017), que busca exercitar a linguagem probabilística. Para esta atividade

buscamos explorar o raciocínio dos estudantes em analisar e diferenciar eventos impossíveis e improváveis de acontecer. A princípio, os estudantes tiveram de analisar as situações em duplas e posteriormente discutir seus raciocínios com as demais duplas. As situações analisadas podem ser acompanhadas a seguir.

Quadro 13 – Atividade Impossíveis versus Improváveis

Analisar as sentenças abaixo e classifique cada sentença em uma situação impossível ou improvável de acontecer.			
Fazer um guarda-chuva de vidro.		x	Fazer um guarda-chuva de ar.
Crescimento do adulto até voltar a ser criança.		x	Crescimento do cabelo até os dedos dos pés.
Contagem dos pelos do rabo do cachorro.		x	Contagem das estrelas em uma noite nublada.
Capturar uma sombra.		x	Capturar uma mosca com pauzinhos.
Não comer por 10 dias.		x	Não comer por 10 meses.
Ler os pensamentos de alguém.		x	Ler os lábios de alguém.
Andar sobre um fio de telefone.		x	Andar sobre a água.
Viver sem coração.		x	Viver sem nariz.
Nunca esquecer o nome de ninguém.		x	Saber o nome de alguém sem conhecê-la.
Desbloquear uma porta com a mente.		x	Desbloquear uma porta com um clipe de papel.
Viver por 120 anos.		x	Viver por mil anos.
Ouvir um som antes de ser produzido.		x	Identificar a raça de um cão por seu latido.
Colagem de uma casca de ovo quebrada de volta no ovo.		x	Desembaralhar um ovo mexido.
Uma mulher dando à luz a um canguru.		x	Uma mulher dando à luz a 20 crianças em uma vida.
Falar sem mover os lábios.		x	Falar duas línguas simultaneamente.
Atravessar uma parede.		x	Atravessar o fogo.
Permanecer acordado durante 5 dias.		x	Permanecer acordado por 5 meses.
Ler um livro sem abrir a capa.		x	Ler um livro de cabeça para baixo.

FONTE: Adaptado de Carvalho (2017).

Nesta atividade, os estudantes avaliaram duas sentenças aparentemente com contextos semelhantes, sendo que uma delas era um evento impossível e outra um evento improvável de acontecer. A princípio, as duplas já classificavam a primeira sentença como impossível, no entanto ao avaliar a segunda sentença, voltavam a reavaliar a sentença anterior, pois apenas uma delas era impossível. Esse processo

de análise gerou uma ótima discussão entre as duplas verificando a possibilidade de cada situação ocorrer.

Todas as duplas de estudantes se saíram muito bem nesta atividade, as duplas A e B, C e G conseguiram distinguir todas as sentenças classificando-as corretamente. Enquanto a dupla E e F cometeu apenas dois erros de análise.

Quase em todas as sentenças os estudantes buscaram justificar com a aplicação no cotidiano, ou relacionar a fatos que já viram ou ouviram, principalmente na televisão. Dentre algumas justificativas apresentadas pelos estudantes, podemos destacar as que foram dadas ao explicarem as sentenças que a dupla E e F erraram.

Na sentença “Contagem das estrelas em uma noite nublada”, o estudante B explicou a dupla E e F, que acreditavam ser uma afirmação improvável, que esta sentença era impossível com um questionamento:

B: Se a gente não consegue ver [as estrelas], como que a gente vai contar?

Na sentença “Falar sem mover os lábios”, o estudante C classificou como improvável, lembrando do ventríloquo para explicar a dupla E e F que tinha errado:

C: Tem pessoas que conseguem falar sem mover os lábios, quando eles estão com aqueles bonecos.

No geral, todas as justificativas apresentadas pelas duplas para justificarem seu raciocínio para analisar e classificar as situações geraram uma ótima discussão e um momento de descontração entre os estudantes. Acreditamos que, com esta atividade, conseguimos alcançar o objetivo proposto para ela, pois os estudantes puderam analisar, discutir a diferença entre eventos impossíveis e improváveis, classificando e justificando-os o seu raciocínio de modo coerente.

Ao final desta atividade, o professor-pesquisador fez então uma breve formalização para distinguir eventos impossíveis e improváveis, tomando como ponto de partida as ideias geradas pela atividade.

Neste primeiro ciclo, tivemos o intuito de atingir um dos nossos objetivos específicos propostos por esta pesquisa que era de *investigar o conhecimento dos alunos em atividades que envolvam aleatoriedade*, buscando compreender os seus

raciocínios e as dificuldades. Deste modo, utilizamos seis atividades que mobilizaram este conhecimento em situações na qual os estudantes tiveram que lidar e reconhecer a natureza aleatória, a previsibilidade e diferentes tipos de eventos.

Diante dos resultados, entendemos que no desenvolvimento das atividades deste ciclo exploradas com o uso do computador ((1) Jogo dos caça-níqueis; (2) O problema das cartas de João; (3) As fichas de Jade, e; (4) Tabuleiro de bolinhas), os estudantes conseguiram diferenciar eventos determinísticos (previsíveis) daqueles que não eram determinísticos (imprevisíveis, aleatórios), reconhecendo os padrões, conseguindo explicar oralmente e por escrito as regras de formação que caracterizavam os eventos previsíveis e determinar quais eram as sequências destes eventos. O que demonstra que estes estudantes conseguiram determinar de modo intuitivo os possíveis resultados de um fenômeno de natureza aleatória.

Com o uso das tarefas (5) Jogo do par ou ímpar e (6) Impossíveis versus Improváveis do caderno de acompanhamento do estudante, verificamos que os estudantes conseguiram responder corretamente a maioria dos questionamentos, utilizando e estimando com precisão, uma palavra do vocabulário probabilístico as chances de um evento ocorrer, justificando o seu raciocínio de modo coerente. Discutindo intuitivamente a probabilidade com os demais colegas e o professor-pesquisador, fazendo uso de um vocabulário probabilístico e expressando a probabilidade precisa por meio de uma palavra.

Podemos destacar que levar os estudantes a exercitar sua argumentação na fala e na escrita, apesar da dificuldade inicial, foi muito proveitoso, pois percebemos em suas falas o esforço e a evolução para utilizar terminologias que achassem mais adequadas ao justificar suas respostas.

Vale destacar também que, apesar da atividade (5) do Jogo do par ou ímpar não trazer a este ciclo o objetivo do mapeamento do espaço amostral, os estudantes conseguiram compreender o fator combinatório e desenvolver o espaço de possibilidades dentro de um jogo de par ou ímpar.

No desenvolvimento deste ciclo, verificamos também os estudantes conseguiram relacionar os conceitos abordados nas atividades com situações do cotidiano, seja pelo próprio jogo do par ou ímpar (atividade 5), na relação de um baralho com o problema das cartas de João (atividade 2), na associação da moeda com as fichas de Jade (atividade 4), ao lembrarem a não linearidade do percurso

de um objeto esférico para explicar tabuleiro de bolinhas (atividade 4).

Percebemos diante dos resultados apresentados nas falas e expressões dos estudantes, a percepção intuitiva sobre a probabilidade, seja no reconhecimento dos eventos com maior chance de ocorrência, na distinção de situações impossíveis e improváveis, ou ao prever e determinar resultados com base na lógica apresentada pelas questões e associações com experiências do cotidiano, isso vem corroborar com a concepção do significado intuitivo, um dos importantes significados da Probabilidade descritos por Batanero (2005), bem como apresentado por Carvalho, (2017) e Santos (2010) em suas pesquisas.

Deste modo, entendemos que os estudantes conseguiram compreender a natureza aleatória e as consequências da aleatoriedade nas atividades apresentadas, um dos importantes fatores necessários para compreender a ideia de probabilidade conforme ressaltam Bryant e Nunes (2012) e Nunes *et al.* (2012) sobre as demandas cognitivas da Probabilidade.

Os resultados encontrados neste ciclo, seguem a mesma direção de estudos já realizados, como os de Santos (2010, 2015), e até mesmo em estudos realizados com grupos de níveis escolares diferentes, como os de Tonouti (2013) há Educação Infantil, e de Carvalho (2017) e Santana e Borba (2017) com professores da Educação Básica. Em especial, ao uso da linguagem probabilística, até mesmo nas dificuldades de uma argumentação coerente. Esses resultados também coadunam com as expectativas de aprendizagem e as habilidades previstas para estudantes do Ensino Fundamental parametrizadas pelos documentos oficiais brasileiros (PERNAMBUCO, 2012, 2019; BRASIL, 2018).

5.2.2 Segundo ciclo do design: espaço amostral

O desenvolvimento deste ciclo se deu em dois encontros (3º e 4º encontro), contamos com a participação de seis estudantes no 3º encontro e de cinco estudantes do 4º encontro.

Para este ciclo, tivemos como objetivo fortalecer o pensamento aleatório do primeiro ciclo, buscando analisar e compreender o pensamento e o raciocínio aleatório e combinatório dos estudantes nas suas formas de representação e mapeamento das possibilidades presentes em cada atividade. A partir deste mapeamento, os estudantes também foram levados a explicar e quantificar as

possibilidades de determinados eventos a partir do espaço amostral mapeado.

Para o desenvolvimento deste ciclo, utilizamos 3 (três) atividades, cuja análise será apresentada a seguir, ao final a análise sintética deste ciclo.

Atividade 7 – Os filhos de Romeu e Julieta

Nesta atividade, os estudantes se depararam com uma situação em que deveriam analisar as possibilidades do nascimento de três crianças, tendo como princípios as diferentes combinações de sexo dos bebês, para avaliar qual situação era mais provável de ocorrer ou se as chances seriam as mesmas, como podemos ver no Quadro 14, a seguir.

Quadro 14 – Atividade Os filhos de Romeu e Julieta

Situação: Romeu e Julieta estão planejando ter três filhos após o casamento. Como sabemos, o sexo do bebê que será gerado não pode ser determinado, sabemos apenas que pode ser do sexo masculino e feminino. Romeu e Julieta estavam pensando nas combinações possíveis dos filhos que teriam entre a quantidade de homens e mulheres.

a) O que você acha que é mais provável de acontecer?

- () Ter os três filhos do mesmo sexo.
- () Ter apenas dois filhos do mesmo sexo.
- () As chances são as mesmas.

Por quê? _____

b) Descreva todas as combinações possíveis dos filhos que Romeu e Julieta poderiam ter, pensando pela ordem dos nascimentos dos filhos.

FONTE: O Autor (2019).

Inicialmente, ao tentar responder o item 'a', as duplas apresentaram o mesmo dilema que encontramos na aplicação do estudo piloto, eles deduziram que os nascimentos dos três filhos seriam necessariamente trigêmeos. Desde modo, foi necessário explicar aos estudantes que se tratava de nascimentos distintos, ou seja, gestações distintas.

Ao responderem o primeiro item, as duplas afirmaram que “as chances são as mesmas”, no entanto alguns estudantes tiveram bastante dificuldade de justificarem as respostas apresentadas, principalmente por escrito no caderno de

acompanhamento. Deste modo, aberto um espaço para socialização e troca de ideias entre os estudantes, dois estudantes apresentaram justificativa bem mais consistentes, de acordo com a decisão que tiveram. Eles disseram:

B: Se nasce um menino, aí depois nasce uma menina e depois um menino, aí vai ficar com dois do mesmo sexo e um de sexo diferente, porque são três, aí tem a chance de nascer um do sexo diferente e dois iguais. Mas também pode ser o caso de nascer tudo do mesmo jeito.

D: Porque pode vir três meninos como também três meninas ou pode vir misturado.

Ambos os estudantes tentaram explicar que as chances seriam as mesmas, pois seriam duas chances se nascerem três crianças do mesmo sexo (3 meninos ou 3 meninas), como poderiam ser duas chances de nascimento do mesmo sexo e um de sexo diferente (2 meninas e 1 menino, ou 2 meninos e 1 menina). No entanto, nenhum dos estudantes tentou encontrar a princípio as diferentes formas de nascimento, para depois verificar o número de variações com o nascimento de crianças de sexo diferentes.

Deste modo, seguimos para o item 'b', onde os estudantes foram chamados a descreverem todas as combinações diferentes em um nascimento.

As duplas de estudantes A e B, E e F representaram todas as combinações corretamente, não esquecendo ou repetindo nenhuma combinação. Eles utilizaram as iniciais M para masculino e F para feminino, sugerido pelo professor pesquisador para não ser necessário escrever a palavra completa, para que a representação fosse menos cansativa. Por outro lado, a dupla C e D, optaram por escrever a palavra completa (homem / mulher) ao representarem. Porém, esqueceram de representar duas possibilidades, que vieram a ser corrigidas quando alertados pelo professor-pesquisador.

A dupla de estudantes A e B foi a única que apresentou uma estratégia ao descrever as possibilidades, esgotando primeiramente as combinações começando pelo M (masculino) e depois pelo F (Feminino), bem semelhante as formas de representação de espaço amostral utilizadas em Análise Combinatória. Podemos ver essa descrição na Figura 11, quando comparamos com a descrição feita pela dupla E e F, que embora não tendo esquecido nenhuma combinação, precisou ficar

no Ensino Fundamental e no “Jogo da Samanta”¹⁴ de Tonouti (2013) aplicado na Educação Infantil. Diante de uma situação que aparentemente possuem mesmas chances, faz-se necessário determinar as diferentes possibilidades do espaço amostral e determinar a maior probabilidade. Santos (2010), destaca que nestes momentos é necessário a utilização da análise de possibilidades (combinatória).

Diante destes resultados, acreditamos que o objetivo proposto pela atividade foi alcançado, visto que os estudantes foram capazes de mapear todas as combinações, embora uma das duplas tenha sido convidada a reanalisar as opções e identificar as combinações esquecidas. Contudo, os estudantes conseguiram identificar e quantificar as possibilidades para analisar os eventos discutidos.

Atividade 8 – Corrida de cavalos

A atividade “corrida de cavalos” adaptado de Santos (2015), remonta um jogo cujo objetivo proposto para o Design Experiments prevê o mapeamento de todas as combinações realizado com dois dados, numerados de 1 até 6, a fim de auxiliar no raciocínio e compreensão dos estudantes sobre a existência de espaço amostral não equiprovável. As regras, o tabuleiro do jogo e os itens utilizados para estimular a compreensão dos estudantes utilizados no design estão dispostos no Quadro 15 a seguir.

¹⁴ É o mesmo jogo “Saco dos Doces” (de morango e groselha) de Nunes *et al.* (2012).

Quadro 15 – Atividade Corrida de cavalos

Regras do jogo:

- Cada jogador aposta em três cavalos, podendo ambos, apostar no mesmo cavalo.
- Alternadamente, os jogadores lançam os dados e calculam a soma dos pontos obtidos na face superior dos mesmos.
- A soma obtida corresponde ao cavalo que avançará uma casa.
- Ganha o cavalo que primeiro alcançar a linha de chegada, independentemente de ser um dos cavalos apostados.

CHEGADA													
9													
8													
7													
6													
5													
4													
3													
2													
1													
LARGADA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
REGISTRO DAS APOSTAS													

- a) Há algum cavalo que tem mais ou menos chances de vencer que o outro? Justifique sua resposta.
- b) Descreva todas as possibilidades existentes entre a soma de dois dados. Em seguida, quantifique as chances que cada número tem de ocorrer no lançamento.
- c) O registro feito no tabuleiro da corrida e o total de possibilidades para número são semelhantes?

FONTE: Adaptado de Santos (2015).

Após serem explicados as regras do jogo, os estudantes realizaram suas 'apostas'. Coincidentemente, os estudantes de cada dupla apostaram em cavalos diferentes. A princípio, alguns estudantes analisaram as numerações para escolher os cavalos que esperariam vencer, outros estudantes passaram a observar as possibilidades que poderiam ocorrer para que um cavalo pudesse avançar no jogo. Em meio a esta análise, antes mesmo de começarem a jogar, o estudante B comenta com outra dupla ao seu lado e com o professor pesquisador:

B: Os dados não vão dar 1 não.

Pesquisador: Por que não?

B: Como é que vai dar 1? Como é que vai dar 13?

E: Do número 1 eu já sabia. 'Eita', eu apostei no 13.

F: Por isso, eu não marquei nenhum dos dois.

Em meio ao debate proporcionado pelo questionamento, O estudante B detecta que os números 1 e 13 são impossíveis em um jogo envolvendo a numeração de apenas dois dados. Mesma descoberta feita pelos estudantes da dupla E e F, no entanto, o estudante E não analisou a possibilidade no último cavalo, o número 13.

Enquanto isso, a dupla C e D que não participou desta discussão, enquanto já estavam jogando, o estudante C constata após alguns lançamentos dos dados, o que já havia sido percebido pelos demais estudantes:

C: O 13 não tem como.

Pesquisador: Por que não?

C: Porque o valor máximo só vai até o 12.

Mais uma vez, pudemos perceber que o estudante foi capaz de reconhecer em meio ao processo empírico, a existência de um evento impossível, assim como os demais colegas.

Ao final do jogo, o 'cavalo' de número 7 foi o vencedor. Os estudantes vencedores foram B e F, porém, nenhum dos estudantes da dupla C e D apostou no número 7. Ao analisarem o item 'a', para verificar se havia algum cavalo que possuía mais ou menos chance de vencer que outros, os estudantes responderam:

A e B: Os que tem mais chance são 6, 7 e 8; 4, 5 e 9 e 10 têm chance, mas nem tanto; 2, 3, 11 e 12 tem poucas chances; 1 e 13 não tem chance alguma.

C: Eu acho que o 7 tem mais chance [...]. Pode ser 4 e 3, 5 e 2, 6 e 1, e pode trocar. O 7 teria mais possibilidade de ganhar por causa da soma.

D: 1 e 13 não tem mais chance porque os números não tinham como sair.

E e F: O 7 têm mais chances porque 'tá' no meio [...]. 1 e 13 é impossível porque são dois dados.

Diante das respostas apresentadas, podemos perceber que os estudantes conseguiram identificar os resultados impossíveis para o jogo, além de identificar o número que possuía mais chance, isso se deve principalmente ao resultado do jogo, dando o cavalo número 7 o vencedor. Cabe destacar, que os estudantes A e B buscaram estimar as chances para um grupo de números que possuíam chances bem próximas, utilizando as palavras que acharam mais adequadas de acordo com a chance, algo parecido com o que fizeram na Atividade 5.

No item 'b', quando chamados a descrever todas possibilidades existentes para um jogo com dois dados, as duplas A e B, C e D conseguiram apresentar todas as combinações possíveis, bem como quantificar o número de chance para cada resultado. Como podemos observar no registro da dupla A e B, na Figura 12.

Figura 12 – Registros do mapeamento feito pelos estudantes A e B na atividade Corrida de cavalos

1 × 1 2 3 3 5 5 1 6 2		2 5 8 6 9	2 → 1	10 → 3
1 × 2 2 4 3 6 5 2 6 3		3 6 9 7 10	3 → 2	11 → 2
1 × 3 2 5 4 1 5 3 6 4	36	4 7 5 8 11	4 → 3	12 → 1
1 × 4 2 6 4 2 5 4 6 5		5 8 6 9 12	5 → 4	
1 × 5 3 1 4 3 5 5 6 6		6 4 7 10	6 → 5	
1 × 6 3 2 4 4 5 6		7 5 8 11	7 → 6	
2 × 1 3 3 4 5 6 1		3 6 9 7	8 → 5	
2 × 2 3 4 4 6		4 7 10 8	9 → 4	

FONTE: Dados da pesquisa.

Para isso, estas duplas utilizaram para mapear o espaço amostral, fixando por extenso a numeração do primeiro dado, combinando com a sequência de resultados do segundo dado. Método semelhante ao produto cartesiano utilizado para mapear espaços amostrais, tanto em Probabilidade como em Análise Combinatória.

Por outro lado, a dupla E e F combinaram primeiramente as situações com os dados apresentando valores iguais, logo em seguida utilizaram a mesma estratégia dos colegas.

Ao fim desta atividade, já no item 'c', os estudantes afirmaram que o registro de apostas apresentou resultado semelhante a descrição dos resultados no

mapeamento, com o 7 possuindo “*mais chances de aparecer do que 1 e 13 que não aparece*” (C e D), já que são eventos impossíveis.

Os resultados encontrados nesta atividade, demonstram que o objetivo proposto para ela foi atingido, pois os estudantes conseguiram perceber e identificar que além dos eventos não possuem as mesmas chances, existiam eventos que eram impossíveis de ocorrer, bem como também foram capazes de desenvolver o espaço amostral existência numa situação que envolvia dois dados numerados de 1 a 6.

Os resultados encontrados com esta atividade, também vão na mesma direção dos encontrados em outras pesquisas. Com esta mesma atividade, aplicada por Santos (2010) com estudantes do Ensino Fundamental, pois os estudantes apresentaram uma concepção intuitiva entre as suas escolhas, bem como estimativa as possibilidades de determinados eventos por meio de vocabulário probabilístico. Enquanto Tonouti (2013), em um estudo com estudantes da Educação Infantil, encontrou as mesmas dificuldades numa atividade envolvendo dados, em representar as combinações do espaço amostral com as estratégias que adotaram, fazendo necessário uma melhor ambientação em relacionar com conceitos de combinatória.

Atividade 9 – Passeios aleatórios da Mônica

A atividade desenvolvida no 4º encontro, contou com a participação de 5 (cinco) estudantes, sendo as duplas compostas pelos estudantes A e B, C e D, e o estudante E sozinho.

Esta atividade é um breve recorte do ambiente virtual de aprendizagem desenvolvida por Cazorla, Kataoka e Nagamine (2010) e que também é adaptada por Kataoka (2010). Para que fosse possível a aplicação neste ciclo, precisamos fazer pequenas adaptações, visto que a proposta inicial realizada pelas autoras agora citadas, estava voltada para um nível maior, no qual os estudantes já possuíam alguns conhecimentos de Probabilidade.

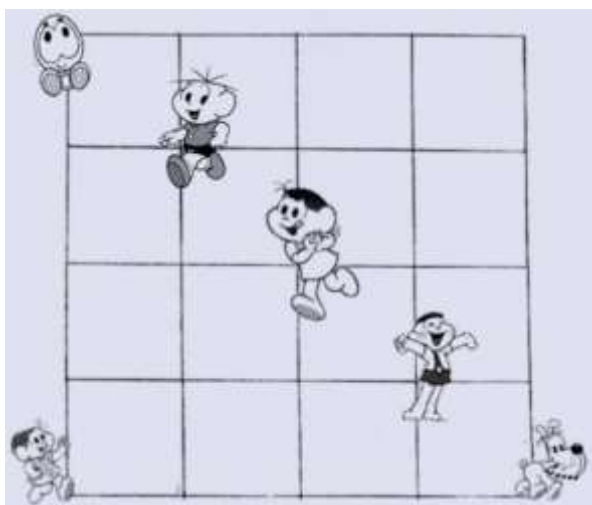
O que nos levou a escolher esta atividade, foi o fato dela permitir relacionar os conceitos abordados nos dois primeiros ciclos. Deste modo, a atividade propôs reconhecer o fator aleatório, realização de procedimento empírico (experimental) e a descrição do espaço amostral para ser feita a quantificação da probabilidade através

de uma razão, por se tratar de estudantes do 7º e 8º dos anos finais do Ensino Fundamental.

A atividade está dividida em 4 questões, tomando como base a seguinte estória:

Quadro 16 – Passeios aleatórios da Mônica – 1ª e 2ª Questões

Estória: “A Mônica e seus amigos moram no mesmo bairro. A distância da casa da Mônica para a casa de Horácio, Cebolinha, Magali, Cascão e Bidu é de quatro quarteirões. A Mônica costumava visitar seus amigos durante os dias da semana em uma ordem pré-estabelecida: segunda-feira, Horácio; terça-feira, Cebolinha; quarta-feira, Magali; quinta-feira, Cascão e sexta-feira, Bidu. Para tornar mais emocionantes os encontros, a turma combinou que o acaso escolhesse o amigo a ser visitado pela Mônica. Para isso, na saída de sua casa e a cada cruzamento, Mônica deve jogar uma moeda; se sair cara (C), andar um quarteirão para o Norte (vertical para cima), se sair coroa (X), um quarteirão para o Leste (horizontal à direita). Cada jogada representa um quarteirão de percurso. Mônica deve jogar a moeda quatro vezes para poder chegar à casa dos amigos”.



Mapa dos Passeios aleatórios da Mônica (KATAOKA, 2010).

1º Qual é a diferença entre a forma antiga da Mônica visitar seus amigos e a nova forma? _____

2º Todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados?

() Não. Quais são as chances: _____

() Sim. Qual é a chance: _____

Por que vocês acham isso?: _____

FONTE: Adaptado de Kataoka (2010).

Após a leitura da estória, foi aberto um espaço para os estudantes

socializarem e na sequência os estudantes foram chamados a responder a 1ª e 2ª questão da atividade. Na 1ª questão, quando chamados a explicar a diferença entre as duas formas de visita realiza pela Mônica, ou seja, antes e depois da moeda, os estudantes apresentaram as seguintes justificativas:

A e B: A forma antiga era sempre igual, já estava determinado. Na forma nova é em ordem aleatória.

C e D: Porque antes ela ia para uma casa específica, agora é aleatório, pode ser qualquer casa.

E: Antes era cada dia um, agora é totalmente aleatória.

Podemos perceber que todos os estudantes reconheceram a existência do fator aleatório quando utilizada a moeda, bem como utilizaram o próprio termo “aleatório” em suas falas, demonstrando uma melhor compreensão, já que o resultado não poderia ser previsto.

Na 2ª questão, os estudantes foram chamados a analisar se os amigos da Mônica possuíam ou não, a mesma chance de serem visitados, bem como dizer quais seriam estas chances e em seguida explicá-las. Embora nenhum dos estudantes soube estimar quais seriam estas chances, eles foram capazes de apontar quais dos amigos possuíam mais chances e quais possuíam menos chances, como podemos acompanhar nas justificativas apresentadas abaixo:

A e B: [Não.] Cebolinha, Magali e Cascão têm mais chances. Bidu e Horácio possuem menos chances porque é menos provável que saia 4 vezes cara ou 4 vezes coroa.

C e D: [Não.] Horácio e Bidu *[têm menos chance]*. Porque a moeda tem que dar o mesmo desenho 4 vezes.

E: Não. Porque é na sorte da moeda, portanto eles podem ficar até um ano sem ser visitado. O que tem mais chances são Cebolinha, Magali e Cascão.

Em suas respostas percebemos mais uma vez que os estudantes compreenderam a ideia de aleatoriedade e que este fator aleatório implica nas diferentes possibilidades da atividade em discussão. Os estudantes identificaram os dois amigos que possuíam menos chances de serem visitados, devido à dificuldade

de se obter “4 vezes cara ou 4 vezes coroa” (A e B). Quanto ao que possuía mais chances, todos os estudantes se referiram aos três amigos centrais, porém, os estudantes A e C afirmaram apenas que “a do meio, Magali”, no entanto, os mesmos não souberam explicar qual seria esta chance em valor.

Na 3ª questão a seguir, os estudantes realizaram o experimento aleatório com a moeda para determinar quem seria o amigo visitado, em 20 visitas, na sequência os estudantes precisaram encontrar a razão da frequência relativa a cada amigo visitado, bem como identificar o amigo mais visitado.

Quadro 17 – Passeios aleatórios da Mônica – 3ª Questão

3º Seguindo a segunda estratégia da Monica para visitar um amigo, lançando uma moeda quatro vezes: *Se sair cara (C), Mônica andar*á um quarteirão para o Norte (vertical para cima), *se sair coroa (X), um quarteirão para o Leste (horizontal à direita).*

Você e seu/sua colega devem repetir esse experimento 20 vezes e anotar os resultados no quadro abaixo. (Por exemplo, se sair a sequência: cara, cara, coroa, cara, anotar na coluna sequência: CCXC e, na coluna do amigo visitado: Cebolinha).

Repetição	Sequência	Amigo visitado	Repetição	Sequência	Amigo visitado
1			11		
2			12		
3			13		
4			14		
5			15		
6			16		
7			17		
8			18		
9			19		
10			20		

a) De acordo com os resultados do experimento acima, indique na tabela a frequência referente aos amigos visitados, como “a razão entre a quantidade de vezes que o amigo foi visitado e o total de visitas feitas pela Mônica”.

	Horácio	Cebolinha	Magali	Cascão	Bidu
Frequência Relativa					

b) Qual amigo foi mais vezes visitado pela Mônica? _____

A atividade foi divertida para os estudantes, a princípio alguns estudantes começaram a dizer frases como “*só vai dar Magali*” (C), e na sequência este mesmo estudante reconhecendo os padrões que se estabeleciam, disse compartilhando com seus colegas:

C: Quando der dois ‘x’ e dois ‘c’ é Magali. [...] Quando a maioria deles der ‘x’ e tiver um ‘c’ é Cascão, se tiver três ‘c’ e um ‘x’ é Cebolinha.

Todos os estudantes realizaram o procedimento corretamente. Ao final do experimento, no item ‘a’ quando chamados a encontrar a frequência relativa por meio de uma razão, foi necessário que o professor pesquisador interviesse para explicar e relembrar o conceito de razão e frequência relativa aos estudantes.

Na sequência, todos os estudantes responderam corretamente encontrando as frequências relativas à quantidade de vezes que o amigo foi visitado referente ao total de visitas feitas pela Mônica. Dentre os resultados, podemos destacar que no experimento dos estudantes C e D, o Horácio não foi visitado nenhuma vez, enquanto no experimento do estudante E, Cebolinha e Magali receberam a mesma quantidade de visitas, mas todos os estudantes tiveram como vencedor a Magali, como questionado no item “c”.

Na 4ª questão a seguir, os estudantes foram levados a descrever o espaço amostral de todas as possibilidades, assim como na 3ª questão, também tiveram de encontrar a razão da frequência relativa a cada amigo visitado e identificar o amigo mais visitado, bem como comparar a situações vividas na 3ª e 4ª questões.

Quadro 18 – Passeios aleatórios da Mônica – 4ª Questão

4º Ainda diante da situação que a Mônica irá visitar um amigo, procure descrever todas as possibilidades existentes depois de lançar uma moeda 4 vezes. Use C para cara, e X para coroa, em seguida, anote o amigo visitado.

a) De acordo com todas estas possibilidades encontradas acima, indique na tabela a frequência relativa referente a quantidade de vezes que cada amigo foi visitado.

	Horácio	Cebolinha	Magali	Cascão	Bidu
Frequência Relativa					

b) Qual amigo tem mais chance de ser visitado? _____

c) As chances coincidiram com o resultado do experimento da 3º Questão? Explique.

FONTE: Adaptado de Kataoka (2010).

Ao iniciar a 4ª questão, todos os estudantes precisaram descrever todas as combinações possíveis do espaço amostral. Alguns estudantes tiveram um pouco de dificuldade de descrever e acabaram por esquecer algumas combinações e repetir outras, o que foi corrigido depois de revisitarem as combinações.

Os estudantes A e B descreveram corretamente as combinações isolando todas as combinações que começavam com 'x' (coroa) e depois as que começam com 'c' (cara). Os estudantes C e D começaram a descrever por bloco, primeiro as sequencias iguais, depois todas as combinações que possuíam apenas um 'c', depois as que possuíam apenas um 'x' e por último as combinações que possuíam dois 'c' e dois 'x'. O estudante E começou a representar pelas quantidades de 'x' e depois pelas quantidades de 'c', segundo pelas variações de dois 'c' e dois 'x'.

No item 'a' todos os estudantes encontraram corretamente as frequências relativas sem nenhuma dificuldade além de identificarem o amigo mais visitado no item 'b', a Magali.

Já no item 'c', quando chamados a explicar se as chances encontradas na descrição de todas as combinações coincidiram com as encontradas no experimento, os estudantes responderam:

A e B: Sim, Magali foi a mais visitada e Bidu e Horácio tiveram uma visita apenas.

C e D: Sim, porque a Magali foi a mais visitada.

E: Não, o Cebolinha empata com Magali em 7 vezes e o Bidu apareceu 3 vezes, o Cascão apareceu 3 vezes.

Percebemos assim que os estudantes conseguiram destacar todos os pontos que foram compatíveis, em especial os estudantes A e B, já que em seu experimento os amigos Bidu e Horácio receberam apenas uma visita no experimento deles. Por outro lado, cabe destacar a resposta do estudante E, para eles não houve coincidência, pois no seu experimento houve um empate nos amigos mais visitados e Bidu que tinha uma chance na 4^o questão, em seu experimento ele foi visitado 3 vezes.

Diante de todos os resultados encontrados, acreditamos que os objetivos propostos pela atividade foram alcançados, visto que os estudantes conseguiram compreender a aleatoriedade bem como identificar e explicar os que possuíam mais chance e menos chances antes mesmo da realização do experimento. Por outro lado, tanto na realização do procedimento empírico como no mapeamento do espaço amostral, os estudantes conseguiram não só mapear o espaço amostral como também encontrar e quantificar a probabilidade por meio de uma razão.

Por se tratar de uma atividade muito utilizadas em diversos níveis, diante destas pesquisas vemos resultados hora semelhantes e hora distintos. Ferreira (2011), aplicou no Ensino Médio e Cazorla, Gusmão e Kataoka (2011) com professores, ambas com adaptações em ambiente digital, identificaram que os participantes conseguiram identificar as diferenças entre um experimento determinístico e um aleatório com relação à moeda, no entanto reconhecendo que alguns amigos possuíam mais chances de serem visitados. Por outro lado, na aplicação de Silva (2016) na Educação Infantil, os estudantes não conseguiram associar as ideias de chance e as diferenças entre os eventos com e seu o uso da moeda, atribuindo as maiores chances devido aos trajetos serem mais curtos ou retilíneos, não conseguindo descrever mais do que 5 possibilidades de um universo de 16.

Diante destes resultados percebemos a importância da experiência prática tanto na experimentação como no mapeamento do espaço amostral, que o grau de maturidade dos envolvidos também pode influenciar no raciocínio e nas estratégias, bem como o número de combinações também pode interferir no esgotamento destas

possibilidades.

Ao final deste ciclo, o professor pesquisador realizou um processo de formalização do conceito de probabilidade, aproveitando os conceitos discutido nesta e em outras atividades, com base nos conceitos clássico e frequentista. Neste momento, também foi rediscutido as diferentes formas de representação, em especial para esta atividade, utilizamos a representação em árvore de possibilidades.

Neste segundo ciclo, buscamos atingir nosso objetivo específico proposto por esta pesquisa que era de *investigar o conhecimento dos alunos em atividades para compreensão do espaço amostral e as diversas formas de representação*, a fim de compreender o raciocínio aleatório e combinatório dos estudantes nas suas formas de representação e mapeamento das possibilidades apresentadas nas atividades deste ciclo.

Utilizamos assim, três atividades tendo em vista a mobilização do mapeamento das possibilidades do espaço amostral e a quantificação de diferentes eventos para auxiliar na compreensão da natureza da probabilidade, como destacam Bryant e Nunes (2012) e Nunes *et al.* (2012).

Nas atividades aplicadas deste ciclo, quando levados a mapearem o espaço amostral das possibilidades, as estratégias de representação mais utilizadas pelos estudantes são semelhantes a forma de produto cartesiano, sempre fixando um elemento e combinando com as demais possibilidades. Nestas formas de registro, os estudantes utilizaram a representação da expressão algébrica da soma das faces de dois dados na Corrida de Cavalos (atividade 8), combinação das iniciais sugeridas para a moeda nas atividades (9) Passeios aleatórios da Mônica, (7) Os filhos de Romeu e Julieta, sendo que nesta última, uma das duplas escreveu por extenso a palavra completa (homem/mulher). Embora fizesse parte do ciclo aleatoriedade, os estudantes apresentaram o mesmo raciocínio na resolução da atividade (5) Jogo do par ou ímpar, ao combinarem os dedos das mãos e acharem todas as possibilidades.

Percebemos ao longo do ciclo que nem todos as duplas de estudantes conseguiram determinar por completo todas as combinações, no entanto, com o decorrer das atividades e revisões dos próprios estudantes, as duplas que não encontraram todas as combinações se aproximavam do esgotamento destas.

Houve também uma melhora no desempenho destes estudantes tanto no reconhecimento das situações aleatórias como na argumentação no momento das explicações das respostas.

Vale destacar que não buscamos analisar as atividades do ponto de vista da Análise Combinatória propriamente dita, mas identificar quais as estratégias e formas de representação foram utilizadas pelos estudantes de forma autônoma.

No desenvolvimento da atividade (7) Os filhos de Romeu e Julieta, foi proposta a princípio uma análise dos estudantes com base nas afirmações dadas no problema, para que estes pudessem inferir sobre a melhor chance. Nenhum dos estudantes acertou a opção de maior probabilidade, nem mesmo buscaram identificar quais seriam estas possíveis combinações registrando no caderno de apoio, fizeram apenas breves suposições verbalmente, com isso tiveram bastante dificuldade para explicarem a resposta que acreditavam ser a correta. Estes resultados são semelhantes aos achados de Santos (2010) e Tonouti (2013) com atividades de natureza semelhantes.

Porém, quando chamados a mapearem o espaço amostral, o fizeram corretamente, alguns não chegando ao esgotamento das possibilidades, mas, a partir deste mapeamento, conseguiram quantificar as chances para os eventos apresentados e responderem corretamente.

Na atividade (8) Corrida de Cavalos adaptada por Santos (2010), funcionando como um jogo, além de despertar um caráter lúdico de uma competição, foi motivante e não cansativo, permitiu aos estudantes a realização de experimentos sucessivos, sem que os estudantes pudessem se dar conta disto.

Nesta atividade, os estudantes conseguiram comparar as chances (probabilidades) de vitória dos cavalos por meio do mapeamento do espaço amostral com as chances obtidas por meio de experimentos sucessivos no jogo inicial ao lançarem os dados, identificando os que possuíam mais chances dos que possuíam menos ou nenhuma chance de vencer. Conseguindo também argumentar com mais certeza e usar termos do vocabulário probabilístico utilizados no primeiro ciclo de modo coerente. Corroborando com resultados semelhantes observados por Santos (2010, 2015) em suas pesquisas.

A aplicação da atividade (9) Passeios aleatórios da Mônica desenvolvida por Cazorla, Kataoka e Nagamine (2010, adaptada por KATAOKA; 2010), assim como na atividade 8, permitiu aos estudantes também fazerem a comparação dos

resultados obtidos pelos experimentos sucessivos e o mapeamento do espaço amostral. Nesta atividade, os estudantes também passaram a calcular a probabilidade frequentista, ou seja, a probabilidade da frequência de ocorrências das possibilidades obtidas empiricamente. De modo semelhante, os estudantes calcularam a probabilidade dos mesmos eventos, porém, agora com base no espaço amostral mapeado, usando a frequência de ocorrências.

Os dados coletados com a realização desta atividade foram bem significativos, uma vez que os estudantes desde o início demonstraram reconhecer de modo intuitivo o fator aleatório com o lançamento de uma moeda, identificando e explicando quais eventos possuíam mais chances e porque outros tinham menos chances antes mesmo da realização do experimento. Os resultados encontrados com a aplicação desta atividade, também são semelhantes aos observados por Ferreira (2011) e Ferreira, kataoka e karrer (2014).

Também é importante destacar que os dados encontrados nesta pesquisa, seguem a mesma direção das habilidades e expectativas de aprendizagem traçadas para estudantes do 6º ao 8º ano do Ensino Fundamental normatizadas pela BNCC (BRASIL, 2018) e pelo currículo de Pernambuco (2018), propostas na unidade temática de Probabilidade e Estatística, visto que os estudantes conseguiram compreendendo a aleatoriedade, determinar elementos com maior e menos probabilidade, mapeando o espaço amostral e calculando as probabilidades por meio da frequência de ocorrências dos eventos apresentados.

Porém, não é possível afirmar que estes estudantes conseguiram desenvolver estas habilidades, pois conforme destaca Núñez (2009), a formação de uma habilidade só pode ser constatada de acordo com o grau de generalização, verbalização e externalização de um determinado conceito por parte do estudante após determinado tempo sem rever este mesmo conceito, o que não pôde ser aplicado nesta pesquisa.

Cabe destacar neste momento que, em nossa pesquisa, não buscamos aprofundar com as atividades os conceitos da probabilidade em valor percentual e nem que a soma das probabilidades de um dado espaço amostral é igual a 1. E como já abordado, também não nos prendemos a quantificação dos elementos do espaço amostral por meio do princípio multiplicativo ou outras formas de quantificação por fórmula pois queríamos que o nosso foco de pesquisa fosse a Probabilidade, sem associar a Análise Combinatória.

No entanto, estes conceitos se fizeram presentes, tanto pela utilização destes conceitos pelos estudantes na resolução das atividades pelo próprio raciocínio e estratégia adotados por eles, quanto pelo professor pesquisador, nos momentos de discussão ou formalização dos conceitos.

Diante dos resultados encontrados e analisados, entendemos que os objetivos propostos para esta pesquisa foram atingidos, pois os estudantes além de apresentarem percepção intuitiva sobre a probabilidade, conseguiram realizar experimentos sucessivos de modo empírico e mapear o espaço amostral utilizando as próprias técnicas de contagem, bem como apresentar a probabilidade de eventos em uma razão por meio da frequência de ocorrências.

Estes resultados corroboram com a concepção frequentista apresentado por Batanero (2005) como um dos importantes significados da Probabilidade e por Gal (2005) como um dos importantes elementos para o Letramento Probabilístico. Bem como atende a uma das demandas cognitivas da Probabilidade descritas por Bryant e Nunes (2012) e Nunes *et al.* (2012), de que formar e categorizar o espaço amostral, é essencial para o cálculo e compreensão da probabilidade bem como a sua quantificação.

5.2.3 Terceiro ciclo do design: quantificação e comparação de probabilidades

Este ciclo desenvolveu-se em dois encontros (4º e 5º encontros), contando com a participação de cinco estudantes no 4º encontro e de seis estudantes do 5º encontro.

Neste ciclo, buscamos proporcionar aos estudantes, situações que os levaram a descrever o espaço amostral de possibilidades e a quantificar as probabilidades dos eventos apresentados. Deste modo, tivemos como objetivo levar os estudantes a calcular probabilidades de dados eventos utilizando o conceito frequentista e clássico de probabilidade e a comparar e avaliar as chances entre estes eventos, inferindo sobre o que possuía a melhor chance e ocorrer, por meio da comparação entre as razões de probabilidade. Para isso, nas atividades 11 e 12, os estudantes puderam utilizar o método da divisão por meio do cálculo manual ou com o uso da calculadora sempre que este tivesse dúvidas quanto aos eventos e assim poder inferir com mais precisão sobre o evento que possuía melhor chance.

Para realização deste ciclo, utilizamos 3 (três) atividades, que foram retiradas e

adaptadas de Nunes *et al.* (2012) e Fernandes (1999). As análises das atividades desenvolvidas neste ciclo podem ser vistas a seguir.

Atividade 10 – Clube de danças

A presente atividade foi retirada de Nunes *et al.* (2012), com ela buscamos dar continuidade ao segundo ciclo do design. Deste modo, os estudantes foram levados a descrever o espaço amostral de possibilidades, identificar os elementos dos eventos solicitados nesta atividade e quantificar esta probabilidade por meio do significado clássico de probabilidade ou laplaciano, em uma razão.

Quadro 19 – Atividade Clube de Danças

Clube de Danças

Amy Dan

“Em um clube de danças há 10 pessoas, 5 homens e 5 mulheres. Eles devem formar pares mistos para a dança, por isso (apenas neste problema) os homens não podem dançar com outros homens, ou mulheres com mulheres.”

1. Você consegue verificar:

- a) Quais são as possibilidades de casais a serem formados no sorteio?
- b) Qual número de danças que serão executadas?
- c) Quantas vezes cada pessoa dança?
- d) Qual é a probabilidade de que uma dança seja dançada por casais cujos nomes começam ambos com a mesma letra?
- e) Qual é a probabilidade de que uma dança seja dançada por um casal que ambos estejam vestidos de vermelho?
- f) Qual é a probabilidade de se retirar o primeiro par de dançarinos com Billy no par?

FONTE: Adaptado de Nunes *et al.* (2012).

Após a leitura, os estudantes questionaram o porquê de está destacado no

texto que apenas neste problema os pares deveriam ser mistos, ou seja, formados por um homem e uma mulher. Assim, lhes foi explicado que seria devido a quantidades de pares que seriam formados, caso não fossem mistos, o que geraria 90 combinações diferentes. Esclarecidos deste questionamento, os estudantes foram chamados a responderem aos itens da questão.

No primeiro item (a), os estudantes precisaram descrever todos os diferentes casais que poderiam ser formados. O estudante E a princípio observou apenas os casais que apareceram lateralmente a imagem, esquecendo o casal que apareceu acima do texto (Amy e Dan), a própria observação já feita no texto que havia 5 homens e 5 mulheres. A mesma dúvida também foi apresentada pelo estudante C.

E: É quantas combinações? São 16, né?

Professor: Não, são mais.

E: Como é mais? Quatro vezes quatro, Indaclécio [*professor*]?

Professor: Mas tem quantos homens e quantas mulheres?

A: Cinco cada um.

E: Eu não tinha visto esses daqui não. Estava contando sem eles.

C: Conta com esses também?

Professor: Sim.

Sanadas as dúvidas e esclarecidos após a releitura do problema coletivamente, os estudantes responderam corretamente.

Todos os estudantes responderam o item 'a' corretamente apresentando as combinações. Para isso, eles escolheram um dançarino e variaram a dançarina, escrevendo por completo o nome dos dançarinos. O estudante E que já havia iniciado as representações quando buscou esclarecer a dúvida anterior, acabou acrescentando os pares formados pelo casal central (Amy e Dan). Resultados semelhantes também são observados na pesquisa Tonouti (2013), que utilizou uma adaptação da mesma atividade.

Nos itens 'b' e 'c', os estudantes responderam corretamente que haveria 25 danças executadas por casais diferentes e que cada pessoa dançaria 5 vezes, respectivamente.

Nos itens 'd', 'e' e 'f', os estudantes também conseguiram reconhecer os elementos no espaço amostral e quantificar os eventos solicitados e respondê-los corretamente¹⁵. Resultados também semelhantes são apresentados por Carvalho (2017).

Os resultados encontrados com a aplicação desta atividade, atende aos objetivos propostos para ela, pois, superado um erro de interpretação, os estudantes conseguiram mapear o espaço amostral, bem como identificar os elementos dos eventos solicitados e quantificar estas probabilidades em uma razão.

O desenvolvimento das atividades 11 e 12 a seguir, ambas do terceiro ciclo, foram aplicadas no quinto encontro. Neste encontro, foram formadas as seguintes duplas: A e B; C e F; D e E.

Atividade 11 – Bolinhas no saco

A presente atividade visou colocar os estudantes em um conflito no qual eles teriam que escolher pelo saco que possuiria a melhor chance de sair uma bola branca. Adaptada de uma das atividades propostas por Fernandes (1999) em sua tese sobre intuição probabilística, esta atividade permitiu aos estudantes comparar duas probabilidades de mesmo evento (retira uma bola branca) examinando dois espaços amostrais distintos. Para isso os estudantes precisaram analisar a razão de probabilidade. Vejamos a atividade descrita a seguir no Quadro 20.

¹⁵ Respostas: d) 4/25; e) 3/25; f) 5/25.

Quadro 20 – Atividade Bolinhas no saco

Um saco I contém três bolas brancas e quatro bolas pretas, e um saco II contém duas bolas brancas e três bolas pretas. Sem ver, tira-se uma bola de cada um dos sacos.

Saco I: ○○○●●●● Saco II: ○○●●●

a) Em qual dos sacos é mais provável obter uma bola branca?

() Do saco I.

() Do saco II.

() É igualmente provável obter uma bola branca de qualquer dos sacos I e II.

b) Que raciocínio utilizou para responder à pergunta? _____

c) Indique abaixo, as probabilidades de se retirar uma bola branca em cada um dos sacos:

Saco I

Saco II

FONTE: Adaptado de Fernandes (1999).

Nesta atividade, precisamos fazer uma modificação nos espaços amostrais da atividade utilizada durante o estudo piloto, cujos sacos possuíam a mesma quantidade de bola, na qual a análise se deu de forma bem rápida e sem proporcionar tantas reflexões aos estudantes.

Quando os estudantes foram chamados no item 'a', a optarem pelo saco que possuía a melhor chance de se obter uma bola branca, sem nenhum recurso auxiliar, apenas duplas que responderam corretamente optando pelo saco I, apresentado as seguintes justificativas no item 'b':

A e B: Porque tinha mais bolinhas brancas no saco I.

D e E: Porque no saco I tem mais bolinhas brancas.

As justificativas apresentadas por estas duplas demonstram que os mesmos utilizaram como ponto de partida para inferir o saco que possuía mais bolas brancas, desconsiderando a quantidade de bolas que havia em cada saco. E foi analisando a quantidade de bolas no espaço amostral que a outra dupla tomou sua decisão, embora erradamente.

C e F: [Saco II]. Porque a quantidade de bolas era menor e tinha a maior chance de escolher uma bola branca.

Embora o estudante C tenha sido o primeiro a reconhecer a probabilidade antes mesmo de responder o item 'b' dizendo que *“a probabilidade ficaria sendo três de sete, e dois de cinco”* (C) (probabilidades dos sacos I e II respectivamente), a dupla C e F deduz em sua resposta que quanto menos bolas tiverem no espaço amostral, maior a chance de retirar uma bola branca e quantos mais bolas tiver no espaço amostral, pior seriam estas chances.

Ainda que as duas situações permitissem essas deduções, apresentada pelas duplas, isto não deve ser tomado sempre como parâmetro, pois outras variações do espaço amostral, mesmo com menos bolas brancas permitem uma maior probabilidade ou um espaço amostral com mais bolas também pode possuir uma maior probabilidade. Resultados semelhantes são apresentados por Fernandes (1999), de acordo com sua pesquisa, os estudantes inicialmente costumam recorrer as maiores quantidades com maior frequência, no entanto, com as variações dos problemas os estudantes passam a analisar os problemas, quantificando e comparando as probabilidades, acertando com maior frequência.

No item 'c' desta atividade, os estudantes tiveram que encontrar a razão de probabilidade de cada saco e em seguida encontrar o valor desta razão por meio da divisão. A princípio os estudantes precisaram fazer o cálculo de divisão manualmente, e depois puderam conferir o cálculo com auxílio de uma calculadora. Deste modo, todos os estudantes responderam ao item 'c' corretamente comparando qual das razões apresentavam a maior probabilidade e sem nenhuma dificuldade, identificaram se tratar do saco I.

Diante dos resultados encontrados, acreditamos que o objetivo proposto para esta atividade foi alcançado, pois os estudantes conseguiram comparar as duas probabilidades examinando o espaço amostral e o evento apresentado a eles, após a comparação puderam optar e inferir sobre o que possuía melhor chance de sair uma bola branca utilizando a razão por meio da divisão.

Atividade 12 – Blocos no saco

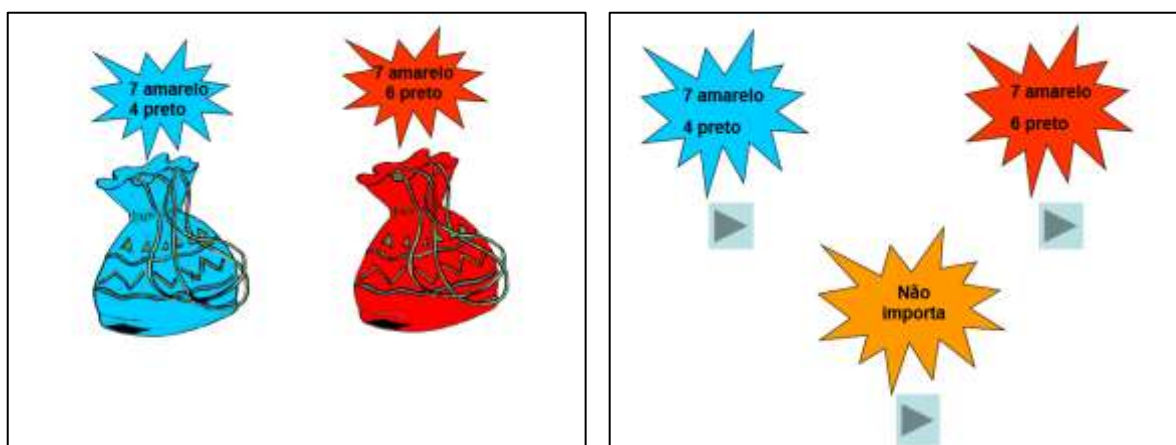
Desenvolvido por Nunes et al. (2012), esta atividade compõe três jogos de

mesma natureza, sendo que cada jogo possui 10 fases, gerando assim um total de 30 fases. Em cada uma destas fases, os estudantes se depararam diante de dois sacos, um azul e um vermelho, que possuíam quantidades de blocos pretos e amarelos, cuja quantidade era diferente a cada fase. Nesta situação, os estudantes foram chamados a quantificar, comparar e identificar qual saco seria mais provável de pegar um bloco amarelo em um dado sorteio: no saco azul; no saco vermelho, ou; as chances não importam (pois eram iguais).

Esta atividade foi aplicada em um ambiente de slides de computador auto executáveis. Uma dessas fases pode ser acompanhada no Quadro 21 a seguir.

Quadro 21 – Atividade Blocos no Saco

- Para cada pergunta que você ver dois sacos, em cada saco haverá alguns blocos pretos e alguns blocos amarelos.
- Você tem que decidir qual saco que você iria pegar, se você quiser ter a melhor chance de escolher um amarelo.



FONTE: Nunes *et al.* (2012), adaptação de Carvalho (2017); Edição do Autor (2019).

No desenvolvimento desta atividade, os estudantes não estavam pensando na probabilidade tomando como base o espaço amostral, ou seja, o total de blocos pretos e amarelos. Deste modo, foi realizada uma breve intervenção, para lembrar que a probabilidade seria a razão entre a quantidade de blocos amarelos e o total de blocos presente em cada saco.

Conforme os estudantes foram encontrando as probabilidades para cada um dos sacos, a dupla de estudantes A e B passaram a utilizar a calculadora do celular para calcular e identificar qual das razões apresentava a maior probabilidade. Enquanto isso, as duplas de estudantes C e F, D e E fizeram as comparações entre as razões por meio da divisão no cálculo manual ou simplificando as razões sempre

que fosse possível. Como podemos observar na Figura 13, o registro feito pela dupla D e E.

Figura 13 – Registros de algumas quantificações e comparações feitos pelos estudantes D e E na Atividade 12.

The image shows handwritten mathematical work on a grid background. It includes several fractions and calculations: $\frac{5}{35}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{15}{3}$, $\frac{8}{4}$, 5^{-3} , 4^{-4} , $\frac{12}{3}$, and $\frac{9}{3}$. Some numbers are written with a horizontal line above them, possibly indicating a denominator or a specific operation.

FONTE: Dados da pesquisa.

O uso da calculadora como recurso pela dupla A e B influenciou positivamente no seu desempenho dentro desta atividade. Por se tratar de um jogo, foi utilizado um sistema de pontuação para que os estudantes registrassem, ganhando +2 pontos por acerto e -1 por um erro. Ao final dos três jogos, a pontuação total das duplas pôde ser registrada no Quadro 22:

Quadro 22 – Pontuação final dos estudantes no Jogo Blocos no Saco

Duplas	Acertos (+2)	Erros (-1)	Pontuação Final
A e B	29	1	57
C e F	24	6	42
D e E	25	5	45

FONTE: Dados da pesquisa.

Apesar da disparidade com relação a pontuação, levamos em consideração o número de acertos por parte dos estudantes, principalmente das duplas C e F e, D e E, pois estes estudantes não somente conseguiram identificar a razão de probabilidade como também utilizar a divisão e sempre que possível a simplificação de forma manual para comparar e identificar o saco de maior probabilidade na maioria das fases do jogo, sem utilizar a calculadora, que muitas vezes acabam se tornando um porto seguro para os estudantes que possuem dificuldades de operar com números racionais.

Diante destes resultados, acreditamos que o objetivo proposto por esta atividade foi contemplado, uma vez que os estudantes demonstraram competência ao identificar e comparar as duas probabilidades examinando o espaço amostral,

bem como identificar a que possuía a melhor chance utilizando a razão.

Neste terceiro ciclo, buscando compreender o raciocínio empregados pelos estudantes e as dificuldades apresentadas diante de atividades que envolviam a escolha da melhor chance entre duas probabilidades. Para tal, tivemos como um dos objetivos específicos desta pesquisa: *investigar o conhecimento dos alunos em atividades de quantificação de probabilidades simples e comparação da força de duas probabilidades*.

Neste momento, utilizamos três atividades nas quais os estudantes puderam utilizar o conceito frequentista e/ou clássico de probabilidade para quantificar e comparar duas probabilidades, inferindo a melhor chance (maior probabilidade).

No desenvolvimento da atividade (10) Clube de danças adaptada de Nunes *et al.* (2012), os estudantes demonstram entendimento dos conhecimentos mobilizados nos ciclos anteriores reconhecendo o fator aleatório de um possível sorteio, bem como conseguiram construir e quantificar o espaço amostral, calculando com precisão a probabilidade de eventos com base nos elementos do espaço fazendo a representação em um número racional (forma fracionária) utilizando o conceito frequentista e/ou clássico de Probabilidade. Nesta perspectiva, acreditamos que aos objetivos propostas por esta atividade para o desenvolvimento deste ciclo foram contemplados.

Vale destacar que, embora não tivéssemos explorando os conceitos da Análise Combinatória utilizando fórmulas, o princípio multiplicativo, próprio de problemas de combinatória e muitas vezes utilizado para quantificação dos elementos do espaço amostral, foi percebido poucas vezes pelos estudantes. Apesar deste conceito ser apresentado pelo professor pesquisador nos momentos de socialização e fechamento das ideias após aplicação de cada atividade, em especial as do segundo ciclo, Espaço Amostral, o princípio multiplicativo foi utilizado pelos estudantes em duas ocasiões, ambas na atividade (10) Clube de danças.

A primeira percepção foi apresentada pelo estudante P1 na aplicação do estudo piloto, quando o mesmo multiplica o número de homens pelo de mulheres ($5 \times 5 = 25$), e a segunda aparição entre os estudantes A e E na aplicação principal, quando o estudante E fala que possuía apenas 4 homens e 4 mulheres apontando 16 danças diferentes, e o estudante A o corrige afirmando que existiam “*cinco de cada um*”. Neste momento, percebemos que estes estudantes conseguem identificar

o caráter multiplicativo em dadas situações, porém não costumam aplicá-lo, seja nos momentos apenas de quantificação, como solicitado em outras atividades, ou se quer para verificar se não esqueceram de alguma combinação quando levados a mapear o espaço. Resultados semelhantes a estes foram encontrados por Lima (2018) em sua pesquisa.

Na realização da atividade (11) Bolinhas no saco adaptada de Fernandes (1999), a princípio é possível identificar que os estudantes compreenderam e calcularam as probabilidades corretamente assim como abordados nos ciclos anteriores, por outro lado é fácil perceber a dúvida quando os mesmos apresentaram dúvidas sobre quais estratégias utilizar para inferir sobre eles. Mas, quando orientados e lembrados sobre a estratégia para o cálculo da razão, os estudantes demonstraram competência ao identificar e comparar as duas probabilidades a partir de um número decimal.

As discussões geradas nesta atividade serviram de apoio para fomentar os estudantes na resolução do jogo atividade (12) Blocos no saco adaptada de Nunes *et al.* (2012). Nesta atividade, os estudantes tiveram como objetivo quantificar e comparar as probabilidades de dois espaços amostrais para optar sobre o que possuía a maior probabilidade.

Nesta perspectiva, acreditamos que os objetivos para com esta atividade foram alcançados, pois os estudantes em algumas fases deste jogo conseguiram optar sobre o que possuía a melhor chance apenas analisando os valores comparando a quantidade de elementos dos casos, hora casos favoráveis ao evento e hora ao espaço amostral, sempre que necessário recorria a simplificação e a divisão para representar a probabilidade em um número racional (forma fracionária) e posteriormente calcular esta razão transformando-a em um número decimal.

No entanto, vale destacar a dificuldade em duas duplas (C e F, e D e E) ao efetuarem os cálculos de divisões com frações próprias, cuja divisão sempre gera um número decimal, por outro lado, apesar das dificuldades iniciais, os mesmos conseguiram responder a maioria das operações sem o auxílio do professor pesquisador. Por outro lado, apesar do ótimo resultado apresentado pela dupla A e B com o uso da calculadora, é importante fazer uma ressalva para as importantes reflexões geradas nos estudantes que realizaram os cálculos manualmente, devido principalmente a independência e assimilação dos estudantes com os conceitos, competências importantes para o desenvolvimento das habilidades (NÚÑEZ, 2009).

Acreditamos, diante destes resultados que os estudantes ampliaram seus conhecimentos quanto ao cálculo de probabilidades, na representação da probabilidade por meio de uma razão, bem como comparar a força de duas probabilidades e inferir sobre a que possui maior valor. Corroborando com as ideias apresentadas por Bryant e Nunes (2012) e Nunes *et al.* (2012) como fatores importantes para desenvolvimento das demandas cognitivas da Probabilidade.

Estes resultados corroboram com os encontrados por Fernandes (1999), Tonouti (2013), Santos (2015), SILVA (2016) e Lima (2018). Neste sentido, pesquisas aplicadas com atividades semelhantes nos níveis de Educação Infantil, anos finais do Ensino Fundamental e EJA mostram que as estudantes envolvidas nestas pesquisas apresentam avanços e desenvolvimento dos conhecimentos, principalmente quando a quantificação da probabilidade em uma razão diante do espaço amostral e comparação entre duas forças de probabilidades. Vale destacar que os estudantes também apresentaram dificuldades iniciais quanto as comparações, apresentando dificuldades com o cálculo da probabilidade em um número decimal.

Esses dados vêm corroborar com a concepção do significado frequentista e clássico, importantes para compreensão do conceito de Probabilidade, cuja base é utilizada para compreensão axiomática da Probabilidade (BATANERO, 2005; GAL, 2005), modelo formal apresentado nas escolas da Educação Básica, nos níveis Fundamental e Médio. Deste modo, estes resultados estão de acordo com as expectativas de aprendizagem traçadas pelos documentos oficiais brasileiros, a BNCC (BRASIL, 2018) e os currículos de Pernambuco (2015, 2018).

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho nasceu de uma necessidade de investigar o processo de ensino e de aprendizagem de Probabilidade no cenário educacional atual. Tal necessidade partiu do desejo de conhecer os processos utilizados nas resoluções de problemas apresentadas pelos estudantes, com intuito de compreender as dificuldades e obstáculos epistemológicos para encontrar alternativas e superá-las. Deste modo, houve também um crescente desejo de encontrar e apresentar metodologias e alternativas práticas para compartilhá-las com demais profissionais que também lidam com os mesmos dilemas em seu cotidiano escolar.

Tendo em vista que este estudo nasceu de questionamentos e anseios pessoais – mas que de certo modo acreditamos ser também questionamentos de outros pesquisadores e/ou professores – a pesquisa destinou-se a responder a seguinte questão: *“Como raciocinam e quais as dificuldades que alunos dos 7º e 8º ano dos anos finais do Ensino Fundamental apresentam mediante a probabilidade e as noções de aleatoriedade, espaço amostral e quantificação?”*.

Procurando então responder à questão motivadora da pesquisa, tivemos com este estudo o objetivo de *“Desenvolver e analisar uma sequência de atividades caracterizada como ecologia de aprendizagem orientada para o ensino e aprendizagem de Probabilidade com estudantes dos 7º e 8º anos finais do Ensino Fundamental”*.

De modo consequente, com intuito de que esta investigação nos permitisse responder os questionamentos, bem como atingir nossos objetivos de pesquisa, nos pautamos a levantar os aportes teóricos de estudos já realizados e dos documentos oficiais que parametrizam o ensino na Educação Básica brasileira. Por conseguinte, o desenvolvimento do suporte metodológico de pesquisa, uma ecologia de aprendizagem através de recursos didáticos voltada para o ensino de probabilidade no Ensino Fundamental baseado na teoria Design Experiments de Brown (1992) e Cobb *et al.* (2003), dividida em três ciclos.

Durante o desenvolvimento dos ciclos do Design Experiments, os participantes desse estudo resolveram problemas probabilísticos de diferentes tipos, envolvendo os conceitos de Aleatoriedade, Espaço Amostral e Quantificação e Comparação de Probabilidades, referentes a três das quatro demandas cognitivas da Probabilidade apresentadas por Bryant e Nunes (2012), essenciais para a

compreensão do conceito de Probabilidade.

Procuramos envolver o conceito de Probabilidade abordado em cada ciclo, utilizando atividades a serem exploradas pelos estudantes, em situações que estimularam a análise dos estudantes exigindo que os mesmos pudessem argumentar e socializar suas teorias com os demais colegas. Utilizamos também situações que remontam a jogos nos quais os estudantes puderam fazer análises e deduções prévias, realizar experimento aleatórios empiricamente, utilizando dados e moedas, por exemplo, explorar os conceitos de mapeamentos dos espaços amostrais bem como a obtenção da probabilidade utilizando o conceito frequentista.

No ciclo Aleatoriedade, pudemos perceber mais fortemente que os estudantes utilizam ideias intuitivas para explorarem e explicarem o fator aleatório dos problemas e sempre que foi possível, determinar os resultados previsíveis, que na declaração dos estudantes “é a lógica” que naqueles momentos fazem sentido. Por diversos momentos, os estudantes também recorreram a fatos e a experiências do cotidiano para explicar determinadas atividades, em suas falas pudemos perceber que os mesmos conseguiram compreender a natureza aleatória e as consequências da aleatoriedade nas atividades apresentadas.

Vale destacar, a presença de uma linguagem mais ligada aos conceitos probabilísticos, bem como o esforço e a evolução ao utilizarem as terminologias que eles acreditavam serem mais corretas para usarem nas suas argumentações, tanto quando solicitados e apresentadas as sugestões como nas atividades em que não lhes foram apresentados os termos mais adequados para analisar e escolher.

Em tempo, também é preciso destacar que inicialmente, os estudantes tiveram bastante dificuldade para explicar seus raciocínios diante de cada atividade do primeiro ciclo. O medo de errar, a timidez em expressar os próprios pensamentos diante da atividade, os fizeram muitas vezes silenciar, no entanto, sendo estimulados a buscarem primeiro explicar ao professor verbalmente e depois socializarem com os demais estudantes, a pesquisa conseguiu fluir normalmente.

Neste sentido, é importante destacar o fator negativo e exagerado que por diversas vezes a escola, até mesmo os próprios professores rotulam o erro do estudante como algo intolerável, e isto acaba gerando um bloqueio no qual os estudantes não sentem mais motivação ou segurança para antecipar uma resposta e acabam ficando em um processo passivo de aprendizagem, assim além de importante é necessário compreender a forma de raciocínio do estudante e

identificar em seus erros as dificuldades que interferem no processo de aprendizagem que atinge todas as áreas de conhecimento, mas que em Matemática acaba tendo uma cobrança exagerada.

No ciclo Espaço Amostral, percebemos que em determinadas atividades os estudantes apesar de apresentarem percepção intuitiva sobre a probabilidade diante das situações, não buscaram de imediato as representações das combinações possíveis do espaço amostral, o que demonstra que os estudantes levaram em consideração uma simetria do espaço amostral causado pelo conflito semiótico das possibilidades.

A realização dos experimentos sucessivos utilizando os dados e a moeda proporcionou um momento motivador entre os estudantes muito bom, atraindo atenção e a dedicação dos estudantes. Durante este segundo ciclo, os estudantes também conseguiram mapear o espaço amostral utilizando as próprias técnicas de contagem, as duplas que não encontraram todas as possibilidades se aproximaram do esgotamento, apresentando corretamente a probabilidade frequentista dos eventos de em uma razão por meio da frequência de ocorrências, demonstrando que os estudantes se aproximaram de um dos significados necessário para compreender a probabilidade.

Com relação as estratégias utilizadas para articular as representações das possibilidades do espaço amostral, entendemos que estes estudantes dispunham de um repertório limitado de estratégias, utilizando principalmente combinações das possibilidades na forma escrita quando com nomes ou uso de iniciais, aplicando métodos que se assemelham ao produto cartesiano (fixando a primeira possibilidade combinando com as demais e assim sucessivamente).

Destacamos assim, que falta de variação de estratégias de modo espontâneo referente as formas de representação, deu-se mesmo após o professor-pesquisador lhes apresentar outros métodos, como a 'árvore de possibilidades' e 'combinações em tabela', utilizados no estudo de Combinatória. Um dos motivos que implicaram nas dificuldades de se chegar ao esgotamento das combinações, pois na maioria das vezes os estudantes acabaram por esquecer ou repetir algumas destas combinações, embora se aproximando do esgotamento.

No ciclo Quantificação e Comparação de Probabilidades deste design, a análise dos resultados apontou que os estudantes conseguiram compreender as ideias que mobilizaram a quantificação das probabilidades utilizando os conceitos

frequentista e clássico de probabilidade, bem como conseguiram comparar a força entre duas probabilidades, essencial para o desenvolvimento de demandas cognitivas para compreensão da Probabilidade.

Salientamos que, embora as dificuldades tenham sido apresentadas pelos estudantes no cálculo de probabilidade em um número decimal quanto a utilização da divisão, as interações entre pesquisador e pesquisados e nos diálogos para lembrar as operações com números decimais e frações, favoreceu a continuidade na resolução das atividades e na adoção de técnicas para auxiliar, como a simplificação e a divisão de frações.

No entanto, este fato demonstra uma realidade que está se tornando cada vez mais frequente, no qual os estudantes apresentam muitas dificuldades em se trabalhar com os números Racionais, embora seja um conteúdo recorrente da educação básica deste os anos iniciais.

É importante destacar, porém que, é necessário que os estudantes sejam capazes de operar com diferentes números e possam desempenhar os algoritmos corretamente e independentes, fazendo o uso da calculadora em momentos convenientes para isto, pois a mesma não deve ser utilizada para substituir os cálculos das operações básicas, dificuldade apresentada por estudantes da Educação Básica atualmente. E cabe ao professor encontrar o momento pedagógico da calculadora como um recurso didático de suporte a aprendizagem.

Diante dos resultados e do conhecimento apresentado pelos estudantes nas resoluções das atividades postas pelo design, acreditamos que os estudantes apresentaram demandas cognitivas e de conceitos essenciais para compreensão e aprendizagem de Probabilidade. Constatamos que estudantes dos 7º e 8º ano dos anos finais do Ensino Fundamental apresentam ideias intuitivas e subjetivas, muitas vezes baseadas nas suas experiências adquiridas no contexto escolar e principalmente fora dele, compreendendo a natureza aleatória em situações não determinísticos, bem como reconhecendo padrões e apontando possíveis resultados de situações determinísticos.

No entanto, destacamos que muitas vezes essas impressões e opiniões lógicas são carregadas de uma crença ou experiência pessoal destes estudantes e que não necessariamente vão se concretizar ou repetir em fenômenos de natureza aleatória.

Podemos destacar também, que os estudantes apresentaram fortalecimento

quanto ao raciocínio e argumentos coerentes apresentados em suas respostas, bem como ao utilizar palavras de um vocabulário probabilístico para estimar as chances de uma probabilidade e entender o seu significado e o que representa (por exemplo: aleatório, previsível, certo, possível, impossível ou improvável, provável, mais ou menos provável, pode ser, espaço amostral, probabilidade, etc.).

Com relação aos recursos e as atividades utilizados na aplicação do design, acreditamos que os mesmos possibilitaram o desenvolvimento do conhecimento probabilístico e que os estudantes envolvidos conseguiram construir significados com relação aos conceitos de aleatoriedade, espaço amostral e a quantificação e comparação de probabilidades. Uma vez que estes instrumentos possibilitaram aos envolvidos, análises das atividades, gerando discussão de opiniões referente aos problemas envolvidos com base na natureza probabilística dos problemas.

Os recursos utilizados (jogos de computador, fichas coloridas, cartas, tabuleiros de bolinhas de gude, dados, moedas, calculadora, folhetos de registro), além de possibilitarem aos estudantes as discussões, proporcionaram também a verificação prática, as experimentações e simulações sucessivas, para compreensão dos conceitos probabilísticos como a natureza aleatória e determinística, a compreensão das concepções frequentista e clássica.

Deste modo, com base na aplicação dos ciclos e nas análises realizadas, acreditamos que a sequência de atividades caracterizada como ecologia de aprendizagem sobre probabilidade para estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental baseado na teoria Design Experiments, apresentou resultados satisfatórios e significativos quanto ao processo de ensino e de aprendizagem de Probabilidade. Destacamos que, o design apresentou subsídios para identificar os conceitos que os estudantes compreenderam com base nas suas respostas verbais, escritas e as estratégias para soluções das atividades, permitindo que o professor possa adotar novas estratégias, atividades e recursos necessários para a promover um ensino com mais qualidade.

Esperamos, com esse estudo, contribuir com novas reflexões acerca do ensino de Probabilidade, ressaltando a importância destes conceitos que são mobilizados por esta unidade de conhecimento e da Matemática na Educação Básica. Espera-se também, com o design desenvolvido, poder ofertar um novo recurso no qual, professores de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental possam utilizar e replicar dentro das suas salas de aula de forma lúdica, interativa e

motivadora, para despertar em seus estudantes o gosto pela Probabilidade e pela Matemática.

Sugerimos, por fim, que novas pesquisas possam dar continuidade a nossa vertente a fim de aprofundar o ensino e melhorar a aprendizagem com relação à Probabilidade. Além disso, recomendamos que novas pesquisas possam centralizar-se nas correlações existentes entre o estudo de Combinatória e Probabilidade, com relação às diversas formas de mapeamento e registros do espaço amostral. Acreditamos também que é possível e necessário o desenvolvimento de pesquisas que tratem sobre o estudo dos Números Racionais, bem como estudos que tratem da valorização e compreensão do erro no ensino de matemática. Inclusive, apontamos a necessidade de se aprofundar em pesquisas nos cursos de formação de professor e em cursos de formação continuada, pois é muito importante saber que professores e futuros professores estão capacitados a lecionar os conceitos aqui mobilizados, os quais por muito tempo foram preteridos do contexto escolar.

REFERÊNCIAS

- BATANERO, C. Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *In: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. v. 8. n.3. México, p.247-263, 2005.
- BIAJOTI, E. D. **Experimentos probabilísticos: noções de probabilidade no ensino fundamental II**. 2013. 109 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Exatas e da Terra) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2013.
- BORBA, M.C. A pesquisa qualitativa em educação matemática. *In: Anais da 27ª reunião anual da Anped*, Caxambu-MG, p. 21-24, Nov. 2004.
- BORBA, R. e NUNES, T. **Como significados, propriedades invariantes e representações simbólicas influenciam a compreensão do conceito de número inteiro relativo**. *Educação Matemática Pesquisa*, v.6, n. 1 pp 73-100, 2004.
- BORBA, R. et al. Educação Estatística no Ensino Básico: currículo, pesquisa e prática em sala de aula. *In: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana (EM TEIA)*. Recife: EM TEIA/EDUMATEC, v. 2, n. 2, 2011.
- BRASIL. Ministério da Educação e Desporto. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática: 1ª A 4ª SÉRIE**. Secretaria de Educação Fundamental – Brasília: MEC/SEF, 1997. 142p.
- BRASIL. Ministério da Educação e Desporto. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática: 5ª A 8ª SÉRIE**. Secretaria de Educação Fundamental – Brasília: MEC/SEF, 1998. 148 p.
- BRASIL. Ministério da Educação e Desporto. **Parâmetros curriculares nacionais para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC/SEMTEC, 2000. 58p.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular: Educação é a base**. Brasília: MEC, 2018, 600p. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 18 fev. 2017.

BROUSSEAU, G. Fundamentos e Métodos da Didática da Matemática. *In*: BRUN, J. **Didática das Matemáticas**. Tradução: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, Cap. 1. p. 35-113, 1996.

BROWN, Ann L. Design Experiments: Theoretical and Methodological Challenges in Creating Complex Interventions in Classroom Settings. *In*: **The Journal of the Learning Sciences**. University of California - Berkeley, v.2, n.2, 141-178p, 1992.

BRYANT, P.; NUNES, T. **Children's Understanding of Probability**: a literature review. 2012. 86p. ISBN: 978-0904956863. Disponível em: <http://www.nuffieldfoundation.org/news/childrens-understanding-probability>. Acesso em: 18 ago. 2017.

CAMPOS, T.; CARVALHO, J. I. F. Probabilidade nos anos iniciais da educação básica: contribuições de um programa de ensino. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana** – Em Teia, Recife, PE, v. 7, n. 1, 2016.

CANAVEZE, L. **O ensino-aprendizagem de probabilidade em uma escola pública de Sorocaba/SP**. 2013. 213 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Exatas e da Terra) – Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, 2013.

CARVALHO, J. I. F. **Um estudo sobre os conhecimentos didáticos-matemáticos de Probabilidade com professores de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental**. 2017. 344 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo – UNIAN, São Paulo, 2017.

CAZORLA, I.; KATAOKA, V. Y. e NAGAMINE, C. M. L. **Os passeios aleatórios da Carlinha**. Tutorial do AVALE, 2010. Disponível em: <http://pat.educacao.ba.gov.br/conteudos-digitais/conteudo/exibir/id/1622>. Acesso em: 19 jun. 2018.

CAZORLA, I.M.; GUSMÃO, T.C. KATAOKA, V.Y. Validação de uma Sequência Didática de Probabilidade a partir da Análise da Prática de Professores, sob a Ótica do Enfoque Ontossemiótico. *In*: **Boletim de Educação Matemática**. Bolema, Rio Claro, v. 24, n. 39, p. 537-560, ago., 2011, ISSN 0103-636X.

CAZORLA, I.M.; SANTANA, E.R.S. **Concepções, atitudes e crenças em relação à**

Matemática na formação do professor da Educação Básica. Publicação da 28ª Reunião Anual da ANPED: CAXAMBU, 2005. Disponível em: http://www.ufrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_28/concepcoes.pdf. Acesso em 10 de maio de 2019.

COBB, P. *et al.* Design Experiments in Educational Research. *In: Educational Researcher - American Educational Research Association (AERA)*. Cambridge Univ Library – AERA, Jan./Feb., v.32, n.1, p. 9-13, 2003.

COLLINS, A. Toward a Design Science of Education. Technical Report N. 1. *In: Office of Educational Research and Improvement - OERI*, New York, Washington, n. 1, jan, 1990, 9p.

COLLINS, A., JOSEPH, D., e BIELACZYK, K. **Design research:** Theoretical and methodological issues. *The Journal of the Learning Sciences*, v.13, n.1, p. 15-42, 2004.

CORTELLA, M. S. **A escola e o conhecimento:** Fundamentos epistemológicos e políticos. São Paulo: Cortez, 2017.

COSTA, B. J. F.; TENÓRIO, T. e TENÓRIO, A. A Educação Matemática no Contexto da Etnomatemática Indígena Xavante: um jogo de probabilidade condicional. *In: Boletim de Educação Matemática*. Bolema, v. 28, n. 50, p.1095-1116, Dez. 2014. ISSN 0103-636X.

D'AMBROSIO, U. **Educação matemática:** teoria à prática. Campinas: Papirus, 1996. 112 p.

D'AMBRÓSIO, U. **Etnomatemática:** arte ou técnica de explicar e conhecer. São Paulo: Ática, 1990. 4 ed. 88p.

D'AMBRÓSIO, U. **Por que se ensina Matemática?** [Palestra proferida à Disciplina à distância, oferecida pela SBEM ao Programa de Pós-Graduação da PUC-SP]. Disponível em: <http://apoioondrina.pbworks.com/f/Por%20que%20ensinar%20Matematica.pdf>. Acesso em: 10 ago. 2017.

D'AMBRÓSIO, U. Prefácio. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

DANTE, L. R. **Matemática**: Ensino Médio. Volume único 1ª Ed. São Paulo: Ática, 2005.

DIAS, C. F. B. **Ambiente virtual de aprendizagem para o ensino de probabilidade e estatística nos anos iniciais do ensino fundamental**. 2016. 177 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciência e Tecnologia) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, 2016.

DIESEL, A.; BALDEZ, A.L.S.; MARTINS, S.N. Os princípios das metodologias ativas de ensino: uma abordagem teórica. In: **Thema**. Revista Thema: Pelotas, v. 14, n. 1, p. 268-288, 2017.

FERNANDES, J. A. S. **Intuições e aprendizagem de probabilidades**: uma proposta de ensino de probabilidades no 9º ano de escolaridade. 1999. 478f. Tese (Doutoramento em Metodologia do Ensino da Matemática) – Universidade do Minho, Braga, 1999.

FERNANDES, R. J. G. **Estatística e probabilidade**: *uma proposta para os anos iniciais do ensino fundamental*. 2014. 191 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciência e Tecnologia) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, 2014.

FERREIRA, R. S. **Ensino de probabilidade com o uso do programa estatístico R numa perspectiva construcionista**. 2011. 155f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2011.

FERREIRA, R. S.; KATAOKA, V.Y.; KARRER, M. Teaching Probability with the support of the R Statistical software. In: **Statistics Education Research Journal**. International Association for Statistical Education (IASE/ISI), 13(2), 132-147, Nov., 2014. Disponível em: <http://iase-web.org/Publications.php?p=SERJ>. Acesso em: 15 maio 2017.

GAL, I. Towards "Probability Literacy" for all citizens: building blocks and instructional dilemmas. In: JONES, G. A. (Ed.). **Exploring probability in school**: Challenges for

teaching and learning, 2005, p. 39-63.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. **Um enfoque onto-semiótico do conhecimento e a instrução matemática**. Acta Scientiae, v.10, n.2, jul./dez. 2008. ISSN 1517-4492.

GOES, A. **Tornar o aluno crítico**: enunciado (in)questionável no discurso da Educação Matemática Escolar. 2015. 189 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2015.

IBGE. Amparo. **Censo Demográfico**: Características gerais da população. Pedra: IBGE, 2014. Disponível em: <https://cidades.ibge.gov.br/brasil/pe/pedra/panorama>. Acesso em: 02 dez. 2018.

INEP/MEC, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – Ministério da Educação. **Prova Brasil e o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica**: Avaliação de Desempenho Escolar. Pedra: Inep/MEC, 2017. Disponível em: <http://sistemasprovabrasil.inep.gov.br/provaBrasilResultados/view/boletimDesempenho/boletimDesempenho.seam>. Acesso em: 02 dez. 2018.

HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Combinatória, Probabilidade. São Paulo: Editora Atual, v. 5, 7ª ed., 2004.

KARRER, M. **Articulação entre álgebra linear e geometria**: um estudo sobre as transformações lineares na perspectiva dos registros de representação semiótica. 2006. 344 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

KATAOKA, V. Y. Passeios Aleatórios da Carlinha: uma atividade didática para o ensino de probabilidade. *In*: **I Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional** – ERMAC. São João del-Rei, nov., 2010, 26-35p.

LIMA, E. T. **Raciocínios combinatório e probabilístico na EJA**: Investigando relações. 2018. 141f. Dissertação (Mestrado em Matemática e Tecnologia - EDUMATEC) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2018.

LIMA, F. M. B. **O ensino de probabilidade com o uso do problema do jogo dos discos**. 2013. 121 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Exatas e da Terra) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2013.

LINS, R.C. Matemática, Monstros, Significados e Educação Matemática. In: BICUDO, M.A.V.; BORBA, M.C. [Org.]. **Educação matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, p. 92-120, 2004.

LOPES, C. A. E. A Probabilidade e a Estatística no currículo de matemática do Ensino Fundamental brasileiro. In: **Anais da Conferência Internacional: Experiências e Perspectivas do Ensino da Estatística – Desafios para o século XXI**. Florianópolis, set., 1999, p. 167-174.

LOPES, C. E.; MENDONÇA, L.O. Prospectivas para o estudo da Probabilidade e da Estatística no Ensino Fundamental. In: **VIDYA**. Santa Maria, v. 36, n. 2, jul./dez., 2016, p. 293-314, ISSN 2176-4603.

MAIA, L. A Teoria dos Campos Conceituais: um novo olhar para a formação. In: **Boletim da GEPEM**. Rio de Janeiro, v.36, p.37 - 48, 2000.

NUNES, T.; BRYANT, P.; EVANS, D.; GOTTARDIS, L.; TERLEKTSI, M. **Teaching primary school children about probability**. Teacher handbook. Departamento de Educação, Universidade de Oxford. [CD-ROM]. 2012.

NÚÑES, I. B. **Vygotsky, Leontiev e Galperin: formação de conceitos e princípios didáticos**. Brasília: Liber Livro, 2009. 216p.

OLIVEIRA, S. A.; CAZORLA, I. M. **Ensinando probabilidades no Ensino Fundamental**. Educação Matemática em Revista, São Paulo, v. 24, n.13, v.24, p. 3-6, 2008.

ORTIZ, C.V.; ALSINA, A. Lenguaje probabilístico: un camino para el desarrollo de la alfabetización probabilística: Un estudio de caso en el aula de Educación Primaria. In: **Boletim de Educação Matemática**. Bolema, vol.31, n.57, p.454-478, 2017. ISSN 0103-636X.

PEREIRA, M. M. **Oficinas de Probabilidade e Estatística: Uma proposta de**

intervenção no ensino e aprendizagem de Matemática. 2017. 55f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática - PROFMAT) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2017.

PERNAMBUCO (Estado). **Currículo de Matemática para o Ensino Fundamental**. Governo do Estado de Pernambuco. Secretaria de Educação e Esportes de Pernambuco: Recife, 2015. Disponível em: http://www.educacao.pe.gov.br/portal/upload/galeria/750/curriculo_matematica_ef.pdf. Acesso em: 01 jul. 2017.

PERNAMBUCO (Estado). **Currículo de Pernambuco** – Ensino Fundamental: área de matemática e área de ciências da natureza. Governo do Estado de Pernambuco. Secretaria de Educação e Esportes de Pernambuco: Recife, 2019.

PERNAMBUCO (Estado). **Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio**. Secretaria de Educação do Estado: Recife, 2012.

PERNAMBUCO (Estado). **Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco**: Parâmetros na sala de aula Matemática Ensino Fundamental e Médio. Secretaria de Educação: 2013.

PIETROPAOLO, R. C. *et al.* Conhecimentos de professores para ensinar Probabilidade nos anos finais do Ensino Fundamental. *In: Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática* – JIEEM. 2014, v.8(3), ISSN 2176-5634, 126-156p. Disponível em: <http://pgsskroton.com.br/seer/index.php/jieem/article/view/3044>. Acesso em: 13 ago. 2017.

RAMOS, C. L. **O ensino de probabilidade com o uso de mágicas fundamentadas matematicamente**. 2015. 60 f. Dissertação (Mestrado Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas – PPGECE) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2015.

RODRIGUES, M. R. **Estudo sobre as concepções de professores do ensino básico em relação à aleatoriedade e probabilidade**. 2018. 228f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC, São Paulo, 2018.

SAEPE – Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco. **Resultado(s) Proficiência e Participação**: Escola Anete Vale de Oliveira. Recife: SAEPE, 2018. Disponível em: <http://resultados.caedufjf.net/resultados/publicacao/publico/escola.jsf>. Acesso em: 01 abr. 2019.

SANTANA, M. R. M. BORBA, R. E. S. R. **O acaso, o provável, o determinístico**: como concebem e o que conhecem professores do Ensino Fundamental. ReBECCEM: Cascavel, (PR), v.1, n.1, p. 84-103, dez., 2017.

SANTOS, J. A. F. L. **O movimento do pensamento probabilístico mediado pelo processo de comunicação com alunos do 7º ano do Ensino Fundamental**. 2010, 197f. Dissertação (Mestrado em Educação) — Universidade São Francisco, Itatiba/SP, 2010.

SANTOS, J.A.F.L. **A produção de significações sobre combinatória e probabilidade numa sala de aula do 6º ano do Ensino Fundamental a partir de uma prática problematizadora**. 2015. 191 p. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Educação, Universidade São Francisco, Itatiba, 2015.

SILVA, C.B.; CAZORLA, I.M.; KATAOKA, V.Y. Trajetória e perspectivas da Educação Estatística no Brasil, 2010-2014: um olhar a partir do GT-12. *In: III Fórum de Discussão*: Parâmetros Balizadores da Pesquisa em Educação Matemática no Brasil. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.17, n.3, p.578-596, 2015, ISSN: 1983-3156.

SILVA, F. M. N. **Jogos no processo de ensino-aprendizagem em probabilidade**. 2013. 71 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Exatas e da Terra) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2013.

SILVA, R.C.B. **É a moeda que diz, não é a gente que quer não**: conhecimentos probabilísticos de crianças em situações de jogos. 2016. 135f. Dissertação (Mestrado em Matemática e Tecnologia - EDUMATEC) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2016.

SILVA, V. D. M. **Abordagem das noções de probabilidade nos livros do Ensino Fundamental II**. 2015. 76f. Dissertação (Mestrado no Programa de Pós-Graduação

Profissional em Matemática - PROFMAT) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2015.

STRUMINSKI, L. A. F. **Uso de jogos no ensino de matemática: uma proposta didática para o ensino de probabilidade.** 2016. 98f. Dissertação (Mestrado no Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática - PROFMAT) – Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2016.

TONOUTI, R. R. **Avaliação de um programa de ensino para aprendizagem de Probabilidade nos anos iniciais do Ensino Fundamental.** 2013. 134f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2013.

VIECILI, C.R.C. **Modelagem matemática: uma proposta para o ensino da matemática.** 2006. 119 f. Dissertação (Mestrado em Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.

WALICHINSKI, D.; SANTOS JUNIOR, G.; ISHIKAWA, E. C M. Educação estatística e parâmetros curriculares nacionais: algumas considerações. *In: Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*. RBECT, v. 7, n. 3, set./dez., 2014, ISSN - 1982-873X.

ZONTINI, L.R.S.; MOCROSKY, LF. O bicho de sete cabeças: uma discussão sobre o professor dos anos iniciais e o medo da matemática. *In: Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM*. São Paulo, jul., 2016, ISSN 2178-034X.

APÊNDICE A – CARTA DE ANUÊNCIA



Secretaria Executiva de Desenvolvimento da Educação
 Gerência Regional de Educação – GRE-Arcoverde
 Escola Anete Vale de Oliveira
 Rua Elvira Vale de Oliveira, 185 – Centro, Pedra-PE
 Tels. (87) 3858-2900 (87) 3858-2901
 Cadastro Escolar E-507.002 Port. 283 D.O. 12.02.1972

CARTA DE ANUÊNCIA

Declaramos para os devidos fins, que aceitaremos o pesquisador Indaclécio Paulo dos Santos a desenvolver o seu projeto intitulado de **Ecologia de Aprendizagem sobre probabilidade com estudantes do 7º e 8º anos finais do Ensino Fundamental**, que está sob a orientação do Prof. Dr. José Ivanildo Felisberto de Carvalho, professor da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), cuja pesquisa tem como objetivo: Desenvolver e analisar uma sequência de atividades caracterizada como ecologia de aprendizagem orientada para o ensino e aprendizagem de Probabilidade com estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental. Através da aplicação de um Design Experiments em um grupo de estudantes do 7º e 8º ano do Ensino Fundamental, nesta instituição de ensino, bem como cederemos o acesso e uso de nossos espaços, sala de aula, biblioteca, e o laboratório de informática da escola, para serem utilizados na referida pesquisa.

Esta autorização está condicionada ao cumprimento do pesquisador aos requisitos da Resolução 466/12 e suas complementares, comprometendo-se o mesmo a utilizar os dados pessoais dos sujeitos da pesquisa, exclusivamente para os fins científicos, mantendo o sigilo e garantindo a não utilização das informações em prejuízo das pessoas e/ou das comunidades.

Antes de iniciar a coleta de dados o pesquisador deverá apresentar a esta Instituição o Parecer Consubstanciado devidamente aprovado, emitido por Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos, credenciado ao Sistema CEP/CONEP.

Pedra, 02 de Abril de 2018.

Genilda de Lira Barros Cavalcanti

Genilda de Lira Barros Cavalcanti
 Gestora da Escola Anete Vale de Oliveira

Genilda de Lira B. Cavalcanti
 Gestora Mat. 174.935-8
 Ato 124 D.O. de 03/01/2013

APÊNDICE B – TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA**

**TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO
(PARA MENORES DE 7 a 18 ANOS)**

OBS: Este Termo de Assentimento para o menor de 7 a 18 anos não elimina a necessidade da elaboração de um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido que deve ser assinado pelo responsável ou representante legal do menor.

Convidamos você _____, após autorização dos seus pais [ou dos responsáveis legais] para participar como voluntário (a) da pesquisa: **Ecologia de Aprendizagem sobre probabilidade com estudantes do 7º e 8º anos finais do Ensino Fundamental**. Esta pesquisa é da responsabilidade do pesquisador Indaclécio Paulo dos Santos. Endereço: Rua Hermes de Siqueira Cavalcanti, n. 38, Alto da Boa Vista, Pedra-PE. Telefone: (87-99123.8530), e e-mail (idaclecio@hotmail.com), e está sob a orientação do Professor Dr. José Ivanildo Felisberto de Carvalho, telefone: (81-99874.6379), e-mail (ivanfcar@hotmail.com).

Você será esclarecido (a) sobre qualquer dúvida com o responsável por esta pesquisa. Apenas quando todos os esclarecimentos forem dados e você concorde com a realização do estudo, pedimos que rubrique as folhas e assine ao final deste documento, que está em duas vias. Uma via deste termo lhe será entregue para que seus pais ou responsável possam guardá-la e a outra ficará com o pesquisador responsável.

Você estará livre para decidir participar ou recusar-se. Caso não aceite participar, não haverá nenhum problema, desistir é um direito seu. Para participar deste estudo, um responsável por você deverá autorizar e assinar um Termo de Consentimento, podendo retirar esse consentimento ou interromper a sua participação em qualquer fase da pesquisa, sem nenhum prejuízo.

INFORMAÇÕES SOBRE A PESQUISA:

- Essa pesquisa tem o objetivo desenvolver e analisar uma sequência de atividades caracterizada como ecologia de aprendizagem voltada para o ensino e aprendizagem de Probabilidade nos anos finais do Ensino Fundamental. A coleta de dados será realizada através de observação, gravações de áudio e vídeo, e das anotações dos alunos. Onde cada coleta será pré-agendada e realizada no contra turno de aula dos participantes. O registro será por meio de gravação em áudio, respostas dos questionários e anotações em caderno de campo.
- A coleta de dados poderá totalizar no mínimo 6 e no máximo 8 encontros a serem realizados no período de três meses, tendo início no mês de julho e previsão de término no mês de setembro. Os encontros serão semanais, duas ou três vezes por semana com carga horária de 3 horas/aulas durante cada encontro. Essa pesquisa ocorrerá na Escola Anete Vale de Oliveira, localizada na Rua Elvira Vale de Oliveira, n. 185 – Centro, Pedra-PE, CEP 55.280-000. Terá como participantes 12 estudantes do 7º e 8º ano do Ensino Fundamental, a escolha dos alunos se dará de modo voluntário, sendo convidados os alunos que participam das aulas de reforço

acontecidas no contraturno, realizadas com o pesquisador Indaclécio Paulo dos Santos, então professor efetivo da instituição.

- **RISCOS diretos** para o voluntário dessa pesquisa é apenas um eventual constrangimento, o qual será sempre evitado a partir do diálogo com o participante.
- **BENEFÍCIOS diretos e indiretos** para os voluntários será a participação de momentos de aprendizagem vinculada ao uso de recursos tecnológicos, atividades experimentais e a compreensão de fenômenos aleatórios para o estudo do conceito de Probabilidade.

As informações desta pesquisa serão confidenciais e serão divulgadas apenas em eventos ou publicações científicas, não havendo identificação dos voluntários, a não ser entre os responsáveis pelo estudo, sendo assegurado o sigilo sobre a sua participação. Os dados coletados nesta pesquisa (gravações, filmagens, e registros escritos), ficarão armazenados em dispositivos digitais e arquivo pessoal do pesquisador principal, no endereço Rua Hermes de Siqueira Cavalcanti, n. 38, Bairro Alto da Boa Vista, na cidade da Pedra – PE, CEP 55.280-000, pelo período de mínimo 5 anos, após o término da pesquisa.

Nem você e nem seus pais ou responsáveis legais pagarão nada para você participar desta pesquisa, também não receberão nenhum pagamento para a sua participação, pois é voluntária. Se houver necessidade, as despesas (deslocamento e alimentação) para a sua participação e de seus pais serão assumidas ou ressarcidas pelos pesquisadores. Fica também garantida indenização em casos de danos, comprovadamente decorrentes da sua participação na pesquisa, conforme decisão judicial ou extra-judicial.

Este documento passou pela aprovação do Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos da UFPE que está no endereço: **(Avenida da Engenharia s/n – 1º Andar, sala 4 - Cidade Universitária, Recife-PE, CEP: 50740-600, Tel.: (81) 2126.8588 – e-mail: cepcps@ufpe.br).**

Assinatura do pesquisador (a)

ASSENTIMENTO DO(DA) MENOR DE IDADE EM PARTICIPAR COMO VOLUNTÁRIO(A)

Eu, _____, portador (a) do documento de Identidade _____ (se já tiver documento), abaixo assinado, concordo em participar do estudo **Ecologia de Aprendizagem sobre probabilidade com estudantes do 7º e 8º anos finais do Ensino Fundamental**, como voluntário (a). Fui informado (a) e esclarecido (a) pelo (a) pesquisador (a) sobre a pesquisa, o que vai ser feito, assim como os possíveis riscos e benefícios que podem acontecer com a minha participação. Foi-me garantido que posso desistir de participar a qualquer momento, sem que eu ou meus pais precise pagar nada.

Pedra, em ____ / ____ / _____.

Assinatura do (da) menor

Presenciamos a solicitação de assentimento, esclarecimentos sobre a pesquisa e aceite do/a voluntário/a em participar. 02 testemunhas (não ligadas à equipe de pesquisadores):

Nome:	Nome:
Assinatura:	Assinatura:

APÊNDICE C – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE ESCLARECIDO



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA**

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE ESCLARECIDO

Solicitamos a sua autorização para convidar o(a) seu/sua filho(a) _____ para participar, como voluntário (a), da pesquisa **Ecologia de Aprendizagem sobre probabilidade com estudantes do 7º e 8º anos finais do Ensino Fundamental**. Esta pesquisa faz parte da dissertação de mestrado desenvolvida no programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, pelo pesquisador Indaclécio Paulo dos Santos. Endereço: Rua Hermes de Siqueira Cavalcanti, n. 38, Alto da Boa Vista, Pedra-PE. Telefone: (87-99123.8530), e e-mail (idaclecio@hotmail.com) e está sob a orientação do Professor Dr. José Ivanildo Felisberto de Carvalho, telefone: (81-99874.6379), e-mail (ivanfcar@hotmail.com).

Caso este Termo de Consentimento contenha informações que não lhe sejam compreensível, as dúvidas podem ser tiradas com a pessoa que está lhe entrevistando e apenas ao final, quando todos os esclarecimentos forem dados, caso concorde que o (a) menor faça parte do estudo pedimos que rubrique as folhas e assine ao final deste documento, que está em duas vias, uma via lhe será entregue e a outra ficará com o pesquisador responsável. Caso não concorde, não haverá penalização nem para o (a) Sr(a) nem para o/a voluntário/a que está sob sua responsabilidade, bem como será possível ao/a Sr. (a) retirar o consentimento a qualquer momento, também sem nenhuma penalidade.

INFORMAÇÕES SOBRE A PESQUISA:

Essa pesquisa tem o objetivo desenvolver e analisar uma sequência de atividades caracterizada como ecologia de aprendizagem voltada para o ensino e aprendizagem de Probabilidade nos anos finais do Ensino Fundamental. A coleta de dados será realizada através de observação, gravações de áudio e vídeo, e das anotações dos alunos. Onde cada coleta será pré-agendada e realizada no contraturno de aula dos participantes. O registro será por meio de gravação em áudio, respostas dos questionários e anotações em caderno de campo. A coleta de dados poderá totalizar no mínimo 6 e no máximo 8 encontros a serem realizados no período de três meses, tendo início no mês de julho e previsão de término no mês de setembro. Os encontros serão semanais, duas ou três vezes por semana com carga horária de 3 horas/aulas durante cada encontro. Essa pesquisa ocorrerá na Escola Anete Vale de Oliveira, localizada na Rua Elvira Vale de Oliveira, n. 185 – Centro, Pedra-PE, CEP 55.280-000. Terá como participantes 12 estudantes do 7º e 8º ano do Ensino Fundamental, a escolha dos alunos se dará de modo voluntário, sendo convidados os alunos que participam das aulas de reforço acontecidas no contraturno, realizadas com o pesquisador Indaclécio Paulo dos Santos, então professor

efetivo da instituição.

A participação nessa pesquisa beneficiará momentos de aprendizagem vinculada ao uso de recursos tecnológicos, atividades experimentais e a compreensão de fenômenos aleatórios para o estudo do conceito de Probabilidade. O risco na participação dessa pesquisa é apenas um eventual constrangimento, o qual será sempre evitado a partir do diálogo com o participante.

As informações desta pesquisa serão confidenciais e serão divulgadas apenas em eventos ou publicações científicas, não havendo identificação dos voluntários, a não ser entre os responsáveis pelo estudo, sendo assegurado o sigilo sobre a participação do/a voluntário(a). Os dados coletados nesta pesquisa (filmagens, gravação em áudio, anotações, questionário, registros de observações e as atividades desenvolvidas pelos estudantes), ficarão armazenados em (pastas de arquivo, para os dados físicos e em um armazenador de dados digitais para os dados multimídia), sob a responsabilidade do pesquisador, no endereço acima informado, pelo período mínimo de cinco anos.

Os participantes não pagarão nada participar desta pesquisa, como também não receberão nenhum pagamento para a sua participação, pois é voluntária. Se houver necessidade, todas as despesas necessárias devido a deslocamento ou alimentação para a realização da pesquisa serão ressarcidas pelos pesquisadores sem nenhum custo aos participantes

Em caso de dúvidas relacionadas aos aspectos éticos deste estudo, você poderá consultar o Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos da UFPE no endereço: Avenida da Engenharia s/n - Prédio do CCS - 1º Andar, sala 4 - Cidade Universitária, Recife-PE, CEP: 50740-600, Tel.: (81) 2126.8588 - e-mail: cepccs@ufpe.br.

Indaclécio Paulo dos Santos

Pesquisador responsável

ASSENTIMENTO DO(A) MENOR DE IDADE EM PARTICIPAR COMO VOLUNTÁRIO(A)

Eu, _____, portador (a) do documento de Identidade _____ (se já tiver documento), abaixo assinado, concordo em participar do estudo Ecologia de Aprendizagem sobre probabilidade com estudantes do 7º e 8º anos finais do Ensino Fundamental, como voluntário(a). Fui informado(a) e esclarecido(a) pelo(a) pesquisador(a) sobre a pesquisa, o que vai ser feito, assim como os possíveis riscos e benefícios que podem acontecer com a minha participação. Foi-me garantido que posso desistir de participar a qualquer momento, sem que eu ou meus pais precisem pagar nada.

Caruaru, em ____ / ____ / _____.

Assinatura do responsável

Presenciamos a solicitação de assentimento, esclarecimentos sobre a pesquisa e aceite do/a voluntário/a em participar. 02 testemunhas (não ligadas à equipe de pesquisadores):

Testemunha

Assinatura

Testemunha

Assinatura

APÊNDICE D – CADERNO DE ACOMPANHAMENTO DO ESTUDANTE

Atividade 1 - Jogo do Caça Níquel

Descubra se você pode prever um desses jogos!

Jogo 1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20

Jogo 1b
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20

Jogo 2
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20

Jogo 3
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20

Jogo 4
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20

Jogo 4b
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20

Atividade 2: O problema das cartas de João

Problema: João tem 8 cartas: 4 com frentes verdes e 4 com frentes roxas. Ele coloca as cartas em ordem, 4 verdes em cima e 4 roxas na parte inferior. Então, ele embaralha as cartas algumas vezes. O que tem mais chance de acontecer?

- As 4 primeiras ainda são verdes.
- As 4 primeiras são roxas.
- Estão misturadas: nas 4 primeiras algumas cartas são verdes e outras são roxas.

Explicar por que?

Atividade 3: As fichas de Jade

1ª Situação: Jade tem 4 fichas, todas elas são pretas de um lado e brancas do outro. Ela joga as fichas para cima que caem ao chão. Como elas ficarão após caírem no chão?

- Todas as fichas cairão com o lado preto voltado para cima.
- Será uma mistura: algumas fichas cairão com o lado preto para cima e outras com o lado branco para cima.
- Todas as fichas cairão com o lado branco voltado para cima.

2ª Situação: Jade coloca as mesmas 4 fichas na mesa com o lado branco virado para cima. Em seguida, ela vira cada ficha. Como elas ficarão agora?

- Todas as fichas terão seu lado branco voltado para cima.
- Será uma mistura: algumas fichas terão o lado branco para cima e outras o lado preto para cima.
- Todas as fichas terão seu lado preto voltado para cima.
- Metade das fichas terá o lado branco voltado para cima e metade o lado preto virado para cima.

3ª Situação: Jade coloca as mesmas 4 fichas na mesa com o lado branco voltado para cima. Em seguida, ela vira metade das fichas. Como as fichas ficarão agora?

- Todas fichas terão seu lado branco voltado para cima.
- Será uma mistura: algumas fichas terão o lado branco para cima e outras o lado preto para cima.
- Todas fichas terão seu lado preto voltado para cima.
- Metade das fichas terá o lado branco voltado para cima e metade o lado preto voltado para cima.

O que há de diferente, em relação ao resultado, na primeira situação comparada com as outras duas situações? _____

Atividade 4: Tabuleiro de bolinhas

Problema: Eu tenho um tabuleiro com bolas nas extremidades: de um lado as bolas são azuis e do outro lado as bolas são vermelhas. Agora, eu inclino o tabuleiro muitas vezes, movendo de um lado para o outro. Depois de ter feito isso: o que tem mais chance de acontecer com as bolas?

- As bolas azuis e as vermelhas não se misturam e vão ficar no mesmo lado como estavam no início.
- As bolas azuis e as vermelhas não se misturam, mas vão trocar de lado.
- As bolas azuis e as vermelhas se misturam: algumas vão para o outro lado, outras vão ficar do lado que começaram.

Explique a escolha da sua resposta: _____

Atividade 5: Jogo do par ou ímpar

Cada jogador escolhe se quer o 'par' ou o 'ímpar'. Definido isso, os dois jogadores, um de frente para o outro, lançam, ao mesmo tempo, as mãos para frente com valores de 0 a 5 (indicados com a quantidade de dedos das mãos). Se a soma for um número par vence o jogador par, se for um número ímpar, vence o jogador ímpar.

1ª Situação: Escreva todas as possibilidades de um jogo de par ou ímpar entre dois colegas. Cada jogador só pode usar os dedos de uma das mãos.

2ª Situação: Considerando os possíveis resultados de um jogo de par ou ímpar entre dois colegas – em que cada jogador só pode usar os dedos de uma de suas mãos –, classifique com uma das palavras do quadro abaixo os acontecimentos citados:

Impossível – pode ser – possível – bastante provável – certo – se espera que – seguro – há alguma possibilidade – há alguma probabilidade – incerto

- a) A soma ser um número ímpar: _____
- b) A soma ser um número menor do que 10: _____
- c) A soma ser o número 12: _____
- d) A soma ser um número maior do que 0: _____
- e) A soma ser o número 0: _____
- f) Os colegas apresentarem números de dedos distintos: _____
- g) Os colegas apresentarem números de dedos iguais: _____

Atividade 6: Impossíveis versus Improváveis

Analise as sentenças abaixo, e classifique cada sentença em uma situação impossível ou improvável de acontecer.

Fazer um guarda-chuva de vidro.		X	Fazer um guarda-chuva de ar.
Crescimento do adulto até voltar a ser criança.		X	Crescimento do cabelo até os dedos dos pés.
Contagem dos pelos do rabo do cachorro.		X	Contagem das estrelas em uma noite nublada.
Capturar uma sombra.		X	Capturar uma mosca com pauzinhos.
Não comer por 10 dias.		X	Não comer por 10 meses.
Ler os pensamentos de alguém.		X	Ler os lábios de alguém.
Andar sobre um fio de telefone.		X	Andar sobre a água.
Viver sem coração.		X	Viver sem nariz.
Nunca esquecer o nome de ninguém.		X	Saber o nome de alguém sem conhecê-la.
Desbloquear uma porta com a mente.		X	Desbloquear uma porta com um clipe de papel.
Viver por 120 anos.		X	Viver por mil anos.
Ouvir um som antes de ser produzido.		X	Identificar a raça de um cão por seu latido.
Colagem de uma casca de ovo quebrada de volta no ovo.		X	Desembaralhar um ovo mexido.
Uma mulher dando à luz a um canguru.		X	Uma mulher dando à luz a 20 crianças em uma vida.
Falar sem mover os lábios.		X	Falar duas línguas simultaneamente.
Atravessar uma parede.		X	Atravessar o fogo.
Permanecer acordado durante 5 dias.		X	Permanecer acordado por 5 meses.
Ler um livro sem abrir a capa.		X	Ler um livro de cabeça para baixo.

Atividade 7: Os filhos de Romeu e Julieta

Situação: Romeu e Julieta estão planejando ter três filhos após o casamento. Como sabemos, o sexo do bebê que será gerado não pode ser determinado, sabemos apenas que pode ser do sexo masculino e feminino. Romeu e Julieta estavam pensando nas combinações possíveis dos filhos que teriam entre a quantidade de homens e mulheres.

a) O que você acha que é mais provável de acontecer?

- () Ter os três filhos do mesmo sexo.
- () Ter apenas dois filhos do mesmo sexo.
- () As chances são as mesmas.

Por quê? _____

b) Descreva todas as combinações possíveis dos filhos que Romeu e Julieta poderiam ter, pensando pela ordem dos nascimentos dos filhos.

c) O que se pode concluir diante dessas combinações? _____

Atividade 8: Corrida de cavalos**Regras do jogo:**

- Cada jogador aposta em três cavalos, podendo ambos, apostar no mesmo cavalo.
- Alternadamente, os jogadores lançam os dados e calculam a soma dos pontos obtidos na face superior dos mesmos.
- A soma obtida corresponde ao cavalo que avançará uma casa.
- Ganha o cavalo que primeiro alcançar a linha de chegada, independentemente de ser um dos cavalos apostados.

CHEGADA													
9													
8													
7													
6													
5													
4													
3													
2													
1													
LARGADA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
REGISTRO DAS APOSTAS													

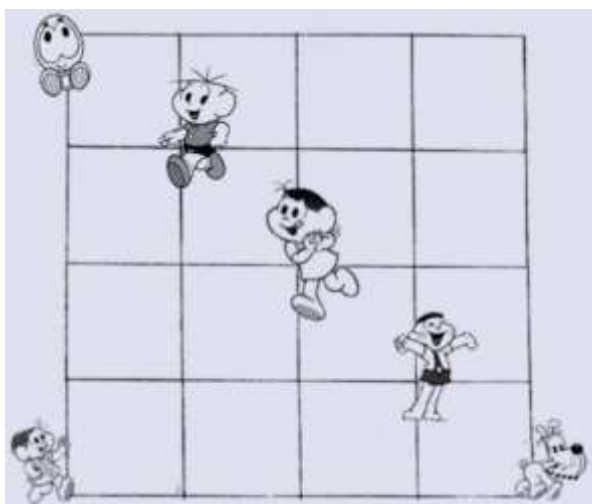
a) Há algum cavalo que tem mais ou menos chances de vencer que o outro? Justifique sua resposta. _____

b) Descreva todas as possibilidades existentes entre a soma de dois dados. Em seguida, quantifique as chances que cada número tem de ocorrer no lançamento.

c) O registro feito no tabuleiro da corrida e o total de possibilidades para número são semelhantes? _____

Atividade 9: Passeios aleatórios da Mônica

Estória: “A Mônica e seus amigos moram no mesmo bairro. A distância da casa da Mônica para a casa de Horácio, Cebolinha, Magali, Cascão e Bidu é de quatro quarteirões. A Mônica costumava visitar seus amigos durante os dias da semana em uma ordem pré-estabelecida: segunda-feira, Horácio; terça-feira, Cebolinha; quarta-feira, Magali; quinta-feira, Cascão e sexta-feira, Bidu. Para tornar mais emocionantes os encontros, a turma combinou que o acaso escolhesse o amigo a ser visitado pela Mônica. Para isso, na saída de sua casa e a cada cruzamento, Mônica deve jogar uma moeda; se sair cara (C), andará um quarteirão para o Norte (vertical para cima), se sair coroa (X), um quarteirão para o Leste (horizontal à direita). Cada jogada representa um quarteirão de percurso. Mônica deve jogar a moeda quatro vezes para poder chegar à casa dos amigos”.



Mapa dos Passeios aleatórios da Mônica (KATAOKA, 2010).

1º Qual é a diferença entre a forma antiga da Mônica visitar seus amigos e a nova forma? _____

2º Todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados?

() Não. Quais são as chances? _____

() Sim. Qual é a chance? _____

Por que vocês acham isso? _____

3º Seguindo a segunda estratégia da Monica para visitar um amigo, lançando uma moeda quatro vezes: *Se sair cara (C), Mônica andar*á um *quarteirão para o Norte (vertical para cima), se sair coroa (X), um quarteirão para o Leste (horizontal à direita).*

Você e seu/sua colega devem repetir esse experimento 20 vezes e anotar os resultados no quadro abaixo. (Por exemplo, se sair a sequência: cara, cara, coroa, cara, anotar na coluna sequência: CCXC e, na coluna do amigo visitado: Cebolinha).

Repetição	Sequência	Amigo visitado	Repetição	Sequência	Amigo visitado
1			11		
2			12		
3			13		
4			14		
5			15		
6			16		
7			17		
8			18		
9			19		
10			20		

a) De acordo com os resultados do experimento acima, indique na tabela a frequência referente aos amigos visitados, como “a razão entre a quantidade de vezes que o amigo foi visitado e o total de visitas feitas pela Mônica”.

	Horácio	Cebolinha	Magali	Cascão	Bidu
Frequência Relativa					

b) Qual amigo foi mais vezes visitado pela Mônica? _____

4º Ainda diante da situação que a Mônica irá visitar um amigo, procure descrever todas as possibilidades existentes depois de lançar uma moeda 4 vezes. Use C para cara, e X para coroa, em seguida, anote o amigo visitado.

--

a) De acordo com todas estas possibilidades encontradas acima, indique na tabela a frequência relativa referente a quantidade de vezes que cada amigo foi visitado.


	Horácio	Cebolinha	Magali	Cascão	Bidu
Frequência Relativa					





b) Qual amigo tem mais chance de ser visitado? _____

c) As chances coincidiram com o resultado do experimento da 3ª Questão? Explique.





Atividade 10: Clube de danças

Clube de Danças



 Billy
 Sam
 Marcos
 Lucas

“Em um clube de danças há 10 pessoas, 5 homens e 5 mulheres. Eles devem formar pares mistos para a dança, por isso (apenas neste problema) os homens não podem dançar com outros homens, ou mulheres com mulheres.”

 Suzie
 Maria
 Liza
 Laura

1. Você consegue verificar:

a) Quais são as possibilidades de casais a serem formados no sorteio?

- b) Qual número de danças que serão executadas? _____
- c) Quantas vezes cada pessoa dança? _____
- d) Qual é a probabilidade de que uma dança seja dançada por casais cujos nomes começam ambos com a mesma letra? $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$
- e) Qual é a probabilidade de que uma dança seja dançada por um casal que ambos estejam vestidos de vermelho? $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$
- f) Qual é a probabilidade de se retirar o primeiro par de dançarinos com Billy no par? $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$

Atividade 11: Bolinhas no saco

Um saco I contém três bolas brancas e quatro bolas pretas, e um saco II contém duas bolas brancas e três bolas pretas. Sem ver, tira-se uma bola de cada um dos sacos.

Saco I: ○○○●●●● Saco II: ○○●●●

- a) Em qual dos sacos é mais provável obter uma bola branca?
- () Do saco I.
- () Do saco II.
- () É igualmente provável obter uma bola branca de qualquer dos sacos I e II.
- b) Que raciocínio utilizou para responder à pergunta?
- _____
- _____
- c) Indique abaixo, as probabilidades de se retirar uma bola branca em cada um dos sacos:

Saco I

Saco II

Atividade 12 – Jogo Blocos no Saco

Jogo 1				
Fases	Saco Azul		Saco Vermelho	
	Blocos Amarelos	Blocos Pretos	Blocos Amarelos	Blocos Pretos
1	1	1	2	2
2	7	4	7	6
3	4	8	5	12
4	2	1	3	1
5	3	3	6	6
6	3	4	4	6
7	10	4	10	2
8	6	12	5	10
9	4	8	6	8
10	5	10	2	6

Jogo 2				
Fases	Saco Azul		Saco Vermelho	
	Blocos Amarelos	Blocos Pretos	Blocos Amarelos	Blocos Pretos
1	6	6	6	3
2	3	6	4	8
3	9	3	6	3
4	8	1	8	2
5	1	1	4	4
6	6	3	8	2
7	7	14	2	4
8	8	4	4	4
9	2	6	1	4
10	2	2	5	5

Jogo 3				
Fases	Saco Azul		Saco Vermelho	
	Blocos Amarelos	Blocos Pretos	Blocos Amarelos	Blocos Pretos
1	4	2	4	4
2	7	7	3	3
3	5	10	3	10
4	7	15	1	2
5	8	16	3	6
6	5	10	5	5
7	3	10	4	16
8	7	2	8	2
9	3	6	3	9
10	8	16	5	10

Atividade 12: Jogo Blocos no Saco

O sistema de pontuação para esta atividade será: ACERTO ganha 2 pontos, ERRO ganha -1 ponto.

Jogo 1

Jogos	Acerto	Erro	Pontuação
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
Total da pontuação:			

Jogo 2

Jogos	Acerto	Erro	Pontuação
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
Total da pontuação:			

Jogo 3

Jogos	Acerto	Erro	Pontuação
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
Total da pontuação:			

Atividade 1: Jogo dos Caça-Níqueis**Tabela das Sequências**

Analise e identifique, quais destes jogos, os resultados podem ser previsíveis:

Jogo 1	Jogo 1b	Jogo 2	Jogo 3	Jogo 4	Jogo 4b
abc	cba	257	hbt	132	213
bot	tob	143	clu	376	637
acp	pca	872	sbp	548	485
clo	olc	761	ssd	794	479
acg	gca	793	sbp	928	289
bdg	gab	269	tlb	124	241
bds	sdb	186	jmu	248	248
chl	lhc	326	hbp	168	681
cls	slc	971	cbw	346	463
ops	spo	247	dsj	137	137
cdg	gdc	182	mst	594	459
los	sol	389	ljd	396	639
acp	pca	968	hsb	378	837
dps	spd	695	ttd	158	815
aco	oca	921	sbb	356	635
cps	spc	941	smp	792	279
cdo	odc	659	bjw	154	415
cds	sdc	875	cmu	748	487
clt	tlc	134	htw	526	265
				374	437
Previsível	Previsível	Previsível	Previsível	Previsível	Previsível
Imprevisível	Imprevisível	Imprevisível	Imprevisível	Imprevisível	Imprevisível

Com suas palavras, tente explicar por que os jogos são ou não previsíveis?

Jogo 1: _____

Jogo 1b: _____

Jogo 2: _____

Jogo 3: _____

Jogo 4: _____

Jogo 4b: _____
