

Frequenzverhalten linearer Netzwerke

Martin Schlup

© 4. August 2012

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	3
2. Frequenzgang, Definitionen und Darstellung	6
2.1. Definitionen	6
2.2. Darstellung	8
2.2.1. Bodediagramm	8
2.2.2. Ortskurve	10
3. Frequenzgang, Bestandteile und Strukturen	12
3.1. Elementare Bausteine	12
3.1.1. Verstärkung, Dämpfung, Differentiation, Integration	12
3.1.2. Systeme erster Ordnung	13
3.1.3. Systeme zweiter Ordnung	14
3.2. Analyse und Synthese	16
3.2.1. Bildungsgesetze für die Frequenzgangfunktion	18
3.2.2. Synthese im Bodediagramm	21
A. Komplexe Zahlen	30
B. Logarithmierte Größenverhältnisse	33
B.1. Leistungsverhältnisse	33
B.2. Signalverhältnisse	33
B.3. Pegel	35
C. Elementare Frequenzgangfunktionen	37
D. Bedeutung des Gütefaktors	43
E. Hinweise zu Matlab	46
E.1. Programmierung einer Frequenzgangfunktion und ihrer Darstellung	46
E.2. Detaillierte Programmierung ohne spezifische Matlab-Funktionen	47

1. Einleitung

Im stationären, eingeschwungenen Zustand, d. h. nach Abklingen aller transienten Einschwingvorgänge, sind bei harmonischer (sinusförmiger) Anregung mit einer festen Frequenz sämtliche Grössen eines zeitinvarianten, linearen Systems (LTI-System) ebenfalls harmonisch, wie z. B. die Spannungen und Stromstärken elektrischer Schaltungen mit (idealen) Widerständen, Kondensatoren und Spulen.¹

Harmonische Signale der Gestalt $x(t) = \hat{X} \cos(\omega t + \varphi_x)$ sind durch die Angabe der drei Parametern **Amplitude** \hat{X} , beziehungsweise **Effektivwert** $X = \frac{\hat{X}}{\sqrt{2}}$, **Nullphasenwinkel** φ_x und **Kreisfrequenz** ω , beziehungsweise **Frequenz** $f = \frac{\omega}{2\pi}$ eindeutig und vollständig beschrieben.² Bei vorgegebener Frequenz können die Amplitude als *Betrag* und der Nullphasenwinkel als *Winkel* oder *Argument* einer komplexen Zahl $\underline{X} = X e^{j\varphi_x}$ aufgefasst werden. Diese komplexe Zahl hat physikalisch keine unmittelbare Bedeutung. Man kann sie aber als Beschreibung des zeitlichen Verhaltens der betrachteten Grösse bei der gegebenen Frequenz interpretieren. In diesem Zusammenhang spricht man von der **Darstellung im Frequenzbereich** des harmonischen Signals, im Gegensatz zur expliziten *Darstellung im Zeitbereich*. Die eineindeutige Zuweisung³

$$x(t) = \hat{X} \cos(\omega t + \varphi_x) \quad \longleftrightarrow \quad \underline{X} = X e^{j\varphi_x} \quad (1.1)$$

einer harmonischen Schwingung zu einer komplexen Zahl ist eine *lineare Abbildung* mit den folgenden beiden Eigenschaften:

$$\text{Homogenität:} \quad \alpha x(t) \quad \longleftrightarrow \quad \alpha \underline{X} \quad (1.2)$$

$$\text{Additivität:} \quad x_1(t) + x_2(t) \quad \longleftrightarrow \quad \underline{X}_1 + \underline{X}_2 \quad (1.3)$$

Es gilt demzufolge das Superpositionsprinzip.

Bildet man ausserdem die **zeitliche Ableitung** der harmonischen Funktion $x(t)$ erhält man:

$$y(t) = \frac{dx}{dt} = \omega \hat{X} \cos\left(\omega t + \varphi_x + \frac{\pi}{2}\right) \quad \longleftrightarrow \quad \underline{Y} = \omega X e^{j(\varphi_x + \frac{\pi}{2})} = j\omega \underline{X} \quad (1.4)$$

Die Ableitung einer harmonischen Funktion ist wiederum eine harmonische Funktion der selben Frequenz mit einer mit ω multiplizierten Amplitude und einem um $\frac{\pi}{2}$ erhöhten Nullphasenwinkel. Übertragen auf die entsprechende komplexe Zahl bedeutet dies:

¹ LTI: *linear time invariant*

² Unter dem Begriff *Signal* wird allgemein der Verlauf einer physikalischen Grösse in Funktion einer anderen („unabhängigen“) verstanden; hier konkret, eine elektrische Grösse wie Stromstärke oder Spannung in Funktion der Zeit.

³ *eineindeutig*: eindeutig für die Abbildung und ihre Inverse

1. Einleitung

Eine Ableitung im Zeitbereich entspricht einer Multiplikation mit $j\omega$ im Frequenzbereich. Dies entspricht in der komplexen Zahlenbebene einer so genannten *Drehstreckung*: eine Streckung um den Faktor ω und eine Drehung um $\frac{\pi}{2}$ im Gegenuhrzeigersinn.

Systeme welche *Speicher* von Energieträgern aufweisen, wie z. B. elektrische Schaltungen mit Kondensatoren und Spulen, werden als *dynamische Systeme* bezeichnet. Die Grössen, mit denen der Energiegehalt dieser Speicher bestimmt werden kann, werden *Zustandsgrössen* genannt, z. B. die Spannungen über Kondensatoren oder die Stromstärken in Spulen. Die Beschreibung des Verhaltens von dynamischen Systemen führt auf Differentiale, d. h. Ableitungen nach der Zeit der Zustandsgrössen. Durch diese Ableitungen im Zeitbereich, werden im Frequenzbereich komplexe Ausdrücke erzeugt, welche Funktionen der Kreisfrequenz ω , beziehungsweise der Frequenz f sind. Ziel dieses Kapitels ist es, diese Abhängigkeiten systematisch zu untersuchen und Methoden vorzustellen mit welchen diese Abhängigkeiten dargestellt werden können.

Beispiel RC-Glied: komplexe Grössen

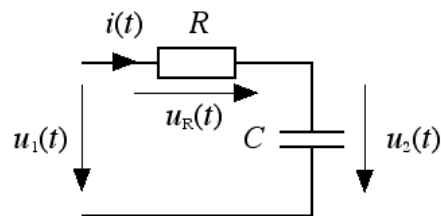


Abbildung 1.1.: RC-Glied

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \hat{U}_1 \cos(\omega t + \varphi_{u1}) \longleftrightarrow \underline{U}_1 = U_1 e^{j\varphi_{u1}} \\ u_2(t) &= \hat{U}_2 \cos(\omega t + \varphi_{u2}) \longleftrightarrow \underline{U}_2 = U_2 e^{j\varphi_{u2}} \\ i(t) &= \hat{I} \cos(\omega t + \varphi_i) \longleftrightarrow \underline{I} = I e^{j\varphi_i} \end{aligned}$$

Mit diesen Festlegungen ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} i(t) &= C \frac{du_2}{dt} \longleftrightarrow \underline{I} = C j\omega \underline{U}_2 \\ u_1(t) &= u_2(t) + Ri(t) = u_2(t) + RC \frac{du_2}{dt} \longleftrightarrow \underline{U}_1 = \underline{U}_2 + j\omega RC \underline{U}_2 = (1 + j\omega RC) \underline{U}_2 \end{aligned}$$

□

Wie man in diesem Beispiel feststellen kann, enthalten die komplexen Ausdrücke für \underline{I} und \underline{U}_1 die Kreisfrequenz, beziehungsweise die Frequenz explizit. Es stellt sich somit die Frage wie sich die einzelnen Grössen (Signale) in Funktion der Frequenz verhalten. Insbesondere interessiert die Abhängigkeit der Amplitude und des Nullphasenwinkels eines Signals von der Frequenz.

Die im Folgenden vorgestellten Methoden erlauben es, lineare Systeme neben ihrer Darstellung mittels (gewöhnlichen) Differentialgleichungen und deren quasistationären Lösungen, alternativ auch durch algebraische Gleichungen mit frequenzabhängigen, komplexen Zahlen zu beschreiben.

1. Einleitung

Die Methoden der Wechselstromlehre können so auf beliebige, *periodische* Signale erweitert werden.

Ein beliebiges periodisches Signal kann nämlich durch eine trigonometrische Reihe (**Fourier-Reihe**) angenähert werden, d. h. es kann als Summe von harmonischen Signalen (sinusförmige Signale verschiedener Frequenzen) dargestellt werden. Da für lineare Systeme das *Superpositionsprinzip* gilt, kann die resultierende Systemantwort als Summe der Antworten auf die einzelnen Terme der Reihe des Eingangssignals gebildet werden.

Bemerkung: Die hier eingeführten Begriffe und Verfahren sind nicht beschränkt auf lineare elektrische Schaltungen. Sie können bei allen technischen und nicht-technischen linearen oder linearisierten Systemen angewandt werden, welche mit harmonischen Signalen angeregt werden.

Im Anhang befindet sich ein Literaturverzeichnis zum Thema. Dieses erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und es wurden hier auch nur Werke aufgeführt, welche der angehende Elektroingenieur möglicherweise in Sinne einer Ergänzung zum Studium anschaffen kann. Die Werke von *Fürer*, *Heidemann* und *Nerreter* [1], [2], [3] sind ein Lernmittel, welches den gesamten Stoff der Elektrizitätslehre umfasst (ausgenommen die Leitungstheorie) und sich als (umfangreiches und anspruchsvolles) Selbstlernmittel eignet. Das Buch von *Hering*, *Bressler* und *Gutekunst* [4] ist eher ein praxisnahes Nachschlagwerk als ein Lernmittel, aber es deckt so ziemlich alles ab, womit ein heutiger Elektroniker konfrontiert wird. Zuletzt sei noch das Werk von *Lutz* und *Wendt* [5] erwähnt, welches neben vielem mehr das hier behandelte Thema allgemein und ausführlich behandelt und ebenfalls ein (umfassendes) Nachschlagwerk, insbesondere für die Regelungstechnik ist.

2. Frequenzgang, Definitionen und Darstellung

2.1. Definitionen

Die Abhängigkeit einer komplexen Grösse von der Frequenz oder der Kreisfrequenz wird als **Frequenzgang** dieser Grösse bezeichnet und als **Frequenzgangfunktion** mathematisch beschrieben. Da eine komplexe Grösse in einen *Betrag* (Modul) und einen *Winkel* (Argument) zerlegt werden kann (*polare Darstellung*), kann der Frequenzgang mit dem **Amplitudengang** (Betrag der Frequenzgangfunktion in Funktion der Frequenz) und dem **Phasengang** (Winkel/Argument der Frequenzgangfunktion in Funktion der Frequenz) eindeutig beschrieben werden.¹

Im Allgemeinen interessiert weniger das Verhalten einer einzelnen Grösse, als das eines Grössenverhältnisses.² Ein solches Grössenverhältnis oder **Übertragungsfaktor** ist natürlich auch eine Frequenzgangfunktion. Bei solchen Verhältnissen wird allgemein die Grösse im Nenner als *Ursache* oder *Eingangsgrösse* und die Grösse im Zähler als *Wirkung* oder *Ausgangsgrösse* betrachtet. Was letztlich als Ursache und was als Wirkung betrachtet wird, hängt von der Fragestellung ab und nicht von den Quellen mit denen das System angeregt wird. Dies soll am einführenden Beispiel aus Kapitel 1 verdeutlicht werden: Als Ursache wird dabei die Spannung $u_1(t)$ am Eingang des RC-Gliedes und als Wirkung die Spannung u_2 über dem (idealen) Kondensator betrachtet (cf. Abbildung 1.1 auf S. 4).

Beispiel RC-Glied: **Frequenzgangfunktion, Amplituden- und Phasengang**

Durch Umformen der Beziehung zwischen \underline{U}_1 und \underline{U}_2 kann die Frequenzgangfunktion $\underline{H} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}$ gebildet werden:

$$H(\omega) = \frac{U_2(\omega)}{U_1(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega RC} \quad (2.1)$$

Die Frequenzabhängigkeit dieses Verhältnisses wurde hier explizit mit der Klammer (ω) hervorgehoben.³ Dagegen wird das in der Wechselstromlehre übliche Unterstreichen der komplexen Grössen weggelassen.

¹ Es gibt aber auch die Möglichkeit Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl in Funktion der Frequenz zu betrachten (*kartesische Darstellung*). Dies wird z. B. in der Elektrochemie, unter anderem in der Impedanzspektroskopie der Geophysik benutzt.

² Gelegentlich wird ein solches auch als *Übertragungsfunktion* bezeichnet. Dies ist aber nicht ganz korrekt, da dieser Begriff eigentlich nur im Zusammenhang mit Transformationen, wie z. B. die Laplace-Transformation, benutzt werden sollte.

³ Da ω nie ohne begleitendes „j“ auftaucht, könnte man ebenfalls die Kombination ($j\omega$) benutzen.

2. Frequenzgang, Definitionen und Darstellung

Der Amplituden und der Phasengang der Grösse $H(\omega)$ lassen sich wie folgt ermitteln:⁴

$$|H(\omega)| = \frac{|U_2(\omega)|}{|U_1(\omega)|} = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad (2.2)$$

$$\langle H(\omega) \rangle = \langle U_2(\omega) \rangle - \langle U_1(\omega) \rangle = \varphi_{u2} - \varphi_{u1} = -\arctan(\omega RC) \quad (2.3)$$

Der Amplitudengang (2.2) beschreibt hier also das Amplitudenverhältnis zwischen Ausgangs- und Eingangssignal und der Phasengang (2.3) die Nullphasenwinkeldifferenz zwischen diesen beiden Signalen als Funktionen der Frequenz. Die Verläufe von Amplituden- und Phasengang sind in der Abbildung 2.1 mit linearen Massstäben dargestellt.

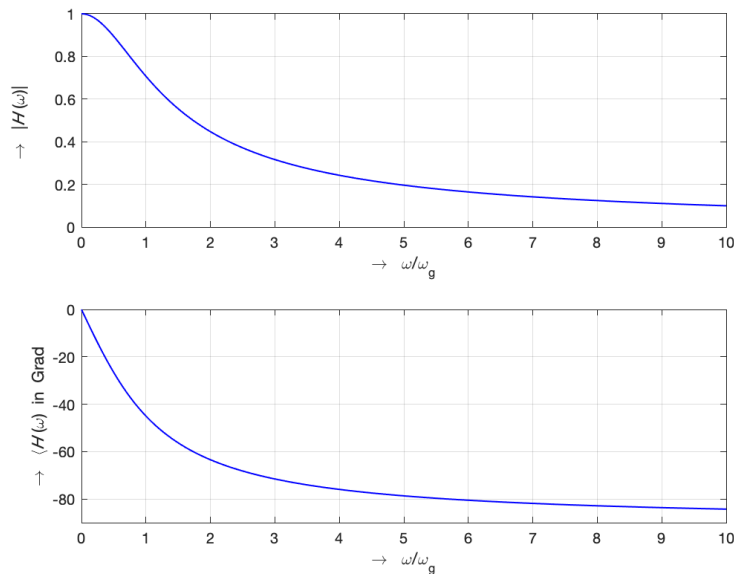


Abbildung 2.1.: Amplituden und Phasengang gemäss den Beziehungen (2.2) und (2.3) dargestellt mit linearen Massstäben

Die Tangente des Amplitudengangs bei der Frequenz Null ist horizontal.

Die Frequenz wurde hier mit der so genannten *Grenz(kreis)frequenz* $\omega_g = \frac{1}{RC}$ normiert (mehr dazu später).

Bemerkung: Der Amplitudengang nach (2.2) ist eine *gerade* Funktion, der Phasengang nach (2.3) eine *ungerade* Funktion. Dies wird bei einer Spiegelung an der Ordinatenachse, bzw. am Ursprung sichtbar.⁵

□

⁴ In der Beziehung 2.3 wird das Symbol \langle als Operator benutzt, um den Winkel (Argument) aus der komplexen Zahl $H(\omega)$ „herauszuholen“. Man hätte dafür auch $\arg(H(\omega))$ schreiben können. Das Symbol entspricht nicht dem Symbol \angle für den „Vektor“.

⁵ gerade Symmetrie: axialsymmetrisch zur Ordinatenachse: $f(-\omega) = f(\omega)$
ungerade Symmetrie: punktsymmetrisch zum Ursprung: $f(-\omega) = -f(\omega)$

Der Frequenzgang beschreibt ein lineares, zeitinvariantes dynamisches System (LTI-System) vollständig und eindeutig. Unter bestimmten Bedingungen – Eindeutigkeit gegeben – genügt sogar die Angabe des Amplituden- oder des Phasengangs alleine.

2.2. Darstellung

2.2.1. Bodediagramm

Im sogenannten **Bodediagramm**⁶ wird der Amplitudengang logarithmisch und der Phasengang linear gegen eine logarithmische Darstellung der Kreisfrequenz oder der Frequenz aufgetragen. Dabei wird, wie in der Technik üblich, der Logarithmus zur Basis 10 benutzt. Dabei können die betrachteten Grössen auf logarithmischen Skalen aber auch die Logarithmen dieser Grössen auf linearen Skalen dargestellt werden.⁷ Für die Amplitudenverhältnisse wird ausserdem die Pseudoeinheit **dB** (Dezibel) benutzt (cf. Anhang B.1).

Für das einführende Beispiel des RC-Glieds ergeben sich die Amplituden- und Phasengänge wie sie in der Abbildung 2.2 als Bodediagramm dargestellt sind.

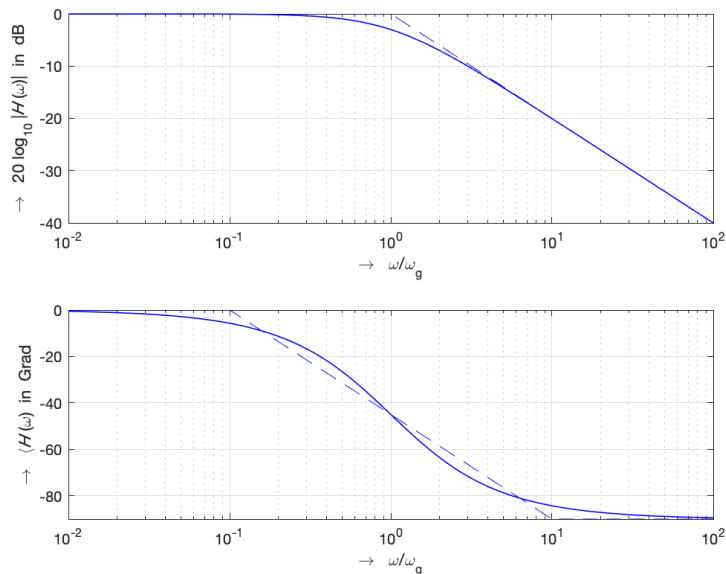


Abbildung 2.2.: Frequenzgang des Einführungsbeispiels als Bodediagramm
 Amplituden- und Phasengang gemäss den Beziehungen (2.2) und (2.3).
 Die Frequenz wurde mit der Grenzfrequenz $f_g = \frac{1}{2\pi RC}$ normiert.
 Ebenfalls wurden Näherungsgeraden als punktierte Linien in der Figur eingetragen (mehr dazu später).

⁶ nach *Hendrik Wade Bode* (1905-1982)

⁷ Mit **Matlab** entspricht dies den folgenden Plot-Befehlen:

```
loglog(f, abs(H)), bzw.  
plot(log10(f), 20*log10(abs(H)))
```


2. Frequenzgang, Definitionen und Darstellung

Vorteile der logarithmischen Darstellung, beziehungsweise des Bodediagramms:

- Grosse Wertebereiche einer Grösse, meistens über mehrere Zehnerpotenzen, können in einer Graphik mit einer den jeweiligen Werten entsprechenden Auflösung dargestellt werden. Dies gilt insbesondere für den darzustellenden Frequenzbereich und die Amplituden.
- Produkte und Quotienten von Grössen können in der Graphik als Additionen und Subtraktionen der Ordinatenwerte dieser Grössen gebildet werden:

$$x = x_1 \cdot x_2 \quad \rightarrow \quad \log x = \log x_1 + \log x_2$$

Auf die praktischen Vorteile dieser Eigenschaft wird später eingegangen.

- Der Verlauf einer Funktion kann durch einen Polygonzug angenähert werden, wie dies an Hand der gestrichelten Linien in der Abbildung 2.2 gezeigt wird. Die Teilgeraden können dabei nur bestimmte Steigungen aufweisen. Auch auf diese Eigenschaft wird später eingegangen.

Bemerkung: Der Betrag der betrachteten komplexen Grösse, bzw. des Verhältnisses der Frequenzgangfunktion, sollte für die Logarithmierung einheitslos sein. Dies ist nur bei Verhältnissen gleichartiger Grössen, wie für Spannungs-, Strom- oder Leistungsverhältnisse der Fall. Für eine Grösse wie eine Frequenz, eine Impedanz oder eine Admittanz, muss ein einheitsloses Grössenverhältnis mit einer konstanten Bezugsgrösse derselben Einheit (z. B. $f_g = \frac{1}{2\pi RC}$ wie in der Abbildung 2.2, oder auch mit einer Einheit wie $R_0 = 1 \Omega$) gebildet werden. Diese Bezugsgrössen müssen natürlich bekannt sein, bzw. festgelegt werden.

Beispiel RC-Glied: Normierung einer Frequenzgangfunktion

Betrachtet man z. B. die Frequenzabhängigkeit des komplexen Leitwerts (Admittanz) des RC-Glieds

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}_1} = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega C}{1 + j\omega RC}$$

so kann dieser durch Division mit $G = \frac{1}{R}$ in eine normierte Form gebracht werden:⁸

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{G} = Y(\omega)R = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

Alle Terme dieses Ausdrucks sind jetzt einheitslos. Die Wahl von $G = \frac{1}{R}$ als Normierungsfaktor ist willkürlich aber im vorliegenden Beispiel zweckmässig. Man hätte ebenfalls, anstelle von G , mit $G_0 = 1 \Omega^{-1}$ normieren können, um so ebenfalls einen einheitslosen Ausdruck zu erhalten.

Die Kreisfrequenz, beziehungsweise die Frequenz kann ebenfalls normiert werden. In diesem Fall kann die so genannte *Grenzfrequenz*⁹ $\omega_g = \frac{1}{RC}$ benutzt werden. Somit erhält man:

$$H(\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_g}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_g}}$$

Da für das Frequenzverhältnis $\frac{\omega}{\omega_g} = \frac{f}{f_g}$ gilt, kann die normierte Frequenzgangfunktion wahlweise als Funktion der Kreisfrequenz oder der Frequenz betrachtet werden. Dieses Frequenzverhältnis

⁸ Der Ausdruck im Nenner ist einheitslos aber der Zähler hatte vor der Normierung die Einheit Ω^{-1} .

⁹ Dieser Begriff wird in einem späteren Abschnitt präziser erläutert.

wird auch als **normierte Frequenz** bezeichnet und üblicherweise mit dem Symbol Ω (Omega)¹⁰ dargestellt. Auch hier wäre als Normierungsfaktor anstelle von ω_g die Wahl $\omega_0 = 1 \text{ s}^{-1}$ möglich gewesen.

□

2.2.2. Ortskurve

Die *Parameterdarstellung* der Frequenzgangfunktion in der komplexen Zahlenebene mit der Kreisfrequenz, bzw. der Frequenz als Parameter, wird **Ortskurve** genannt. Dabei wird die komplexe Zahl der Frequenzgangfunktion als frequenzabhängiger Punkt dargestellt, wobei die Kreisfrequenz/Frequenz von 0 bis ∞ variiert wird. Die resultierende Kurve wird entsprechend mit der Kreisfrequenz/Frequenz als Parameter *skaliert*, d. h. einzelne markante Punkte der Kurve, werden mit den dazugehörigen Kreisfrequenzwerten bezeichnet. Für das einführende Beispiel des RC-Glieds, ergibt sich die Ortskurve der Frequenzgangfunktion (2.1) wie sie in der Abbildung 2.3 dargestellt ist.

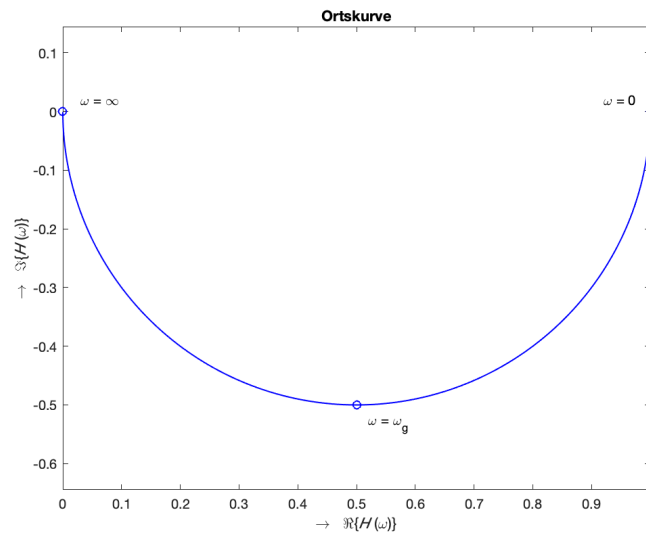


Abbildung 2.3.: Frequenzgang des Einführungsbeispiels RC-Glied als Ortskurve
Die Ortskurve bildet hier einen exakten Halbkreis im 4. Quadranten.

Bemerkungen:

- Die Ortskurve hat also einen Richtungssinn (in Richtung zunehmender Frequenzen). Für real existierende Systeme verläuft sie im Allgemeinen im Uhrzeigersinn.
- In der Regelungstechnik werden Ortskurven im Zusammenhang mit Frequenzgangfunktionen **Nyquist-Diagramme**¹¹ genannt.

¹⁰ Dies ist dasselbe Symbol wie für die Widerstandseinheit. Eine Verwechslungsgefahr ist wegen dem Kontext in den es verwendet wird, ausgeschlossen.

¹¹ nach *Harry Nyquist* (1889-1976)

2. Frequenzgang, Definitionen und Darstellung

- Ortskurven können auch für andere Funktionen als Frequenzgänge benutzt werden, z. B. um den Verlauf eines komplexen Widerstandes als Funktion einer veränderlichen Kapazität bei einer festen Frequenz darzustellen. In diesem Fall ist der Parameter der Ortskurve die Kapazität welche einen bestimmten Wertebereich durchläuft und nicht die Frequenz.

3. Frequenzgang, Bestandteile und Strukturen

Im Allgemeinen ergeben sich kompliziertere Verhältnisse als diejenigen im einführenden Beispiel des RC-Gliedes. Unter anderem ergeben sich für die Frequenzgangfunktionen *Polynombrüche* in $j\omega$, deren Ordnung von der Anzahl *unabhängiger* Energiespeicher im betrachteten System abhängt. Zum Glück zeigt sich jedoch, dass sämtliche Frequenzgangfunktionen in elementare Bausteine zerlegt werden können, so dass es reicht diese näher zu untersuchen.

3.1. Elementare Bausteine

3.1.1. Verstärkung, Dämpfung, Differentiation, Integration

Die elementaren zeitlichen Beziehungen *Proportionalität* (Verstärkung, Dämpfung¹), *Differentiation* und *Integration* mit ihren Frequenzgangfunktionen sind in der Tabelle 3.1.1 zusammengestellt:

Tabelle 3.1.: Elementare zeitliche Beziehungen und ihre Frequenzgangfunktionen
Die Frequenzen wurden hier nicht normiert; $x(t)$ ist dabei die (harmonische) Eingangs-, $y(t)$ die (ebenfalls harmonische) Ausgangsgrösse des Systems.

	Zeitbereich $y(t) = f(x(t))$	Frequenzbereich		
		Frequenzgangfkt. $H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$	Amplitudengang $ H(\omega) $	Phasengang $\langle H(\omega) \rangle$
Proportionalität	$y(t) = k \cdot x(t)$ $k > 0$ $k < 0$	k k	k $ k $	0 $\pm\pi$
Differentiation	$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega$	ω	$\frac{\pi}{2}$
Integration	$y(t) = \int_0^t x(t)dt$ mit $y(0) = 0$	$\frac{1}{j\omega}$	$\frac{1}{\omega}$	$-\frac{\pi}{2}$

¹ Generell wird als **Verstärkung** g (Englisch: **gain**) das Verhältnis Aus- zu Eingangsgrösse bezeichnet und als **Dämpfung** a (E: **attenuation**) das reziproke Verhältnis Ein- zu Ausgangsgrösse. Es gilt $a = g^{-1}$.

3.1.2. Systeme erster Ordnung

Die ist „nächst-komplizierteren“ Bausteine sind von der Art wie sie im Einführungsbeispiel RC-Glied präsentiert wurden und entstehen bei Systemen erster Ordnung, d. h. Systeme mit nur einem Energiespeicher.

Für das RC-Glied mit $u_1(t)$ als Eingangs- und $u_2(t)$ als Ausgangssignal ergibt sich folgende lineare, nichthomogene Differentialgleichung 1. Ordnung:

$$RC\dot{u}_2(t) + u_2(t) = u_1(t)$$

und daraus durch direkte Übersetzung in den Frequenzbereich die Frequenzgangfunktion:²

$$H(\omega) = \frac{U_2(\omega)}{U_1(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Mit der so genannten **Zeitkonstante** $\tau = RC$, beziehungsweise der **Grenzfrequenz** $\omega_g = \frac{1}{\tau}$ als Normierungsfaktoren, ergibt sich ferner die allgemeine Form:

$$\boxed{H(\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_g}}} \quad (3.1)$$

Amplituden- und Phasengang von (3.1) sind in den Beziehungen (2.2) und (2.3) auf S. 7 zu finden.³ Für diese können *Näherungen* und *Eckpunkte* gemäss der folgenden Tabelle bestimmt werden:

Tabelle 3.2.: Frequenzgang des Systems erster Ordnung $H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_g}}$

Näherungen und Eckpunkte

Aus dieser Tabelle wird die Bedeutung des Begriffs *Grenzfrequenz* ersichtlich.

Kreisfrequenz ω	Frequenzgang- funktion $H(\omega)$	Amplituden- gang $ H(\omega) $	Amplitudengang (logarithmisch) $20 \cdot \log H(\omega) $	Phasengang $\langle H(\omega) \rangle$
$\omega \ll \omega_g$	$H(\omega) \approx 1$	1	0 dB	0
$\omega = \omega_g$ (<i>Grenzfrequenz</i>)	$H(\omega) = \frac{1}{1+j}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$	-3 dB	$-\frac{\pi}{4}$
$\omega \gg \omega_g$	$H(\omega) \approx -j \frac{1}{\omega/\omega_g}$	$\frac{1}{\omega/\omega_g}$	$-20 \log \frac{\omega}{\omega_g} \equiv$ $-20 \frac{\text{dB}}{\text{Dk}}$	$-\frac{\pi}{2}$

² Die Frequenzgangfunktion kann man auch direkt durch Anwendung der Techniken der komplexen Wechselstromlehre erhalten, hier durch Herleiten der Spannung \underline{U}_2 für den Spannungsteiler mit Eingangsspannung \underline{U}_1 .

³ Dabei ist RC durch $\frac{1}{\omega_g}$ zu ersetzen.

Bemerkungen:

- Für „tiefe“ Frequenzen, d. h. Frequenzen welche viel kleiner sind als die so genannte **Grenzfrequenz** ω_g , verhält sich die Frequenzgangfunktion (3.1) „neutral“: die Amplitude und der Nullphasenwinkel des Ausgangssignals entsprechen denen des Eingangssignals.
- Bei der Grenzfrequenz ω_g ist die Amplitude des Ausgangssignals um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$ tiefer als die des Eingangssignals. In dB ausgedrückt, entspricht dies $20 \log \frac{1}{\sqrt{2}} = -20 \frac{1}{2} \log 2 \approx -3$ dB. Die Differenz der Nullphasenwinkel beträgt dabei exakt $\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\pi}{4}$.
- Bei Frequenzen (weit) oberhalb der Grenzfrequenz nimmt die Amplitude des Ausgangssignals proportional zur Frequenz mit der Steilheit -1 ab, also z. B. um den Faktor 10 bei einer Erhöhung der Frequenz um den selben Faktor. Dies lässt sich in dB mit der Steilheit -20 dB/Dk angeben. Die Abkürzung **Dk** steht dabei für *Dekade*, was einer Zehnerpotenz, hier der Frequenz/Kreisfrequenz, entspricht.
- Das Bodediagramm der normierten Frequenzgangfunktion (3.1) ist in der Abbildung 2.2 auf S. 8 mit den Näherungsgeraden des Amplitudengangs für $\omega \ll \omega_g$ und für $\omega \gg \omega_g$ dargestellt. Der Phasengang kann ebenfalls durch eine Gerade angenähert werden, welche den Winkel $\frac{\pi}{2}$ innerhalb von zwei Frequenzdekaden überstreicht.
- Die Ortskurve der normierten Frequenzgangfunktion (3.1) ist in der Abbildung 2.3 auf S. 10 dargestellt. Es handelt sich um einen Halbkreis im 4. Quadranten.

3.1.3. Systeme zweiter Ordnung

Systeme 2. Ordnung werden hier an Hand des RLC-Serieschwingkreises gemäss der Abbildung 3.1 untersucht.

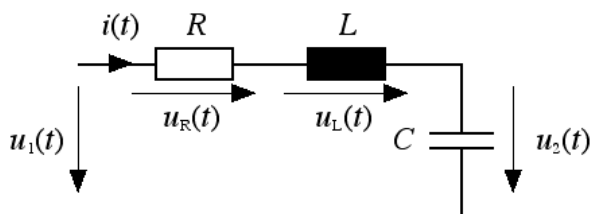


Abbildung 3.1.: RLC-Serieschwingkreis

Beispiel RLC-Serieschwingkreis: **Frequenzgangfunktion, Amplituden- und Phasengang**

Für den RLC-Serieschwingkreis mit $u_1(t)$ als Eingangs- und $u_2(t)$ als Ausgangssignal ergibt sich folgende lineare, nichthomogene Differentialgleichung 2. Ordnung:⁴

$$LC\ddot{u}_2 + RC\dot{u}_2 + u_2 = u_1$$

⁴ Um die Differentialgleichung herzuleiten, müssen sämtliche elektrische Grössen der Schaltung durch $u_2(t)$ und deren zeitlichen Ableitungen nach und nach und von rechts nach links vorgehend, ausgedrückt werden.

3. Frequenzgang, Bestandteile und Strukturen

und daraus durch direkte Übersetzung in den Frequenzbereich die Frequenzgangfunktion:⁵

$$H(\omega) = \frac{U_2(\omega)}{U_1(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega RC + (j\omega)^2 LC}$$

Mit den Normierungsfaktoren **Resonanzfrequenz**⁶ $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ und **Gütefaktor** $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ ergibt sich ferner die allgemeine Form (Überprüfung durch Einsetzen):

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{Q} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0} 2\xi + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad (3.2)$$

Anstelle des Gütefaktors wird auch das **Dämpfungsmass**⁷ ξ (griechischer Buchstabe, Aussprache: ksi) benutzt. Es gilt der Zusammenhang:

$$\xi = \frac{1}{2Q} \quad \text{beziehungsweise} \quad Q = \frac{1}{2\xi} \quad (3.3)$$

Der Gütefaktor, beziehungsweise das Dämpfungsmass können auf verschiedene Arten interpretiert werden, auch auf physikalische. Diese Interpretationsmöglichkeiten sind im Anhang D zusammengestellt und näher erläutert.

Bemerkung: Für die hier gemachten Überlegungen wird grundsätzlich $Q \geq \frac{1}{2}$ beziehungsweise $0 \leq \xi \leq 1$ angenommen.⁸ Für $0 < Q < \frac{1}{2}$, bzw. $\xi > 1$, ist es nämlich möglich das System zweiter Ordnung als Produkt zweier Systeme erster Ordnung zu betrachten und entsprechend zu behandeln. Dieser Fall wird später untersucht.

Für Amplituden- und Phasengang ergibt sich formal:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{Q}\right)^2}} \quad (3.4)$$

$$\langle H(\omega) \rangle = -\arctan \frac{\frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{Q}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad (3.5)$$

Die Verläufe von Amplituden- und Phasengang mit linearen Massstäben sind in der Abbildung 3.2 zu finden. Das Bodediagramm und die Ortskurve sind in den Abbildungen 3.3 auf S. 17 und C.8 im Anhang C in Funktion der normierten Frequenz $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$ dargestellt. Die Eckpunkte und Näherungen dieser Funktionen sind in der Tabelle auf S. 18 angegeben.

⁵ Die Frequenzgangfunktion kann man auch direkt durch Anwendung der Techniken der komplexen Wechselstromlehre erhalten, hier durch Herleiten der Spannung \underline{U}_2 für den Spannungsteiler mit Eingangsleistung \underline{U}_1 .

⁶ Bei elektrischen Zweipolen ist die Resonanzfrequenz die Frequenz bei der der Zweipol an seinen Klemmen ein reelles Verhalten aufweist, d. h. rein dissipativ wirkt. Die Resonanzfrequenz ist bei mechanischen Systemen definiert als die Frequenz bei der der Amplitudengang sein Maximum erreicht. Diese beiden Definitionen decken sich nicht für Gütefaktoren unterhalb $Q = 5$.

⁷ auch im deutschen Sprachraum als *Lehr'sches Dämpfungsmass*, nach *Ernst Lehr* (1896–1944) bezeichnet

⁸ Dies ist im Fall des RLC-Serieschwingkreises bei einem genügend kleinen Wert des Widerstands R gewährleistet.

3. Frequenzgang, Bestandteile und Strukturen

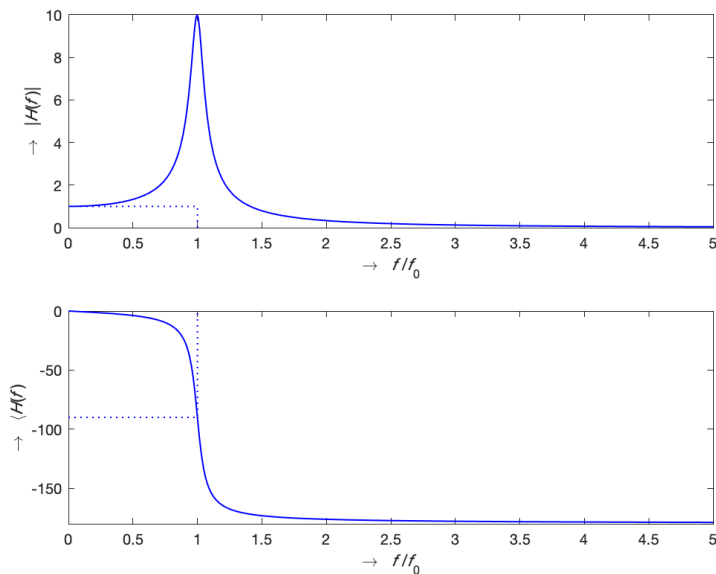


Abbildung 3.2.: Amplituden und Phasengang gemäss den Beziehungen (3.4) und (3.5) dargestellt mit linearen Masstäben

Die Tangente des Amplitudengangs bei der Frequenz Null ist horizontal.

Die Frequenz wurde hier mit der Resonanzfrequenz des Serieschwingkreises $f_0 = \frac{1}{2\pi}\omega_0 = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{LC}}$ normiert.

Bemerkung: Für Gütefaktoren $Q > \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$, bzw. $0 < \xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$, weist der Amplitudengang eine Überhöhung auf. Dieses Maximum befindet sich aber nicht bei der Frequenz ω_0 , sondern bei $\omega_{max} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} = \omega_0\sqrt{1 - 2\xi^2}$. Allerdings kann $\omega_{max} \approx \omega_0$ angenommen werden für $Q > 5$, bzw. $\xi < \frac{1}{10}$.

□

3.2. Analyse und Synthese

Ziel dieses Abschnitts ist es, *Verfahren* darzustellen mit denen herausgefunden werden kann mit welchen elementaren Bauelementen das Verhalten eines linearen Systems beschrieben (*Analyse*) und wie damit der entsprechende Frequenzgang bestimmt werden kann (*Synthese*).

Es ist klar, dass mit den heute zur Verfügung stehenden EDV-Werkzeugen⁹ es nicht mehr unbedingt zwingend ist, diese Verfahren im Detail zu beherrschen. Sie geben aber einen in der Praxis nützlichen Einblick in die Verhaltensstruktur linearer Systeme. Insbesondere erlauben sie es durch die Zerlegung in Subsysteme, zwischen den dominanten (verhaltensbestimmenden) und den sekundären Parametern eines Systems zu unterscheiden.

⁹ zum Beispiel Matlab/Simulink, Python, LabView, PSpice, TINA, Maple oder Mathematica um nur einige zu nennen

3. Frequenzgang, Bestandteile und Strukturen

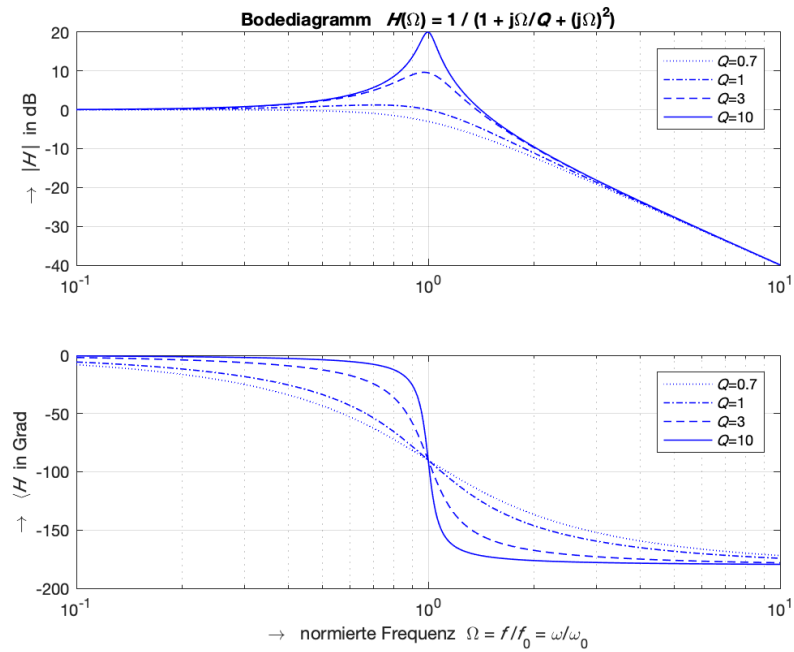


Abbildung 3.3.: Bodediagramm (Amplituden- und Phasengang) des Systems 2. Ordnung gemäss den Beziehungen (3.4) und (3.5) für verschiedene Werte des Gütefaktors Q . Der Amplitudengang erhält bei der Resonanzfrequenz ($\Omega = 1$) exakt den Wert des Gütefaktors Q . Das Maximum des Amplitudengangs liegt für $Q > 5$ praktisch bei $\Omega = 1$. Für Q -Werte unterhalb 5 liegt das Maximum unterhalb $\Omega = 1$, wie aus der Kurve für $Q = 1$ klar ersichtlich ist. Kurven mit $Q \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ weisen keine Überhöhung mehr auf. Der Phasengang verläuft steiler mit zunehmendem Gütefaktor.

3. Frequenzgang, Bestandteile und Strukturen

Tabelle 3.3.: Frequenzgang des Systems zweiter Ordnung $H(\omega) = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}\frac{1}{Q}+(j\frac{\omega}{\omega_0})^2}$ für $Q \geq \frac{1}{2}$

Näherungen und Eckpunkte

Kreisfrequenz ω	Frequenzgang- funktion $H(\omega)$	Amplituden- gang $ H(\omega) $	Amplitudengang (logarithmisch) $20 \cdot \log H(\omega) $	Phasengang $\langle H(\omega) \rangle$
$\omega \ll \omega_0$	$H(\omega) \approx 1$	1	0 dB	0
$\omega = \omega_0$ (Resonanzfrequenz)	$H(\omega) = \frac{Q}{j} = -jQ$	Q	$20 \log Q$	$-\frac{\pi}{2}$
$\omega \gg \omega_0$	$H(\omega) \approx -\frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$	$\frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$	$-20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \equiv$ $-40 \frac{\text{dB}}{\text{Dk}}$	$-\pi$

3.2.1. Bildungsgesetze für die Frequenzgangfunktion

Frequenzgang der reziproken Frequenzgangfunktion

Für die Bildung der *reziproken* Frequenzgangfunktion $F(\omega) = \frac{1}{H(\omega)}$ aus dem Frequenzgang von $H(\omega)$ gelten folgende Bildungsgesetze:

$$F(\omega) = \frac{1}{H(\omega)} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |F(\omega)| = \frac{1}{|H(\omega)|} \\ \rightarrow 20 \cdot \log |F(\omega)| = -20 \cdot \log |H(\omega)| \\ \langle F(\omega) \rangle = -\langle H(\omega) \rangle \end{array} \right\} \quad (3.6)$$

Bemerkungen:

- Im *Bodediagramm* kann also gemäss der Beziehung (3.6) der *Amplitudengang* der reziproken Frequenzgangfunktion $F(\omega)$ durch Spiegelung an der 0 dB-Linie des Amplitudengangs der ursprünglichen Frequenzgangfunktion $H(\omega)$ erhalten werden. Dies gilt allgemein wegen dem Zusammenhang $\log \left| \frac{1}{H} \right| = -\log |H|$.
- Der *Phasengang* der reziproken Frequenzgangfunktion kann im Bodediagramm durch Spiegelung des Phasengangs der ursprünglichen Frequenzgangfunktion an der Abszisse (x-Achse) erhalten werden. Dies gilt allgemein wegen dem Zusammenhang $\langle \frac{1}{H} \rangle = -\langle H \rangle$.

Beispiel:

Betrachtet man die zur elementaren Frequenzgangfunktion (3.1) auf S. 13 reziproken Funktion

$$F(\omega) = \frac{1}{H(\omega)} = \frac{1}{\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_g}}} = 1 + j\frac{\omega}{\omega_g} \quad (3.7)$$

3. Frequenzgang, Bestandteile und Strukturen

Tabelle 3.4.: Frequenzgang des Systems erster Ordnung $H(\omega) = 1 + j \frac{\omega}{\omega_g}$

Näherungen und Eckpunkte

Kreisfrequenz ω	Frequenzgang- funktion $H(\omega)$	Amplituden- gang $ H(\omega) $	Amplitudengang (logarithmisch) $20 \cdot \log H(\omega) $	Phasengang $\langle H(\omega) \rangle$
$\omega \ll \omega_g$	$H(\omega) \approx 1$	1	0 dB	0
$\omega = \omega_g$ (Grenzfrequenz)	$H(\omega) = 1 + j$	$\sqrt{2}$	+3 dB	$+\frac{\pi}{4}$
$\omega \gg \omega_g$	$H(\omega) \approx j \frac{\omega}{\omega_g}$	$\frac{\omega}{\omega_g}$	$+20 \log \frac{\omega}{\omega_g} \equiv$ $+20 \frac{\text{dB}}{\text{Dk}}$	$+\frac{\pi}{2}$

so ergeben sich die Näherungen gemäss der nebenstehenden Tabelle. Bodediagramm und Ortskurve dieses Beispiels sind in der Abbildungen C.1 und C.2 im Anhang C in Funktion der normierten Frequenz $\Omega = \frac{\omega}{\omega_g}$ dargestellt.

Bemerkung: Bei der Ortskurve ergibt die komplexe „Inversion“ des *Halbkreises* im 4. Quadranten in der komplexen Zahlenebene eine vertikale *Halbgerade* im ersten Quadranten ausgehend von der reellen Achse.

□

Produktform

Jede Frequenzgangfunktion in der Form eines *Polynombruchs* (Bruch von Polynomen in $j\omega$) kann in eine normierte **Produktform** gebracht werden.¹⁰ Dafür müssen die Nullstellen¹¹ z_i des Zählerpolynoms, **Nullstellen** der Frequenzgangfunktion genannt, sowie die Nullstellen p_i des Nennerpolynoms, **Pole** der Frequenzgangfunktion genannt, zunächst ermittelt werden. Dies erfolgt aus praktischen Gründen meist numerisch. Er gilt also

$$H(\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + \dots + b_1j\omega + b_0}{a_n(j\omega)^n + \dots + a_1j\omega + a_0} = \frac{b_m \prod_{i=1}^m (j\omega - z_i)}{a_n \prod_{i=1}^n (j\omega - p_i)} \quad (3.8)$$

Bei physikalischen, d. h. kausalen¹² Systemen gilt allgemein, dass der Grad des Zählerpolynoms nicht grösser sein kann als diejenige des Nennerpolynoms: $m \leq n$. Ferner entspricht der Grad des Nennerpolynoms der Ordnung des Systems.

¹⁰ Die mathematische Begründung dazu liefert der *Hauptsatz der Algebra* über die Faktorisierung der Polynome.

¹¹ Unter *Nullstellen eines Polynoms* n-ten Grades in x : $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, versteht man die n Lösungen x_i der Gleichung $P(x) = 0$.

¹² Ein System wird dann als *kausal* bezeichnet, wenn seine Antwort auf ein Eingangssignal nicht vor dem Anliegen dieses Eingangssignals erfolgen kann.

3. Frequenzgang, Bestandteile und Strukturen

Durch Normierung wird üblicherweise gesorgt, dass der Koeffizient $a_n = 1$ wird. Dies erfolgt durch Division des Zähler- und des Nennerpolynoms mit dem Koeffizienten a_n , falls dieser verschieden von 1 sein sollte.

Beispiel 1, RLC-Serieschwingkreis: Fallunterscheidung für die Bildung der Produktform

Die Frequenzgangfunktion (3.2) des Systems 2. Ordnung aus S. 15 lässt sich generell zerlegen in eine Produktform mit den Koeffizienten ω_1 und ω_2 :

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{Q} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}} \cdot \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}} \quad (3.9)$$

Ausmultiplizieren der Binome¹³ und Koeffizientenvergleich der Polynome in $j\omega$, führt nach einigen algebraischen Schritten auf die allgemeine Lösung:

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \left(\frac{1}{2Q} \mp \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 - 1} \right) = \omega_0 \left(\xi \mp \sqrt{\xi^2 - 1} \right) > 0$$

Der Vergleich mit der Form (3.8) liefert folgende Parameterwerte für die Produktzerlegung: $n = 2$, $m = 0$, $a_2 = 1$, $b_0 = \omega_1 \cdot \omega_2$, $p_1 = -\omega_1$ und $p_2 = -\omega_2$. Dies soll aber hier nicht weiter verfolgt werden. Interessanter ist insbesondere die Unterscheidung der folgenden drei Fälle:

1. Unter der Bedingung $0 < Q < \frac{1}{2}$ oder $\xi > 1$ sind die Koeffizienten ω_1 und ω_2 reell und voneinander verschieden. In diesem Fall entsprechen sie gerade den Grenzfrequenzen zweier Systeme erster Ordnung.
2. Bei der so genannten **Grenzgüte** $Q = \frac{1}{2}$, beziehungsweise bei der **kritischen Dämpfung** $\xi = 1$, gilt $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$. Damit haben die beiden Systeme erster Ordnung dieselbe Grenzfrequenz.
3. Im Fall $Q > \frac{1}{2}$ oder entsprechend $0 \leq \xi < 1$ gibt es keine reelle Lösungen für die Koeffizienten ω_1 und ω_2 , so dass eine Zerlegung des Systems zweiter Ordnung in eine Produktform von zwei Systemen erster Ordnung nicht sinnvoll ist.

Der letztgenannte Fall wurde im Abschnitt 3.1 unter dem Unterabschnitt *Systeme zweiter Ordnung* bereits behandelt.

□

Beispiel 2, RLC-Serieschwingkreis: Numerisches Beispiel

Aufgabe: Es soll der Frequenzgang des komplexen Leitwerts $\underline{Y} = \frac{I}{\underline{U}_1}$ des RLC-Serieschwingkreises zweckmässig normiert und wenn möglich, in eine Produktform gebracht werden. Die numerischen Werte der Elemente sind: $R = 158 \Omega$, $L = 994 \mu\text{H}$ und $C = 470 \text{ nF}$.

Lösung: Für den komplexen Leitwert erhält man:

$$Y(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{j\omega C} + R + j\omega L} = \frac{j\omega C}{1 + j\omega RC + (j\omega)^2 LC}$$

¹³ mathematischer Ausdruck mit zwei Gliedern, hier: $1 + j\frac{\omega}{\omega_i}$

3. Frequenzgang, Bestandteile und Strukturen

Eine zweckmässige Normierung um die Frequenzgangfunktion einheitslos zu machen, wird hier erreicht, indem der Ausdruck im Zähler mit R multipliziert wird:¹⁴

$$H(\omega) = RY(\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC + (j\omega)^2 LC}$$

Um herauszufinden, ob eine Zerlegung des Nennerpolynoms in ein Produkt von zwei Polynomen erster Ordnung mit reellen Koeffizienten überhaupt möglich ist, muss zunächst der Gütefaktor bestimmt werden. Man erhält (cf. Abschnitt 3.1 unter dem Unterabschnitt *Systeme zweiter Ordnung*): $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = 0.288 < \frac{1}{2}$. Damit ist die folgende Produktzerlegung mit den Parametern $\omega_1 = 1.45 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$, $\omega_2 = 1.44 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$, $\omega_3 = \frac{1}{RC} = 1.32 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$ und mit $k = \frac{\omega_1}{\omega_3} = 1.10$ möglich:

$$H(\omega) = \frac{j \frac{\omega}{\omega_3}}{(1 + j \frac{\omega}{\omega_1}) \cdot (1 + j \frac{\omega}{\omega_2})} = \frac{\frac{\omega_1}{\omega_3} \cdot j \frac{\omega}{\omega_1}}{(1 + j \frac{\omega}{\omega_1}) \cdot (1 + j \frac{\omega}{\omega_2})} = k \cdot j \frac{\omega}{\omega_1} \cdot \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_1}} \cdot \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_2}} \quad (3.10)$$

Bemerkung: Der Elementarterm $j \frac{\omega}{\omega_3}$ im Zähler wurde hier durch $\frac{\omega_1}{\omega_3} = 1$ erweitert, damit seine Frequenz mit der Grenzfrequenz eines der beiden Termen im Nenner übereinstimmt (damit wird $k = \frac{\omega_1}{\omega_3}$). Dieser Schritt ist nicht notwendig aber für die Synthese im Bodediagramm zweckmässig, wie sich im folgenden Abschnitt zeigen wird.

Die Zerlegung eines Systems zweiter Ordnung in eine Produktform von zwei Systemen erster Ordnung ist nur bei erfüllter Bedingung $0 < Q < \frac{1}{2}$, beziehungsweise $\xi > 1$, sinnvoll.

Im Fall $Q > \frac{1}{2}$ muss die Frequenzgangfunktion in ihrer ursprünglichen Form belassen werden:

$$H(\omega) = \frac{j \frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{Q}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{Q} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = j \frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{Q} \cdot \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{Q} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad (3.11)$$

Bemerkung: Im Fall $Q = \frac{1}{2}$, beziehungsweise $\xi = 1$ können beide Betrachtungsweisen angewendet werden.

□

3.2.2. Synthese im Bodediagramm

Jede, noch so umfangreiche Frequenzgangfunktion lässt sich gemäss dem vorangehenden Abschnitt in elementare Blöcke („Grundbausteine“) zerlegen. Letztere sind alle im Anhang C auf S. 37 enthalten. Liegt eine Frequenzgangfunktion in **Produktform** von mehreren elementaren Frequenzgängen vor, so können im Bode-Diagramm Amplituden- und Phasengang aus den Amplituden- und Phasengängen der „einfacheren“ Funktionen *additiv* gemäss der Eigenschaften der folgenden Beziehungen zusammengesetzt werden:

$$H(\omega) = H_1(\omega) \cdot H_2(\omega) \quad \longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} |H(\omega)| = |H_1(\omega)| \cdot |H_2(\omega)| \\ 20 \cdot \log |H(\omega)| = 20 \cdot \log |H_1(\omega)| + 20 \cdot \log |H_2(\omega)| \\ \langle H(\omega) \rangle = \langle H_1(\omega) \rangle + \langle H_2(\omega) \rangle \end{array} \right.$$

¹⁴ \underline{RY} entspricht hier den Spannungsverhältnis $\frac{RI}{U_1}$. Es zeigt sich ausserdem, dass das Gleichsetzen des Ausdrucks im Zähler mit einem der drei Terme im Nennerpolynom die Analyse des Frequenzgangs vereinfacht.

3. Frequenzgang, Bestandteile und Strukturen

Hieraus ist der Vorteil der Bode-Diagramm-Darstellung offensichtlich:

- Der Amplitudengang der Frequenzgangfunktion lässt sich im logarithmischen Massstab *additiv* aus den Amplitudengängen der Grundelemente der Produktform zusammenstellen.
- Für den Phasengang gilt dasselbe, da die Argumente der komplexen Größen sich bei Multiplikation ebenfalls *additiv* verhalten.

Bemerkungen:

- Die Steilheiten der Näherungsgeraden des Amplitudengangs sind immer (negative oder positive) Vielfache von 20 dB/Dk. Für ein System n -ter Ordnung kann der Amplitudengang maximal die Steilheit $-n \cdot 20$ dB/Dk erreichen.
- Die asymptotischen Werte des Phasengangs (für $\omega \rightarrow \infty$) betragen immer Vielfache von $\frac{\pi}{2}$. Für ein System n -ter Ordnung kann der Phasengang nicht Werte unter $-n \cdot \frac{\pi}{2}$ annehmen.

Beispiel 1: Bodediagramm der Frequenzgangfunktion $\frac{b_1 j\omega}{a_0 + a_1 j\omega}$

Das folgende einfache System erster Ordnung wird wie folgt in eine Produktform von normierten Elementargliedern zerlegt:¹⁵

$$H(\omega) = \frac{b_1 j\omega}{a_0 + a_1 j\omega} = \frac{\frac{b_1}{a_0} j\omega}{1 + \frac{a_1}{a_0} j\omega} = \frac{b_1}{a_1} \cdot \frac{\frac{a_1}{a_0} j\omega}{1 + \frac{a_1}{a_0} j\omega} = k \cdot j \frac{\omega}{\omega_g} \cdot \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_g}} \quad (3.12)$$

Dabei gilt $\omega_g = \frac{a_0}{a_1}$ und $k = \frac{b_1}{a_1}$, wie durch Einsetzen überprüft werden kann. Damit kann die Frequenz ω_g für die Normierung als Bezugsfrequenz verwendet werden.

Das Bodediagramm der Frequenzgangfunktion 3.12 ist in der Abbildung 3.4 dargestellt. Dabei wurden die Näherungsgeraden eingetragen. In Abbildung 3.5 sind die additiven Beiträge der elementaren Produktanteile zum Frequenzgang ersichtlich.

- Wie aus linken Spalte der Abbildung 3.5 ersichtlich ist, setzt sich die Näherung des resultierenden Amplitudengangs additiv aus den Näherungsgeraden der Amplitudengänge der beiden Produktkomponenten zusammen.
- Durch die Normierung des ersten Produktterms H_1 mit der Grenzfrequenz des Terms H_2 wird erreicht, dass der 0 dB-Durchgang der Geraden mit +20 dB/Dk exakt bei der Grenzfrequenz ω_g stattfindet. Dies kann durch geeignete Wahl des konstanten Faktors k erreicht werden. Der Faktor k verschiebt die 0 dB-Linie nach oben oder nach unten, je nachdem ob $k < 1$ oder $k > 1$ ist.
- Wie aus der rechten Spalte der Abbildung 3.5 ersichtlich ist, setzt sich der resultierende Phasengang additiv aus den Phasengängen der beiden Produktkomponenten zusammen.
- Der konstante Faktor k trägt nicht zur Phase bei, sofern er positiv ist. Bei einem negativen Wert müsste $+\pi$ oder $-\pi$ dem Phasengang addiert werden. Die Wahl des Vorzeichens sollte dafür sorgen, dass die resultierende Phase betragsmässig so klein wie möglich wird, im vorliegenden Beispiel also $-\pi$ addiert werden.

¹⁵ Dabei wird im selben Vorgang auch für die Normierung der Frequenz gesorgt.

3. Frequenzgang, Bestandteile und Strukturen

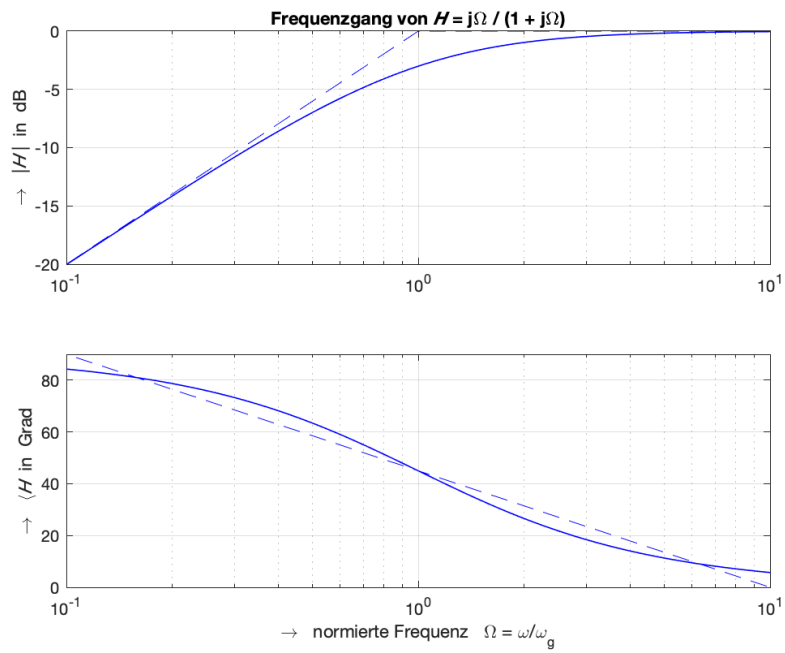


Abbildung 3.4.: Bodediagramm der Frequenzgangfunktion (3.12) für $k = 1$ in Funktion der normierten Frequenz $\Omega = \omega/\omega_g$

Der Beitrag von k würde sich in eine vertikale Verschiebung des Amplitudengangs um $20 \log_{10} |k|$ äussern. Bei einem negativen Wert von k würde ausserdem der Phasengang noch um -180 Grad ($-\pi$) verschoben.

3. Frequenzgang, Bestandteile und Strukturen

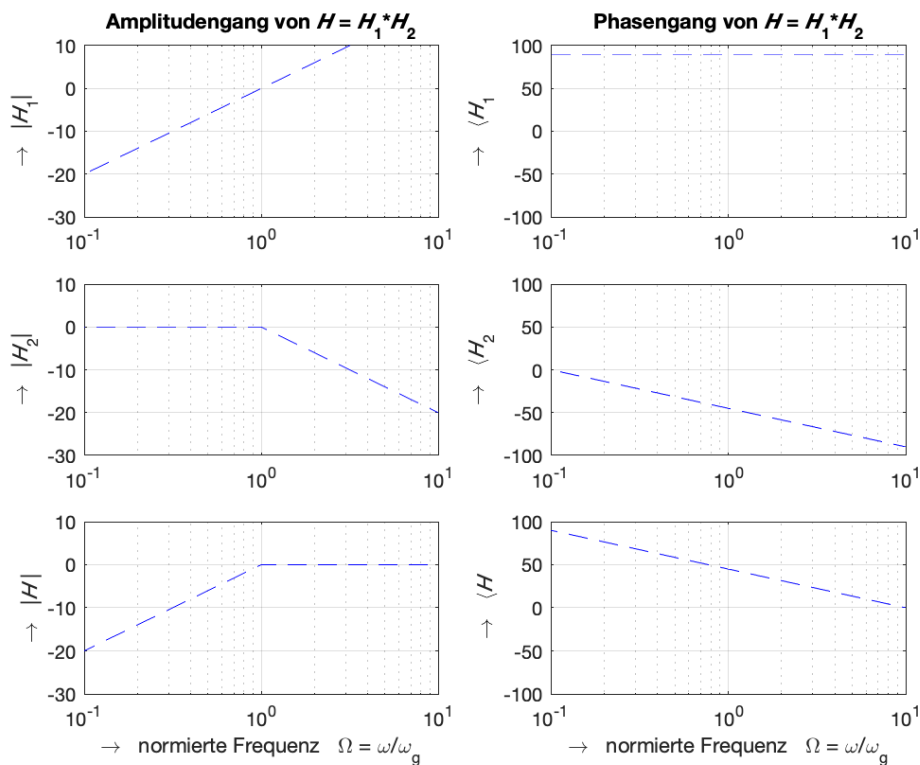


Abbildung 3.5.: Darstellung der Näherungsgeraden der einzelnen Komponenten der Frequenzgangfunktion (3.12)

Oben: Beitrag des Glieds $j\omega/\omega_g$; Mitte: Beitrag des Glieds $\frac{1}{1+j\omega/\omega_g}$.

□

Beispiel 2: Bodediagramm der Frequenzgangfunktion (3.9)

Ein System zweiter Ordnung kann für Gütefaktoren $Q < \frac{1}{2}$ in eine Produktform von Elementargliedern erster Ordnung zerlegt werden (3.9):

$$H(\omega) = \frac{1}{(1 + \frac{j\omega}{\omega_1})} \cdot \frac{1}{(1 + \frac{j\omega}{\omega_2})}$$

Hier soll die Frequenz ω_1 als Bezugsfrequenz für die Normierung verwendet werden.¹⁶ Das resultierende Bode-Diagramm ist in der Abbildung 3.6 dargestellt. Abbildung 3.7 zeigt die Beiträge der Produktterme zur Näherung des resultierenden Frequenzgangs.

□

¹⁶ Man könnte aber ebenso gut ω_2 oder 1 s^{-1} benutzen.

3. Frequenzgang, Bestandteile und Strukturen

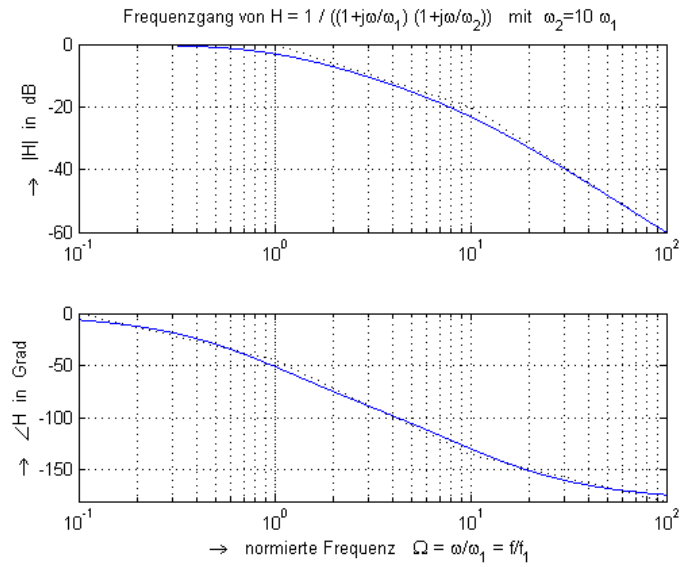


Abbildung 3.6.: Bodediagramm der Frequenzgangfunktion (3.9) mit Darstellung der Näherungsgeraden

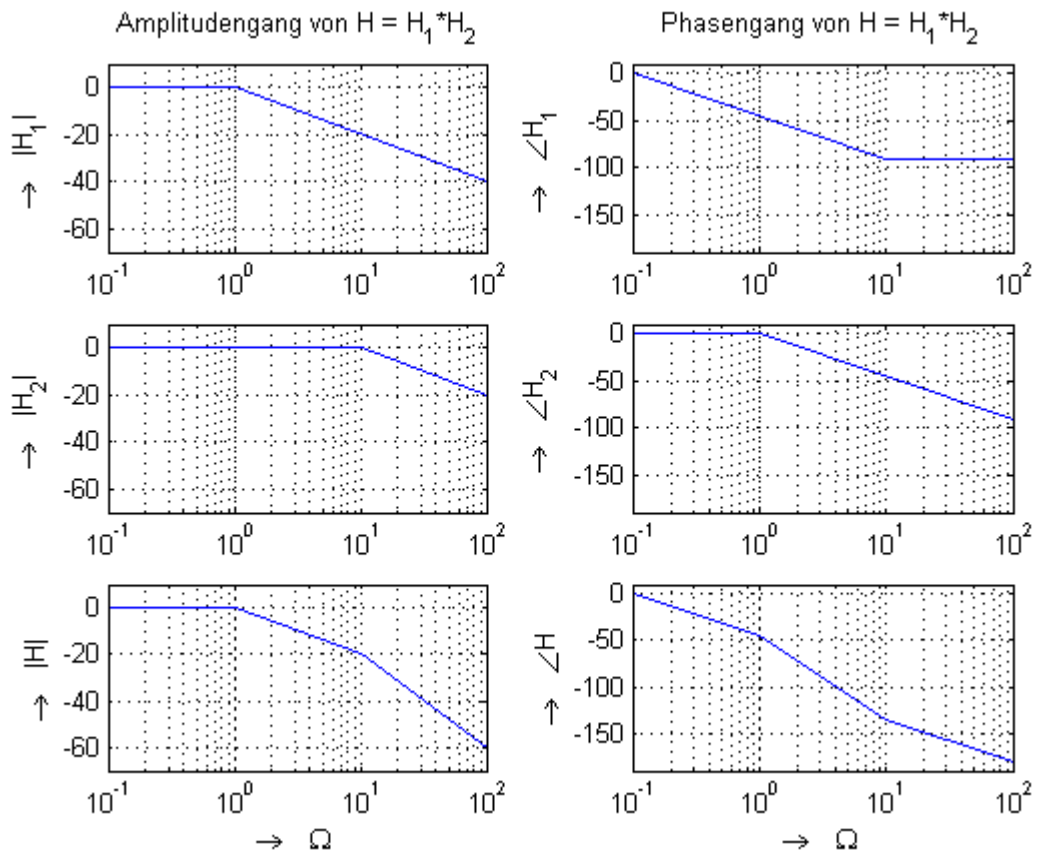


Abbildung 3.7.: Bodediagramm der Frequenzgangfunktion (3.9) mit Darstellung der einzelnen Komponenten

3. Frequenzgang, Bestandteile und Strukturen

Beispiel 3: Bodediagramm der Frequenzgangfunktion (3.10)

Die Produktform gemäss der Beziehung (3.10) mit $Q < \frac{1}{2}$ und $k = 1$ sieht wie folgt aus:

$$H(\omega) = j \frac{\omega}{\omega_1} \cdot \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_1}} \cdot \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_2}}$$

Hier dient die Frequenz ω_1 als Bezugsfrequenz für die Normierung. Das resultierende Bode-Diagramm ist in der Abbildung 3.8 dargestellt. Abbildung 3.9 zeigt die Beiträge der Produktterme zur Näherung des resultierenden Frequenzgangs.

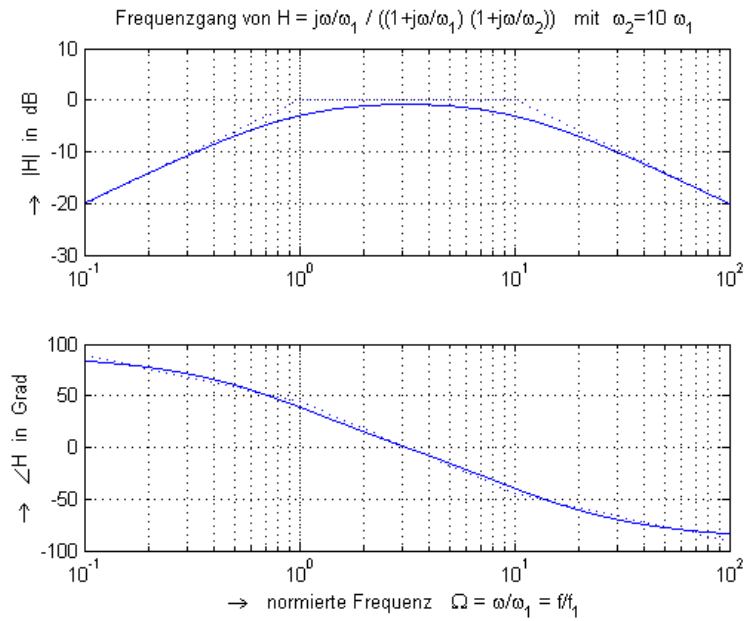


Abbildung 3.8.: Bodediagramm der Frequenzgangfunktion (3.10) mit Darstellung der Näherungsgeraden

□

3. Frequenzgang, Bestandteile und Strukturen

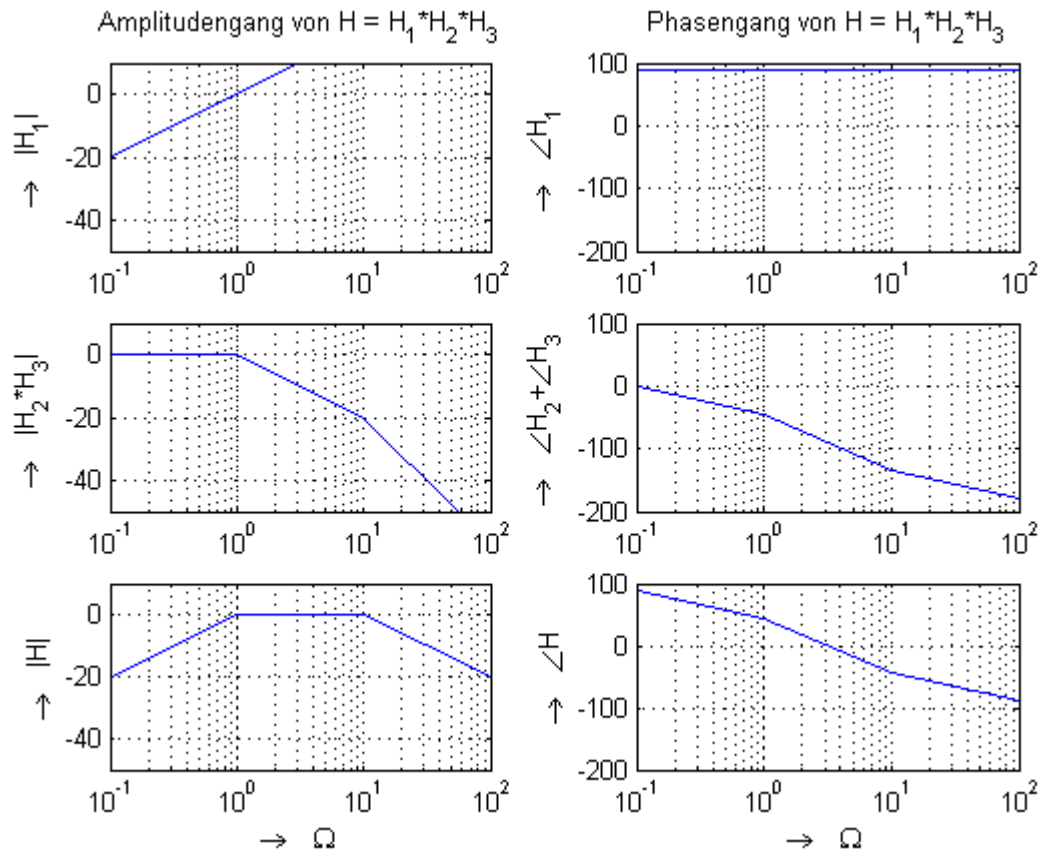


Abbildung 3.9.: Bodediagramm der Frequenzgangfunktion (3.10) mit Darstellung der einzelnen Komponenten

3. Frequenzgang, Bestandteile und Strukturen

Beispiel 4: Bodediagramm der Frequenzgangfunktion (3.11)

Die Produktform gemäss der Beziehung (3.11) für $Q > \frac{1}{2}$ sieht wie folgt aus:

$$H(\omega) = j \frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{Q} \cdot \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{Q} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Hier dient die Frequenz ω_0 als Bezugsfrequenz für die Normierung. Das resultierende Bode-Diagramm ist in der Abbildung 3.10 dargestellt. Abbildung 3.11 zeigt die Beiträge der Produktterme zur Näherung des resultierenden Frequenzgangs.

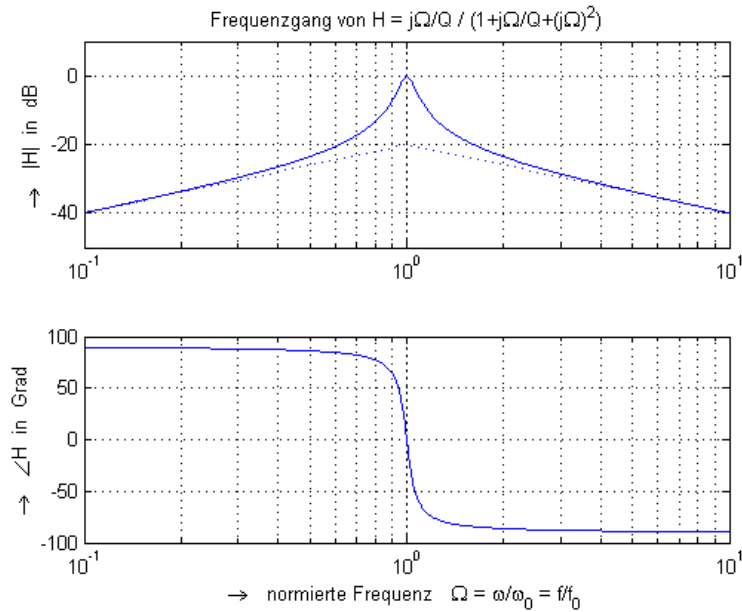


Abbildung 3.10.: Bodediagramm der Frequenzgangfunktion (3.11) mit Darstellung der Näherungsgeraden

□

3. Frequenzgang, Bestandteile und Strukturen

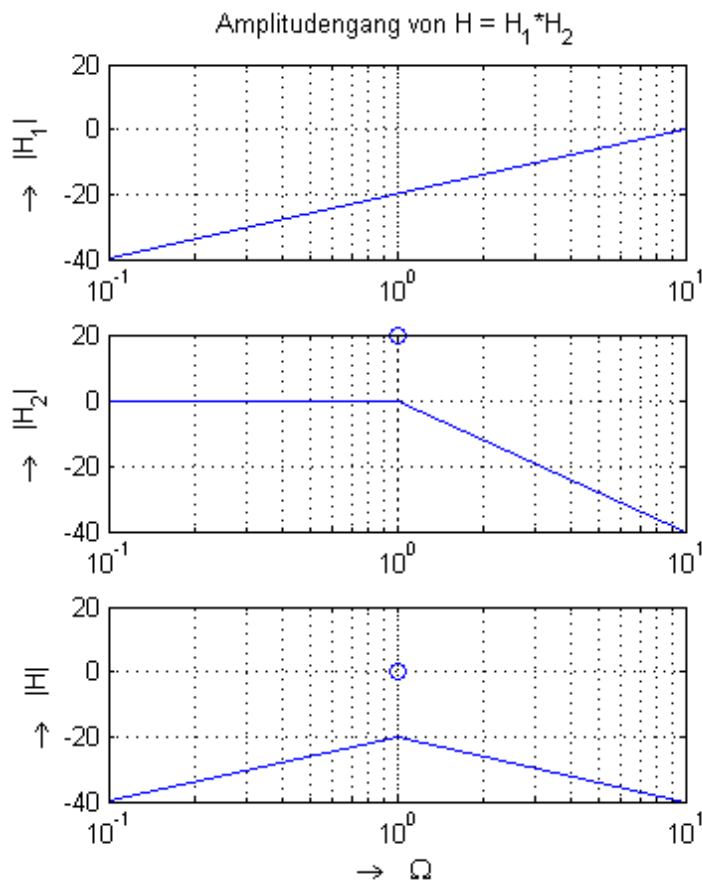


Abbildung 3.11.: Näherungsgeraden für das Bodediagramm der Frequenzgangfunktion (3.11) mit Darstellung der einzelnen Komponenten der Produktzerlegung
 Die $+20 \text{ dB/Dk}$ -Gerade im oberen Teil der Abbildung schneidet die 0 dB -Linie nicht bei $\Omega = 1$, da sie wegen dem Faktor $\frac{1}{Q}$ von $H_1(\Omega) = j\Omega\frac{1}{Q}$ um $-20 \log Q = -20 \text{ dB}$ tiefer liegt.
 Der Kreis im mittleren und unteren Teil der Abbildung markiert der Einfluss der Überhöhung um $20 \log Q = +20 \text{ dB}$ infolge des Gütefaktors Q (Vergleich mit Abbildung 3.10).
 Die Konstruktion des Phasengangs ist hier nicht dargestellt. Er entspricht dem des Systems 2. Ordnung $H_2(\Omega)$ (cf. Abbildung C.7 auf S. 41) lediglich durch den Einfluss von $H_1(\Omega)$ um $+90 \text{ Grad}$ nach oben verschoben.

A. Komplexe Zahlen

Imaginäre Zahlen

Um die *Quadratwurzel von negativen Zahlen* bestimmen zu können, braucht es eine Erweiterung des gewohnten Zahlenbegriffs (i. e. *natürliche* \mathbb{N} , *ganze* \mathbb{Z} , *rationale* \mathbb{Q} , *reelle Zahlen* \mathbb{R}). Zu diesem Zweck definiert man die **imaginäre**¹ **Einheit** i oder j wie folgt:²

$$i^2 = -1 \quad (\text{A.1})$$

Damit gilt:

$$i = \sqrt{-1}$$

So kann die Quadratwurzel irgend einer negativen (reellen) Zahl $a \in \mathbb{R}$ bestimmt werden:

$$\sqrt{a} = \sqrt{(-1)(-a)} = \sqrt{-1}\sqrt{-a} = i\sqrt{-a}$$

Bemerkung: Vorwiegend in der Elektrotechnik wird j anstelle von i als Symbol für die imaginäre Einheit benutzt.

Komplexe Zahlen

Reelle und imaginäre Zahlen können zu **komplexen Zahlen** kombiniert werden:

$$x = a_x + ib_x \quad (\text{A.2})$$

Dabei sind

- x komplexe Zahl, $x \in \mathbb{C}$
- a_x **Realteil** der komplexen Zahl x , $a_x = \text{Re}\{x\}$, $a_x \in \mathbb{R}$
- b_x **Imaginärteil** der komplexen Zahl x , $b_x = \text{Im}\{x\}$, $b_x \in \mathbb{R}$

Bemerkung: In der Elektrotechnik werden, insbesondere im Zusammenhang mit der Wechselstromlehre, komplexe Zahlen üblicherweise unterstrichen, um diese Eigenschaft hervorzuheben.

Jeder komplexen Zahl kann man in der so genannten **Gauß'schen Zahlenebene**³ einen Punkt zuweisen: Dabei wird auf der *reellen Achse* (Abszisse, x-Achse) der Realteil und auf der *imaginären Achse* (Ordinate, y-Achse) der Imaginärteil der komplexen Zahl aufgetragen. Real- und Imaginärteil können so wie die **kartesischen Komponenten** der komplexen Zahl betrachtet werden. So kann man ebenfalls die **polaren Komponenten** einer komplexen Zahl definieren:

- **Absolutbetrag** oder kurz **Betrag**, sowie auch *Modul* der komplexen Zahl x :

$$|x| = r = \sqrt{a_x^2 + b_x^2} \quad (\text{A.3})$$

¹ *imaginär*: eingebildet, vorgestellt, also *nicht reell*

² In der Wechselstromlehre wird im Gegensatz zur Mathematik, j anstelle von i verwendet.

³ nach *Johann Carl Friedrich Gauß* (1777 - 1855)

A. Komplexe Zahlen

- **Winkel** oder **Argument** der komplexen Zahl x :

$$\langle x = \phi = \arctan \frac{b_x}{a_x} \quad (4\text{-Quadranten arctan mit } -\pi \leq \phi \leq +\pi) \quad (\text{A.4})$$

Mit Betrag und Winkel kann die komplexe Zahl also wie folgt angegeben werden:

$$x = a_x + ib_x = |x| \cos \langle x + i|x| \sin \langle x = r \cos \phi + ir \sin \phi \quad (\text{A.5})$$

Die folgende Identität (A.6) ist bekannt unter dem Namen **Euler'sche Beziehung**:⁴

$$\boxed{\cos \alpha + i \sin \alpha = e^{i\alpha}} \quad (\text{A.6})$$

Somit kann jede komplexe Zahl auch in der *Euler'schen Form* angegeben werden:

$$x = |x|e^{i\langle x} = re^{i\phi} = r \angle \phi \quad (\text{A.7})$$

Der Ausdruck $r \angle \phi$ (ausgesprochen: r Versor Phi) ist eine abgekürzte Schreibweise um Betrag und Winkel der komplexen Zahl explizit anzugeben.

Ferner definiert man die zu der komplexen Zahl $x = a_x + ib_x$ **konjugierte** komplexe Zahl:

$$x^* = a_x - ib_x = |x|e^{-i\langle x} = re^{-i\phi}$$

Bei der Konjugation wird das Vorzeichen des Imaginärteils und, bei der Euler'schen Form, das des Winkels gewechselt.

Grundoperationen

Für die beiden (allgemeinen) komplexen Zahlen $x = a_x + ib_x = r_x \angle \phi_x$ und $y = a_y + ib_y = r_y \angle \phi_y$ werden die vier Grundoperationen wie folgt definiert:

- **Addition** und **Subtraktion**

$$x \pm y = (a_x \pm a_y) + i(b_x \pm b_y) \quad (\text{A.8})$$

- **Produkt**

$$x \cdot y = (a_x + ib_x) \cdot (a_y + ib_y) = (a_x a_y - b_x b_y) + i(a_x b_y + b_x a_y)$$

$$x \cdot y = r_x r_y e^{i(\phi_x + \phi_y)} \quad (\text{A.9})$$

- **Quotient**

$$\frac{x}{y} = \frac{a_x + ib_x}{a_y + ib_y} = \frac{a_x + ib_x}{a_y + ib_y} \cdot \frac{a_y - ib_y}{a_y - ib_y} = \frac{a_x a_y + b_x b_y}{a_y^2 + b_y^2} + i \frac{-a_x b_y + b_x a_y}{a_y^2 + b_y^2}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{r_x}{r_y} e^{i(\phi_x - \phi_y)} \quad (\text{A.10})$$

⁴ nach *Leonhard Euler* (1707 - 1783)

Weitere Eigenschaften

- Addition und Multiplikation sind *assoziativ*: $x + (y + z) = (x + y) + z = x + y + z$ und $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z = x \cdot y \cdot z$
- Die Multiplikation ist *kommutativ*: $x \cdot y = y \cdot x$
- Addition und Multiplikation sind *distributiv*: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
- Für die Konjugation gilt : $(x^*)^* = x$ und $(x \cdot y)^* = x^* \cdot y^*$

- Reziproker Wert:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{r e^{i\phi}} = \frac{1}{r} e^{-i\phi} = \frac{a_x}{a_x^2 + b_x^2} + i \frac{-b_x}{a_x^2 + b_x^2}$$

- Summe einer komplexen Zahl mit ihrer Konjugierten:

$$x + x^* = 2 \operatorname{Re}\{x\}$$

- Produkt einer komplexen Zahl mit ihrer Konjugierten:

$$x \cdot x^* = |x|^2 = r^2$$

- Euler'sche Form der imaginären Einheit:

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

- Euler'sche Form der negativen reellen Einheit:

$$-1 = e^{\pm i\pi}$$

- Die Multiplikation mit der imaginären Einheit entspricht in der Gauß'schen Zahlenebene einer Rotation des Zahlenpunktes um $\frac{\pi}{2}$ im Gegenuhrzeigersinn um den Ursprung:

$$ix = x e^{i\frac{\pi}{2}}$$

B. Logarithmierte Grössenverhältnisse

B.1. Leistungsverhältnisse

In der Wechselstromlehre, der Regelungstechnik und der Nachrichtentechnik werden **Leistungs-** oder **Energieverhältnisse** häufig in logarithmierter Form dargestellt. Ein Zweitor (Vierpol) soll ausgangsseitig (sekundärseitig) an eine Last R_2 angeschlossen sein und eingangsseitig (primärseitig) aus einer Quelle gespeist werden. Der Eingangswiderstand des Zweitors betrage dabei R_1 . Die ans Zweitor eingangsseitig und an die Last ausgangsseitig abgegebenen Leistungen betragen P_1 und P_2 . Man definiert die Logarithmen der Leistungsverhältnisse wie folgt:

$$A_p = 10 \log \left(\frac{P_1}{P_2} \right) \quad \text{Dämpfung in dB} \quad (\text{B.1})$$

$$G_p = 10 \log \left(\frac{P_2}{P_1} \right) \quad \text{Verstärkung in dB} \quad (\text{B.2})$$

Nimmt man das Verhältnis von Eingangs- zu Ausgangsleistung, so spricht man von einer **Dämpfung** (attenuation), im umgekehrten Fall von einer **Verstärkung** (gain). Der Logarithmus (üblicherweise zur Basis 10) darf nur von einer einheitslosen Grösse berechnet werden. Also muss es sich beim Argument (in diesem Fall z. B. $\frac{P_1}{P_2}$) immer um ein Verhältnis von einheitsgleichen Grössen handeln. Die für die Dämpfung und die Verstärkung benutzte *Pseudoeinheit* nennt man **Dezibel**: Zehntel Bel, wegen dem Faktor 10 der hilft, dass die Zahlenwerte nicht zu klein werden.

Es gilt offensichtlich: $G_p = -A_p$.

B.2. Signalverhältnisse

Obige Leistungsverhältnisse kann man auch mit Spannungen oder Stromstärken ausdrücken, falls man die Werte der Widerstände kennt, an denen die beiden zu vergleichenden Leistungen anfallen (in diesem Fall R_1 und R_2). Die Umrechnung in Leistungen ergibt:

$$P_1 = \frac{U_1^2}{R_1}$$
$$P_2 = \frac{U_2^2}{R_2}$$

Damit erhält man:

$$A_p = 10 \log \left(\frac{P_1}{P_2} \right) = 20 \log \left(\frac{U_1}{U_2} \right) - 10 \log \left(\frac{R_1}{R_2} \right) = A_u - 10 \log \left(\frac{R_1}{R_2} \right)$$
$$G_p = 10 \log \left(\frac{P_2}{P_1} \right) = 20 \log \left(\frac{U_2}{U_1} \right) - 10 \log \left(\frac{R_2}{R_1} \right) = G_u - 10 \log \left(\frac{R_2}{R_1} \right)$$

B. Logarithmierte Grössenverhältnisse

Werden die Spannungen U_1 und U_2 am selben Widerstand R gemessen, so ist das Verhältnis $A_u = A_p$ und $G_u = G_p$.

Häufig wird $A_u = 20 \log\left(\frac{U_1}{U_2}\right)$, bzw. $G_u = 20 \log\left(\frac{U_2}{U_1}\right)$ aber auch bei ungleichen Widerständen verwendet und drückt daher nicht das korrekte Leistungsverhältnis aus. Der Faktor 20 vor dem Logarithmus wird aber auf jeden Fall verwendet.

Analog kann man entsprechende Grössen für die Stromstärken I_1 und I_2 definieren. Statt einem Spannungs- oder Stromstärkenverhältnis können auch andere Verhältnisse, z. B. magnetische oder elektrische Feldstärkenverhältnisse logarithmisch ausgedrückt werden. *Immer wenn es sich um Feldgrössen handelt, also um Grössen, deren Quadrat erst proportional zur Leistung ist, muss der Logarithmus mit dem Faktor 20 versehen werden, um ein Ergebnis in Dezibel zu liefern.*

Beispiel: Verstärker

Eine Verstärkerstufe (Zweiter) mit $R_1 = 600 \Omega$ Eingangswiderstand werde aus einem Generator gespeist. Am Verstärker ist sekundärseitig ein Lastwiderstand von $R_2 = 600 \Omega$ angeschlossen. Die eingangsseitige Spannung beträgt: $U_1 = 775 \text{ mV}$. Somit ist $P_1 = \frac{U_1^2}{R_1} = 1 \text{ mW}$. Für diverse Ausgangsspannungen ergeben sich folgende Werte:

Tabelle B.1.: Verstärkungsfaktoren

U_2 in V	0.775	1.096	1.550	2.451	7.750	24.51
U_2/U_1	1	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{10}$	10	$10\sqrt{10}$
P_2 in mW	1	2	4	10	100	1000
P_2/P_1	1	2	4	10	100	1000
$G_p = G_u$ in dB	0	3	6	10	20	30

□

Für den praktischen Gebrauch genügen ein paar wichtige Zahlen: 3 dB bedeutet ein Leistungsverhältnis von 2 bzw. ein Spannungsverhältnis von $\sqrt{2}$. Ein Spannungsverhältnis von 2 ergibt 6 dB. Das Verhältnis 10 ergibt bei Leistungen 10 dB und bei Spannungen 20 dB. Kehrt man bei den Dezibelzahlen das Vorzeichen um, so bedeutet dies für die entlogarithmierten Verhältnisse den reziproken Wert: Aus +3 dB, welches dem Leistungsverhältnis 2 entspricht, wird mit -3 dB ein Leistungsverhältnis von $\frac{1}{2}$ angegeben.

Amplitudengänge von LTI-Systemen werden üblicherweise als „Verstärkung“ angegeben. Dabei sind die Verhältnisse im Allgemeinen kleiner 1, d. h. die Logarithmischen Verhältnisse sind negativ. Es ist dabei üblich die -3dB-Grenzfrequenzen für die Festlegung der Bandbreiten von Filtern zu benutzen.

Bei Frequenzgangabhängigkeiten der betrachteten Verhältnisse spielen auch Steigungen eine Rolle. Diese werden üblicherweise in *dB pro Dekade* angegeben, gelegentlich auch in *dB pro Oktave*. Unter **Dekade** wird ein Frequenzschritt um den Faktor 10, bei **Oktave** eine Verdopplung der Frequenz verstanden. Eine negative Änderung im Spannungsverhältnis proportional zur Frequenz, d. h. eine Steigung von -1 (10-fache Abschwächung bei Zunahme der Frequenz um den Faktor 10) wird mit -20 dB/Dekade angegeben. Dies entspricht auch -6 dB/Oktave (cf. Tabelle B.2).

Tabelle B.2.: Steigungen in dB

Steigung proportional zu	dB/Dekade	dB/Oktave
ω^2	+40	+12
ω	+20	+6
$\omega^0 = 1$	0	0
ω^{-1}	-20	-6
ω^{-2}	-40	-12

B.3. Pegel

Insbesondere in der Nachrichtentechnik werden als Bezugsgrössen Standardwerte genommen. So nimmt man in der Übertragungstechnik oft eine Bezugsleistung von 1 mW an. Vergleicht man andere Leistungen mit dieser Bezugsleistung, so drückt man damit nicht nur ein Leistungsverhältnis aus, sondern eine absolute Leistung oder einen sogenannten **Pegel**. Um diese Verhältnisse mit festem Bezugswert von anderen unterscheiden zu können, fügt man dem dB einen Zusatz hinzu. So drückt **dBm** eine Leistung aus bezogen auf die Bezugsleistung $P_{bez} = 1 \text{ mW}$ (cf. Tabelle B.3). Ferner gibt es **dBW** bei denen sich die Pegelangabe auf die Leistung 1 W bezieht. Der Angabe in **dB μ V** oder kurz **dB μ** , drückt einen Pegel aus, der sich auf die Spannung $U_{bez} = 1 \mu\text{V}$ bezieht (cf. Tabelle B.4). Es werden auch Spannungspegel in **dBV** angegeben, welche sich auf 1 V beziehen.

Tabelle B.3.: Leistungspegel

Leistung P in Watt	Leistungspegel in dB Milliwatt
1 W	30 dBm
100 mW	20 dBm
10 mW	10 dBm
4 mW	6 dBm
2 mW	3 dBm
1 mW	0 dBm
100 μ W	-10 dBm
10 μ W	-20 dBm
1 μ W	-30 dBm
1 nW	-60 dBm
1 pW	-90 dBm

B. Logarithmierte Grössenverhältnisse

Tabelle B.4.: Spannungspegel

Spannung U in Volt	Spannungspegel in dB Microvolt
1 V	120 dB μ V
100 mV	100 dB μ V
10 mV	80 dB μ V
1 mV	60 dB μ V
100 μ V	40 dB μ V
10 μ V	20 dB μ V
1 μ V	0 dB μ V

Beispiel: Kaskade: Hintereinanderschaltung mehrerer Zweitore

Liegt z. B. die Leistung $P_{1dBm} = -30 \text{ dBm} \equiv P_1 = 1 \mu\text{W}$ an einer Übertragungsstrecke mit Dämpfung $A = +3 \text{ dB}$ gefolgt von einem Verstärker mit Leistungsverstärkung $G = +20 \text{ dB}$, so ergibt sich für die Leistung P_2 am Ausgang der Verstärkerstufe:

$$\begin{aligned} P_{2dBm} &= P_{1dBm} - A + G = -30 \text{ dBm} - 3 \text{ dB} + 20 \text{ dB} = -13 \text{ dBm} \\ P_2 &= \frac{100}{2} 1 \mu\text{W} = 50 \mu\text{W} \end{aligned}$$

Eine Multiplikation der (nichtlogarithmierten) Verhältnisse entspricht einer Addition der Verhältnissen in dB.

□

C. Elementare Frequenzgangfunktionen

Eine beliebige Frequenzgangfunktion (Übertragungsfaktor) lässt sich immer als Produkt aus den in der unten stehenden Tabelle aufgezählten elementaren Frequenzgangfunktionen und ihren reziproken Funktionen darstellen (**Produktform**).

Die Funktionen werden hier alle in Funktion der **normierten Frequenz** dargestellt:

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}$$

Diese Grösse ist einheitslos und hängt nicht davon ab, ob die Kreisfrequenz oder die Frequenz der Betrachtung zugrunde gelegt wird. Dabei ist ω_0 , beziehungsweise f_0 , eine beliebig aber zweckmässig wählbare *Bezugskreisfrequenz* oder *Bezugsfrequenz*, wie z. B. $\omega_0 = 1 \text{ s}^{-1}$ oder im Fall eines Systems 1. Ordnung eine Grenz(kreis)frequenz ω_g oder bei einem schwingfähigen System 2. Ordnung eine Resonanz(kreis)frequenz ω_r .¹

Tabelle C.1.: Elementare Frequenzgangfunktionen

Die entsprechenden Bodediagramme und Ortskurven sind in den Abbildungen auf den folgenden Seiten dargestellt.

Bezeichnung	Frequenzgang $H(\Omega)$	Amplitudengang $ H(\Omega) $	Phasengang $\langle H(\Omega) \rangle$
konstanter Faktor			
1.1 $k > 0$	k	k	0
1.2 $k < 0$	k	$ k $	$\pm\pi$
2.1 Differentierglied	$j\Omega$	Ω	$\frac{\pi}{2}$
2.2 Integrierglied	$\frac{1}{j\Omega}$	$\frac{1}{\Omega}$	$-\frac{\pi}{2}$
3.1 Glied 1. Ordnung (Abbild. C.1 und C.2)	$1 + j\Omega$	$\sqrt{1 + \Omega^2}$	$\arctan(\Omega)$
3.2 Glied 1. Ordnung (Abbild. C.3 und C.4)	$\frac{1}{1 + j\Omega}$	$\frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^2}}$	$-\arctan(\Omega)$
4.1 Glied 2. Ordnung (Abbild. C.5 und C.6)	$1 + j\Omega\frac{1}{Q} + (j\Omega)^2$	$\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + \frac{\Omega^2}{Q^2}}$	$\arctan\left(\frac{1}{Q}\frac{\Omega}{1 - \Omega^2}\right)$
4.2 Glied 2. Ordnung (Abbild. C.7 und C.8)	$\frac{1}{1 + j\Omega\frac{1}{Q} + (j\Omega)^2}$	$\frac{1}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + \frac{\Omega^2}{Q^2}}}$	$-\arctan\left(\frac{1}{Q}\frac{\Omega}{1 - \Omega^2}\right)$

¹ Die einer Grenzkreisfrequenz ω_g reziproken Grösse $\tau = \frac{1}{\omega_g}$ hat die Einheit einer Zeit und wird üblicherweise als *Zeitkonstante* bezeichnet.

C. Elementare Frequenzgangfunktionen

Bei den beiden Elementen zweiter Ordnung wird der **Gütefaktor** Q (kurz *Güte*) oder das **Dämpfungsmaß** ξ als Parameter verwendet. Es gilt $\xi = \frac{1}{2Q}$ und entsprechend $Q = \frac{1}{2\xi}$. Für diese Glieder gilt die Bedingung $Q \geq \frac{1}{2}$ oder $0 \leq \xi \leq 1$. Ist diese nicht erfüllt (d. h. $0 < Q < \frac{1}{2}$, bzw. $\xi > 1$), so muss das Element 2. Ordnung in ein Produkt zweier Elemente 1. Ordnung wie folgt zerlegt werden:

$$1 + j\Omega \frac{1}{Q} + (j\Omega)^2 = (1 + j\alpha\Omega) \cdot (1 + j\frac{1}{\alpha}\Omega) \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{1}{2Q} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 - 1} = \xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}$$

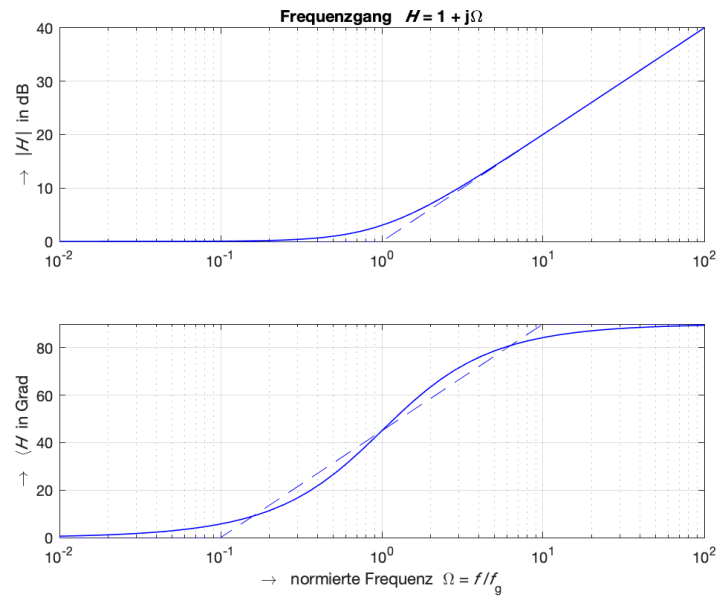


Abbildung C.1.: Bodediagramm

C. Elementare Frequenzgangfunktionen

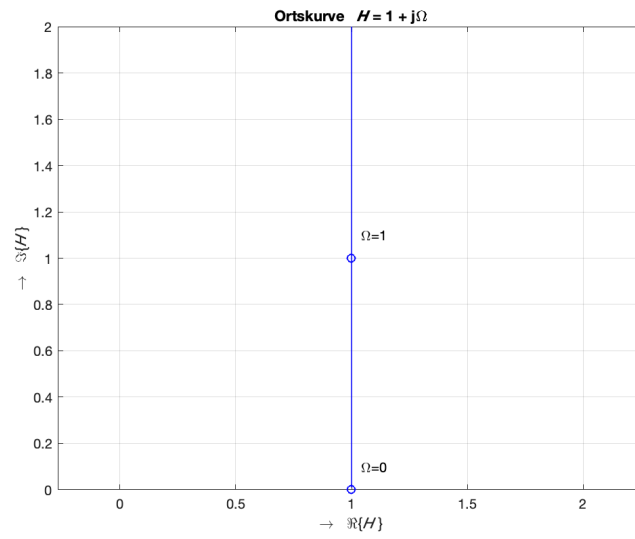


Abbildung C.2.: Ortskurve

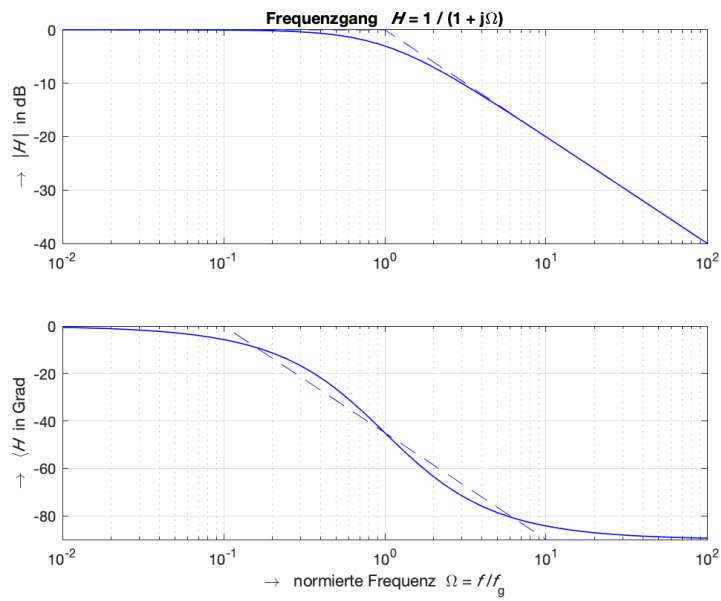


Abbildung C.3.: Bodediagramm

C. Elementare Frequenzgangfunktionen

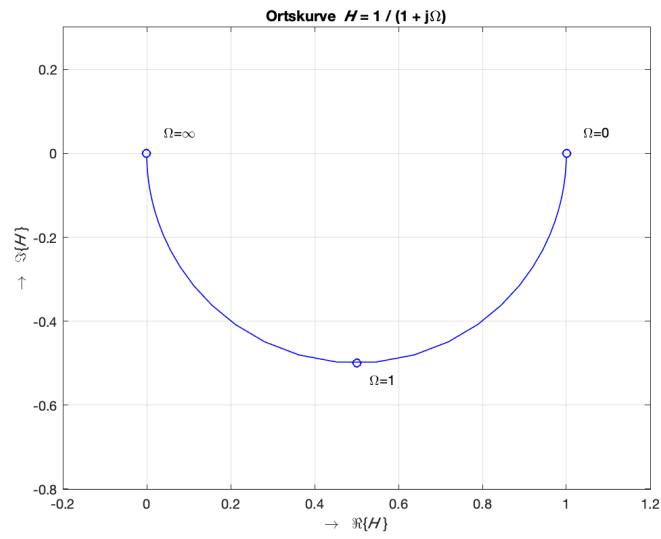


Abbildung C.4.: Ortskurve

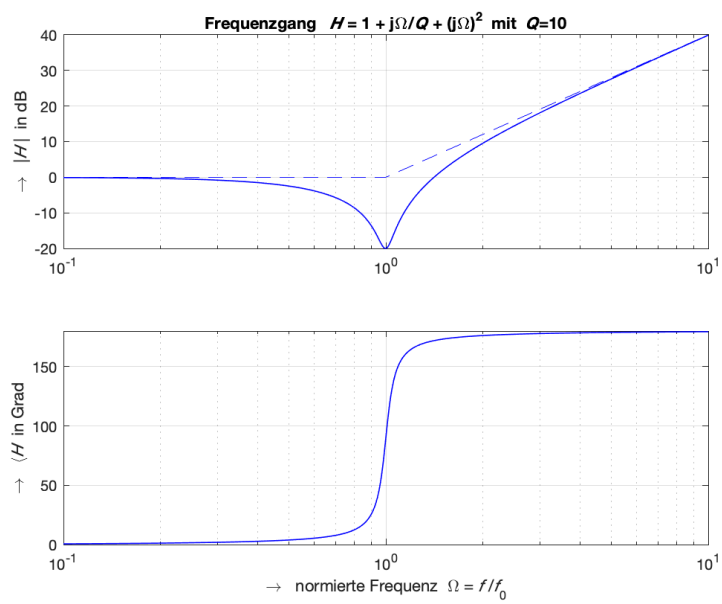


Abbildung C.5.: Bodediagramm

C. Elementare Frequenzgangfunktionen

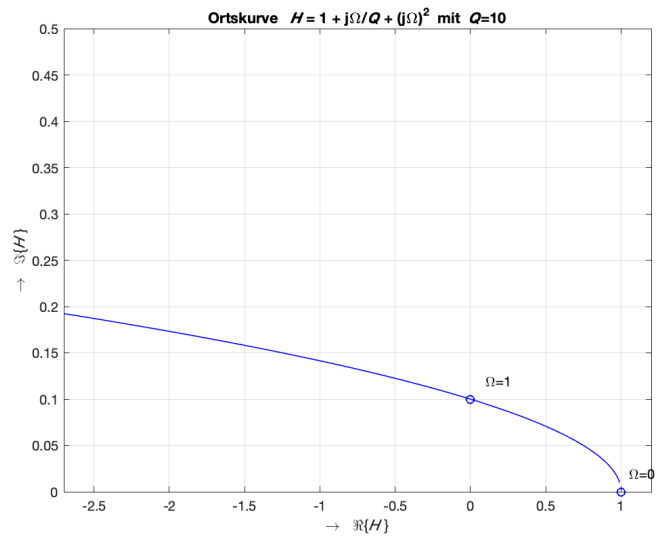


Abbildung C.6.: Ortskurve

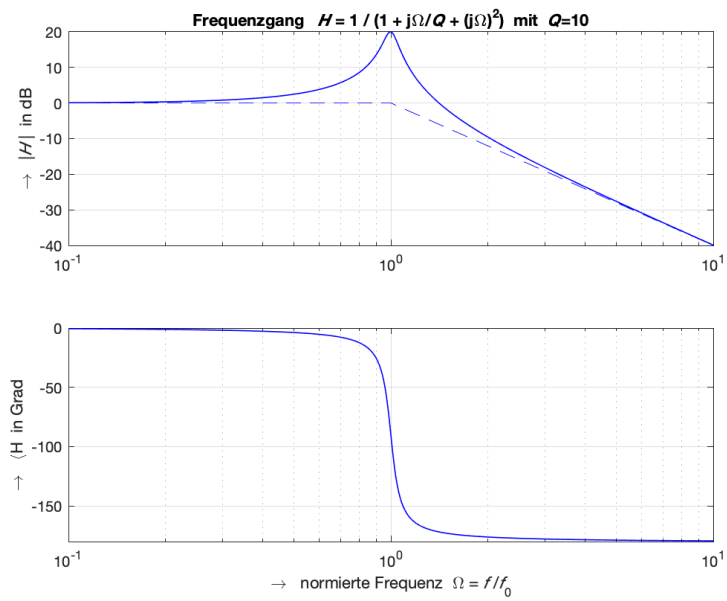


Abbildung C.7.: Bodediagramm

C. Elementare Frequenzgangfunktionen

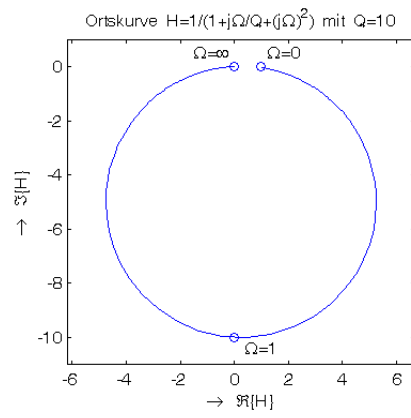


Abbildung C.8.: Ortskurve

D. Bedeutung des Gütefaktors

Die verschiedenen Interpretationen für die Bedeutung des Gütefaktors bei schwingfähigen Systemen 2. Ordnung werden hier an Hand des RLC-Serieschwingkreises beispielhaft erläutert (cf. Abbildung D.1):¹

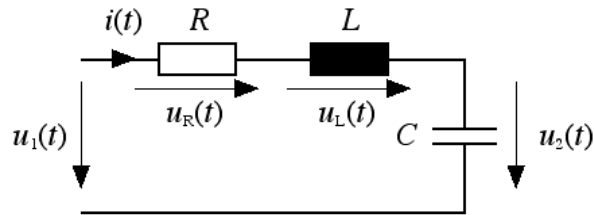


Abbildung D.1.: RLC-Serieschwingkreis

Als Modell Frequenzgangfunktion soll die Beziehung (3.11) aus S. 21 benutzt werden. Diese entspricht dem Verhältnis $H(\omega) = \frac{U_R(\omega)}{U_1(\omega)}$ gemäss der Abbildung D.1 für einen Gütefaktor $Q > \frac{1}{2}$, d. h. $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. Mit Einführung der mit der Resonanzfrequenz normierten Frequenz $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$ erhält man:

$$H(\Omega) = \frac{j\Omega \frac{1}{Q}}{1 + j\Omega \frac{1}{Q} + (j\Omega)^2} = \frac{j\Omega \frac{1}{Q}}{1 - \Omega^2 + j\Omega \frac{1}{Q}} \quad (\text{D.1})$$

Der Amplitudengang der Beziehung (D.1) ist die den Abbildungen D.2 und D.3 dargestellt. Unter der allgemeinen Annahme, dass $Q \geq \frac{1}{2}$, bzw. $0 < \xi \leq 1$ ist, ergeben sich folgende Bedeutungen:

1. Resonanzüberhöhung des Amplitudengangs

Der Abstand zwischen dem Maximum des Amplitudengangs und dem Scheitel gebildet durch die beiden Näherungsgeraden bei Resonanz $\Omega = 1$ ist exakt Q . Beim Gütefaktor $Q = 1$ (bzw. dem Dämpfungsmass $\xi = \frac{1}{2}$), verläuft der Amplitudengang bei Resonanzfrequenz exakt durch den Kreuzungspunkt der Näherungsgeraden, wie dies in der Abbildung 3.3 auf S. 17 zu sehen ist.

2. Bandbreite

Der Amplitudengang bildet hier ein *Bandpassfilter*: die Stromstärke bei Frequenzen um die Resonanzfrequenz herum wird kaum unterdrückt, so dass die Spannung $u_R(t)$ nahezu mit der Spannung $u_1(t)$ identisch ist. Bei Frequenzen unterhalb und oberhalb der Resonanzfrequenz wird $u_R(t)$ unterdrückt. Als **Bandbreite** bezeichnet man allgemein das Frequenzintervall in dem die Unterdrückung weniger als den Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$, d. h. -3 dB

¹ Für den Parallelschwingkreis gelten duale, zum Teil nicht identische Aussagen.

D. Bedeutung des Gütefaktors

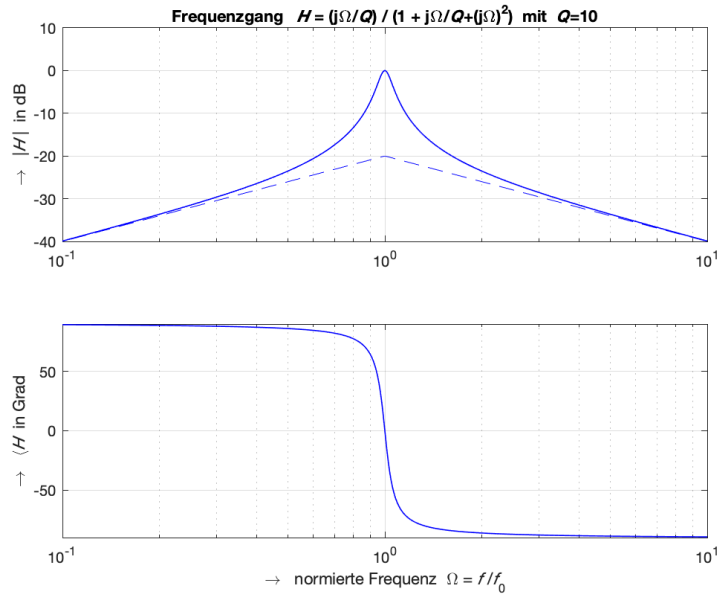


Abbildung D.2.: Amplitudengangs $|H(\Omega)|$ der Frequenzgangfunktion (D.1) für $Q = 10$, bzw. $\xi = 0.05$

(bezogen auf das Maximum des Amplitudengangs) beträgt. Die Berechnung der beiden **Grenzkreisfrequenzen** liefert das folgende Ergebnis (ohne Herleitung):

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \left(\sqrt{1 + \xi^2} \mp \xi \right) \quad (\text{D.2})$$

Damit beträgt die Bandbreite:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\xi\omega_0$$

Die Resonanzfrequenz entspricht hier gerade dem *geometrischen Mittelwert* von ω_1 und ω_2 : $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2}$. Dieser Mittelwert wird auch **Bandmitten(kreis)frequenz** genannt. Die **relative Bandbreite** d ist die Bandbreite bezogen auf die Bandmittenfrequenz:

$$d = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\Delta f}{f_0} = 2\xi = \frac{1}{Q} \quad (\text{D.3})$$

Offensichtlich hängt die relative Bandbreite nur von Q oder ξ ab.

3. Impedanzverhältnis

Bei der Resonanzfrequenz entspricht der Gütefaktor dem Verhältnis der Impedanz $\omega_0 L$ der Spule zum Wert R des ohmschen Widerstands des Schwingkreises oder dem Verhältnis des Leitwertes $G = \frac{1}{R}$ des Widerstands zur Admittanz $\omega_0 C$ der Kapazität:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{G}{\omega_0 C}$$

Für den Parallelschwingkreis gilt dual dazu:

$$Q = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{R}{\omega_0 L}$$

D. Bedeutung des Gütefaktors

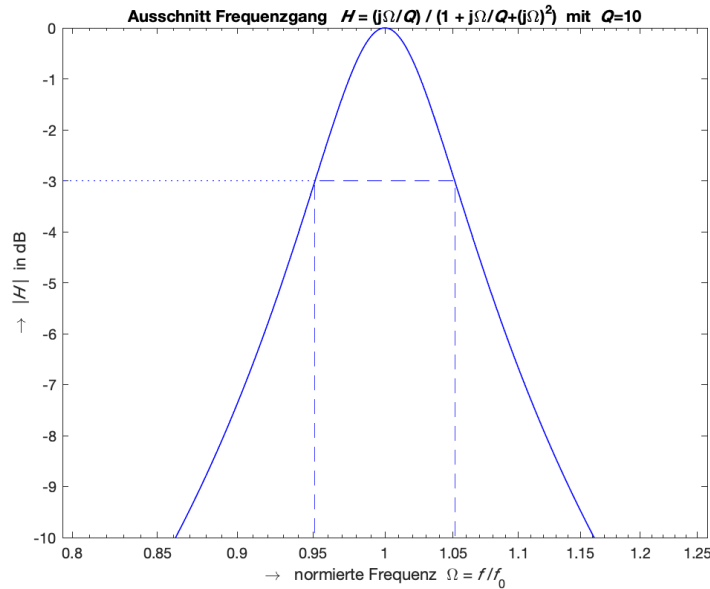


Abbildung D.3.: Detail des Überhöhung des Amplitudengangs der Frequenzgangfunktion nach Abbildung D.2

Gestrichelt dargestellt ist die -3 dB-Bandbreite und die beiden Grenzfrequenzen nach Gleichung (D.2). Die Bandmittenfrequenz befindet sich hier beim Maximum des Amplitudengangs. Auf einer linearen Frequenzskala sind die Abstände der Grenzfrequenzen von der Mittenfrequenz nicht identisch.

4. Energieverhältnis

Wird der Schwingkreis durch eine sinusförmige Spannung mit der Resonanzfrequenz f_0 angeregt, so entspricht der Gütefaktor Q (im eingeschwungenen Zustand) auch dem Verhältnis zwischen der in L und C total gespeicherten Energie und der mittleren im Zeitintervall $\frac{1}{2\pi f_0} = \frac{1}{\omega_0}$ in R dissipierten Energie (ohne Herleitung).² Dieses Ergebnis gilt übrigens sowohl für den Serie-, wie auch für den Parallelschwingkreis.

5. Dynamisches Verhalten (Ein- und Ausschwingen)

Eine weitere Bedeutung für Q ergibt sich aus der Abklingzeit der Signale (Spannungen, Stromstärke) des frei schwingenden (nicht angeregten, kurzgeschlossenen) Kreises. Diese nehmen mit der Zeitkonstante $\tau = \frac{1}{\xi\omega_0} = \frac{2Q}{\omega_0}$ exponentiell ab (ohne Herleitung). In der Praxis sind nach $5\tau = Q \frac{10}{2\pi} \frac{1}{f_0} \approx Q \cdot \frac{1}{f_0}$ die Signale abgeklungen, d. h. nach ca. Q Perioden der freien Schwingung. Die Anzahl der „sichtbaren“ Schwingungen liefert also einen Schätzwert für den Gütefaktor.

² Die totale in L und C gespeicherte Energie ist im stationären Zustand zeitlich konstant!

E. Hinweise zu Matlab

E.1. Programmierung einer Frequenzgangfunktion und ihrer Darstellung

Lineare, zeitinvariante Systeme (LTI systems) können mit Matlab auf verschiedene Arten definiert werden. Eine gebräuchliche davon, ist die Darstellung als **Übertragungsfunktion** (transfer function). Dabei werden die Koeffizienten der Zähler- und Nennerpolynome der Frequenzgangfunktion in *abnehmender* reihenfolge (Matlab-Konvention) angegeben. Als Beispiel soll die folgende Frequenzgangfunktion dienen:

$$H(\omega) = k \frac{j \frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{Q}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{Q} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{b_1 j \omega + b_0}{(j \omega)^2 + a_1 j \omega + a_0}$$

Durch Normierung wird gesorgt, dass der Koeffizient des Nennerpolynoms mit der höchsten Potenz auf 1 normiert wird, in diesem Fall also $a_2 = 1$. Dies erfolgt hier durch Multiplikation des Zähler- und des Nennerpolynoms mit dem Koeffizienten ω_0^2 .

Listing E.1: Matlab-Code zur Bestimmung des Frequenzgangs mit den spezifischen Matlab-Funktionen `tf`, `bode` und `nyquist`

```
% Bestimmung eines LTI-Systems als Uebertragungsfunktion (transfer function)
% und Darstellung des Bodediagramms
%
% Copyright M. Schlup, 6.Mai 2000, 30.Sept. 2005, 30.Aug. 2007, 2.Juli 2008
%
clear all, close all, clc, hold off, format compact

% Parameterwerte
k=1; % Verstaerkungsfaktor
f0=1e3; % Bezugsfrequenz (hier: Resonanzfrequenz)
w0=2*pi*f0; % Bezugskreisfrequenz
Q=10; % Guetefaktor
b1=k/Q/w0;
b0=0;
a2=1/w0^2;
a1=1/Q/w0;
a0=1;
% Frequenzgangfunktion (Koeffizienten des Zaehler- und des Nennerpolynoms)
num=[b1 b0]/a2; % Nennerkoeffizient mit der hoechsten Potenz auf 1 normiert
den=[a2 a1 a0]/a2;
sys=tf(num,den); % Systemdefinition mit "tf" (transfer function)
% 1. Version: Bodeplot mit automatischer Wahl des Frequenzbereichs
figure(1)
bode(sys);
% 2. Version: Bodeplot mit Vorgabe des Frequenzbereichs
figure(2)
f=logspace(log10(0.1*f0),log10(10*f0),2^10); % 2^10 Stuetzwerte
```

```

w=2*pi*f;
bode(sys,w);
% 3. Version: Amplituden- (Fa in dB) und Phasengang (Fp in Grad) explizit,
% ohne Plot, siehe help bode fuer Details
[Fa,Fp,w]=bode(sys);
figure(3)
% Ortskurve
nyquist(sys)
axis equal
%
```

Bemerkung: In den Bode- und Nyquist-Figuren kann mit der rechten Maustaste ein Darstellungsmenu herangezogen werden, bei dem im Untermenue Properties die Darstellungsparameter geändert werden können.

E.2. Detaillierte Programmierung ohne spezifische Matlab-Funktionen

Listing E.2: Matlab-Code zur Bestimmung von Bodediagramm und Ortskurve (ohne Benutzung der eingebauten Matlab-Funktionen)

```

% Darstellung eines Frequenzgangs als Bodediagramm und als Ortskurve
% am Beispiel eines RLC-Serieschwingkreises
%
% Copyright M. Schlup, 6.Mai 2000, 30.Sept. 2005, 30.Aug. 2007, 2.Juli 2008
%
clear all, close all, clc, hold off, format compact

% Werte der Schaltungselemente (RLC-Serieschwingkreis)
R=4.6; % Ohm
C=470e-9; % Farad
L=1e-3; % Henry
% Resonanzfrequenz
w0=1/sqrt(L*C); % Kreisfrequenz in s^-1
f0=w0/2/pi; % Frequenz in Hz
% Wahl des Frequenzbereichs (logarithmische Abstaende)
f=logspace(log10(0.1*f0),log10(10*f0),2^10);
w=2*pi*f;
jw=j*w;
% Frequenzgangfunktion
% 1. Version: direkt der Schaltung entsprechend
H=R./(R+jw*L+1./(jw*C)); % H=R*Y=R*I/U1=UR/U1
% 2. Version: indirekt aus den Parametern des Systems 2. Ordnung
Q=sqrt(L/C)/R; % Guetefaktor
k=1; % Verstaerkungsfaktor
% Frequenzgangfunktion (ausprogrammiert mit Hornerschema)
%H=k*jw/w0/Q./((jw/w0+1/Q).*jw/w0+1);

Ha=abs(H); % Amplitude (Betrag)
Hp=angle(H)*180/pi; % Phase (Argument) in Grad
% Frequenzgang (lineare Darstellung)
figure(1)
subplot(2,1,1)
plot(f,Ha)
title('Frequenzgang von H(f)')
```

```

ylabel('\rightarrow |H|')
grid
subplot(2,1,2)
plot(f, Hp)
xlabel('\rightarrow Frequenz in Hz')
ylabel('\rightarrow \angle H in Grad')
grid
% Bodediagramm (logarithmische Massstaebe)
figure(2)
subplot(2,1,1)
semilogx(f/f0, 20*log10(Ha))
title('Frequenzgang von H(\omega) bzw. H(f)')
ylabel('\rightarrow |H| in dB')
grid
subplot(2,1,2)
semilogx(f/f0, Hp)
xlabel(['\rightarrow normierte Frequenz (f / f_{0})', ...
' mit f_{0} \approx ', num2str(f0/1e3, '%4.2f'), ' kHz'])
ylabel('\rightarrow \angle H in Grad')
grid
% Ortskurve
figure(3)
plot(H) % Ortskurve, zeichnet automatisch Imaginaerteil gegen Realteil
title('Ortskurve: Frequenzgang von H(\omega)')
xlabel('\rightarrow \Re\{H\}')
ylabel('\rightarrow \Im\{H\}')
axis equal
grid

```


Literaturverzeichnis

- [1] A. Führer, K. Heidemann, W. Nerreter: *Grundgebiete der Elektrotechnik, Band 1: Stationäre Vorgänge*
Hanser, 8. Auflage, ISBN-13: 978-3-446-40668-1, Preis: € 19.90
- [2] A. Führer, K. Heidemann, W. Nerreter: *Grundgebiete der Elektrotechnik, Band 2: Zeitabhängige Vorgänge*
Hanser, 8. Auflage, ISBN-13: 978-3-446-40573-8, Preis: € 19.90
- [3] A. Führer, K. Heidemann, W. Nerreter: *Grundgebiete der Elektrotechnik, Band 3: Aufgaben*
Hanser, 2. Auflage, ISBN-13: 978-3-446-41258-3, Preis: € 19.90
- [4] E. Hering, K. Bressler, J. Gutekunst: *Elektronik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*
Springer, 5. Auflage, ISBN-13: 978-3-540-24309-0, Preis: € 44.95
- [5] H. Lutz, W. Wendt: *Taschenbuch der Regelungstechnik*
Harri Deutsch, 6. Auflage 2005, ISBN: 3-8171-1749-3, Preis: € 34.95