UNIVERSIDAD NACIONAL DEL COMAHUE

ASENTAMIENTO UNIVERSITARIO SAN MARTÍN DE LOS ANDES

CARRERA TÉCNICO UNIVERSITARIO FORESTAL

CUADERNILLO DE MATEMÁTICA

TEORÍA

REPASO

INGRESO 2023

Prof. CLAUDIO BLACHER

Prof. LAURA LUCIA CHAPADO

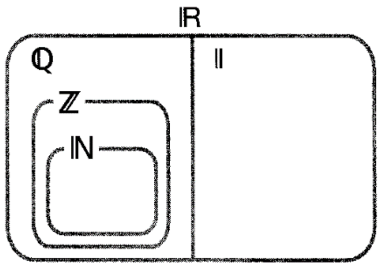
Tco. Ftal. LUCAS ECHENAGUCIA

TRABAJO PRÁCTICO N° 1

CONJUNTOS NUMÉRICOS

AMPLIACION DE LOS CONJUNTOS NUMÉRICOS

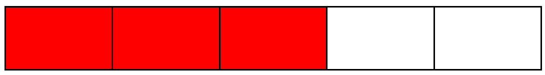
- **Números naturales;(N)**1, 2,3,4,…..Sirven para determinar por ejemplo la cantidad de personas que hay en este Aula Magna
- Los **Números enteros**: (Z)……...- 3,-2,-1, o , 1,2…………facilitan el trabajo de contar en dos sentidos opuestos. Ejemplo: los años antes y después del nacimiento de cristo
- Pero, muchas veces, aparecen situaciones en las que con números enteros, no es posible expresar una cantidad. Ejemplo: necesidad diaria de vitaminas: Vit A = 0,5 mg – Vitamina B = 1,5mg.



- **Los números racionales son todos los que se pueden expresar mediante una razón**
- $\frac{a}{b}$ siendo a y b $\in$ Z ; b $\neq$ 0. a es el numerador y b el denominador

El denominador indica el número de partes iguales en que se divide el entero y el numerador indica cuántas de esas partes se toman

- Ejemplo $\frac{3}{5}$



Además de los racionales, están los que NO se pueden escribir mediante una razón y se los llama irracionales (son los que poseen infinitas cifras decimales no periódicas)

ejemplo: $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{-12}$

Q U I = R (la unión de los racionales y los irracionales determinan los números reales (R)) se completa la recta numérica

OPERACIONES EN Z

- **Jerarquía de las operaciones**

Ejemplo: $2.\ (-3)^3 + \sqrt{81} : 3 - (-1-5)^2 : \sqrt{4} =$

1. Las sumas y restar separan en términos
2. Se deben resolver los paréntesis: $2.\ (-3)^3 + \sqrt{81} : 3 - (-6)^2 : \sqrt{4} =$
3. las potencias y las raíces $2.\ (-27) + 9 : 3 - 36 : 2 =$
4. Luego se resuelven las multiplicaciones y divisiones $(-54) + 3 - 18 =$
5. y ….por último las sumas y restas -69

- Todo paréntesis precedido del signo "-", puede suprimirse cambiando los signo dentro del mismo. Si está precedido por el signo "+", puede suprimirse quedando los signos de adentro. Ejemplo: - (3 – 5) = -3 +5 o + (-8 + 5) = - 8 + 5
- Si en un término hay multiplicaciones y divisiones se resuelven según "orden de aparición"
- **Ej 1**: 25 . 3 : 5 = 75 : 5 = 15 **Ej 2**: (- 12) : 6 . (-4) = (-2) . (-4) = 8
- **POTENCIA**
- $\boldsymbol{a^n}$ **a es la base y n el exponente**
- **Regla de los signos:**
- Exponente par, cualquiera sea el signo de la base el resultado es positivo
- Ejemplo: 3^4= 81 $(-5)^2$ = 25
- Exponente impar: el resultado lleva el mismo signo de la base
- Ejemplo: 4^3=64 $(-2)^5$ = - 32

PROPIEDADES DE LA POTENCIACIÓN Y LA RADICACIÓN

- **PRODUCTO DE POTENCIAS DE IGUAL BASE** $a^m . a^n = a^{m+n}$ **Ej:** $(-3)^6 . (-3)^2 = (-3)^8$
- **COCIENTE DE POTENCIAS DE IGUAL BASE** $a^m : a^n = a^{m-n}$ **Ej:** $8^3 : 8^{-2} = 8^5$
- **POTENCIA DE OTRA POTENCIA** $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ **Ej :** $\left(2^5\right)^8 = 2^{40}$
- **LA POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN NO SON DISTRIBUTIVAS CON RESPECTO A LA SUMA NI LA RESTA**

  $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$; $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$ se debe resolver mediante el cuadrado de un binomio $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2\,a.b + b^2$

- **LA POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN SON DISTRIBUTIVAS CON RESPECTO A LA MULTIPLICACIÓN y DIVISIÓN**

$$(a.b)^2 = a^2 \,.\, b^2 \quad ; \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Potencia de exponente negativo Ej: $2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

Potencia de exponente fraccionario: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ **Ej:** $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$

Simplificación de exponente e índice

Si el índice n es impar $\sqrt[n]{a^n} = a$ **Ej:** $\sqrt[5]{(-2)^5} = -2$

Si el índice n es par $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ **Ej:** $\sqrt[4]{(-2)^4} = |-2| = 2$

ECUACIÓN: Se llama así a toda igualdad que posee una o más incógnita. Resolver una ecuación es hallar el o los valores de la incógnita que lo verifique

Ejemplo 1 $3x^3 - 6 = 75 \rightarrow 3x^3 = 75 + 6 \rightarrow x^3 = 81 : 3 \rightarrow x = \sqrt[3]{27} \rightarrow x = 3$

Ejemplo 2: $\mathbf{2 \,.\, (x-1)^2 = 8 \rightarrow (x-1)^2 = 8 : 2 \rightarrow x - 1 = \pm\sqrt{4}}$

$\mathbf{\rightarrow x_1 = 2 + 1 \;\; y \;\; x_2 = -2 + 1}$

Ejemplo 3: $\mathbf{(-3)^{2x+1} = 9 \rightarrow (-3)^{2x+1} = (-3)^2 \rightarrow 2x + 1 = 2}$

$\mathbf{x = \frac{2-1}{2} \rightarrow x = \frac{1}{2}}$

OPERACIONES EN Q

ADICION Y SUSTRACCION EN Q

$\frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{5}{6} = \frac{9 + 6 - 10}{12} = \frac{5}{12}$

MULTIPLICACIÓN EN Q Simplificamos cualquier numerador por cualquier denominador y luego multiplicamos los numeradores entre sí y los denominadores entre sí

$\frac{9}{8} \cdot \frac{16}{27} = \frac{2}{3}$

DIVISIÓN EN Q : multiplicamos el dividendo por la inversa del divisor

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

PROBLEMAS APLICANDO ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Jaime fue al supermercado y gastó la tercera parte del dinero que llevó. A la vuelta compró revistas en el kiosco de diarios, le costaron el 20% de lo que le quedaba. Cuándo llegó a su casa contó en la billetera $ 400.

a. ¿Qué cantidad de dinero salió Jaime de su casa?

b. ¿Cuánto dinero gastó en el supermercado?

Cantidad de dinero que salió : x ; Supermercado gastó: $\frac{1}{3}\, x$

Revistas 20% de lo que le quedaba = 20% del resto $= \frac{20}{100} \cdot \frac{2}{3}\,x = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3}\,x = \frac{2}{15}\,x$;

Regresó con $400

$x - \frac{1}{3}\,x - \frac{2}{15}\,x = \$\,400 \rightarrow \left(\frac{15 - 5 - 2}{15}\right) x = \$\,400 \rightarrow \frac{8}{15}\,x = \$400 \rightarrow x = \$\,400 \,.\, \frac{15}{8} \rightarrow$

$x = \$\,750$ Supermercado gastó: $\frac{1}{3} \cdot 750 = \$\,250$

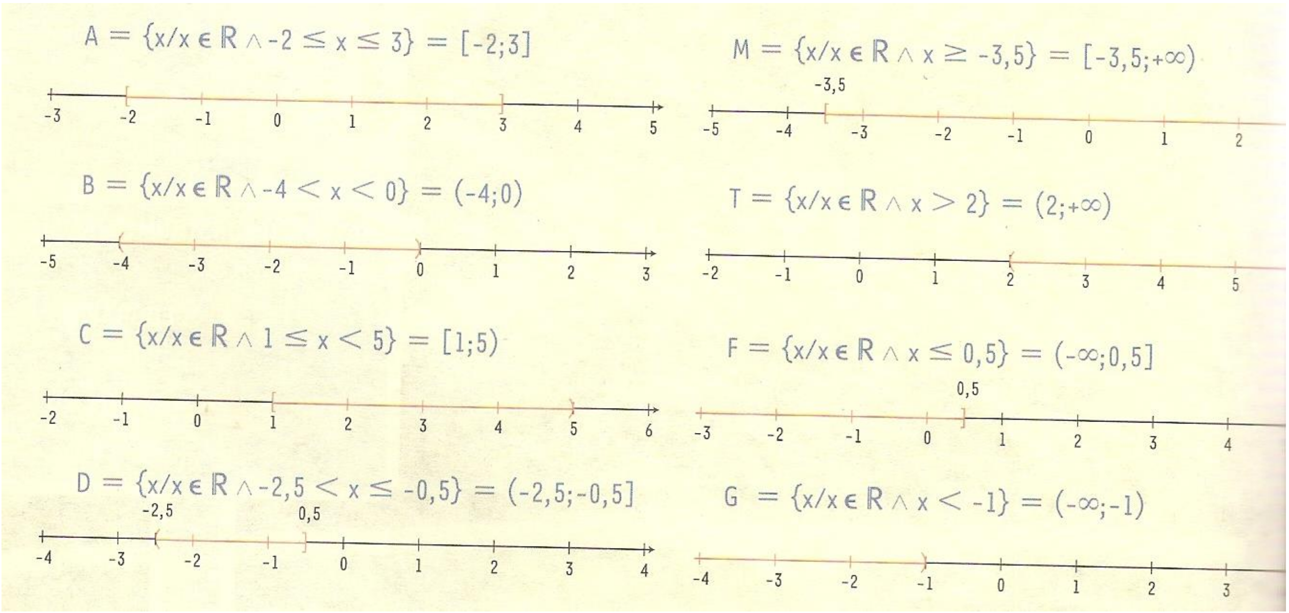
Rta. Jaime salió con $ 750 de su casa y en el supermercado gastó $ 250

INTERVALOS REALES

Se denomina **intervalo real** a toda semirrecta o segmento de la recta real. Sirven para escribir un subconjunto de números reales.

Algebraicamente se designa a un intervalo por sus extremos encerrados entre paréntesis o corchetes.

- **paréntesis,** si los extremos no están incluidos (intervalo **abierto**)
- **corchetes** si se incluyen los extremos (intervalo **cerrado**)



OPERACIONES CON RADICALES

- Radicales semejantes: Dos radicales son ***semejantes*** cuando tienen igual índice y el mismo radicando Ej: $\sqrt{3}$ y $-2\sqrt{3}$; $3\sqrt[4]{x}$ y $-8\sqrt[4]{x}$
- **ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE RADICALES**

  Solo es posible sumar o restar términos que contienen radicales semejantes

  EJ $3\sqrt{2}+5\sqrt{2}-\sqrt{2}=7\sqrt{2}$

  $5\sqrt{3}+2\sqrt{5}+3\sqrt{3}-7\sqrt{5}=8\sqrt{3}-5\sqrt{5}$

  Existen casos en los cuales ciertos radicales son semejantes luego de llevarlos a su mínima expresión

  Ej. $3\sqrt{2}-5\sqrt{32}+7\sqrt{8}-9\sqrt{50}=3\sqrt{2}-5\sqrt{2^5}+7\sqrt{2^3}-9\sqrt{5^2.2}=$

  $=3\sqrt{2}-5\sqrt{2^4.\,2}+7\sqrt{2^2.\,2}-9\sqrt{5^2.2}=3\sqrt{2}-5\sqrt{2^4}\,.\sqrt{2}+7\sqrt{2}\,.\sqrt{2^2}-9\sqrt{5^2}.\,\sqrt{2}=$

  $=3\sqrt{2}-5\,4\,.\sqrt{2}+7\,.\,2\sqrt{2}-9\,5.\,\sqrt{2}=3\sqrt{2}-20.\,\sqrt{2}+14\sqrt{2}-45\sqrt{2}=-48\sqrt{2}$

MULTIPLICACION Y DIVISION DE RADICALES

- Para multiplicar o dividir radicales de igual índice seguimos el siguiente procedimiento, basado en la propiedad distributiva

$$\sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\,.\,b} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Ej: $\sqrt[4]{2} \,.\, \sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{2\,.\,8} = \sqrt[4]{16} = 2$ $\qquad \frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{48}{2}} = \sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8\,.\,3} = \sqrt[3]{8} \,.\, \sqrt[3]{3} = 2.\ \sqrt[3]{3}$

- Para multiplicar o dividir radicales de distinto índice se deben buscar radicales equivalentes de modo tal que todos tengan igual índice
- Ej: $\sqrt[3]{2} \,.\, \sqrt{3} = \sqrt[6]{2^2} \,.\, \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{2^2 . 3^3} = \sqrt[6]{108}$
- $\frac{\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[6]{2^5}} = \frac{\sqrt[4.3]{2^{3.3}}}{\sqrt[6.2]{2^{5.2}}} = \sqrt[12]{\frac{2^9}{2^{10}}} = \sqrt[12]{\frac{1}{2}}$

RACIONALIZACION DE DENOMINADORES

Racionalizar el denominador de una fracción es transformarlo en un número racional; por lo tanto, siempre que en el mismo aparezcan radicales irracionales de debe hallar una fracción equivalente a la dada con denominador racional.

- **Primer caso: en el denominador hay un único radical**
  - Ej a) $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} . \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
  - Ej b) $\frac{3}{\sqrt[3]{5}} = \frac{3}{\sqrt[3]{5}} . \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{3\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2 5}} = \frac{3\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{3\sqrt[3]{5^2}}{5}$

- **Segundo caso: El denominador es una suma o resta de uno o dos radicales de índice 2**

  Para racionalizar este tipo de expresiones, se debe aplicar el producto de una suma de dos términos por su diferencia $(a + b).(a - b)$

Ej: $\frac{4}{\sqrt{5 - \sqrt{3}}} = \frac{4}{\sqrt{5 - \sqrt{3}}} . \frac{\sqrt{5 + \sqrt{3}}}{\sqrt{5 + \sqrt{3}}} = \frac{4.(\sqrt{5 + \sqrt{3}})}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{4.(\sqrt{5 + \sqrt{3}})}{5 - 3} = \frac{4.(\sqrt{5 + \sqrt{3}})}{2} = 2\ (\sqrt{5} + \sqrt{3})$

LOS NUMEROS COMPLEJOS

A los números de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales, los llamamos *números complejos*.

$$z = a + bi$$

Se suele utilizar la letra z para designar un número complejo.

a se llama *parte real* de z. Lo escribimos así: $a = Re(z)$

b se llama *parte imaginaria* de z. Lo escribimos así: $b = Im(z)$

i verifica que $i^2 = -1$

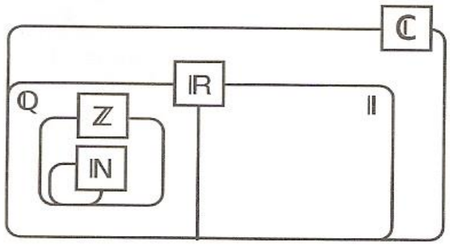
Ejemplos:

$z_1 = 2 - 3i$ $\quad Re(z_1) = 2 \quad Im(z_1) = -3$

$z_2 = \frac{2}{3}i$ $\quad Re(z_2) = 0 \quad Im(z_2) = \frac{2}{3}$

$z_3 = -5$ $\quad Re(z_3) = -5 \quad Im(z_3) = 0$

Al conjunto de todos los números complejos lo designamos con el símbolo $\mathbb{C}$, y está definido de forma tal que incluye a los números reales, representados por aquellos números complejos cuya parte imaginaria es nula.
Un número complejo no nulo como z_2, cuya parte real es nula, se llama *imaginario puro*.



REPRESENTACION GRÁFICA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

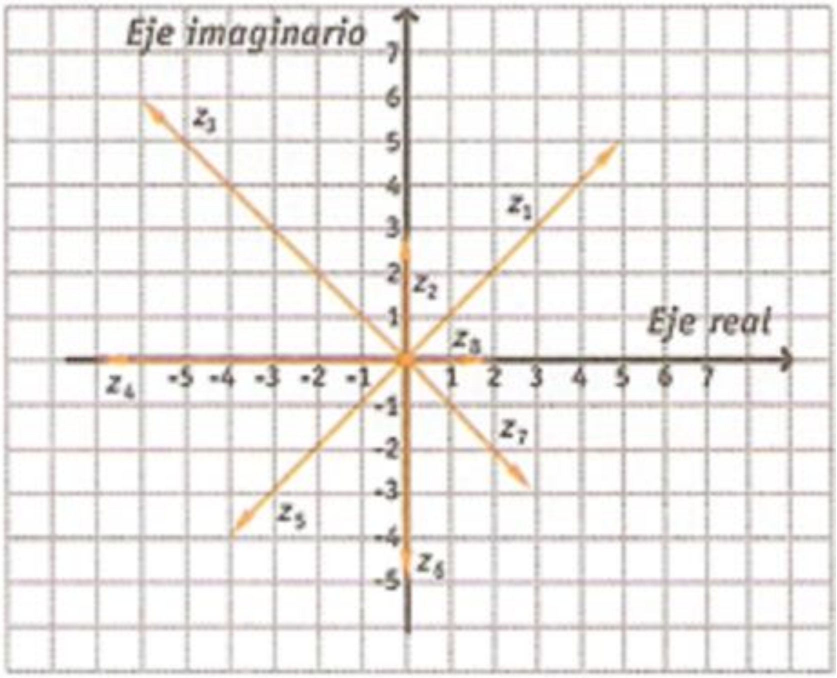
A los números complejos se los representa en un plano complejo, que consiste en un sistema cartesiano; en el eje de las abscisas se representa la componente real y en el eje de ordenadas la componente imaginaria.

$z_1 = 5 + 5i$

$z_2 = 3i$

$z_3 = -6 + 6i$

$z_5 = -4 - 4i$



TRABAJO PRÁCICO N° 2

POLINOMIOS: OPERACIONES

*Una **expresión algebraica** es una combinación cualquiera y finita de números, de letras, o de números y letras, ligados entre sí con la adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación.*

a) $2x + 3^4$ **b)** $5x^3 + 6x - \frac{1}{3}$ **c)** $x^2 + \sqrt{3x}$ **d)** $\frac{x^5 - 4}{x^2}$ **e)** $\sqrt{2}x - \frac{2}{5}x^4$

Los números son los coeficientes, y las letras, las variables o indeterminadas.
En este capítulo se estudiarán expresiones algebraicas con una sola variable (x).

Si la variable no está afectada por una raíz o como divisor, las expresiones algebraicas son enteras y se denominan **polinomios**.
Los ejemplos c) y d) no son polinomios; sí lo son a), b) y e).

Según la cantidad de términos, un polinomio se denomina:

monomio, si tiene un solo término $\left(\frac{1}{2}x^5\right)$;

binomio, si tiene dos términos $(4x^2 + 5)$;

trinomio, si tiene tres términos $(3x - 8 + x^3)$ y

cuatrinomio, si tiene cuatro términos $(2x^5 - 2x + 7 - x^2)$.

*Los términos que tienen la misma variable y exponente son **semejantes**.*

Los términos $4x^2$, $-\frac{1}{2}x^2$ y x^2 son semejantes.

*Se denomina **grado** al mayor exponente que tiene la variable de los términos con coeficientes no nulos de un polinomio.*

a) $P(x) = 7x + 6x^2 - x^5$; grado: 5. **b)** $Q(x) = 4 - x + x^3$; grado: 3. **c)** $T(x) = 5$; grado 0.

*Se llama **coeficiente principal** al que multiplica a la variable de mayor exponente.*

a) $S(x) = x + 5x^3 - 2x^4$; coeficiente principal: -2. **b)** $T(x) = x^5 - 8x^4 + x$; coeficiente principal: 1.

*Al polinomio cuyo coeficiente principal es **1** se lo denomina **normalizado**.*
*Un polinomio está **ordenado** si sus términos están ordenados en forma creciente o decreciente respecto de los exponentes de la variable.*

a) $H(x) = 3x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 1$ **b)** $J(x) = 4 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$ **c)** $Z(x) = x^5 - 2x^2 + 7$

*Un polinomio está **completo** si tiene todas las potencias decrecientes del grado.*

a) $R(x) = 6x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x - 1$; está completo. **b)** $Q(x) = x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 3$; está incompleto.

Para completar un polinomio se agregan los términos que faltan con coeficiente cero.

a) $M(x) = x^5 + 3x^3 - 1 = x^5 + 0x^4 + 3x^3 + 0x^2 + 0x - 1$
b) $N(x) = 4x^4 + 2x^2 = 4x^4 + 0x^3 + 2x^2 + 0x + 0$
c) $K(x) = x^6 - 3 = x^6 + 0x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 3$

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE POLINOMIOS

La suma de varios monomios semejantes es otro monomio semejante al dado, cuyo coeficiente es la suma de los coeficientes de los monomios dados.

a) $2x^3 + x^3 + 6x^3 = 9x^3$ **b)** $6x^5 + \frac{1}{2}x^5 + x^5 = \frac{15}{2}x^5$ **c)** $x + x + x + x + x = 5x$

Para restar dos monomios, se suma al minuendo el opuesto del sustraendo.

$P(x) = 6x^4 \wedge Q(x) = -3x^4 \Rightarrow P(x) - Q(x) = 6x^4 + 3x^4 = 9x^4$

Reducir *un polinomio es sumar o restar sus términos semejantes.*

a) $2x + 3x^4 + x - x^4 = 2x^4 + 3x$ **b)** $x^5 - \frac{1}{3}x^4 + x^4 + x^3 - 6x^3 = x^5 + \frac{2}{3}x^4 - 5x^3$

Para sumar varios polinomios entre sí, se completan y ordenan, luego se encolumnan sus términos semejantes y se suman.

a) Dados: $\begin{cases} P(x) = -3 + 2x^2 - 5x^3 + x^4 \\ Q(x) = -9x^3 + x^2 + x - 1 \end{cases}$

$P(x) + Q(x)$

$$\begin{array}{rrrrrr} & x^4 & -\ 5x^3 & +\ 2x^2 & +\ 0x & -\ 3 \\ + & 0x^4 & -\ 9x^3 & +\ x^2 & +\ x & -\ 1 \\ \hline & x^4 & -\ 14x^3 & +\ 3x^2 & +\ x & -\ 4 \end{array}$$

b) Dados: $\begin{cases} R(x) = x^2 - x + 1 \\ T(x) = -x + 2 - 5x^2 \end{cases}$

$R(x) + T(x)$

$$\begin{array}{rrrr} & x^2 & -\ x & +\ 1 \\ + & -5x^2 & -\ x & +\ 2 \\ \hline & -4x^2 & -\ 2x & +\ 3 \end{array}$$

Para restar dos polinomios, se suma al minuendo el opuesto del sustraendo.

a) Dados: $\begin{cases} M(x) = 2x^2 + x - 2 \\ N(x) = x^2 + 1 \end{cases}$

$M(x) - N(x)$

$$\begin{array}{rrrr} & 2x^2 & +\ x & -\ 2 \\ + & -x^2 & +\ 0x & -\ 1 \\ \hline & x^2 & +\ x & -\ 3 \end{array}$$

b) Dados: $\begin{cases} A(x) = -2x + 3x^2 - \frac{1}{2}x^3 - 7 \\ C(x) = 3x - 5x^2 - x^4 + 2 \end{cases}$

$A(x) - C(x)$

$$\begin{array}{rrrrrr} & 0x^4 & -\ \frac{1}{2}x^3 & +\ 3x^2 & -\ 2x & -\ 7 \\ + & x^4 & -\ 0x^3 & +\ 5x^2 & -\ 3x & -\ 2 \\ \hline & x^4 & -\ \frac{1}{2}x^3 & +\ 8x^2 & -\ 5x & -\ 9 \end{array}$$

Para resolver una suma algebraica de polinomios, se opera en el orden en que aparecen los términos.

Dados: $P(x) = 6x^2 + 2x - 1$, $Q(x) = x^2 + 3x - 2$ y $R(x) = 2x^2 + x + 5$.

a) $P(x) + Q(x) + R(x)$

$$\begin{array}{rrrr} P(x) = & 6x^2 & +\ 2x & -\ 1 \\ Q(x) = & x^2 & +\ 3x & -\ 2 \\ R(x) = & 2x^2 & +\ x & +\ 5 \\ \hline P(x) + Q(x) + R(x) = & 9x^2 & +\ 6x & +\ 2 \end{array}$$

b) $P(x) + Q(x) - R(x)$

$$\begin{array}{rrrr} & 6x^2 & +\ 2x & -\ 1 \\ + & x^2 & +\ 3x & -\ 2 \\ \hline P(x) + Q(x) = & 7x^2 & +\ 5x & -\ 3 \\ + [-R(x)] & -2x^2 & -\ x & -\ 5 \\ \hline P(x) + Q(x) - R(x) = & 5x^2 & +\ 4x & -\ 8 \end{array}$$

MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

Para multiplicar dos monomios se deben multiplicar los coeficientes y las indeterminadas entre sí, aplicando la regla de los signos y las propiedades de la potenciación.

$$x^n.x^m = x^{n+m}$$

a) $(3x)(2x) = 6x^2$ **b)** $(10x^4)(-5x^4) = -50x^8$ **c)** $(-4x)(x^3) = -4x^4$ **d)** $(-6x^5)(-3x^2) = 18x^7$

Para multiplicar un polinomio por un número real, se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma y resta.

$$a(b \pm c) = ab \pm ac$$

$$-3\left(x^3 + 2x^2 + \frac{1}{3}x - 4\right) = -3x^3 + (-3)2x^2 + (-3)\frac{1}{3}x - (-3).4 = -3x^3 - 6x^2 - x + 12$$

Para multiplicar dos polinomios se aplica la propiedad distributiva, efectuando luego la multiplicación de monomios.

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Dados: $P(x) = 2x^2 - 5x + 2$ y $Q(x) = 3x^2 - x$.

$$P(x).Q(x) = (2x^2 - 5x + 2)(3x^2 - x)$$

$$= (2x^2)(3x^2) + 2x^2(-x) + (-5x)(3x^2) + (-5x)(-x) + 2(3x^2) + 2(-x)$$

$$= 6x^4 - 2x^3 - 15x^3 + 5x^2 + 6x^2 - 2x$$

$$P(x).Q(x) = 6x^4 - 17x^3 + 11x^2 - 2x$$

Producto de la suma de dos términos por su diferencia

El producto de la suma de dos términos por la diferencia de los mismos, es igual a la diferencia de los cuadrados de dichos términos.

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$$

$$\boxed{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}$$

a) $(x + 4)(x - 4) = x^2 - 4x + 4x - 16 = x^2 - 16$

b) $(x^2 + 5x)(x^2 - 5x) = x^4 - 5x^3 + 5x^3 - 25x^2 = x^4 - 25x^2$

c) $\left(2x^5 + \frac{1}{5}x^3\right)\left(2x^5 - \frac{1}{5}x^3\right) = 4x^{10} - \frac{2}{5}x^8 + \frac{2}{5}x^8 - \frac{1}{25}x^6 = 4x^{10} - \frac{1}{25}x^6$

d) $\left(-\frac{1}{2}x^2 + 7x\right)\left(-\frac{1}{2}x^2 - 7x\right) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{2}x^3 - \frac{7}{2}x^3 - 49x^2 = \frac{1}{4}x^4 - 49x^2$

Operaciones combinadas

Las operaciones combinadas entre polinomios se resuelven aplicando los mismos procedimientos y propiedades que con números reales.

Dados: $P(x) = 5x^2 + 6x + 2$; $Q(x) = 2x^3 - x + 6$ y $R(x) = x^2 + 1$.

$$P(x).R(x) + Q(x) = (5x^2 + 6x + 2)(x^2 + 1) + 2x^3 - x + 6$$

$$= 5x^4 + 5x^2 + 6x^3 + 6x + 2x^2 + 2 + 2x^3 - x + 6$$

$$P(x).R(x) + Q(x) = 5x^4 + 8x^3 + 7x^2 + 5x + 8$$

REGLA DE RUFFINI – TEOREMA DEL RESTO

La **Regla de Ruffini** es un método práctico que se utiliza para dividir un polinomio $P(x)$ por otro cuya forma sea $x + a$.

Dados: $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - x - 5$ y $Q(x) = x + 2$.
Hallar $P(x):Q(x)$, aplicando la regla de Ruffini.

El polinomio **dividendo** debe estar **completo y ordenado**.

Se escriben alineados los coeficientes del dividendo.

El coeficiente principal se "baja" sin ser modificado; luego se lo multiplica por el opuesto del término independiente del divisor y se suma con el segundo coeficiente; y así sucesivamente hasta llegar al resto.

Los números que se obtienen son los coeficientes del cociente y el último valor es el resto.

El polinomio **cociente es un grado menor** que el polinomio **dividendo**.

Dividendo $2x^3 + 5x^2 - 1x - 5$ *Divisor* $x + 2$

	2	5	-1	-5
		+	+	+
-2		-4	-2	6
	2	1	-3	1

$C(x) = 2x^2 + 1x - 3$ *Cociente* $R(x) = 1$ *Resto*

a) $(x^3 - x + 2):(x - 2)$

$1x^3 + 0x^2 - 1x + 2 \rightarrow$ Dividendo

	1	0	-1	2
2		2	4	6
	1	2	3	8

Cociente $\rightarrow x^2 + 2x + 3$

Resto $\rightarrow 8$

b) $\left(\frac{1}{3}x^4 - 3x^2 + 1\right):(x + 1)$

$\frac{1}{3}x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 0x + 1 \rightarrow$ Dividendo

	$\frac{1}{3}$	0	-3	0	1
-1		$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$	$-\frac{8}{3}$
	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{8}{3}$	$\frac{8}{3}$	$-\frac{5}{3}$

Cociente $\rightarrow \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{8}{3}$

Resto $\rightarrow -\frac{5}{3}$

Teorema del resto

*El **resto** de la división de un polinomio por otro de la forma $x + a$, es el valor que resulta de reemplazar la variable del dividendo por el valor opuesto al término independiente del divisor.*

a) Dados: $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - x - 5$ y $Q(x) = x + 2$.

El resto de la división $P(x):Q(x)$, se obtiene:

$P(-2) = 2(-2)^3 + 5(-2)^2 - (-2) - 5$
$P(-2) = -16 + 20 + 2 - 5 = 1$
El resto de la división es 1.

b) Dados: $P(x) = x^2 - 2x - 3$ y $Q(x) = x -$

El resto de la división $P(x):Q(x)$, es:

$P(3) = 3^2 - 2.3 - 3$
$P(3) = 9 - 6 - 3 = 0$
Si el resto es 0 (cero): **$P(x)$ es divisible por**

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

El proceso de transformar un polinomio en un producto de otros polinomios, del menor grado posible, se llama factorización
En muchas ocasiones, factorizar un polinomio resulta útil para resolver ecuaciones, simplificar expresiones algebraicas y trabajar con funciones polinómicas.
Para factorizar polinomios se aplican diversos recursos algebraicos, algunos de los cuales veremos a continuación.

FACTOR COMUN

Para factorizar un polinomio a través del factor común, se debe recordar la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma o resta.

$a(b \pm c) = a.b \pm a.c$ (el factor a se repite en ambos términos)

Para extraer el factor común, se debe proceder de manera inversa: $a.b \pm a.c = a.(b \pm c)$
Primero se debe reconocer cuál es el factor que se encuentra repetido en cada término y luego, para encontrar el factor que va entre paréntesis, se divide cada término por el factor común.

El factor común puede ser la variable del polinomio, elevada a la menor potencia, y/o el DCM de todos los coeficientes del mismo.

Factorizar los siguientes polinomios:

a) $P(x) = 2x^2 - 4x.$

$P(x) = 2x.x - 2.2x \rightarrow$ $2x$ es el factor común de los dos términos.

$P(x) = 2x(x - 2) \rightarrow$ Expresión factoreada de $P(x)$ a través del factor común.

$\frac{2x^2}{2x}$ $\frac{4x}{2x}$ $\rightarrow$ Dentro del paréntesis va lo que resulta de dividir cada término por $2x$.

b) $P(x) = -12x^6 + 6x^5 - 15x^3 = -4.3x^3.x^3 + 2.3x^3.x^2 - 5.3x^3 = 3x^3(-4x^3 + 2x^2 - 5)$

DIFERENCIA DE CUADRADOS

Llamamos **diferencia de cuadrados** a un polinomio que tiene la forma: $\boldsymbol{a^2 - b^2}$
Estos polinomios tienen la ventaja de poder expresarse como producto de la suma de las bases $\boldsymbol{a\ y\ b}$ por la diferencia de las bases $\boldsymbol{a\ y\ b}$, es decir:

$$: \boldsymbol{a^2 - b^2 = (a+b).(a-b)}$$

Ejemplos: $x^2 - 4 = (x+2).(x-2)$

$x^6 - 36 = (x^3)^2 - 6^2 = (x^3 - 6).(x^3 + 6)$

TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Llamamos **trinomio cuadrado perfecto** a un polinomio de tres términos que proviene de haber desarrollado el **cuadrado de un binomio** (polinomio de dos términos elevado al cuadrado)

Reconocemos que un trinomio es cuadrado perfecto, cuando tiene esta forma

$$\boldsymbol{a^2 \pm 2\, a.b + b^2}$$

Y lo factorizamos expresándolo como el cuadrado de un binomio

$$\boldsymbol{a^2 \pm 2\, a.b + b^2 = (a + b)^2}$$

Ejemplos: $\boldsymbol{x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2.5\,x + 5^2 = (x + 5)^2}$

$$\boldsymbol{x^6 - 6\,x^3 + 9 = \left(x^3\right)^2 + 2.(-3)\,x^3 + 3^2 = \left(x^3 - 3\right)^2}$$

CASOS COMBINADOS

En algunos polinomios se deben aplicar varias veces los distintos casos de factorización hasta que los factores de los mismos sean primos.

a) Si se puede sacar factor común, es el primer paso que se debe realizar, y luego analizar si a algunos de los factores se los puede seguir descomponiendo en nuevos factores.

1) $P(x) = \overbrace{x^4 - 2x^3 + x^2}^{\text{Factor común } x^2} = x^2.\underbrace{(x^2 - 2x + 1)}_{\text{Trinomio cuadrado perfecto}} = x^2.(x - 1)^2$

2) $Q(x) = \overbrace{8x^3 - 1}^{\text{Factor común } 8} = 8\underbrace{\left(x^3 - \frac{1}{8}\right)}_{\text{Resta de potencias de igual exponente}} = 8\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)$

EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES. SIMPLIFICACION

Expresiones algebraicas fraccionarias

Dados dos polinomios P(x)y Q(x), tal que Q(x) sea distinto de cero, se denomina **expresión algebraica fraccionaria** a toda expresión de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

a) $\frac{3}{x - x^2}$ $\forall x : x \neq 0 \wedge x \neq 1$

b) $\frac{5x^2 - 3}{3x + 1}$ $\forall x : x \neq -\frac{1}{3}$

c) $\frac{3x + 2}{x^2 - 4x + 4}$ $\forall x : x \neq 2$

d) $\frac{1}{x^4 + 8}$

Una expresión algebraica es **irreducible** si no existen en ella factores comunes al numerador y al denominador.

a) $\frac{x}{x - 3}$ $\forall x : x \neq 3$ **Expresión irreducible**

b) $\frac{x^2 + x}{x^3 - 2x^2 - 3x} = \frac{x(x + 1)}{x(x^2 - 2x - 3)} = \frac{x(x + 1)}{\underbrace{x}\underbrace{(x + 1)}(x - 3)}$ $\forall x : x \neq 0 \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 3$ **Expresión reducible**

factores comunes al numerador y al denominador

Simplificación de expresiones algebraicas fraccionarias

Para **simplificar** una expresión algebraica fraccionaria se debe factorizar el numerador y el denominador, y cancelar los factores comunes en ambos; se obtiene así una expresión irreducible equivalente a la original.

a) $\frac{x^2 + x}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{\cancel{x}(x + 1)}{\cancel{x}(x^2 - 2x + 1)} = \frac{x + 1}{(x - 1)^2}$ $\forall x : x \neq 0 \wedge x \neq 1$

b) $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \frac{\cancel{(x - 1)}\cancel{(x - 2)}}{\cancel{(x - 1)}(x + 1)\cancel{(x - 2)}} = \frac{1}{(x + 1)}$ $\forall x : x \neq \pm 1 \wedge x \neq 2$

c) $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x + 2)\cancel{(x - 2)}}{\cancel{x - 2}} = x + 2$ $\forall x : x \neq 2$

- Al simplificar, se deben identificar los valores de x que anulan el denominador.
- Algunas fracciones algebraicas resultan equivalentes a expresiones algebraicas enteras.
- El objeto de simplificar es reducir la expresión y poder efectuar operaciones en forma más sencilla.

MULTIPLICACION Y DIVISIÓN EXPRESIONES ALGEBRAICAS FRACCIONARIAS

Multiplicación

El resultado de multiplicar dos expresiones algebraicas fraccionarias es otra expresión algebraica fraccionaria cuyo numerador y denominador son el producto de los numeradores y denominadores de las expresiones dadas.

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x).R(x)}{Q(x).S(x)}}$$

$$\frac{x^2}{x^2-4} \cdot \frac{x+2}{3x^3-x} = \underbrace{\frac{x^2}{(\cancel{x+2})(x-2)} \cdot \frac{\cancel{x+2}}{x(3x^2-1)}}_{} = \frac{x}{(x-2)(3x^2-1)}$$

Se factorizan los numeradores y denominadores, se simplifica y luego se opera.

División

El resultado de dividir dos expresiones algebraicas fraccionarias es otra expresión que se obtiene multiplicando la primera expresión por la recíproca de la segunda.

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} : \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{S(x)}{R(x)}}$$

$$\frac{x}{x-2} : \frac{x+2}{3x-1} = \frac{x}{x-2} \cdot \frac{3x-1}{x+2} = \frac{x(3x-1)}{(x-2)(x+2)}$$

Tanto en la multiplicación como en la división se debe simplificar siempre que sea posible.

a) $\frac{2x-3}{x+5} \cdot \frac{x^2-25}{6x-9} = \frac{(\cancel{2x-3})(x-5)(\cancel{x+5})}{(\cancel{x+5}).3(\cancel{2x-3})} = \frac{x-5}{3}$

b) $\frac{x^2-2x+1}{x^3} : \frac{3x-3}{x} = \frac{(x-1)^2}{x^{32}} \cdot \frac{\cancel{x}}{3(\cancel{x-1})} = \frac{x-1}{3x^2}$

ADICIÓN Y SUSTRACCION EXPRESIONES ALGEBRAICAS FRACCIONARIAS

Si las expresiones tienen **igual denominador**, se suman o restan sus numeradores según corresponda.

a) $$\frac{x}{x-2}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{x+x+2}{x-2}=\frac{2x+2}{x-2}=\frac{2(x+1)}{x-2}$$

b) $$\frac{1}{x-1}-\frac{2x-1}{x-1}=\frac{1-(2x-1)}{x-1}=\frac{1-2x+1}{x-1}=\frac{-2x+2}{x-1}=\frac{-2(x-1)}{x-1}=-2$$

Para expresiones de **distinto denominador**, estas se deben transformar en otras, equivalentes a las dadas que tengan el mismo denominador.

Este denominador (denominador común) es el mínimo común múltiplo (MCM) de los denominadores de las expresiones originales y se obtiene multiplicando los **factores comunes y no comunes** con su **mayor exponente**.

a) $$\frac{x}{x-2}+\frac{3x-1}{x^2-2x}=\underbrace{\frac{x}{x-2}+\frac{3x-1}{x(x-2)}}_{\text{Se factorizan los denominadores.}}=\underbrace{\frac{x^2}{x(x-2)}+\frac{3x-1}{x(x-2)}}_{\text{Se halla el MCM y las fracciones equivalentes.}}=\underbrace{\frac{x^2+3x-1}{x(x-2)}}_{\text{Se suman los numeradores.}}$$

b) $$\frac{x}{x+1}-\frac{2}{x-1}=\underbrace{\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}-\frac{2(x+1)}{(x-1)(x+1)}}_{\text{Se hallan el MCM y las fracciones equivalentes.}}=\underbrace{\frac{x^2-x-2x-2}{(x+1)(x-1)}}_{\text{Se restan los numeradores.}}=\frac{x^2-3x-2}{(x+1)(x-1)}$$

c) $$\frac{1}{2x-2}+\frac{2}{x^2-1}-\frac{x}{x+1}=\underbrace{\frac{1}{2(x-1)}+\frac{2}{(x+1)(x-1)}-\frac{x}{x+1}}_{\text{Se factorizan los denominadores.}}$$

$$=\underbrace{\frac{x+1}{2(x+1)(x-1)}+\frac{2.2}{2(x+1)(x-1)}-\frac{2x(x-1)}{2(x+1)(x-1)}}_{\text{Se halla el MCM y las fracciones equivalentes.}}$$

$$=\underbrace{\frac{x+1+4-2x(x-1)}{2(x+1)\,(x-1)}=\frac{x+5-2x^2+2x}{2(x+1)\,(x-1)}=\frac{-2x^2+3x+5}{2(x+1)\,(x-1)}}_{\text{Se obtiene la suma algebraica de los numeradores.}}$$

$$=\underbrace{\frac{(-2x+5)\cancel{(x+1)}}{2\cancel{(x+1)}(x-1)}}_{\text{Se factoriza el numerador y se simplifica.}}=\frac{-2x+5}{2(x-1)}=\frac{-2x+5}{2x-2}$$