1. Funtzio baten deribatua puntu batean

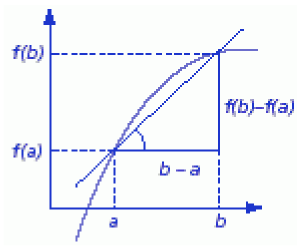
Funtzio matematiko baten deribatuaren kontzeptua, limiteen kontzeptuarekin erlazionatuta dago modu estuan. Honela, funtzioak duen bat bateko aldakuntza bezala ulertzen da deribatua, hau da, bere eremuko bi puntu oso hurbilen artean. Deribatuak adierazten duen bat bateko ideia dela eta, hainbat erabilera dauzka natur zientzia zein gizarte zientzia gaietan.

1.1. *Funtzio baten aldakuntza tasa*

f(x) **funtzioa** emanda, x_1 eta x_2 bere eremuko bi punturen artean, $x_1 < x_2$ izanda, **funtzio baten aldakuntza** defini daiteke f (x2) - f (x1) -ren kenketaren bitartez. Kendura hau puntu horretan positiboa bada funtzioa gorakorra da bertan; negatiboa bada, funtzioa **beherakorra** da.
Kontzeptu honekin erlazionatuta, f(x) funtzio baten **bataz besteko aldakuntza** deitzen zaio ondorengo zatiketa honi [a,b] tarte batean:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Zatiketa honen emaitza (a, f (a)) eta (b, f (b)) koordenatu puntuetatik pasatzen den **zuzena**ren **malda**ren berdina da.
[a,b] tarteko bi puntuak bata bestetik nahiko hurbil daudenean, aurreko zatiketak **bat bateko aldakuntza** adierazten du. Kasu honetan, b-ren balioa b = a + h bezala adierazi daiteke, h balore infinituki txiki bat delarik.



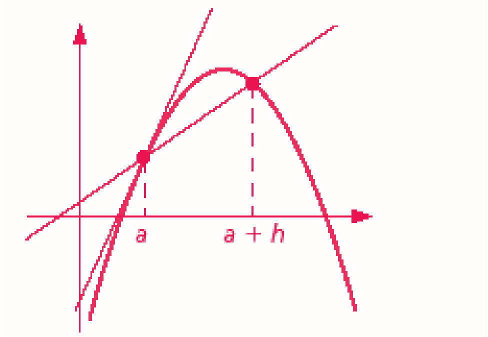
1.2. *Funtzio baten deribatua puntu batean*

f(x) funtzioa emanda, eta bere **eremu**ko puntu bat hartuz, ondorengo limitearen bitartez definitzen den adierazpenari puntu horretan funtzioaren **deribatua** deitzen zaio, f ' (a) izendatzen delarik:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Limite hau ondorengo bi modutan ere adierazi daiteke:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$



Puntu baten deribatua definitzeko oinarri grafikoa.

Segidako deribatuak

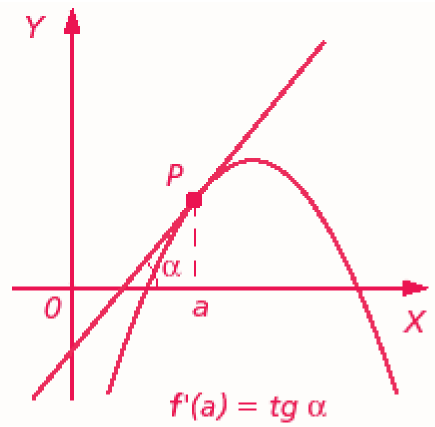
Funtzio bat deribatzean beste funtzio bat lortzen da. Beraz, zenbait kasutan posible da deribatua deribatzea. Honela, y = f(x) funtzio baten bigarren deribatua y" edo f " (x) moduan idatziko da, eta hirugarren deribatua (bigarren deribatuaren deribatua) y"' edo f "' (x) izendatuko da eta era berean gainontzekoak. Askotan deriba daitezkeen segidako deribatuen adibiderik arruntenak sinu eta kosinu funtzio trigonometrikoak dira.

1.3. Deribatuaren interpretazio geometrikoa

Deribatuaren definizioak zer ikusi handia du bat bateko aldakuntzaren kontzeptuarekin. Hurrengo zatiketa kontutan hartuz:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(a, f (a)) eta (b, f(b)) koordenatuetatik pasatzen den zuzenaren malda adierazten du, b eta a beraien artean oso hurbil badaude, zerorantz jotzen duen h balore baten bitartez aldenduta, logikoa da pentsatzea zuzen hau eta x = a puntutik pasatzen den zuzen ukitzailea ia berdinak direla.
Hau da puntu batean funtzio baten deribatuaren interpretazio geometrikoa: funtzioak puntu horretan ukitzaile duen zuzenaren maldarekin bat dator.



Puntu konkretu batean funtzio baten deribatua, puntu horretan ukitzaile duen zuzenaren maldarekin bat dator.

1.4. Alboko deribatuak

Limiteekin gertatzen zen bezala, posible da **alboko deribatuen** kontzeptua mugatzea funtzio batentzat puntu batean.
Eskuin-deribatua deritzo, eta f '(a+) bezala izendatzen da, f(x) funtzioa emanda eta bere definizio-eremuko a puntua hartuz, ondorengo limiteari:

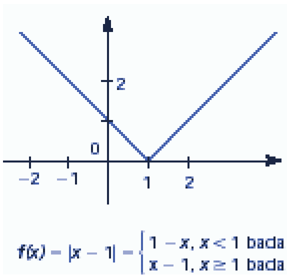
$$f'(a^+) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Bere aldetik, a puntuan f(x)-en ezker-deribatua deritzo, eta f ' (a^-) izendatzen da, hurrengo limiteak definitzen duen adierazpenari:

$$f'(a^-) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Funtzio batek eskuin-deribatua eta ezker-deribatua dituenean, eta haien balioak berdinak direnean, **deribagarritzat** jotzen da.

Adibidea:



Ezberdinak diren eskumako eta ezkerreko deribatuak dauzkan funtzio baten adibidea. Funtzio hau ez da deribagarria x= 1 puntuan.

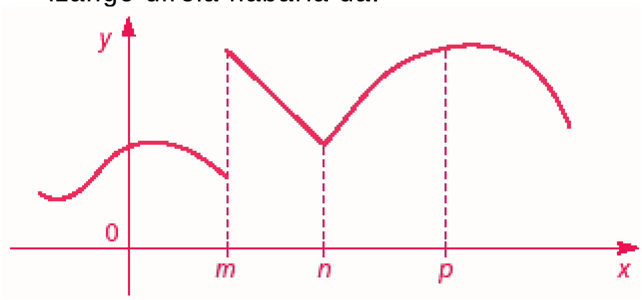
2. Deribagarritasuna eta jarraitasuna

Puntu edo bitarte bateko deribagarritasuna (deribatua lortzeko aukera) eta jarraipen (funtzioaren balorearekin eginiko bere muga eta bat etortzearen existentzia) nozioek, harreman estua daukate. Orokorrean, deribagarritasuna hitzaren kontzeptua selektiboagoa da, beraz, funtzio deribagarri oro nahita ez etengabekoa da, nahiz eta beti ezin den aurkakoa baieztatu.

2.1. *Deribagarritasuna*

Deribatuaren nozioa **limitea**renarekin lotzen da. Horregatik, deribatu bat egotearen arrazoia, limitea egotearenaren ezberdina izan daiteke. Funtzio baterako deribatuak eskuinetik eta ezkerretik existitzen direnean, eta biak bat datozenean, funtzioak **deribagarria** izena du puntu horretan. Hortik ondorioztatzen da bi funtzio ez deribagarri bi mota existitzea.

- Deribatua definitzen duen limitea existitzen ez denean: adibidez, salto edo **etenune** baten eraginagatik.
- Alboko bi deribatuak existitu, baina bat ez datozenean (**ertz askoko puntuak**): kasu honetan, eskuineko eta ezkerreko zuzen tangenteetako **maldak** ezberdinak izango direla nabaria da.



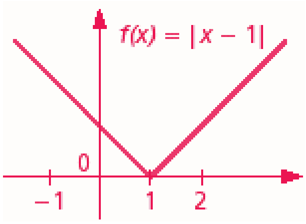
m-an eginiko funtzio ez deribagarriaren adibidea, etenunea existitzeagatik, ezta n-an ere, alboetako deribatuak ere bat ez datozelako.

Funtzio bat puntu batean deribagarria bada, puntu horretan jarraitua da nahi eta nahi ez.

2.2. *Etengabeko funtzioak eta deribagarriak*

Funtzio bateko **deribagarritasuna** eta **jarraipen** nozioak estuki erlazionatuta daude. Bi kontzeptuak lotzen dituzten printzipioak ondorengoak dira:

- $x = a$ puntuko, edo (a, b) bitarteko $f(x)$ funtzio deribagarria, puntu edo bitarte horretan nahita ez etengabekoa da.
- $x = a$ puntuko edo (a, b) bitarteko $f(x)$ etengabeko funtzioa, puntu edo bitarte horretan deribagarria izan daiteke ala ez. Adibidez, ertz askoko puntua daukan funtzio bat beregan etengabekoa da, baina ezin da berdinean deribatu (deribatuak eskuin eta ezker aldetik existitzen dira, baina ezberdinak dira).



Funtzio ez deribagarriaren adibidea $x=1$-ean, ertz askoko puntua egoteagatik.

Horrela, deribagarritasuna nozioa, jarraipenekoarena baino murritzagoa da, funtzio deribagarri guztiak etengabekoak baitira, baina ez alderantziz.

3. Funtzio deribatua

Definizio eremu batean f (x) etengabeko eta deribagarria den funtzioa badaukagu, f ' (x)-en bitartez deribatu eta adierazitako funtzio berria definitzea posible da, funtzioaren eremuari dagokion x balore bakoitzari puntu horretan f (x)-en deribatuak lotzen dion bitartean.

Definizio hau jarraipeneko deribatuei aplika dakieke. Funtzio baten deribatua, eremu zehatz baterako definituriko funtzio berria da; horrela, eremu horretan etengabekoa eta deribagarria bada, bere funtzio deribatu berria zehaztea zilegi da, zein aldi berean, f (x)-eko bigarrena izango baita.

f (x) funtzio baten **jarraipeneko funtzio deribatuak**, ondorengo eran adierazten dira:

- Lehenengo deribatua: f ' (x).
- Bigarren deribatua: f " (x).
- Hirugarren deribatua: f "' (x).
- Laugarren deribatua : f^{IV} (x), etab.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(a)}{h}$$

4. Deribazio erregelak

4.1. *Funtzioen batuketa eta kenketa*

u (x) eta v (x) moduan adierazitako bi funtzio jarraitu eta deribagarrien batuketaren deribazioa (edo kenketa) haien deribatuen batuketaren (edo kenketaren) berdina da.

$$f(x) = u(x) \pm v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \pm v'(x).$$

4.2. *Funtzio eta konstante baten arteko biderkadura*

f (x) moduan adierazitako funtzio jarraitu eta deribagarri eta λ zenbaki erreal baten arteko biderkaduraren deribatua, konstantea eta funtzioaren deribatuaren arteko biderkaduraren berdina da.

Honako funtzioa edukiz gero:

$$f(x) = \lambda \cdot u(x)$$

Deribatua honakoa izango da:

$$f'(x) = \lambda \cdot u'(x).$$

4.3. *Funtzioen arteko biderkadura*

Bi funtzio jarraitu eta deribagarriei dagokienez, honakoa edukiko dugu: bi funtzio horien arteko biderkaduraren deribatua berdin lehenengo funtzioaren deribatua bider bigarren funtzioa, deribatu gabe, gehi lehenengo funtzioa bider bigarren funtzioaren deribatua. Honako funtzioa edukiz gero:

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

Honen deribatua horrela kalkulatuko da:

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x).$$

4.4. Funtzioen arteko zatiketa

u (x) eta v (x) moduan adierazitako bi funtzio jarraitu eta deribagarriei dagokienez, eta bigarrena zero ez bada, lehen funtzioaren eta bigarren funtzioaren arteko zatiketa kalkulatzeko, ondorengo adierazpenean oinarritu behar da.
Honako funtzioa edukiz gero:

$$f\ (x) = \frac{u\ (x)}{v\ (x)},\ \text{con}\ v\ (x) \neq 0$$

Bere lehen deribatua honakoa izango da:

$$f'\ (x) = \frac{u'\ (x)\ v\ (x) - u\ (x)\ v'\ (x)}{[v\ (x)]^2}$$

4.5. Funtzioen konposaketa

f (u) moduan adierazitako funtzio deribagarria, u-rekiko izanda, eta u, x-rekiko deribagarria izanik, honakoa edukiko dugu: f [u(x)] funtzioen konposaketaren deribatua, x-rekiko berdin f funtzioaren deribatua u-rekiko bider u funtzioaren deribatua x-rekiko.
Hau da, honakoa edukiz gero:

$$y = f\ [u\ (x)]$$

ondorengoa beteko da:

$$y' = f'\ (u) \cdot u'\ (x).$$

Printzipio hori funtzio konposatuen deribazioaren **kateko araua** da.

4.6. Funtzio potentzialak, logaritmikoak eta esponentzialak

Funtzio potentzial baten deribatua, f (x) = u^n (x) formularen bidez adierazten dena, kalkulatzeko honakoa egin behar da: berretzailea bider u (x) funtzioaren deribatua eta bider u (x) funtzioa ber gradu minus bat (n-1).

$$f\ (x) = u^n(x) \Rightarrow f'\ (x) = n \cdot u^{n-1}(x) \cdot u'(x).$$

Funtzio logaritmiko baten deribatuaren formula generikoa f (x) = $\log_a$ u(x) da, eta hura lortzeko honako eragiketak egin behar dira: u (x) funtzioaren deribatua zati u (x) funtzio bera, eta hori guztia bider e zenbakiko a oinarria duen logaritmoa. Logaritmo nepertarrekin formula hori sinplifikatzen da, $\log_e$ e = 1 delako.

$$f\ (x) = \log_a u(x) \Rightarrow f'\ (x) = \frac{u'(x)}{u\ (x)} \cdot \log_a e.$$

Azkenik, f (x) = $a^{u(x}$) adierazpen orokorreko **funtzio esponentzial** bat deribatzeko, honako hau egin behar da: funtzio bera zati berretzailearen deribatua, eta hori guztia bider a oinarria duen logaritmo nepertarra. Azpimarratu behar da y = e^x funtzioa berezia dela, haren deribatua funtzio bera baita, alegia: (y' = e^x).

$$f\ (x) = a^{u(x)} \Rightarrow f'\ (x) = a^{u(x)} \cdot u'(x) \cdot \ln a.$$

4.7. Funtzio trigonometrikoak

Funtzio trigonometrikoak deribatzeko zenbait arau erraz ikasi behar da. Funtsean, **sinua** deribatuz gero kosinua lortuko dugu, eta **kosinua** deribatuz gero, sinua lortuko dugu, zeinua aldatuta (hori guztia bider **arrazoi trigonometrikoaren argumentu** gisa adierazten den funtzioaren deribatua). Hau da:

$$f(x)=\sin u(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=u'(x)\cdot\cos u(x)$$

$$f(x)=\cos u(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=-u'(x)\cdot\sin u(x)$$

$$f(x)=tg\, u(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=u'(x)\cdot\left(1+tg^2 u(x)\right)=\frac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}$$

Gainontzeko funtzio trigonometrikoak zehazteko honako arauak aplikatu behar dira: funtzioen zatidura baten deribatuaren arauak (tangenteari, kotangenteari, eta abarri dagokionez) eta katearen araua (alderantzizko funtzio zirkularrei dagokionez).

4.8. Alderantzizko funtzioaren deribatua

f (x) funtzio deribagarriaren deribatua f '(x) da. Beraz, bere alderantzizko funtzioaren deribatua lortzeko (f21(x) alegia) kateko araua aplikatu behar da, esaterako:

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(y)}$$

f(x) = y izanda
Metodo hori aplikatzen da alderantzizko funtzio zirkularren deribatuak zehazteko (sinu arkua, kosinu arkua, eta abar.), dagozkien funtzio trigonometrikoen deribatuak aurretik ezagututa.

4.9. Arku funtzioak

Funtzio trigonometrikoen aurkakoak edo alderantzizkoak arku funtzioak deitzen dira. Beraien deribatuak ondokoak dira:

$$f(x)=arc\sin u(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-(u(x))^2}}\cdot u'(x)$$

$$f(x)=arc\cos u(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-(u(x))^2}}\cdot u'(x)$$

$$f(x)=arc\,tg\, u(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{1}{1+(u(x))^2}\cdot u'(x)$$

4.10. ***Funtzio inplizitu baten deribatua***

Oso erraza da f(x,y)=0 esplizituan adierazitako funtzioa deribatzea, deribazio-arauak ezagutuz gero. Aitzitik, deribatu beharreko funtzioa modu inplizituan adierazten bada eragiketa zailagoa izango da (adibidez: $y^3 + xy + 2x = 5$, funtzio horretan y deribatu behar da).
Hasteko, deribatu hori egin ahal izateko, y bakandu behar da. Batzuetan, eragiketa hori oso zaila da, beraz komenigarria da honako prozedura aplikatzea:

- Ekuazio inplizituaren bi atalak deribatu.
- Ondoriozko ekuazioaren y' bakandu. Hortik lortzen den emaitza funtzio inplizitua-ren deribatua izango da.

5. Deribatuen taula

Funtzio konposatua	FUNTZIO deribatua
y=k	y'=0
y=x	y'=1
y=u(x)±v(x)	y'=u '(x) ± v '(x)
y=k·u(x)	y'=k·u '(x)
y=u(x) ·v(x)	y'=u '(x) ·v(x) + u(x) ·v '(x)
$y=\frac{u(x)}{v(x)}$	$y'=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$
y=$[u(x)]^n$, n∈R	y'=n·$[u(x)]^{n-1}$·u '(x)
y=$a^{u(x)}$, a∈R	y'=$a^{u(x)}$ ·ln (a) ·u '(x)
y=ln [u(x)]	$y'=\frac{1}{u(x)}\cdot u'(x)$
y=sin [u(x)]	y'= u '(x) ·cos [u(x)]
y=cos [u(x)]	y'= -u '(x) ·sin [u(x)]
y=tg [u(x)]	$y'=\left[1+tg^2\,u(x)\right]\cdot u'(x)=\frac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}$
y=arc sin [u(x)]	$y'=\frac{1}{\sqrt{1-[u(x)]^2}}\cdot u'(x)$
y=arc sin [u(x)]	$y'=\frac{-1}{\sqrt{1-[u(x)]^2}}\cdot u'(x)$
y= arc tg [u(x)]	$y'=\frac{1}{1+[u(x)]^2}\cdot u'(x)$
$y=\log_a u(x)$	$y'=\frac{1}{u(x)}\cdot\frac{1}{\ln(a)}\cdot u'(x)$
y=$[u(x)]^{v(x)}$	Logaritmoak erabiliz lortzen dena