

## 3 BALANCE ARMÓNICO

Como hemos comentado en la introducción, la función base es la diferencia fundamental entre los dos métodos que se contemplan en este proyecto. Esta diferencia será la que determine la dispersión de la matriz jacobiana, y por lo tanto el coste computacional repercutido. La función base que se utiliza en el método del balance armónico es la base de Fourier.

Durante muchos años hasta el momento, la base de Fourier ha sido la elección natural a la hora de resolver problemas de análisis en estado estacionario. La base de Fourier como solución de (2.1) se construye en un intervalo que asegure la periodicidad de la solución, incluye  $2N_f + 1$  funciones base que tengan las frecuencias base tal que sean múltiplos de la frecuencia fundamental del circuito. [1]

$$\{v_i\} = \{1, \cos \omega t, \sin \omega t, \cos 2\omega t, \sin 2\omega t, \dots, \cos N_f \omega t, \sin N_f \omega t\} \quad (3.1)$$

El análisis de balance armónico es aplicable a una gran variedad de problemas en circuitos de microondas tales como amplificadores de potencia, multiplicadores de frecuencia o mezcladores sujetos a una sola excitación (oscilador local). Además, una propiedad beneficiosa de este análisis es que funciona particularmente bien en circuitos que tienen una mezcla de constantes de tiempo grandes y pequeñas. De hecho, el balance armónico fue propuesto inicialmente para resolver los problemas inherentes al análisis de esos circuitos.

Por lo tanto, en resumen, la esencia del balance armónico radica en reemplazar el valor inicial original del problema por un valor de contorno del problema y unas condiciones periódicas de

contorno, y posteriormente resolver el problema de valor de contorno en una base apropiada que asegure a periodicidad de la solución. Como se ha mencionado anteriormente, al ser un método que analiza circuitos no lineales, combina el análisis en el dominio de la frecuencia y el dominio del tiempo, ya que los componentes lineales del circuito se modelan en el dominio de la frecuencia mientras que los componentes no lineales se modelan en el dominio del tiempo, teniendo que realizar su transformada de Fourier en cada iteración.

#### 3.1 Concepto Básico

Dado un circuito no lineal a analizar, debido a que los elementos no lineales sólo se pueden modelar en el dominio del tiempo, se debe utilizar la técnica multipuerto [2], describiendo la parte lineal del circuito como una red multipuerto (las redes multipuerto deben ser de tamaño limitado). De esta forma la parte lineal sería evaluada una sola vez a cada armónico, con los resultados almacenados en forma de matrices, y sin necesidad de una evaluación posterior. El análisis con balance armónico permite usar esta aproximación.

Aplicando la aproximación, los elementos de la Figura 3.1 pueden reagruparse tal como se muestra en la Figura 3.2, de modo que formen un subcircuito lineal y un subcircuito no lineal. La parte lineal puede tratarse como una red multipuerto y describirse por sus parámetros  $Y$ ,  $S$  o cualquier otra matriz multipuerto. Los elementos no lineales son modelados por sus características  $I/V$  o  $Q/V$ , y deben ser analizados en el dominio del tiempo. Así, el circuito queda reducido a una red de  $N + 2$  puertos, con elementos no lineales conectados a  $N$  de los puertos, y con fuentes de tensión conectadas a los otros dos puertos (los puertos  $N + 1$  y  $N + 2$  representan los puertos de entrada y salida en una red de 2 puertos. Normalmente, una fuente sinusoidal se conecta sólo a uno de esos puertos, pero se ha mostrado en ambos puertos en la figura para hacerlo más general). [3]



Figura 3.1: Circuito equivalente de un componente no lineal de dos puertos

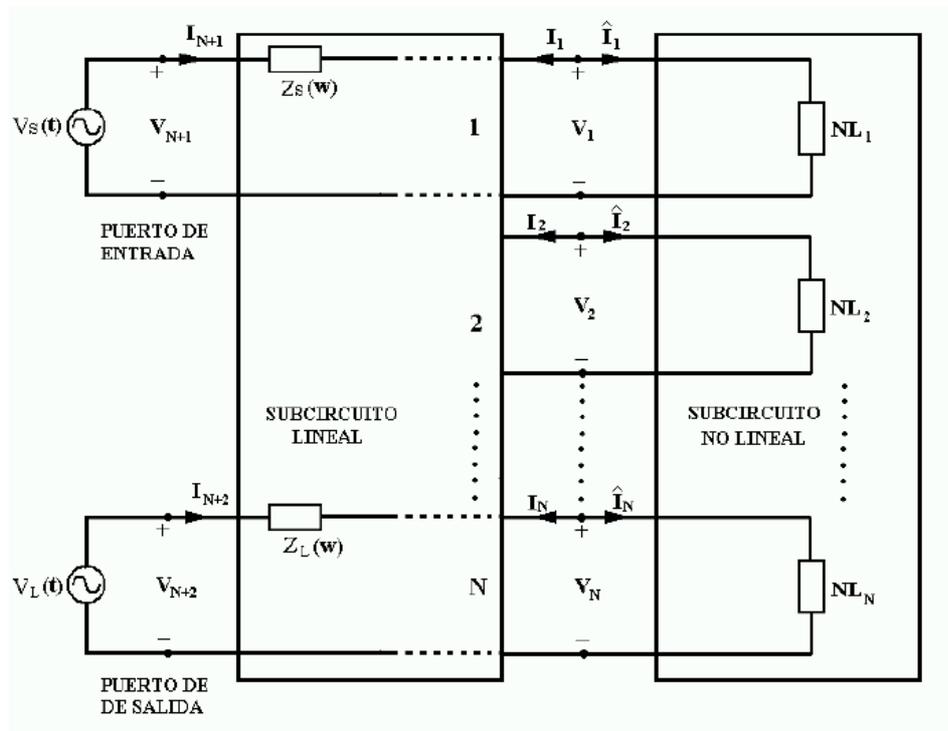


Figura 3.2: Circuito no lineal, dividido en subcircuitos lineal y no lineal.

Las tensiones y corrientes en cada puerto pueden expresarse en el dominio del tiempo o de la frecuencia, pero debido a los elementos no lineales, las tensiones y corrientes en los puertos deben tener componentes de frecuencia a armónicos de la excitación. Aunque en teoría existen un número infinito de armónicos en cada puerto, se asumirá que la componente DC y los  $k$  primeros armónicos ( $k = 0..K$ ) describen adecuadamente todas las corrientes y tensiones. Consecuentemente, los armónicos más altos serán ignorados.

El resultado a la hora de simular se obtiene cuando las corrientes que circulan a través de las interconexiones son las mismas tanto para el subcircuito lineal como para el subcircuito no lineal. Este concepto es el que proporciona principalmente al balance armónico su nombre, debido a que a través de las interconexiones las corrientes de los subcircuitos lineal y no lineal deben de estar balanceadas para cada armónico de frecuencia.

### 3.2 Descripción del método

El hecho de que a través de las interconexiones las corrientes de los subcircuitos lineal y no lineal deban de estar balanceadas para cada armónico de frecuencia, implica que se debe cumplir la siguiente expresión: [2]

$$\begin{bmatrix} I_{1,0} \\ I_{1,1} \\ I_{1,2} \\ \vdots \\ \vdots \\ I_{1,K} \\ I_{2,0} \\ I_{2,1} \\ \vdots \\ \vdots \\ I_{N,K} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{I}_{1,0} \\ \hat{I}_{1,1} \\ \hat{I}_{1,2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \hat{I}_{1,K} \\ \hat{I}_{2,0} \\ \hat{I}_{2,1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \hat{I}_{N,K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

donde  $I_{n,k}$  representa la componente armónica  $k$ -ésima de la corriente en el puerto  $n$ , calculada a través de las tensiones en los puertos y la matriz  $Y$  de admitancias de la subred lineal;  $\hat{I}_{n,k}$  es la componente de corriente calculada a través de las tensiones en los puertos y los elementos no lineales. Esa ecuación muestra la forma general en la que usaremos los vectores de tensión, corriente y carga. Los vectores incluyen únicamente componentes de frecuencias positivas porque las componentes negativas, que son las componentes conjugadas de las positivas, pueden calcularse de forma inmediata si se necesitan. Eliminar las componentes de frecuencia negativas reduce considerablemente la complejidad.

En primer lugar consideraremos la subred lineal. Las ecuaciones de admitancia son:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ I_N \\ I_{N+1} \\ I_{N+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{1,1} & Y_{1,2} & \cdots & \cdots & Y_{1,N} & Y_{1,N+1} & Y_{1,N+2} \\ Y_{2,1} & Y_{2,2} & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_{3,1} & Y_{3,2} & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_{N,1} & Y_{N,2} & \cdots & \cdots & Y_{N,N} & Y_{N,N+1} & Y_{N,N+2} \\ Y_{N+1,1} & Y_{N+1,2} & \cdots & \cdots & \cdots & Y_{N+1,N+1} & Y_{N+1,N+2} \\ Y_{N+2,1} & Y_{N+2,2} & \cdots & \cdots & \cdots & Y_{N+2,N+1} & Y_{N+2,N+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ V_N \\ V_{N+1} \\ V_{N+2} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

El vector de corrientes  $I$  de la expresión (3.3), puede escribirse como un conjunto de subvectores, donde:

$$I_n = \begin{bmatrix} I_{n,0} \\ I_{n,1} \\ I_{n,2} \\ \vdots \\ \vdots \\ I_{n,k} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$I_n$  es el vector de corrientes armónicas del puerto  $n$ -ésimo. Y, similarmente,

$$V_n = \begin{bmatrix} V_{n,0} \\ V_{n,1} \\ V_{n,2} \\ \vdots \\ \vdots \\ V_{n,k} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Los elementos de la matriz de admitancias  $Y$  que aparecen en (3.3) son todos matrices. Cada una de esas submatrices es una diagonal, cuyos elementos tienen valores  $Y_{m,n}$  evaluados en cada armónico  $k = 0, \dots, K$  de la frecuencia fundamental  $\omega_p$  de la excitación:

$$Y_{m,n} = \text{diag}[Y_{m,n}(k\omega_p)], \quad k = 0, 1, 2, \dots, K \quad (3.6)$$

es decir,

$$Y_{m,n} = \begin{bmatrix} Y_{m,n}(0) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Y_{m,n}(\omega_p) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & Y_{m,n}(2\omega_p) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & Y_{m,n}(K\omega_p) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Los vectores de excitación,  $V_{N+1}$  y  $V_{N+2}$ , tienen la forma:

$$\begin{bmatrix} V_{N+1} \\ V_{N+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{B1} \\ V_S \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ V_{B2} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

donde  $V_{B1}$  y  $V_{B2}$  son las tensiones de continua (DC) en los puertos  $N+1$  y  $N+2$  respectivamente, y  $V_S$  es la tensión de excitación en el puerto  $N+1$ . Esa ecuación implica que el puerto  $N+1$  incluye una fuente de tensión continua y una fuente de tensión alterna (fuente de frecuencia fundamental  $\omega_p$ ), mientras que el puerto  $N+2$  sólo incluye la fuente de continua. Ésa es la situación normal, por ejemplo, de un amplificador FET que tenga alimentación en la puerta y drenador y una excitación en la puerta. Un dispositivo de dos terminales tendría normalmente sólo una fuente de alimentación de continua, y en ese caso, el puerto  $N+1$  podría eliminarse. Además, si la excitación no fuese sinusoidal, el vector de la derecha en la expresión (3.8) incluiría las componentes armónicas de la excitación en vez de ceros.

Descomponiendo (3.3) podemos obtener la siguiente expresión para el vector de corrientes en los puertos 1 a  $N$ :

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{1,N+1} & Y_{1,N+2} \\ Y_{2,N+1} & Y_{2,N+2} \\ \vdots & \vdots \\ Y_{N,N+1} & Y_{N,N+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{N+1} \\ V_{N+2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{1,1} & Y_{1,2} & \cdots & Y_{1,N} \\ Y_{2,1} & Y_{2,2} & \cdots & Y_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{N,1} & Y_{N,2} & \cdots & Y_{N,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

es decir,

$$I = I_S + Y_{NxN}V \quad (3.10)$$

donde  $Y_{NxN}$  es la submatriz  $N \times N$  de  $Y$  correspondiente a las  $N$  primeras filas y columnas,  $I_S$  representa un conjunto de fuentes de corriente en paralelo con los  $N$  primeros puertos. La primera matriz en (3.9) transforma las excitaciones de los puertos de entrada y salida en ese conjunto de intensidades, con lo que los puertos  $N+1$  y  $N+2$  no necesitan ser considerados en adelante. La representación equivalente se muestra en la Figura 3.3. Esa transformación nos permite expresar las ecuaciones de balance armónico como funciones de intensidad a través de sólo los  $N$  primeros puertos, es decir, los conectados a elementos no lineales.

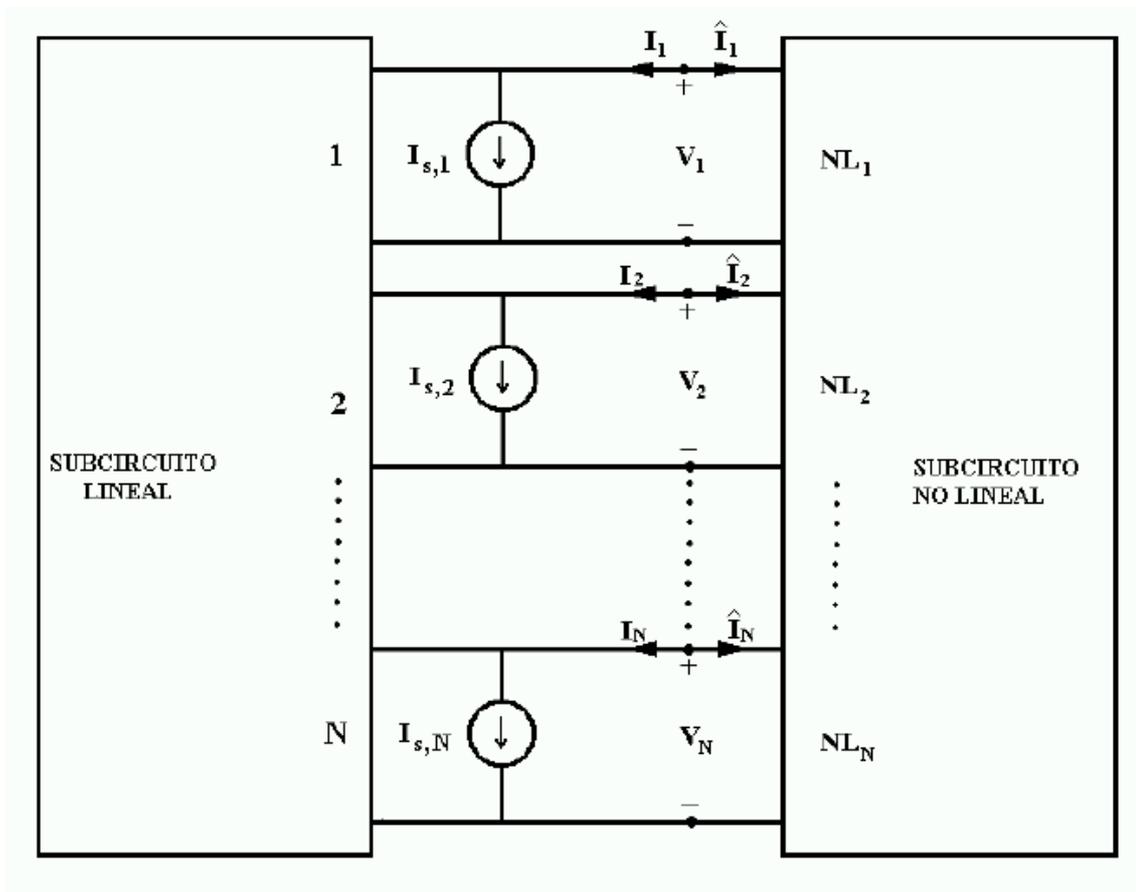


Figura 3.3: Circuito de la Figura 3.2 modificado, con las fuentes de tensión en los puntos  $N+1$  y  $N+2$  transformadas en fuentes de corriente en los puertos 1 a  $N$ .

Las corrientes de los elementos no lineales, representados por el vector  $\hat{I}$  en (3.4), pueden resultar de capacidades o conductancias no lineales.

Antitransformando las amplitudes complejas de las tensiones en cada puerto, se obtienen las tensiones en el dominio del tiempo:

$$F^{-1}\{V_n\} \rightarrow v_n(t) \quad (3.11)$$

Primero trataremos las capacidades no lineales. La forma de onda de la carga de una capacidad puede ser expresada como una función de las tensiones de los puertos:

$$q_n(t) = f_{q_n}(v_1(t), v_2(t), \dots, v_N(t)) \quad (3.12)$$

Aplicando la transformada de Fourier se obtienen las amplitudes complejas de la capacidad no lineal de cada puerto:

$$F^{-1}\{q_n(t)\} \rightarrow Q_n \quad (3.13)$$

y el vector de carga  $Q$  es:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{1,0} \\ Q_{1,1} \\ Q_{1,2} \\ \vdots \\ Q_{1,K} \\ Q_{2,0} \\ \vdots \\ Q_{2,K} \\ \vdots \\ Q_{N,K} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

donde vemos que el vector  $Q$  está formado por la carga de la capacidad no lineal de cada nodo, y que a su vez cada una de ellas es también otro vector, con los distintos armónicos.

La corriente de la capacidad no lineal es la derivada de la carga. En el dominio de la frecuencia, la derivada temporal equivale a multiplicar por  $j\omega$ , con lo que queda:

$$i_{cn}(t) = \frac{dq_n(t)}{dt} \longleftrightarrow jk\omega_p Q_{n,k} \quad (3.15)$$

o rescribiéndolo de otro modo:

$$I_c = j\Omega Q \quad (3.16)$$

donde  $\Omega$  es la matriz diagonal:

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \omega_p & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2\omega_p & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ & & & \ddots & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & k\omega_p & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_p & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & & 2\omega_p & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k\omega_p \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Esta matriz tiene  $N$  ciclos de  $(0\dots K)\omega_p$  a través de la diagonal principal.

De modo similar, la corriente en una conductancia no lineal (o fuente de intensidad controlada por tensión) es:

$$i_{gn}(t) = f(v_1(t), v_2(t), \dots, v_N(t)) \quad (3.18)$$

Aplicando la transformada de Fourier:

$$F^{-1}\{i_{q,n}(t)\} \rightarrow I_{G,n} \quad (3.19)$$

Y puede construirse un vector con los armónicos de la corriente no lineal en cada nodo:

$$I_G = \begin{bmatrix} I_{G,1} \\ I_{G,2} \\ I_{G,3} \\ \vdots \\ I_{G,N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{G,1,0} \\ I_{G,1,1} \\ I_{G,1,2} \\ \vdots \\ I_{G,1,K} \\ I_{G,2,0} \\ \vdots \\ I_{G,2,K} \\ \vdots \\ I_{G,N,K} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Sustituyendo (3.10), (3.16) y (3.20) en (3.2), obtenemos:

$$F(V) = I_S + Y_{N \times N} V + j\Omega Q + I_G \quad (3.21)$$

Esa ecuación es la que tiene que cumplirse para que un conjunto de componentes de tensión de los puertos sea la solución correcta. Es decir, si  $F(V) = 0$ , entonces  $V$  es una solución válida. También representa una ecuación que puede ser resuelta para obtener el vector  $V$  de tensiones de los puertos. La ecuación (3.21) es a veces llamada ecuación de balance armónico.  $F(V)$ , llamado vector de error de corriente, representa la diferencia entre la corriente calculada en las subredes lineal y no lineal, en cada puerto y en cada armónico, para un determinado vector solución  $V$ . [2]

En el dominio del tiempo podríamos verlo del siguiente modo:

$$f(v, t) = i(v(t)) + \frac{d}{dt} q(v(t)) + \int_{-\infty}^t y(t-\tau)v(\tau)d\tau + i_S(t) = 0 \quad (3.22)$$

donde  $t \in \Re$  es el tiempo;  $v$  es el vector de las formas de onda de tensión de los nodos;  $i_S$  es el vector de las formas de onda de corriente de fuente;  $i$  y  $q$  son funciones derivables que representan, la suma de corrientes que entran en los nodos desde los conductores no lineales, y la suma de carga que entra en los nodos desde las capacidades no lineales;  $y$  es la respuesta impulsiva matriz-evaluada del circuito con los dispositivos no lineales eliminados; y  $f$  es la función que mapea las formas de onda de tensión de los nodos en la suma de intensidades que entran en cada nodo.

Para aplicar el balance armónico sobre esta última expresión, es preciso transformar  $f(v)$  y  $v$  al dominio de la frecuencia. Para hacer el problema numéricamente tratable, el número de armónicos considerados se trunca a un número finito. El teorema de muestreo de Nyquist indica que este truncamiento es análogo a la discretización de tiempo cuando se integran ecuaciones diferenciales en el dominio del tiempo, y teóricamente no es una limitación, porque para todos los circuitos realizables, existe una frecuencia más allá de la cual hay una potencia despreciable. [4]

Para resolver el sistema de ecuaciones algebraicas que resultan de la aplicación del balance armónico, es necesario aplicar un algoritmo de resolución. La selección de un algoritmo adecuado depende de una gran variedad de factores, como pueden ser la eficiencia computacional, requerimientos de memoria, propiedades de convergencia, facilidad de implementación, o la necesidad de una estimación

inicial de la solución. Algunos de estos factores están interrelacionados. Por ejemplo, si el algoritmo tiene buenas propiedades de convergencia, la solución estimada no necesita estar muy cerca de la solución correcta, y puede ser generada fácilmente.

En este proyecto se va a aplicar el **Algoritmo de Newton**, ya que es un algoritmo muy potente para encontrar los ceros de una función.

### 3.3 Algoritmo de Newton

Este método iterativo podemos aplicarlo a  $F(V) = 0$ . [1]

$$F(V^{(j)}) - \left. \frac{\partial F(V)}{\partial V} \right|_{V=V^{(j)}} (V^{(j)} - V^{(j+1)}) = 0 \quad (3.23)$$

$$V^{(j+1)} = V^{(j)} - \left. \frac{\partial F(V)}{\partial V} \right|_{V=V^{(j)}}^{-1} F(V^{(j)}) \quad (3.24)$$

$$V^{(j+1)} = V^{(j)} - J_F^{-1}(V^{(j)})F(V^{(j)}) \quad (3.25)$$

donde  $J_F$  es el Jacobiano de  $F$ .

$$J_F(V) = \frac{\partial F(V)}{\partial V} = Y_{N \times N} + j\Omega \frac{\partial Q(V)}{\partial V} + \frac{\partial I_G(V)}{\partial V} \quad (3.26)$$

El Jacobiano de organiza como una matriz de bloques:

$$J_F(V) = \left[ \frac{\partial F_m(V)}{\partial V_n} \right], \quad m, n \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (3.27)$$

donde  $N$  es el número de nodos (conectados a elementos no lineales). Y a su vez, cada uno de esos elementos, es otra matriz:

$$\frac{\partial F_m(V)}{\partial V_n} = \left[ \frac{\partial F_m(V, k)}{\partial V_n(l)} \right], \quad k, l \in \{0, 1, 2, \dots, N\} \quad (3.28)$$

donde  $K$  es el número de armónicos que van a tenerse en cuenta. Así, tenemos una matriz de matrices:

$$J_F(V) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(V,0)}{\partial V_1(0)} & \frac{\partial F_1(V,0)}{\partial V_1(1)} & \dots & \frac{\partial F_1(V,0)}{\partial V_1(K)} & \dots & \frac{\partial F_1(V,0)}{\partial V_K(K)} \\ \frac{\partial F_1(V,1)}{\partial V_1(0)} & \frac{\partial F_1(V,1)}{\partial V_1(1)} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_1(V,K)}{\partial V_1(0)} & \frac{\partial F_1(V,K)}{\partial V_1(1)} & \dots & \frac{\partial F_1(V,K)}{\partial V_1(K)} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_N(V,K)}{\partial V_1(0)} & \frac{\partial F_N(V,K)}{\partial V_1(1)} & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial F_N(V,K)}{\partial V_N(K)} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Cada uno de los elementos se define así: [4]

$$J_{F,m}(V, k, l) = \frac{\partial F_m(V, k)}{\partial V_n(l)} = Y_{m,n}(k, l) + jk\omega_p \frac{\partial Q_m(V, k)}{\partial V_n(l)} + \frac{\partial I_{G,m}(V, k)}{\partial V_n(l)} \quad (3.30)$$

donde  $Y_{m,n}(k, l) = \begin{cases} Y_{m,n}(k\omega_p) & \dots \dots k = l \\ 0 & \dots \dots \dots eoc \end{cases}$

A continuación vamos a desarrollar los términos de las derivadas parciales.

Partimos de las definiciones de la transformada de Fourier:

$$I_{G,m}(V, k) = \frac{1}{T} \int_0^T i_{g,m}(t) e^{-jk\omega_p t} dt \quad (3.31)$$

$$Q_m(V, k) = \frac{1}{T} \int_0^T q_m(t) e^{-jk\omega_p t} dt \quad (3.32)$$

donde  $T$  es el periodo fundamental,  $T = \frac{2\pi}{\omega_p}$ . Las derivadas serían:

$$\frac{\partial I_{G,m}(V, k)}{\partial V_n(l)} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial i_{g,m}(t)}{\partial V_n(l)} e^{-jk\omega_p t} dt \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial Q_m(V, k)}{\partial V_n(l)} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial q_m(t)}{\partial V_n(l)} e^{-jk\omega_p t} dt \quad (3.34)$$

Aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{\partial I_{G,m}(V, k)}{\partial V_n(l)} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial i_{g,m}(t)}{\partial v_n(l)} \frac{\partial v_n(t)}{\partial V_n(l)} e^{-jk\omega_p t} dt \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial Q_m(V, k)}{\partial V_n(l)} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial q_m(t)}{\partial v_n(l)} \frac{\partial v_n(t)}{\partial V_n(l)} e^{-jk\omega_p t} dt \quad (3.36)$$

donde  $v_n(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} V_n(k) e^{jk\omega_p t}$ .

por lo que:

$$\frac{\partial v_n(t)}{\partial V_n(l)} = e^{jl\omega_p t} \quad (3.37)$$

Y si definimos  $G_{mn}(k)$  y  $C_{mn}(k)$  como los coeficientes de Fourier de las derivadas de la conductancia y capacidad no lineales:

$$G_{mn}(k) = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial i_{g,m}(t)}{\partial v_n(t)} e^{-jk\omega_p t} dt \quad (3.38)$$

donde  $k = -K, \dots, 0, \dots, K$ .

Luego, para  $l \neq 0$

$$\frac{\partial I_{G,m}(V, k)}{\partial V_n(l)} = \begin{bmatrix} G_{mn}^R(k-l) + G_{mn}^R(k+l) & G_{mn}^I(k+l) - G_{mn}^I(k-l) \\ G_{mn}^I(k-l) + G_{mn}^I(k+l) & G_{mn}^R(k-l) - G_{mn}^R(k+l) \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

y para  $l = 0$

$$\frac{\partial I_{G,m}(V, k)}{\partial V_n(l)} = \begin{bmatrix} G_{mn}^R(k) & 0 \\ G_{mn}^I(k) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Completando el cálculo del Jacobiano:

$$J_F(V) = \frac{\partial I(V)}{\partial V} + \Omega \frac{\partial Q(V)}{\partial V} + Y \quad (3.41)$$

Esta forma de deducir las ecuaciones del balance armónico es una manera eficiente de describir el problema orientado a su implementación. Sin embargo, es perfectamente compatible con la formulación descrita en la sección 2. De hecho, en el apartado 3.4 de esta sección se exponen los valores de  $C$ ,  $G$  y  $D$  cuando se aplica la expansión de la excitación en series de Fourier utilizando como funciones base (3.1).

La principal ventaja del método de Newton es que hace un uso completo de todas las derivadas de la función error con respecto a cada variable en cada puerto. Por esta razón es capaz de lograr convergencia con un número muy grande de variables, cuando la no linealidad no es demasiado fuerte y la estimación inicial es razonablemente buena (de hecho, el algoritmo converge con un simple paso si el circuito es lineal).

La desventaja del método está en la gran cantidad de carga computacional y memoria requerida para generar el Jacobiano y resolver las ecuaciones de matrices. El Jacobiano es una matriz cuadrada compleja. Por ejemplo, con 3 elementos no lineales y 8 armónicos (más DC), el Jacobiano sería  $27 \times 27$ . Y debido a que el Jacobiano es complejo, implica la resolución de un conjunto de  $54 \times 54$  ecuaciones lineales reales, una tarea quizás no difícil, pero que consume mucho tiempo, por lo que es cara. Además, la matriz entera, la solución, y los vectores de actualización, deben permanecer en memoria simultáneamente; por lo cual se necesita mucha memoria computacional. Y por último, generar el Jacobiano requiere un gran número de derivadas. Este cálculo no consume mucho tiempo si hay expresiones en forma cerrada para esas derivadas, sin embargo eso no ocurre para muchos elementos no lineales, por lo que las derivadas tienen que ser, a menudo, calculadas numéricamente, lo que también consume mucho tiempo del ordenador. [3]

#### 3.4 Ejemplo de aplicación del método

En este apartado se va a realizar el análisis y simulación en estado estacionario de un circuito no lineal hipotético de un nodo, con 8 armónicos (incluida la DC). El circuito consta de una excitación de DC + RF, una carga  $R_o$ , una capacidad no lineal y una fuente de corriente no lineal, tal como se puede observar en la siguiente figura:

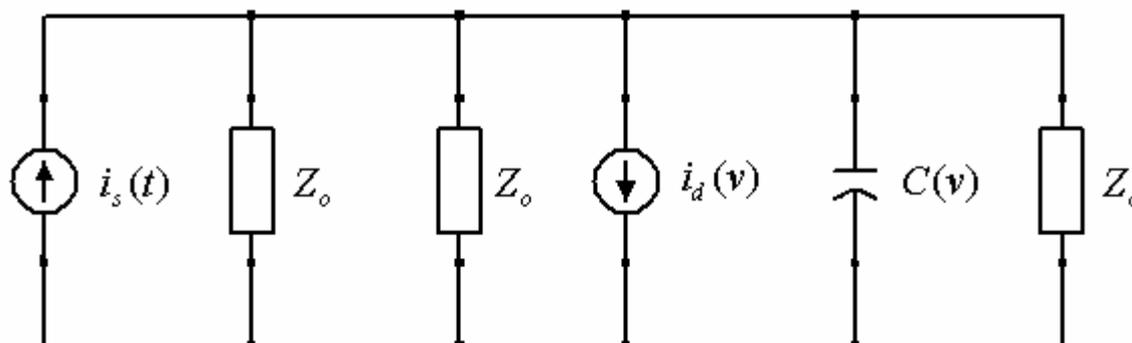


Figura 3.4 Circuito de un nodo

Por lo tanto el circuito no lineal se puede describir mediante la siguiente expresión:

$$C\dot{x} + Gx + f(x) + u = 0 \quad (3.42)$$

Para analizar el estado estacionario excitamos periódicamente el circuito:

$$v_{st} = \text{Re}(V_i \cdot e^{j\omega t}) \quad (3.43)$$

$$u = i_{st} = \frac{V_{dd}}{R_0} + \frac{v_{st}}{2R_0} \quad (3.44)$$

A modo de ejemplo, se han asumido modelos sencillos para la capacidad y fuente de corriente, como los que cabe esperar en un transistor de tipo FET. Así, la capacidad se ha modelado mediante la siguiente expresión:

$$C = C_g = \frac{C_{g0}}{\sqrt{\left(1 - \frac{V_c}{V_{bi}}\right)}} \quad (3.45)$$

Y para la corriente no lineal, un modelo Curtice cúbico:

$$f(x) = Id = (a_0 + a_1 \cdot V_c + a_2 \cdot V_c^2 + a_3 \cdot V_c^3) \cdot \tanh(\gamma \cdot V_c) \quad (3.46)$$

La admitancia:

$$G = Y_d = \frac{3}{R_0} \quad (3.47)$$

La ecuación (3.42) se puede escribir en el dominio transformado como ecuación matricial no lineal:

$$\hat{C}DX + \hat{G}X + F(X) + U = 0 \quad (3.47)$$

Llamaremos  $T$  a la matriz de transformación directa de Fourier, y se describe de la siguiente forma:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & \cos(\omega t_0) & \sin(\omega t_0) & \cdots & \cos(N_f \omega t_0) & \sin(N_f \omega t_0) \\ 1 & \cos(\omega t_1) & \sin(\omega t_1) & \cdots & \cos(N_f \omega t_1) & \sin(N_f \omega t_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \cos(\omega t_{N_f-1}) & \sin(\omega t_{N_f-1}) & \cdots & \cos(N_f \omega t_{N_f-1}) & \sin(N_f \omega t_{N_f-1}) \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

La matriz de transformación  $T$  tiene dimensiones de  $N_t \times (2N_f + 1)$  donde  $N_t$  es el número de puntos en el tiempo y  $N_f$  el número de armónicos sin incluir la DC.

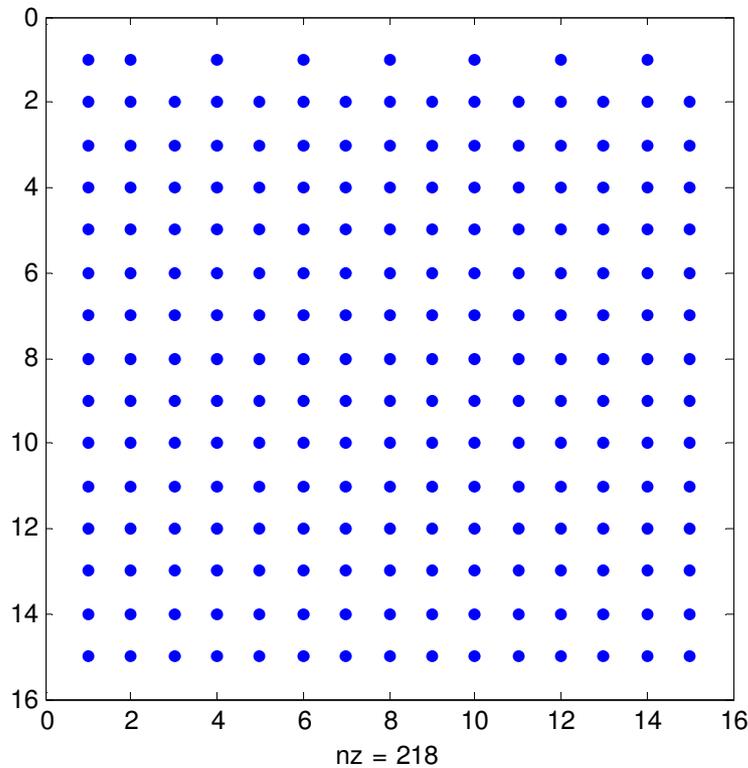


Figura 3.5. Densidad de la matriz de transformación directa de Fourier para el caso de 8 armónicos y 15 muestras temporales

Como podemos observar en la figura 3.5, la matriz  $T$  es claramente densa, lo que hace que el coste computacional sea elevado. Para reducir el coste de resolver (3.41) habrá que elegir una base diferente para proporcionar una representación dispersa a las matrices  $D$  y  $T$ .

A continuación vamos a tener en cuenta que:

$$\hat{C}DX = DQ \tag{3.49}$$

La matriz derivada  $D$  en esta base se representa mediante una matriz diagonal en la forma real de Schur con las frecuencias base en la diagonal principal.



$$\hat{G} = Y = \begin{bmatrix} Y_{11}^R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_{11}^R(1) & -Y_{11}^I(1) & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_{11}^I(1) & Y_{11}^R(1) & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y_{11}^R(2) & -Y_{11}^I(2) & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y_{11}^I(2) & Y_{11}^R(2) & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & Y_{11}^R(7) & -Y_{11}^I(7) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & Y_{11}^I(7) & Y_{11}^R(7) \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

Se puede observar que la segunda fila y la segunda columna de estas matrices de conversión están formadas completamente por ceros. Esto es debido a que los fasores en dc deben ser reales.

El Jacobiano se describe mediante la siguiente expresión, la cual se calculó en el apartado 3.3:

$$J(X) = \hat{C}D + \hat{G} + \frac{\partial \hat{I}(X)}{\partial X} \quad (3.52)$$

donde

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} C_{11}^R(0) & 0 & 2C_{11}^R(-1) & 2C_{11}^I(-1) & 2C_{11}^R(-2) & 2C_{11}^I(-2) & \dots & \dots & 2C_{11}^R(-7) & 2C_{11}^I(-7) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ C_{11}^R(1) & 0 & C_{11}^R(0) + C_{11}^R(2) & C_{11}^I(2) & C_{11}^R(-1) + C_{11}^R(3) & -C_{11}^I(-1) + C_{11}^I(3) & \dots & \dots & C_{11}^R(-6) + C_{11}^R(8) & C_{11}^I(8) - C_{11}^I(-6) \\ C_{11}^I(1) & 0 & C_{11}^I(2) & C_{11}^R(0) - C_{11}^R(2) & C_{11}^I(-1) + C_{11}^I(3) & C_{11}^R(-1) - C_{11}^R(3) & \dots & \dots & C_{11}^I(-6) + C_{11}^I(8) & C_{11}^R(-6) - C_{11}^R(8) \\ C_{11}^R(2) & 0 & C_{11}^R(1) + C_{11}^R(3) & -C_{11}^I(1) + C_{11}^I(3) & C_{11}^R(0) + C_{11}^R(4) & C_{11}^I(4) & \dots & \dots & C_{11}^R(-5) + C_{11}^R(9) & C_{11}^I(9) - C_{11}^I(-5) \\ C_{11}^I(2) & 0 & C_{11}^I(1) + C_{11}^I(3) & C_{11}^R(1) - C_{11}^R(3) & C_{11}^I(4) & C_{11}^R(0) - C_{11}^R(4) & \dots & \dots & C_{11}^I(-5) + C_{11}^I(9) & C_{11}^R(-5) - C_{11}^R(9) \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ C_{11}^R(7) & 0 & C_{11}^R(6) + C_{11}^R(8) & C_{11}^I(8) - C_{11}^I(6) & C_{11}^R(5) + C_{11}^R(9) & C_{11}^I(9) - C_{11}^I(5) & \dots & \dots & C_{11}^R(0) + C_{11}^R(14) & C_{11}^I(14) - C_{11}^I(0) \\ C_{11}^I(7) & 0 & C_{11}^I(6) + C_{11}^I(8) & C_{11}^R(6) - C_{11}^R(8) & C_{11}^I(5) + C_{11}^I(9) & C_{11}^R(5) - C_{11}^R(9) & \dots & \dots & C_{11}^I(0) + C_{11}^I(14) & C_{11}^R(0) - C_{11}^R(14) \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

$$\frac{\partial \hat{I}(X)}{\partial X} \text{ es similar a } \hat{C} \text{ reemplazando } C \text{ por } \frac{\partial I(X)}{\partial X}.$$

Para calcular el resultado en estado estacionario se deberán realizar los siguientes pasos:

- 1.- Definición de parámetros.
- 2.- Generar la estimación inicial mediante el análisis de la DC (caso escalar).
- 3.- Creación de matrices y vectores.
- 4.- Análisis del estado estacionario realizando iteraciones. En cada iteración se deberá calcular la función objetivo, la matriz jacobiana y actualizar las componentes armónicas de tensión.
- 5.- El análisis del estado estacionario terminará cuando el error sea menor que la tolerancia, es decir, cuando las corrientes que circulan a través de las interconexiones son las mismas tanto para el subcircuito lineal como para el subcircuito no lineal. Este concepto es el que proporciona principalmente al balance armónico su nombre, debido a que a través de las interconexiones las corrientes de los subcircuitos lineal y no lineal deben de estar balanceadas para cada armónico de frecuencia.

En resumen, el algoritmo se puede expresar de la siguiente forma:

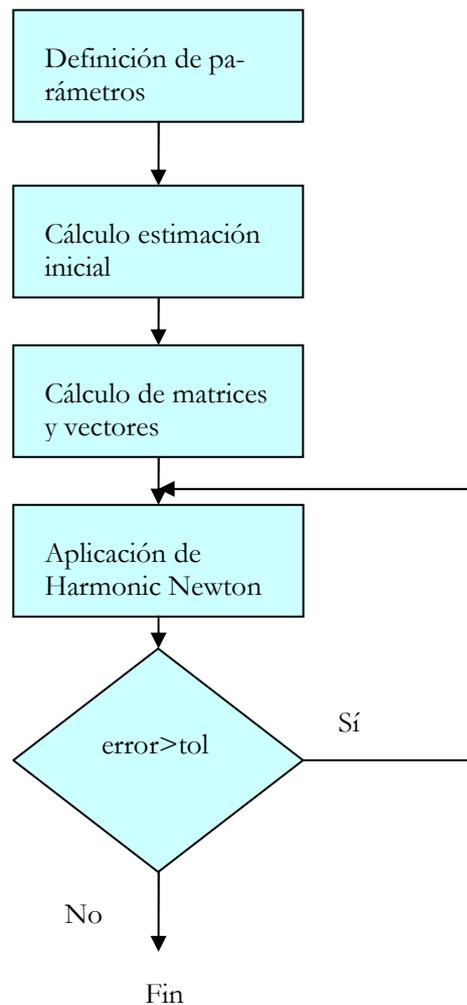


Figura 3.7 Diagrama de flujo del algoritmo.

### 3.5 Resultados

Para implementar todo lo que hemos visto, vamos a hacer uso del entorno matemático Matlab, que es una herramienta de simulación muy empleada en el ámbito de la ingeniería y comunicaciones, ya que permite emular con un gran realismo el comportamiento de señales y sistemas. En nuestro caso se va a evaluar un diodo, el cual está representado en la Figura 3.4, y posteriormente se discutirán re-

sultados obtenidos por otros autores a la hora de evaluar otros sistemas, en particular un FET y un cascode.

Al evaluar el diodo, se han obtenido en primer lugar los armónicos de la tensión de salida. Para tal fin se tomó como frecuencia fundamental  $f_p = 2$  GHz, y como potencias de entrada el rango comprendido entre los  $-20:5:20$  dBm. A continuación se detallan otros valores de los distintos parámetros utilizados a la hora de realizar la simulación:

- Tensión de continua  $V_{dd} = 2$
- Tensión de alterna  $V_s = \sqrt{8 \cdot Z_0 \cdot P_i(w)}$
- *tolerancia* =  $1 \cdot 10^{-5}$
- Número de puntos de muestreo = 15
- Número de armónicos = 8

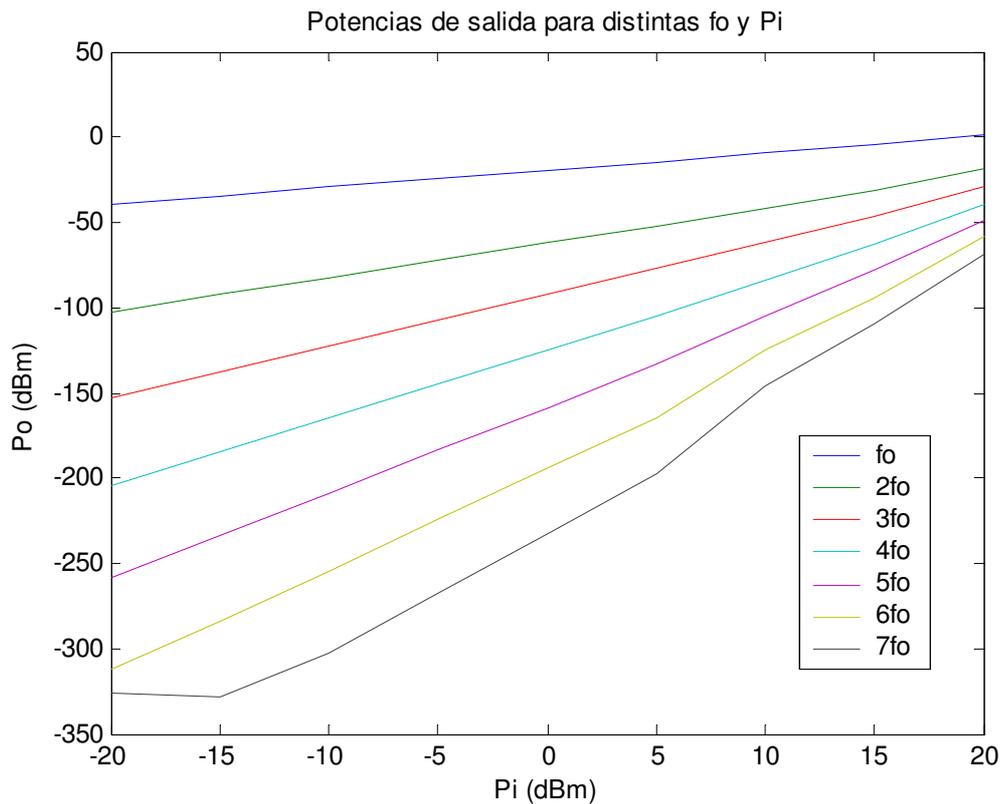


Figura 3.8. Potencias de salida para distintas  $f_0$  y  $P_i$

A continuación se procedió a simular el comportamiento de los errores en escala logarítmica. Para tal fin se tomó como frecuencia fundamental  $f_p = 2$  GHz , y como potencias de entrada el rango comprendido entre los  $-20 : 10 : 20$  dBm. A continuación se detallan otros valores de los distintos parámetros utilizados a la hora de realizar la simulación:

- Tensión de continua  $V_{dd} = 2$  v
- Tensión de alterna  $V_s = \sqrt{8 \cdot Z_0 \cdot P_i(w)}$  v
- tolerancia =  $1 \cdot 10^{-15}$
- Número de puntos de muestreo = 15
- Número de armónicos = 8

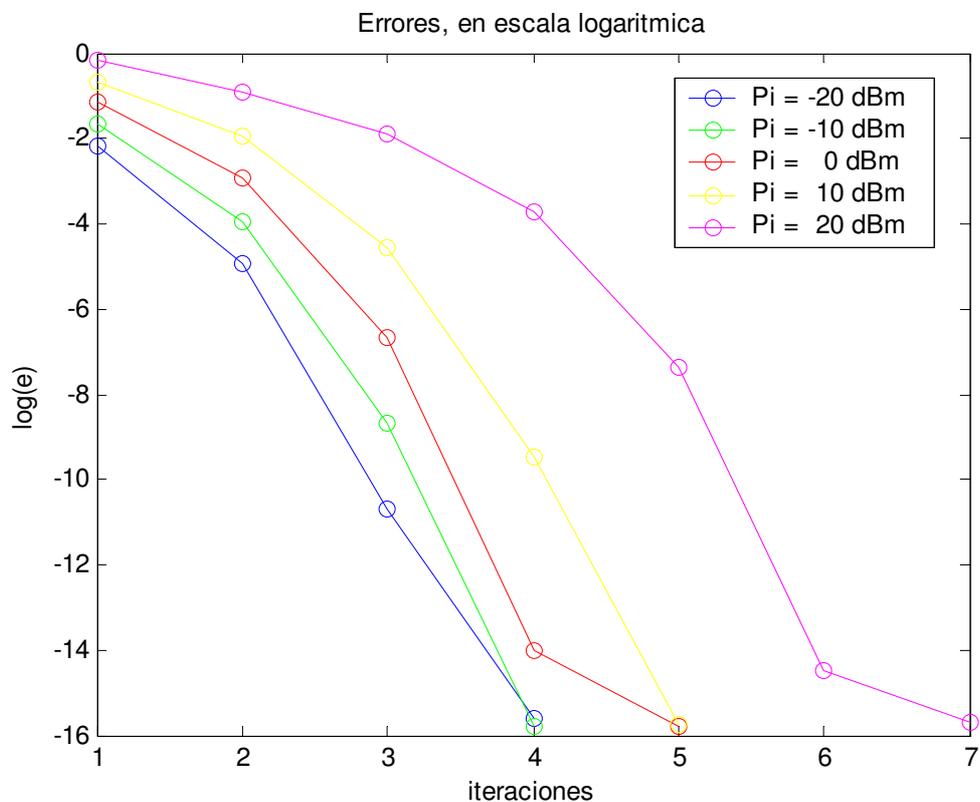


Figura 3.9 Logaritmo del error en cada iteración para distintas potencias de entrada

En la figura anterior se puede observar cómo un aumento de la potencia de entrada genera un aumento en el número de errores, y cómo a medida que van aumentando las iteraciones el error tiende a disminuir.

En cuanto al coste computacional, el estudio indica que el tiempo empleado en la ejecución es de aproximadamente 0.0630 segundos (en un PC con microprocesador a 3 GHz y siendo Matlab la única aplicación en funcionamiento) en el caso de 8 armónicos.

Otros análisis de interés son los realizados en [1] y [3], los cuales se han aplicado sobre diversos circuitos.

En particular, es de especial interés el estudio del amplificador cascodo en [1] el cual está formado por 2 BJT's con DC bias e impedancia de conexión de redes, tal como se puede observar en la siguiente figura:

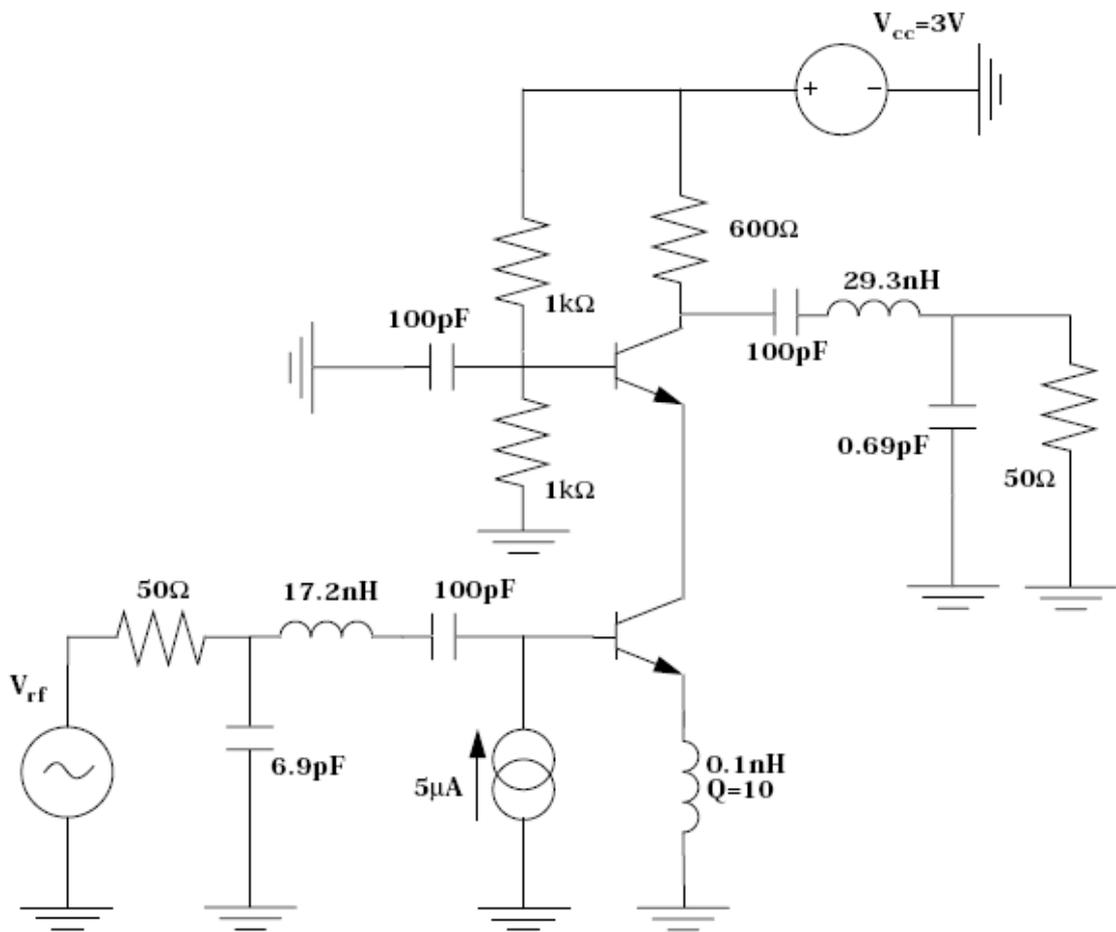


Figura 3.10 Circuito Cascodo LNA

En el estudio se incluyen unas tablas de resultados especialmente relevantes:

	$N_H = 6$	$N_H = 12$
	Harmonic Balance	Harmonic Balance
Frequency grid size	43	157
Time grid size	85	313
Jacobian size	2125 × 2125	7825 × 7825
Number of nonzero elements	114,219	1,489,284
Sparsity ratio	2.5%	2.4%
Memory storage size, MBytes	1.35	17.5
Average CPU time for reordering, seconds	0.17	2.5
Average time per LU/FBS, seconds	1.8	70
Number of Newton iterations	5	5

Tabla 3.1 Comparativa del coste computacional repercutido para  $N_H = 6$  y  $N_H = 12$

	$N_H = 18$	$N_H = 22$
	Harmonic Balance	Harmonic Balance
Frequency grid size	343	507
Time grid size	685	1,013
Jacobian size	17125 × 17125	25325 × 25325
Number of nonzero elements	7,085,619	15,462,403
Sparsity ratio	2.4%	2.4%
Memory storage size, MBytes	83.1	181.3
Average CPU time for reordering, seconds	77	278
Average time per LU/FBS, seconds	840	2,980
Number of Newton iterations	5	5

Tabla 3.12 Comparativa del coste computacional repercutido  $N_H = 18$  y  $N_H = 22$

En las tablas anteriores se refleja cómo al aumentar el número de armónicos,  $N_H$ , el sparsity ratio prácticamente no varía mientras que el tamaño del Jacobiano aumenta considerablemente, por lo que el coste computacional tiende a aumentar.

### 3. Balance Armónico

Por otro lado, también es interesante mencionar el estudio del HEMT ED02AH FET realizado en [3]. En la siguiente figura podemos observar el circuito equivalente del FET:

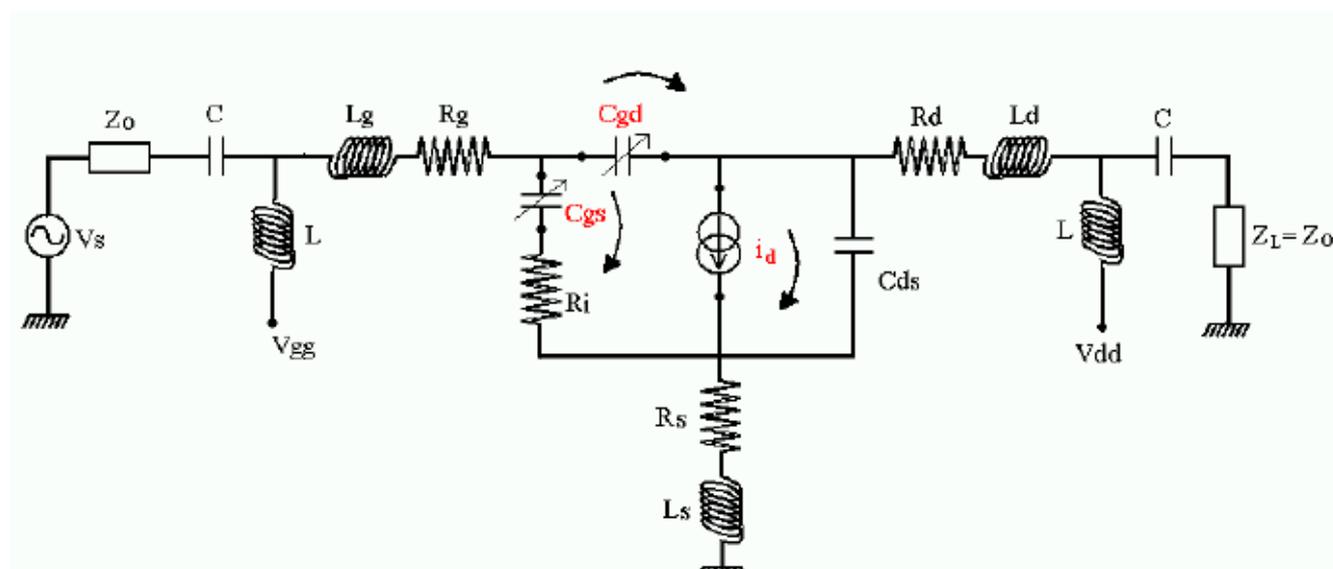


Figura 3.11 Circuito equivalente del HEMT ED02AH FET (simplificado).

En el estudio se exponen los siguientes resultados:

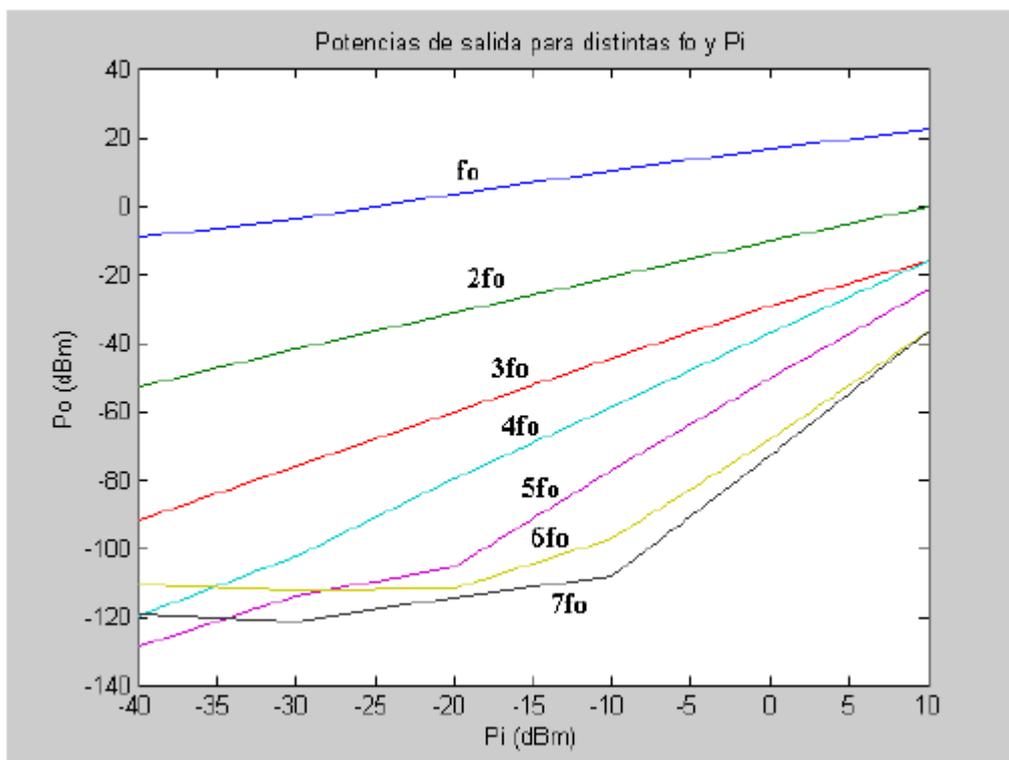


Figura 3.12 Potencias de salida para distintas  $P_i$

En la figura superior se puede observar cómo hay una ganancia de potencia más o menos constante, de valor aproximadamente 20 dB en un amplio rango de la potencia de entrada (entre -30 y 0 dBm).

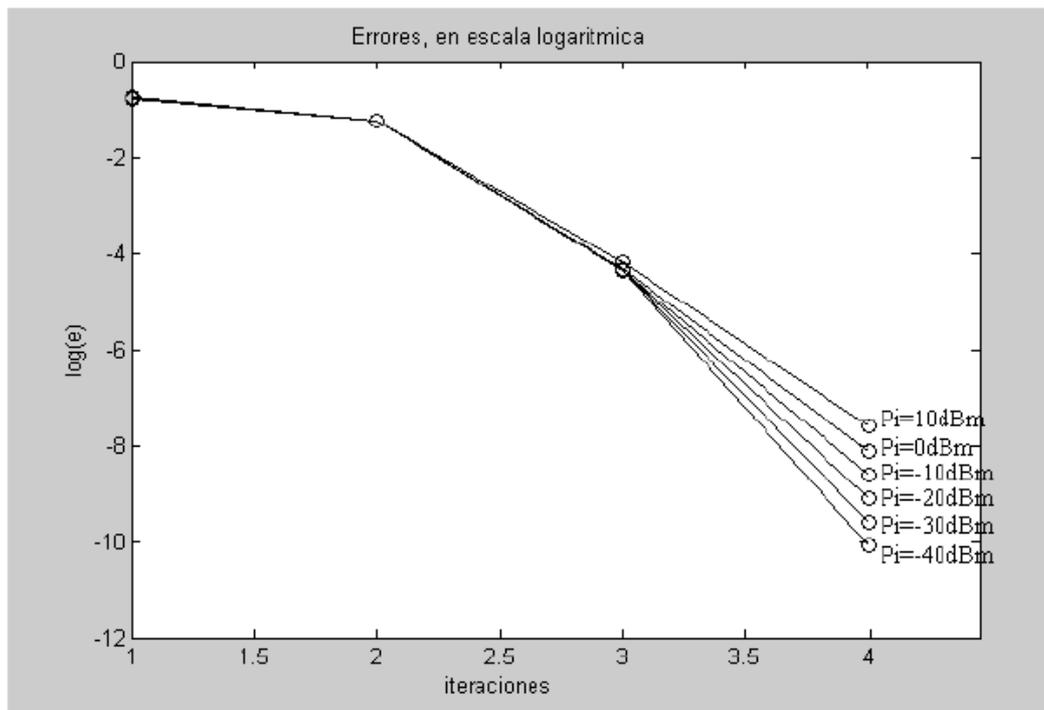


Figura 3.12 Logaritmo del error en cada iteración para distintas  $P_i$

En cuanto a los errores en escala logarítmica, en el estudio se refleja cómo conforme aumenta la potencia de entrada el error cometido también aumenta, aunque en todos los casos se resuelve en 4 iteraciones. En el estudio también se indica que en el caso de que se hubiera incrementando la potencia, se hubiera llegado a un momento en el que harían falta más de 4 iteraciones para conseguir un error inferior a  $10^{-6}$ .

Por otro lado, en lo referente al coste computacional, el estudio indica que el tiempo empleado en la ejecución es de aproximadamente 1.1 segundos (en un PC con microprocesador a 2.4 GHz y siendo Matlab la única aplicación en funcionamiento) en el caso de 8 armónicos.