

Universidad de Sevilla
Escuela Superior de Ingenieros

Control y Estimación de la Actitud de un Vehículo Espacial

Autor: Mario Rodríguez Lubián
Tutor: Rafael Vázquez Valenzuela

Sevilla - Marzo de 2013

Índice general

1. Introducción	5
1.1. Objetivos	7
2. Métodos de control y estimación de actitud	9
2.1. Sistemas de control pasivo	9
2.1.1. Estabilización por rotación	10
2.1.2. Estabilización por rotación doble	11
2.1.3. Estabilización mediante gradiente gravitatorio	12
2.1.4. Estabilización por momentos magnéticos	12
2.1.5. Estabilización por volante de inercia	13
2.2. Sistemas de control activo	14
2.2.1. Sistemas de control de reacción (RCS)	14
2.2.2. Sistemas de intercambio de momento cinético	16
2.3. Sistema de control elegido	17
3. Modelo del sistema	19
3.1. Ecuaciones cinemáticas	19
3.2. Ecuaciones dinámicas	22
4. Algoritmos de control para seguimiento de la referencia	25
4.1. Problema de tracking	25
4.2. Generación de la referencia	26
4.2.1. Iluminación máxima de paneles solares	26
4.2.2. Estabilización en torno a referencia móvil	28
4.2.3. Perfil de actitud de transición	29
4.3. Control del error. Formulación LQR	32
4.3.1. Diseño LQR	35
4.4. Problema de tracking extendido	36

4.4.1.	Ecuaciones linealizadas del cuaternión de error	37
4.4.2.	Ecuaciones linealizadas de los errores $\delta\vec{\omega}$ y $\delta\vec{h}$	39
4.4.3.	Matrices constitutivas del sistema lineal	40
4.4.4.	Uso en control	41
5.	Estimación de Actitud	43
5.1.	Estimación con sensores ópticos	44
5.1.1.	Método TRIAD	44
5.1.2.	Método Q	45
5.2.	Estimación con medidas inerciales	46
5.3.	Fusión de sensores. Filtro de Kalman (MEKF)	47
5.3.1.	Fase de propagación	48
5.3.2.	Fase de actualización	50
5.3.3.	Fase de reset	51
5.3.4.	Algoritmo MEKF	52
5.4.	Problema de tracking con información imperfecta	53
5.4.1.	Algoritmo de cálculo	55
6.	Simulación	58
6.1.	Problema de tracking con información perfecta	58
6.1.1.	Efecto de R	60
6.1.2.	Efecto de Q	63
6.1.3.	Efecto de S(T)	67
6.1.4.	Efecto de penalizaciones Q_{hh} y $S_{hh}(T)$ nulas	70
6.1.5.	Efecto de limitación del par motor	72
6.1.6.	Efecto del gradiente gravitatorio	77
6.1.7.	Efecto del volante de inercia, \mathbf{H}_0	78
6.1.8.	Efecto de la saturación de las ruedas de reacción	79
6.2.	Estimación de actitud	81
6.2.1.	Estimación dinámica	81
6.2.2.	Estimación estática	83
6.2.3.	Filtro de Kalman (MEKF)	85
6.3.	Problema de tracking con información imperfecta	93
7.	Integración MATLAB-STK	99

8. Sensores y Actuadores	106
8.1. Sensores	106
8.1.1. Sensores ópticos	107
8.1.2. Sensores mecánicos: giróscopos	111
8.1.3. Sensores magnéticos: magnetómetros	113
8.2. Actuadores	114
8.2.1. Propulsores	114
8.2.2. Magnetopares	116
8.2.3. Dispositivos de intercambio de momento cinético	117
8.2.4. Elementos estructurales de control	120
9. Conclusiones y trabajo futuro	124
A. Sistemas de Referencia	127
A.A. J2000	127
A.B. ICRF	127
A.C. TrueOfDate	128
A.D. VVLH - Velocidad Vehículo Horizontal Local	128
B. Cálculo orbital	130

Capítulo 1

Introducción

La expresión “control de actitud” tiene el sentido general de controlar la orientación del satélite respecto a un sistema de referencia determinado. En la práctica, existe una multitud de variantes para esta expresión tan sencilla en apariencia. Algunos ejemplos de tareas de control básicas que los sistemas de control de actitud llevan a cabo son:

- En maniobras de control orbital, la actitud del satélite debe ser establecida y mantenida en la dirección requerida por el impulso ΔV necesario.
- Los paneles solares deben maximizar su exposición al Sol.
- Un satélite estabilizado por rotación puede ser diseñado de forma que su eje de giro haya de apuntar a una determinada dirección en el espacio.
- Un satélite triaxialmente estabilizado en torno a la dirección nadir (apuntando a la Tierra) debe mantener sus tres ángulos de Euler nulos en relación al sistema de referencia ligado a la órbita (VVLH); esta condición se da para la mayoría de satélites de comunicaciones.
- En satélites de observación terrestre, el sistema de control se diseña para permitir que la carga de pago operativa realice el seguimiento de los objetivos definidos sobre la superficie terrestre.
- Un satélite científico de observación espacial ha de maniobrar su instrumentación óptica hacia diferentes objetivos de la esfera celeste según una determinada trayectoria de referencia.

Además, el sistema de control ha de corregir los momentos perturbadores a los que suele estar sometido todo vehículo espacial, entre los cuales se encuentran

- **Momentos aerodinámicos** Son importantes sólo en orbitas bajas (LEO).
- **Gradiente gravitatorio** La distribución de masa no puntual del satélite hace que la fuerza gravitatoria no esté aplicada en el baricentro del satélite, provocando un momento perturbador.
- **Presión de radiación solar** El viento solar ejerce cierta presión, que aplicada sobre superficies grandes como paneles solares, puede perturbar la actitud del vehículo. Esta presión se puede utilizar para controlar la actitud de sondas en misiones interplanetarias.

- **Magnéticos** Sobretudo en órbitas bajas, el campo magnético de la Tierra ejerce momentos perturbadores.
- **Efectos de flexibilidad** Ciertos elementos estructurales, como paneles solares o mástiles esbeltos, pueden influir en la dinámica de actitud del vehículo espacial
- **Movimiento de fluidos**
- **Movimiento de la tripulación**

El objetivo de este proyecto fin de carrera es el desarrollo de un algoritmo de control y estimación de actitud triaxial para un satélite de observación terrestre. Se desarrolla la lógica de control/estimación, se prueba su funcionamiento mediante simulaciones en MATLAB, y se representa el comportamiento del sistema controlado en tres dimensiones mediante STK. El sistema de control habrá de seguir una referencia de actitud generada a priori, y compensar los errores de actitud debidos a la dinámica propia y a las perturbaciones aplicables del entorno espacial.

Una vez definidos los requisitos de la misión, se calcula la órbita necesaria. Los elementos orbitales resultantes, más los requerimientos de actitud definirán la trayectoria de referencia para el sistema de control.

En el capítulo 2 se revisan los diferentes métodos de control y estimación de actitud y, en función de los requisitos de la misión, se elige un sistema de control de intercambio de momento cinético basado en tres ruedas de reacción ortogonales. La estimación de actitud se realiza mediante la integración de sensores de dos tipos: giróscopos y sensores de estrellas. La configuración elegida se representa esquemáticamente en la figura 1.1.

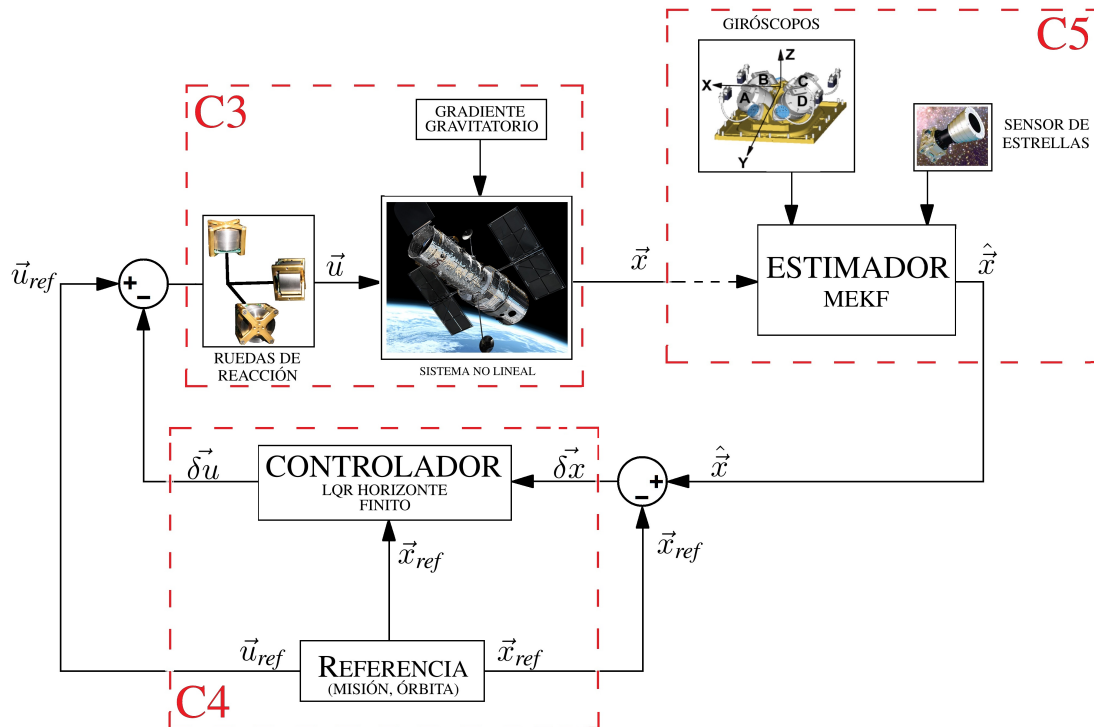


Figura 1.1: Representación esquemática del sistema de determinación y control de actitud

El capítulo 3 se encarga del módulo C3 de la figura. Se modela el comportamiento del sistema mediante las ecuaciones mecánicas del vehículo espacial, de la dinámica de las ruedas de reacción

y de la perturbación principal considerada. La actitud se representa en forma de cuaterniones. Esta forma de representación de la actitud permite un algoritmo computacionalmente eficiente y libre de singularidades, a costa de una mayor complejidad geométrica que dificulta la comprensión espacial del problema.

A continuación, el capítulo 4 incluye el desarrollo de un algoritmo de control óptimo. Se establece referencia de actitud y se plantea el algoritmo de cálculo del controlador –el módulo C4 en la figura 1.1. Se basa en un regulador LQR horizonte finito, ya que se trata de un problema de tracking.

En el capítulo 5 se detallan algunos métodos de estimación de actitud, y se desarrolla el algoritmo de cálculo del filtro de Kalman extendido multiplicativo, elegido como observador en el problema final, y encerrado en el módulo C5 de la figura.

El capítulo 6 prueba mediante simulaciones los algoritmos desarrollados en los capítulos anteriores y estudia paraméricamente las actuaciones del sistema de control y estimación, ante una variedad de situaciones. Incluye la simulación final del sistema de control y estimación con resultados satisfactorios: el problema de tracking con información imperfecta.

El capítulo 7 incide sobre las particularidades del empleo del interfaz MATLAB/STK como herramienta de análisis y representación tridimensional de los resultados. Se incluyen también diagramas de flujo de las principales rutinas de cálculo desarrolladas en este proyecto.

El capítulo 8 revisa los diferentes tipos de sensores y actuadores empleados en determinación y control de actitud.

Finalmente, el capítulo 9 recoge las conclusiones extraídas de la realización de este proyecto fin de carrera, y algunas extensiones de este proyecto propuestas como trabajo futuro.

1.1. Objetivos

Se enuncian a continuación los requerimientos de la misión que habrá de cumplir el satélite.

Se desea poner en órbita un satélite de observación terrestre que obtendrá fotografías en la región de Andalucía, España. El satélite debe pasar todos los días exactamente sobre Sevilla, España (latitud 37.1978°N , longitud 5.58°O), y lo debe hacer siempre al atardecer (18:00 hora Solar) y cruzando de Sur a Norte. Además se desea una órbita circular, cuya altitud no debe ser inferior a 600 km ni superior a 1200 km. Adicionalmente, si la ciudad de Sevilla no es accesible, se tomarán fotografías de las ciudades de Sidney, Australia (latitud 33.8833°S , longitud 151.217°E), Ciudad del Cabo, Sudáfrica (latitud 33.7387°S , longitud 18.4167°E) y Yakutat, Estados Unidos (latitud 59.3785°N , longitud 139.727°O).

Puesto que el instante de paso ha de ser a una hora solar determinada durante todos los días del año, se trata de una órbita heliosíncrona. Además, la sincronía diaria con un punto terrestre determina su periodo, y por tanto su altitud. Los cálculos orbitales se detallan en el apéndice B.

La órbita que cumple todos los requisitos es la mostrada en la figura 1.2, y se define mediante los elementos orbitales de la tabla 1.1, referidos a la época del 3 de Abril de 2012, a las 18:44:10 UT.

Excentricidad	$e = 0$
Radio orbital	$a = 7258.68$ km
Inclinación	$i = 98.95^\circ$
Ascensión recta del nodo ascendente (RAAN)	$\Omega = 114.82^\circ$
Argumento de la latitud	$u = 37.73^\circ$

Tabla 1.1: Elementos orbitales para la órbita heliosíncrona

Si ninguna estación programada es accesible, el satélite habrá de tomar una orientación que permita maximizar la iluminación de los paneles solares del vehículo. Se definen así los tres perfiles de actitud básicos de la misión del satélite:

- **Seguimiento de estación terrestre** Durante el sobrevuelo, el eje óptico habrá de apuntar al objetivo terrestre con precisión.
- **Seguimiento del Sol** El satélite estabilizará en una actitud fija en ejes inerciales que permita la máxima iluminación de los paneles solares, con objeto de recargar las baterías mientras no se tenga acceso a ningún objetivo.
- **Transición entre los perfiles de actitud anteriores** Maniobra de actitud potencialmente rápida y de gran desplazamiento angular

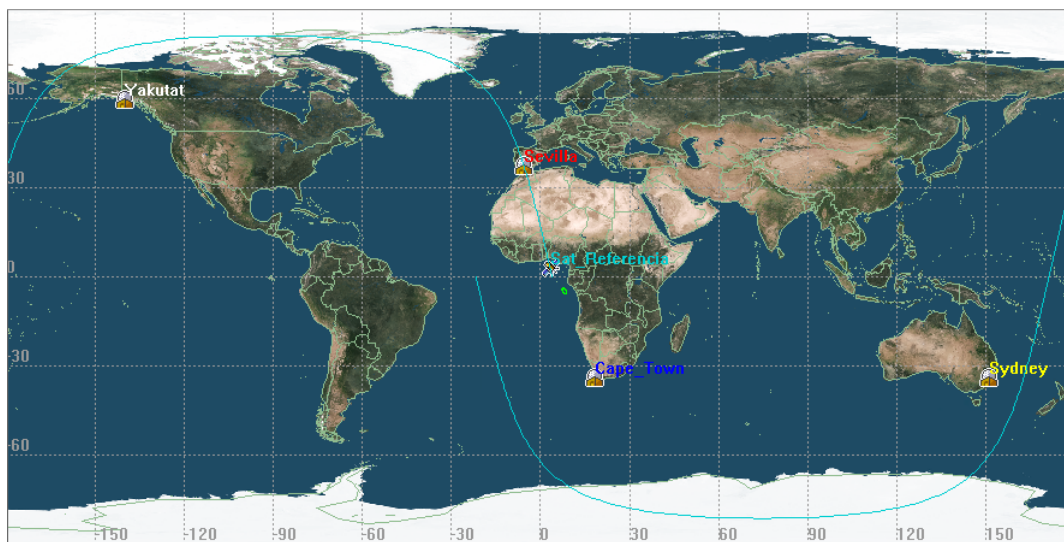


Figura 1.2: Traza sobre la superficie terrestre de la órbita planeada, y las estaciones objetivo. El sentido de la órbita es tal que el paso sobre Sevilla se realiza de Sur a Norte.

Las restricciones de diseño de la órbita y los subsiguientes elementos orbitales influirán, como se verá a lo largo del trabajo, sobre el propio sistema de estimación y control de actitud.

Capítulo 2

Métodos de control y estimación de actitud

El *control de actitud* es el proceso de adquisición y mantenimiento de una determinada orientación en el espacio. Una *maniobra de actitud* es el proceso de reorientación del vehículo espacial de una actitud a otra. Una maniobra de actitud en la que la actitud inicial es desconocida se denomina *adquisición de actitud*. La *estabilización de actitud* es el proceso de mantenimiento de una cierta actitud respecto a un sistema de referencia conocido. Este sistema de referencia puede ser fijo en ejes inerciales o ligeramente móvil, como en el caso de satélites orientados a la Tierra. Finalmente, el *seguimiento de actitud* es la estabilización en torno a una referencia de actitud móvil. En este proyecto se tratarán en profundidad los perfiles de seguimiento, estabilización y maniobra de actitud.

Los métodos de control de actitud pueden clasificarse en:

- **Control pasivo** Carecen de lógica de comando, es decir, no necesitan ningún tipo de procesamiento de información para su actuación, puesto que aprovechan algún tipo de efecto físico o natural.
- **Control activo** Operan en base a una señal de error de actitud, y requieren de un trabajo continuo por parte del hardware del sistema de control.

La selección del sistema de control de actitud depende en gran medida de la misión del vehículo espacial. La utilización de un sistema de control pasivo, activo o una combinación de ambos depende de los requerimientos de apuntamiento y estabilidad, restricciones energéticas, interacción del sistema de control con equipamiento o experimentos a bordo, restricciones de peso, características de la órbita y de las propiedades másicas del vehículo.

En este capítulo se realiza una revisión de los diferentes métodos de control de actitud en vehículos espaciales, con objeto de seleccionar el método más adecuado para llevar a cabo la misión propuesta.

2.1. Sistemas de control pasivo

Los sistemas de Control Pasivo típicamente encontrados en vehículos espaciales son los siguientes:

- Estabilización por rotación (*spin stabilized systems*).
- Estabilización por rotación doble (*dual-spin stabilized systems*).
- Estabilización por gradiente gravitatorio (G^2).
- Estabilización por volante de inercia (*bias-momentum stabilized systems*).
- Estabilización por momentos magnéticos.

2.1.1. Estabilización por rotación

Es una técnica de control pasivo basada en la rotación del vehículo completo, de manera que el vector momento cinético se mantiene aproximadamente constante respecto a un sistema inercial. Los vehículos estabilizados mediante esta técnica (*spinners*) utilizan la estabilidad giroscópica para resistir momentos perturbadores en torno a los ejes perpendiculares al eje de giro.

En ausencia de disipación de energía, esta técnica de estabilización es posible haciendo girar al vehículo en torno a los ejes de mayor o menor inercia. Sin embargo, mecanismos de disipación de energía inherentes al vehículo (como movimientos de combustible o amortiguamiento estructural) provocarán una tendencia al estado de equilibrio de menor energía, esto es, la rotación en torno al eje mayor. Por lo tanto, la estabilización en torno al eje menor es imposible en la práctica.

En el caso de vehículos con simetría de revolución, los vehículos oblatos exhibirán una estabilidad pasiva girando en torno a su eje de simetría imposible en vehículos prolatos. Las perturbaciones externas provocarán sin embargo un movimiento de nutación y precesión del eje de rotación, que puede ser eliminado mediante amortiguadores de nutación.

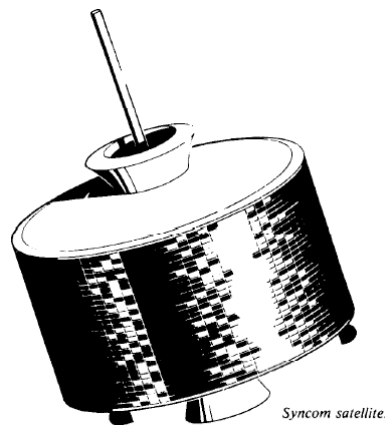


Figura 2.1: Satélite Syncom, estabilizador por rotación.

Para acelerar o frenar la rotación se emplean propulsores o (sólo para frenar) sistemas yo-yo (revisados en la sección 8.2.4).

Los spinners tienen una serie de ventajas: es un método económico de estabilización, son relativamente simples (no precisan complicados sistemas de control adicionales), tienen una larga duración sin supervisión adicional, simplifican el diseño del sistema de control térmico y el movimiento de rotación puede aprovecharse para sistemas de escaneo de a bordo.

Las desventajas principales son:

- El eje de giro ha de ser el mayor, por lo que las propiedades másicas del vehículo han de controlarse.

- El vector momento cinético obliga a utilizar mayores cantidades de combustible en maniobras de reorientación que en vehículos sin momento cinético neto, reduciendo la utilidad de este método de estabilización para cargas de pago que precisen una reorientación frecuente.
- Los sensores estáticos sólo se pueden instalar en la dirección del eje mayor.

2.1.2. Estabilización por rotación doble

Una variación de la técnica anterior es la estabilización por rotación doble, en la que el vehículo espacial consta de dos secciones que giran en torno al mismo eje. Normalmente, una sección, el rotor, gira a cierta velocidad proporcionando estabilidad giroscópica, mientras que la otra, el estátor o plataforma, se mantiene estática para mantener un eje apuntando a la Tierra o al Sol, y aloja la instrumentación.

La combinación de secciones giratoria y fija permite la incorporación de gran variedad de instrumentación en un solo vehículo espacial. Además, con un diseño adecuado, un *dual spinner* puede ser pasivamente estable girando en torno al eje menor. Esto permite vehículos prolatos, cuya forma esbelta se adapta mejor a los vehículos lanzadores. La desventaja principal de estos vehículos radica en la complejidad adicional del mecanismo de acoplamiento rotor-estátor. Esta complejidad puede incrementar costes y reducir la fiabilidad en relación a los *spinners*.

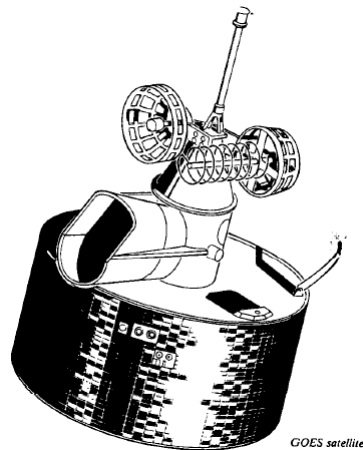


Figura 2.2: Satélite GOES-4. Versiones posteriores del proyecto incorporan estabilización en tres ejes

La estabilización por rotación suele precisar de un sistema de control activo adicional para ajustar regularmente la actitud del vehículo y la velocidad de rotación para contrarrestar los momentos perturbadores. Además es necesario amortiguar la nutación causada por perturbaciones externas, movimientos de precesión causados por el sistema control de actitud o movimientos de combustible.

La disipación de energía por amortiguamiento estructural o movimiento de fluidos, presentes en mayor o menor grado en todos los vehículos espaciales, disminuye el movimiento de nutación. Una vez la excitación cesa, la amplitud de nutación disminuye según estos mecanismos disipen energía. Pero este amortiguamiento natural puede tardar horas en ser efectivo. Esta fuente de error puede disiparse en cuestión de minutos mediante disipadores de nutación.

2.1.3. Estabilización mediante gradiente gravitatorio

El gradiente gravitatorio, o G2, es un momento gravitacional al que están sometidos todos los cuerpos no esféricos debido a la variación de la fuerza gravitatoria a lo largo del cuerpo. Tiende a alinear, en un movimiento pendular, el eje menor del vehículo en torno a la vertical local en la órbita, en una situación de equilibrio biestable. Es decir, el vehículo apuntará hacia el cuerpo central, o en la misma dirección pero en sentido opuesto.

Tiende además a alinear el eje mayor con la perpendicular al plano orbital y el eje intermedio con la dirección de la órbita. La tendencia a la situación de equilibrio es sin embargo lenta y errática, con movimientos oscilatorios de una amplitud determinada en torno a la situación de equilibrio, en torno a un valor medio. Los largos tiempos característicos de estabilización obligan al uso de disipadores, llamados disipadores de libración.

Las frecuencias naturales del vehículo son función de las diferencias entre los momentos de inercia. El diseño del vehículo espacial ha de tener en cuenta este efecto para la estabilización, de manera que estas frecuencias no sean próximas a la de excitación del GG. Se añaden mástiles y booms para aumentar las diferencias entre los momentos de inercia del vehículo, y así aumentar la estabilidad por GG.

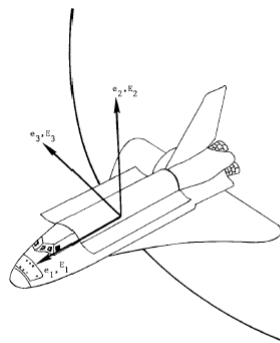


Figure 7.9 Space Shuttle body axes.

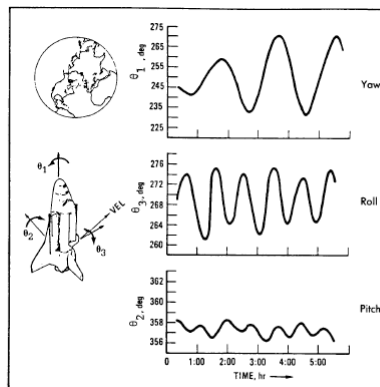


Figure 7.10 Space Shuttle attitude excursions in gravity gradient mode in an orbital coordinate frame.

Figura 2.3: Oscilaciones típicas provocadas por el gradiente gravitatorio en el Space Shuttle

A pesar de resultar un mecanismo de estabilización poco preciso (con amplitudes de oscilación de 1-10°) y lento, es deseable en determinadas misiones o fases de una misión por su simplicidad, fiabilidad, larga vida y bajo coste. En algunos casos el G2 es un mecanismo secundario de estabilización, para ahorrar combustible en situaciones en las que una actitud precisa no es de capital importancia.

2.1.4. Estabilización por momentos magnéticos

Los magnetopares se utilizan extensivamente en vehículos espaciales. Están diseñados para generar momentos dipolares magnéticos controlables con varias aplicaciones, como por ejemplo amortiguamiento activo de libraciones en vehículos estabilizados por GG o descarga del momento cinético de las ruedas de reacción.

En general es un sistema de control de actitud utilizado por su simplicidad y puesto que no supone consumo de combustible alguno, con el consiguiente ahorro de peso. Sin embargo los

magnetopares también pueden añadir un peso relativamente elevado dependiendo de la misión, por lo que es necesario analizar su conveniencia en función de la misión general del satélite.

Como se verá en la sección 8.2, el magnetopar consiste en una bobina arrollada a un núcleo magnético. Cuando se aplica una corriente a la bobina, el magnetopar genera un momento magnético debido a la presencia del campo gravitatorio del cuerpo central. Un gran inconveniente de este sistema es que la magnitud del momento generado depende inversamente del cubo de la distancia a la Tierra. El momento también depende de la dirección relativa entre el eje del magnetopar y las líneas del campo magnético en el que se encuentre inmerso, ya que el momento se define como $T_{mag} = M \times B$, donde T_{mag} es el par generado, M el momento dipolar creado por el magnetopar y B el campo magnético terrestre.

Puede estimarse la influencia de esta dependencia sobre la eficacia del sistema de control de actitud: con un dipolo típico de $M = 100 \text{ A}\cdot\text{m}^2$ orientado en perpendicular al campo magnético terrestre a una altitud de 400 km, el momento máximo que puede generar el magnetopar es del orden de $10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}$. El mismo actuador en órbita geostacionaria sólo proporcionará un par máximo del orden de $10^{-6} \text{ N}\cdot\text{m}$ (afortunadamente, los momentos perturbadores a los que se someten los satélites geostacionarios son de ese mismo orden de magnitud, por lo que un momento dipolar de unos $300 \text{ A}\cdot\text{m}^2$ sería suficiente para la estabilización). Puesto que la condición de perpendicularidad asumida no se cumple generalmente, es obvio que los momentos de control generados con este método son bastante pequeños.

Además, desde los polos al ecuador la intensidad del campo magnético terrestre disminuye hasta la mitad, por lo cual se suele utilizar con más frecuencia en órbitas de gran inclinación.

Asumiendo que los tiempos de respuesta son aceptables para la misión, el sistema de control tiene la gran ventaja de ser mucho más barato que un sistema basado en tres ruedas de reacción, puesto que el precio de un magnetopar es típicamente un tercio del de una rueda de reacción.

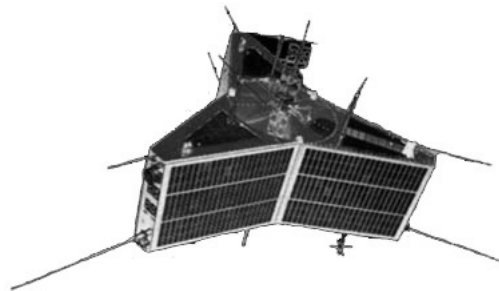


Figura 2.4: AMSAT OSCAR-10, estabilizado magnéticamente

2.1.5. Estabilización por volante de inercia

Otro concepto de estabilización giroscópica consiste en la estabilización por volante de inercia. Se incorpora un disco de elevada inercia girando a gran velocidad en el interior del vehículo, eliminando la necesidad de elementos externos rotatorios.

Suele colocarse con el eje perpendicular al plano orbital, combinándose con el gradiente gravitatorio en misiones de apuntamiento en dirección nadir (satélites de comunicaciones, meteorológicos, escaneo terrestre, etc.). Variando la velocidad de giro del volante de inercia pueden realizarse maniobras en el plano orbital, gracias a la conservación del momento cinético. Bajo ciertas condiciones, también puede formar parte de un sistema de control activo de actitud en tres ejes. Sin embargo, generalmente su efecto estabilizador disminuye la maniobrabilidad para la que

los sistemas triaxialmente estabilizados suelen estar diseñados, por lo que su uso conjunto es muy restringido.

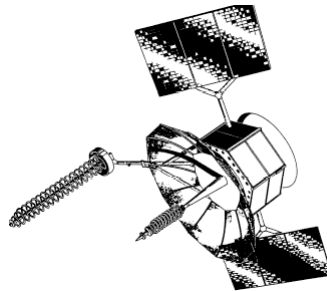


Figura 2.5: Satélite FLTSATCOM, estabilizado por volante de inercia

2.2. Sistemas de control activo

Los sistemas de control pasivo permiten un nivel de estabilidad adecuado para muchas aplicaciones. No obstante (sobre todo al principio de su vida útil), todos los vehículos necesitan realizar:

- Maniobras de actitud.
- Ajustes de la velocidad de rotación.
- Maniobras de stationkeeping.

Para ello es necesario un sistema de control que será activo tanto en el sentido energético como en el estructural, precisando de una fuente de energía y una lógica de control. En misiones que requieran gran precisión en la actitud dicho sistema será primario. En este caso se dice que el satélite está estabilizado en tres ejes o triaxialmente estabilizado. En otros casos puede ser un sistema secundario que sólo se activará cuando sea necesario.

2.2.1. Sistemas de control de reacción (RCS)

El sistema de control de actitud a reacción (RCS) consiste en un conjunto de propulsores distribuidos por el vehículo espacial, generando momentos de control que permitan modificar la actitud del vehículo. Puesto que cada par de propulsores sólo puede generar momento en un sentido en cada eje, es necesario generalmente un mínimo de doce propulsores, con una pareja por eje principal. Sin embargo, algunos sistemas más sofisticados permiten el control en tres ejes con sólo cuatro propulsores, estratégicamente situados en el cuerpo del satélite (formando un tetraedro). El inconveniente principal de esta configuración es que no permite el incremento lineal de velocidad angular en cualquier eje del vehículo, ya que no existe un par de propulsores (momentos de control en ambos sentidos) en los tres ejes del vehículo [17].

El nivel de momento que un propulsor desarrolla no sólo depende del nivel de empuje disponible, también de la distancia al eje de giro. De esta forma, el uso correcto de un determinado propulsor depende de su localización respecto al eje de actuación. La distancia al eje de giro del propulsor supone una decisión crítica de diseño. Distancias menores permiten niveles de momento más pequeños, consiguiendo un control más preciso, a costa de una menor eficiencia en el uso de

combustible. La localización y posición de los propulsores en el vehículo también depende de la instrumentación de abordó, de forma que no se dañen paneles solares o sensores ópticos con el chorro eyectado.

Los sistemas RCS basados en propulsión química sólo pueden ser activados en modo “todo o nada”, no existen propulsores químicos que proporcionen un par de control lineal, continuo y suave. Este hecho complica la formulación analítica del sistema de control que implemente propulsores como actuadores de actitud. Sin embargo pueden proporcionar altos niveles de momento. Son comunes momentos de control de 0.01 a 30 N·m para la mayoría de vehículos espaciales.

El algoritmo que transforma el momento de control a aplicar en torno a los ejes cuerpo en activaciones de los propulsores es muy complejo, por dos razones. En primer lugar, los propulsores no son actuadores lineales, ya que el nivel de momento desarrollado es constante. Por lo tanto el nivel de momento generado depende del tiempo de activación. En segundo lugar, un propulsor sólo puede generar momentos en un sólo sentido. Para conseguir momentos en otro sentido del mismo eje es necesario activar un propulsor diferente.

El sistema de control de actitud basado en RCS se apoya básicamente en una lógica de plano de fases y una lógica de selección de propulsores. Tomando como entrada el error de actitud y velocidades angulares, el plano de fases permite calcular el cambio deseado del vector velocidad angular, resultando en el vector en torno al cual el vehículo ha de girar para describir la rotación desde la actitud inicial a la comandada. La lógica de selección de propulsores traduce la orden de giro en igniciones de los propulsores. Utiliza el producto escalar para calcular la contribución de momento de cada propulsor en la dirección deseada, y selecciona unos pocos propulsores cuya contribución es más importante en dicha dirección.

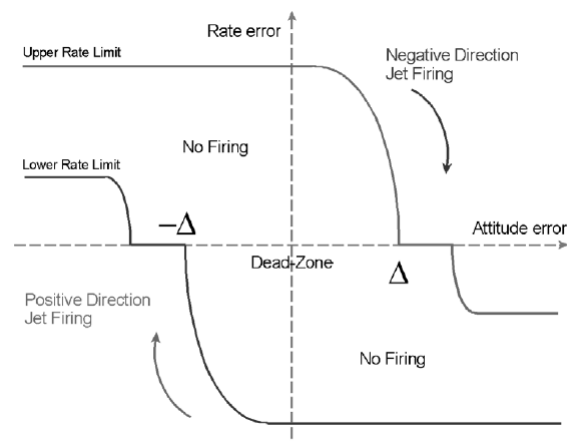


Figura 2.6: El plano de fases determina la condición de ignición

La figura 2.6 muestra la lógica del plano de fases en un eje. Determina la dirección de la aceleración a partir de los errores de actitud y velocidad angular. Se disponen tres planos de fases trabajando simultáneamente para los tres ejes del vehículo. Cada plano de fases consiste en tres regiones, una región sin ignición (o “zona muerta”), otra con ignición en sentido positivo y otra en el sentido negativo del eje. La ignición se basa pues en el error combinado de actitud y velocidad angular. Se suelen incluir líneas de histéresis, que permiten ahorrar combustible impidiendo la ignición repetitiva de los propulsores.

Existe otro tipo de sistemas RCS que permite un par de control continuo y suave, los basados en propulsión eléctrica. Sin embargo, como se apuntará en la sección 8.2, son sistemas pesados y caros, con niveles de momento máximo pequeños.

Es importante tener en cuenta la relación estructura-RCS. La dinámica estructural es especialmente importante puesto que los momentos de control en muchas misiones son tan intensos que excitan modos de vibración del vehículo. Este problema, existente en la mayoría de métodos de control de actitud, presenta en este caso el agravante de la naturaleza impulsiva de los propulsores. El sistema de control habrá de tenerlo en cuenta, así como la influencia en el movimiento de fluidos internos (sloshing).

2.2.2. Sistemas de intercambio de momento cinético

Los sistemas de control magnético proporcionan un par de control continuo y suave. Sin embargo los niveles de momento alcanzados mediante magnetopares son pequeños (del orden de 1-10 mN·m), normalmente insuficientes para permitir maniobras rápidas. Depende asimismo de la inclinación de la órbita de trabajo y la altitud de la misma. Además, el control magnético sólo puede utilizarse en vehículos que orbiten la Tierra, ya que está basado en el campo magnético terrestre.

Los sistemas RCS son no lineales, en el sentido de que proporcionan un momento de control de amplitud constante y duración determinada. Los niveles de momento alcanzables son muy grandes. Sin embargo no es posible un control continuo y suave dada la naturaleza impulsiva de los propulsores.

Los momentos extraídos de la presión solar no pueden utilizarse para las maniobras de actitud, ya que los niveles de momento conseguidos son, a lo sumo, del orden de $\mu\text{N}\cdot\text{m}$, claramente insuficientes para esta tarea. Además no puede obtenerse momento de control en torno a los tres ejes del vehículo. Sin embargo, los momentos de la presión solar se usan a veces para contrarrestar los momentos solares perturbadores que sufren los satélites en órbita geoestacionaria, y como amortiguadores de la nutación en satélites estabilizados por volante de inercia.

La opción restante está basada en masas giratorias dentro del cuerpo del satélite, de manera que el momento cinético se transfiera entre diferentes partes del satélite sin cambiar el momento cinético total del vehículo. Estas masas giratorias son los dispositivos de intercambio angular, detallados en la sección 8.2.3.

Para maniobras de actitud precisas y rápidas se eligen las ruedas de reacción, puesto que permiten un control suave y continuo con las mínimas perturbaciones parásitas posibles. Los niveles de momento alcanzables van típicamente de 0.05-2 N·m. Con los CMGs pueden alcanzarse niveles de unos 200 N·m. Sin embargo tales dispositivos son muy pesados y rara vez se usan en el sistema de control de actitud de satélites de tamaño ordinario.

Normalmente se utilizan tres ruedas de reacción para controlar el vehículo espacial, dispuestas con los ejes de las ruedas alineados con los ejes principales del vehículo; es común también añadir una cuarta rueda de reacción por redundancia. En las series de satélites IUE y MMS se introdujo por primera vez una cuarta rueda de reacción no paralela a ninguna de las tres ruedas principales, útil en caso de fallo de alguna rueda ortogonal. En la misión HEAO-B se utilizó una configuración no ortogonal de cuatro ruedas de reacción.

Puesto que las ruedas de reacción trabajan nominalmente con momento cinético nulo, se utilizan fundamentalmente para absorber momentos perturbadores cíclicos, almacenando temporalmente el momento cinético no deseado. Sin embargo, los términos seculares de las perturbaciones (generalmente del mismo orden de magnitud que los términos cíclicos) provocarán en algún momento la saturación de la capacidad almacenadora del dispositivo. Es decir, la rueda de reacción alcanza la velocidad angular máxima. En esta situación es necesario descargar periódicamente la rueda de reacción mediante la aplicación de un momento externo al sistema (variando así el momento cinético total del vehículo) de manera que se restituya la condición nominal de velocidad

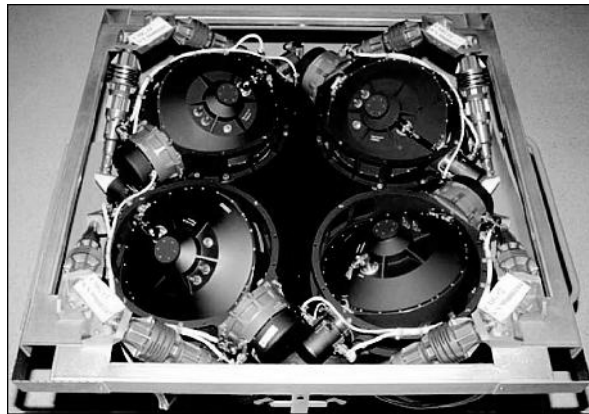


Figura 2.7: Configuración piramidal de cuatro CMGs del BATC M-95

angular nula. Estos momentos externos pueden aplicarse mediante sistemas auxiliares como RCS o magnetopares.

2.3. Sistema de control elegido

La elección del sistema de control más apropiado se realiza en base a los requisitos de la misión:

- Maniobras de seguimiento: el vehículo ha de ser triaxialmente estabilizado. Es preciso un control total sobre la actitud del vehículo
- Elevada precisión de apuntamiento en la fase de seguimiento. Típicamente del orden del segundo de arco
- Capacidad de maniobras rápidas: es conveniente mantener un tiempo reducido de maniobra entre perfiles de actitud, de forma que se aproveche al máximo cada intervalo de tiempo de acceso al objetivo (Sol o estación)

Por lo tanto el sistema de control ha de ser capaz de controlar los tres ejes cuerpo del vehículo con precisión. Los sistemas de control triaxial revisados son los sistemas RCS y los sistemas de intercambio angular. Las leyes de control “bang-bang” características de los sistemas RCS no pueden realizar maniobras con la precisión requerida por la instrumentación de a bordo. Además, un uso intensivo del sistema RCS produce contaminantes que pueden afectar a la delicada instrumentación óptica de a bordo. Dentro de los sistemas de intercambio de momento cinético, el sistema más apropiado para las características más típicas de un satélite de reconocimiento son las ruedas de reacción.

Cabe preguntarse si los requisitos de maniobrabilidad impuestos por la misión pueden satisfacerse mediante un conjunto de ruedas de reacción convencionales. La maniobra más exigente que habrá de realizar el sistema de control es la maniobra de transición entre seguimiento del Sol y seguimiento del objetivo terrestre. En el caso más desfavorable, el satélite habrá de girar 180° en un tiempo de transición característico $\hat{T}_{tr} \approx 100$ s. Por tanto, una estimación inicial de la capacidad de almacenamiento de momento cinético necesaria es

$$\hat{h} \approx \hat{I} \hat{\omega}_{max}, \quad (2.1)$$

donde \hat{I} es el momento de inercia típico respecto a un eje de un satélite de tamaño medio, $\hat{I} \approx 1000 \text{ kg m}^2$, y

$$\hat{\omega}_{max} \approx \frac{\pi}{T_{tr}} \approx 3 \cdot 10^{-2} \text{ rad/s} \quad (2.2)$$

Entonces, para una rueda de reacción con una velocidad máxima típica $\hat{\omega}_{max}^w$ de 10000 RPM $\approx 1000 \text{ rad/s}$, el momento de inercia de la rueda será del orden de

$$\hat{J}_a \approx \frac{\hat{I} \hat{\omega}_{max}}{\hat{\omega}_{max}^w} \approx 3 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \quad (2.3)$$

orden de magnitud aceptable para una rueda de reacción.

Puede también realizarse una estimación inicial del par motor necesario. El par motor habrá de ser del orden del necesario para llevar a cabo una maniobra de transición de actitud típica, por lo que

$$u_{max} = T_{max} = I \dot{\omega}_{max},$$

donde $\dot{\omega}_{max}$ viene de la maniobra más desfavorable

$$\dot{\omega}_{max} \approx \frac{2\Theta_{tr}}{T_{tr}^2}.$$

Entonces, si se supone una maniobra de un ángulo de Euler total $\Theta_{tr} = 180^\circ$ realizada durante un tiempo $T_{tr} = 80 \text{ s}$ aplicada a un vehículo con un momento de inercia característico de $I = 200 \text{ N} \cdot \text{m}$, el par máximo necesario será del orden de

$$u_{max} \approx \frac{2I\Theta_{tr}}{T_{tr}^2} \approx 0,2 \text{ N} \cdot \text{m},$$

perfectamente admisible para los motores típicamente utilizados en estos sistemas.

El sistema de control elegido es un **sistema de intercambio de momento cinético**, formado por **tres ruedas de reacción ortogonales**. Se analizará la necesidad e impacto de añadir un volante de inercia en uno de los ejes cuerpo. El sistema de intercambio de momento cinético se considera el sistema de control primario, mientras que suele ser necesario disponer de un sistema de control auxiliar, como RCS o magnetopares, que permita la descarga de momento cinético en caso de saturación del sistema primario; no obstante esta parte del diseño queda fuera del alcance de este proyecto, y se propone como trabajo futuro.

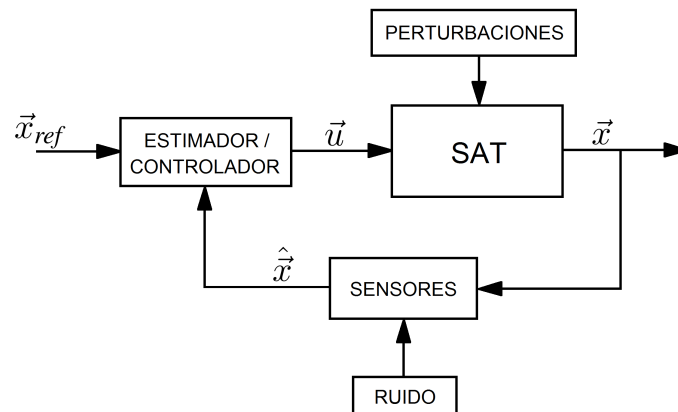


Figura 2.8: Configuración esquemática del ADCS

La estimación de actitud se realiza como fusión de las medidas de sensores inerciales (giróscopos) y sensores de estrellas empleando un filtro de Kalman, permitiendo una medida de la actitud triaxial, fiable, precisa y de gran disponibilidad.

Capítulo 3

Modelo del sistema

En este capítulo se plantean las ecuaciones mecánicas del sistema. Puesto que el sistema de control elegido está basado en ruedas de reacción, las ecuaciones del giróstato incluyen las ecuaciones cinemáticas y dinámicas del vehículo espacial, más las ecuaciones dinámicas de las ruedas. Se incluyen además las ecuaciones del modelo de gradiente gravitatorio, incluido como la única perturbación aplicable en la órbita considerada.

Este modelo no lineal del sistema permitirá simular el comportamiento del vehículo para las leyes de control que se desarrollarán en capítulos posteriores, y supone la base fundamental sobre la que se calculará el controlador óptimo.

3.1. Ecuaciones cinemáticas

Al formular las ecuaciones cinemáticas, cabe preguntarse qué forma de representación de la actitud es más ventajosa para el propósito de este proyecto. Existen en la literatura [23] diversas formas de parametrizar la actitud:

Ángulos de Euler Describen la actitud de un sistema de referencia respecto al sistema de referencia origen como una secuencia de tres rotaciones en torno a los ejes cuerpo. Precisa de los tres ángulos de Euler, más la secuencia en que éstos han de aplicarse. De esta manera, la transformación de actitud de un sistema de referencia a otro se realiza multiplicando según el orden de la secuencia empleada por matrices de giro en los ejes cuerpo. A pesar de que esta parametrización de la actitud es más intuitiva, la formulación de las ecuaciones cinemáticas en términos de los ángulos de Euler presenta siempre una singularidad, independientemente de la secuencia de ángulos utilizada. Por ejemplo, para la secuencia convencional de ángulos de Euler “313”, las ecuaciones cinemáticas resultan

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sin \theta} \begin{bmatrix} \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ \cos \psi \sin \theta & -\sin \psi \sin \theta & 0 \\ -\sin \psi \cos \theta & -\cos \psi \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

En esta secuencia se tiene una singularidad para $\theta = 0/180^\circ$, resultando inviable su utilización en la descripción de la actitud de vehículos espaciales.

Matriz de cosenos directores Compuesta por los 9 cosenos de los ángulos formados por los vectores del sistema de referencia ejes cuerpo con los del sistema de referencia origen. Siendo una parametrización tan redundante no resulta eficiente para los algoritmos de estimación de actitud necesarios en este trabajo. Por otro lado, la integración numérica de las ecuaciones formuladas en términos de la matriz de rotación introduce errores de redondeo que resultan en la falta de ortogonalidad de la matriz. La corrección de la ortogonalidad de la matriz en cada paso de la integración hace muy poco eficiente esta representación de la actitud. Es sin embargo útil para realizar cambios de sistema de referencia.

Eje y ángulo de Euler El eje de Euler es el vector en torno al cual ha de girarse el sistema de referencia origen para obtener la actitud del sistema de referencia objeto de representación. El ángulo de Euler será la cantidad a girar en torno al eje de Euler. Esta parametrización es también redundante debido a la restricción sobre la norma del eje de Euler (ha de ser unitario). Tiene el inconveniente adicional de que el eje no está bien definido cuando el ángulo es nulo.

Estas representaciones no son computacionalmente eficientes, bien por su complejidad, bien por la presencia de singularidades en las ecuaciones cinemáticas que de su naturaleza se desprende. La forma de representación de actitud más eficiente computacionalmente para el propósito de este trabajo es el *cuaternión de actitud*. Es la parametrización más útil para la computación de a bordo en tiempo real de la actitud de vehículos espaciales.

Cuaternión de actitud Un cuaternión es, en general, una cuaterna de valores

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{q} \\ q_4 \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

donde q_4 es la parte escalar del cuaternión y $\vec{q} = [q_1, q_2, q_3]^T$ es la parte vectorial.

La razón fundamental que hace a los cuaterniones especialmente útiles para la computación a bordo de cálculos de navegación es su producto. Matemáticamente asimilable a un número complejo de cuatro dimensiones, tiene propiedades especiales. Según el álgebra de Hamilton, dados dos cuaterniones, q y q' , se define el producto de ambos como:

$$q \otimes q' = \begin{bmatrix} q'_4 \vec{q} + q_4 \vec{q}' + \vec{q} \times \vec{q}' \\ q'_4 q_4 - \vec{q} \cdot \vec{q}' \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

donde \times es el producto vectorial y \cdot el escalar. Este producto, que no es conmutativo, se puede expresar matricialmente de dos formas:

$$q \otimes q' = \begin{bmatrix} q'_4 & q'_3 & -q'_2 & q'_1 \\ -q'_3 & q'_4 & q'_1 & q'_2 \\ q'_2 & -q'_1 & q'_4 & q'_3 \\ -q'_1 & -q'_2 & -q'_3 & q'_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 & q_1 \\ q_3 & q_4 & -q_1 & q_2 \\ -q_2 & q_1 & q_4 & q_3 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 & q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q'_1 \\ q'_2 \\ q'_3 \\ q'_4 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Una propiedad útil del producto de cuaterniones es que si se asemeja al producto de la matriz asociada al cuaternión de la forma

$$q \otimes q' = M(q)q', \quad (3.5)$$

donde $M(q)$ es la matriz de la segunda fórmula de 3.4, se cumple la siguiente relación

$$M(q)M(q') = M(q \otimes q'). \quad (3.6)$$

Obsérvese que el cuaternión $\begin{bmatrix} \vec{0} \\ 1 \end{bmatrix}$ es la identidad multiplicativa, es decir, $q \otimes \begin{bmatrix} \vec{0} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ 1 \end{bmatrix} \otimes q = q$.

Si se emplea un cuaternión q para representar la actitud, entonces $\|q\| = 1$, donde el módulo de un cuaternión se define como

$$\|q\| = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}. \quad (3.7)$$

Un cuaternión de actitud codifica ángulo de Euler θ y eje de Euler \vec{e} de la siguiente forma:

$$q = \begin{bmatrix} \vec{e} \text{sen } \theta/2 \\ \cos \theta/2 \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Obsérvese que $360 - \theta$ y $-\vec{e}$ representan la misma actitud (a través del giro opuesto). Por tanto si se define q' como

$$q' = \begin{bmatrix} -\vec{e} \text{sen}(360 - \theta)/2 \\ \cos(360 - \theta)/2 \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

debe representar el mismo giro. Puesto que $\text{sen}(360 - \theta)/2 = \text{sen } 180 - \theta/2 = \text{sen } \theta/2$ y $\cos(360 - \theta)/2 = \cos 180 - \theta/2 = -\cos \theta/2$, se tiene que

$$q' = \begin{bmatrix} -\vec{e} \text{sen } \theta/2 \\ -\cos \theta/2 \end{bmatrix} = -q, \quad (3.10)$$

es decir, tanto un cuaternión como su opuesto representan la misma actitud. Conviene por tanto restringir los posibles valores del cuaternión para evitar ambigüedades, por ejemplo, imponer $q_4 \geq 0$. Sin embargo, durante los cálculos se deja libre el signo de q_4 para evitar discontinuidades que redunden en errores en los cálculos de las velocidades angulares.

Si además se define el conjugado de un cuaternión q como

$$q^* = \begin{bmatrix} -\vec{q} \\ q_4 \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

el producto $q \otimes q^* = q^* \otimes q = \begin{bmatrix} 0 \\ \|q\| \end{bmatrix}$. Es decir, el conjugado q^* supone la rotación opuesta a la generada por q . Esto implica que si

$$q' \otimes q'' = q''', \quad \text{entonces} \quad q'' = q'^* \otimes q'''. \quad (3.12)$$

Esta regla del producto de cuaterniones presenta la gran ventaja computacional de que, si se trata de cuaterniones de actitud, rotaciones sucesivas sólo implican productos, y además el cuaternión de rotación desde una actitud a otra puede obtenerse sólo con productos.

De manera análoga, la rotación de un vector mediante un cuaternión de actitud se puede realizar a través de su matriz de cosenos directores asociada. Esta matriz $A(q)$ se calcula mediante la fórmula de Euler-Rodrigues

$$A(q) = (q_4^2 - \vec{q} \cdot \vec{q})I + 2\vec{q}\vec{q}^T - 2q_4Q \quad (3.13)$$

donde Q es la matriz asociada al producto vectorial de \vec{q}

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Ecuaciones cinemáticas en cuaterniones

La relación entre la variación del cuaternión con el tiempo y la velocidad angular es

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 & q_1 \\ q_3 & q_4 & -q_1 & q_2 \\ -q_2 & q_1 & q_4 & q_3 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 & q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Obsérvese que definiendo un “cuaternión de velocidad angular” como $\begin{bmatrix} \vec{\omega} \\ 0 \end{bmatrix}$ se cumple que

$$\dot{q} = \frac{1}{2} q \otimes \begin{bmatrix} \vec{\omega} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Las ecuaciones cinemáticas resultantes son muy apropiadas para el tratamiento numérico, al prescindir de funciones trigonométricas (menor costo computacional) y estar bien definidas para cualquier actitud.

3.2. Ecuaciones dinámicas

Se considera el sistema de referencia inercial J2000, denominado sistema ‘A’, y el sistema ejes cuerpo, denominado ‘B’. Por el teorema de conservación del momento cinético,

$$\left. \frac{d\vec{\Gamma}}{dt} \right|_A = \vec{M} = \left. \frac{d\vec{\Gamma}}{dt} \right|_B + \vec{\omega} \times \vec{\Gamma}, \quad (3.17)$$

donde \vec{M} es el momento aplicado al sistema y $\vec{\Gamma}$ el momento cinético del sistema completo.

Considerando que el vehículo espacial incluye tres ruedas de reacción (una en cada eje principal), el momento cinético del sistema completo se compone como la suma de los momentos cinéticos del vehículo espacial más el de las ruedas de reacción

$$\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}_{sc} + \vec{\Gamma}_w. \quad (3.18)$$

Si las inercias del vehículo espacial son I_i^{sc} , su momento cinético es

$$\vec{\Gamma}_{sc} = \begin{bmatrix} I_1^{sc} \omega_1 \\ I_2^{sc} \omega_2 \\ I_3^{sc} \omega_3 \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Por otro lado, el momento cinético en ejes inerciales debido a las ruedas de reacción, según Junkins [5], es

$$\vec{\Gamma}_w = \begin{bmatrix} J_a \omega_1 + 2J_t \omega_1 + J_a \omega_1^w \\ J_a \omega_2 + 2J_t \omega_2 + J_a \omega_2^w \\ J_a \omega_3 + 2J_t \omega_3 + J_a \omega_3^w \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

donde J_a y J_t son las inercias axial y transversal de las ruedas de reacción, supuestas iguales en las tres ruedas. Nótese que las velocidades angulares de las ruedas ω_i^w son relativas a los ejes cuerpo del vehículo.

Si se define el momento cinético relativo a los ejes cuerpo de las ruedas de reacción como

$$h_i = J_a \omega_i^w, \quad (3.21)$$

y los momentos de inercia compuestos del sistema (vehículo más ruedas) como

$$I_i = I_i^{sc} + J_a + 2J_t, \quad (3.22)$$

introduciendo (3.21) y (3.22) en (3.20), el momento cinético del sistema completo resulta

$$\vec{\Gamma} = \begin{bmatrix} I_1 \omega_1 + h_1 \\ I_2 \omega_2 + h_2 \\ I_3 \omega_3 + h_3 \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

Desarrollando la ecuación (3.17) se obtienen las ecuaciones de Euler

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 &= (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 - h_3 \omega_2 + h_2 \omega_3 - \dot{h}_1 + M_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 &= (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 - h_1 \omega_3 + h_3 \omega_1 - \dot{h}_2 + M_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 &= (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 - h_2 \omega_1 + h_1 \omega_2 - \dot{h}_3 + M_3. \end{aligned} \quad (3.24)$$

El vector de control viene dado por las ecuaciones del movimiento de las ruedas de reacción: *par motor* = $\frac{d}{dt}$ momento cinético axial

$$u_i = J_a \dot{\omega}_i + \dot{h}_i. \quad (3.25)$$

Sustituyendo (3.25) en (3.24) se obtienen las ecuaciones dinámicas definitivas para el vehículo completo:

$$\begin{aligned} (I_1 - J_a) \dot{\omega}_1 &= (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 - h_3 \omega_2 + h_2 \omega_3 - u_1 + M_1 \\ (I_2 - J_a) \dot{\omega}_2 &= (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 - h_1 \omega_3 + h_3 \omega_1 - u_2 + M_2 \\ (I_3 - J_a) \dot{\omega}_3 &= (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 - h_2 \omega_1 + h_1 \omega_2 - u_3 + M_3 \end{aligned} \quad (3.26)$$

El momento aplicado al sistema \vec{M} englobará las perturbaciones externas y momentos auxiliares de control de sistemas RCS o magnetopares. Sin embargo, en este trabajo sólo se considera como momento externo la perturbación más importante en la órbita de trabajo, el *gradiente gravitatorio* (véase la sección 2.1.3). Sus componentes según Wie [23], escritas en términos del cuaternión de actitud referido al sistema de referencia ligado a la órbita VVLH (definido en el apéndice A.D), son

$$\begin{aligned} M_1 &= 6n^2 (I_2 - I_3) (q_1 q_4 + q_2 q_3) (1 - 2q_1^2 - 2q_2^2) \\ M_2 &= 6n^2 (I_3 - I_1) (q_1 q_3 - q_2 q_4) (1 - 2q_1^2 - 2q_2^2) \\ M_3 &= 12n^2 (I_1 - I_2) (q_1 q_3 - q_2 q_4) (q_1 q_4 + q_2 q_3), \end{aligned} \quad (3.27)$$

donde

$$n = \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{a^3}} \quad (3.28)$$

es la velocidad angular orbital del satélite.

Será necesario por tanto transformar el cuaternión de actitud expresado en ejes inerciales J2000 a ejes orbitales VVLH. Este procedimiento se explica en el apéndice A.D. Nótese que aunque el

gradiente gravitatorio es inherente a las propiedades másicas del vehículo, se considera como una perturbación externa cuya influencia será cancelada por el controlador, por lo que no se incluye explícitamente en las ecuaciones dinámicas. De esta manera se evita el acoplamiento explícito del vector velocidad angular $\vec{\omega}$ con el cuaternión de actitud q .

Sustituyendo las ecuaciones dinámicas del vehículo (3.26) en la ecuación del vector de control (3.25) se llega a las ecuaciones dinámicas definitivas para las ruedas de reacción:

$$\begin{aligned}\dot{h}_1 &= -\frac{J_a}{I_1 - J_a} [(I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 - h_3\omega_2 + h_2\omega_3] + \frac{I_1}{I_1 - J_a}u_1 \\ \dot{h}_2 &= -\frac{J_a}{I_2 - J_a} [(I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 - h_1\omega_3 + h_3\omega_1] + \frac{I_2}{I_2 - J_a}u_2 \\ \dot{h}_3 &= -\frac{J_a}{I_3 - J_a} [(I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 - h_2\omega_1 + h_1\omega_2] + \frac{I_3}{I_3 - J_a}u_3.\end{aligned}\quad (3.29)$$

Si además de las tres ruedas de reacción se considera un volante de inercia de momento cinético constante H_0 en el eje Z , simplemente se sustituye h_3 por $(h_3 - H_0)$ en las ecuaciones anteriores.

El conjunto de ecuaciones cinemáticas (3.16), dinámicas del vehículo (3.26) y dinámicas de las ruedas de reacción (3.29) supone un sistema de ecuaciones altamente no-lineal. En el capítulo 4 se linealizará el sistema en torno a la referencia como punto de operación y se utilizará este sistema lineal variable en el tiempo para calcular un controlador óptimo variable en el tiempo a aplicar al sistema no lineal.

Capítulo 4

Algoritmos de control para seguimiento de la referencia

En este capítulo se desarrolla el algoritmo necesario para controlar la dinámica de actitud del satélite, descrita en el capítulo 3. Se revisa el problema general de seguimiento (*tracking*) de un vector de estados de referencia, generado a continuación. También se particulariza el problema de tracking para el caso de actitud en cuaterniones, y se calcula un controlador óptimo apropiado para esta tarea.

4.1. Problema de tracking

El sistema, formado por las ecuaciones cinemáticas (3.16), dinámicas del vehículo (3.26) y dinámicas de las ruedas de reacción (3.29), puede representarse según:

$$\dot{\vec{x}} = f(\vec{x}) + g(\vec{u}), \quad (4.1)$$

donde $\vec{u} = \vec{u}(t)$ es el vector de control y $\vec{x} = \vec{x}(t)$ es el vector de estados, compuesto por el vector velocidad angular del vehículo, el cuaternión de actitud y los momentos cinéticos de las ruedas de reacción

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \vec{\omega}(t) \\ q(t) \\ \vec{h}(t) \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Las dependencias temporales se omiten en lo sucesivo.

Se tratará de estabilizar el estado \vec{x} en torno a un estado de referencia \vec{x}_{ref} , que cumple las ecuaciones del sistema, con un vector de control de referencia \vec{u}_{ref}

$$\dot{\vec{x}}_{ref} = f(\vec{x}_{ref}) + g(\vec{u}_{ref}). \quad (4.3)$$

Al tratarse de una referencia no nula, se plantea el problema de tracking en términos de los errores de las variables respecto a la referencia. El error del vector de control es:

$$\delta \vec{u} = \vec{u} - \vec{u}_{ref} \quad (4.4)$$

Por claridad en la exposición y sin pérdida de generalidad, asumimos que el error del vector de estados respecto a la referencia se escribe según:

$$\delta \vec{x} = \vec{x} - \vec{x}_{ref}. \quad (4.5)$$

De este modo, se puede linealizar el sistema mediante:

$$\dot{\delta x} = \dot{\vec{x}} - \dot{\vec{x}}_{ref} = f(\vec{x}) - f(\vec{x}_{ref}) + g(\vec{u}) - g(\vec{u}_{ref}) \quad (4.6)$$

Bajo la hipótesis fundamental de que los errores serán pequeños,

$$\dot{\delta x} = \left. \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial \vec{x}} \right|_{ref} \delta \vec{x} + \left. \frac{\partial g(\vec{u})}{\partial \vec{u}} \right|_{ref} \delta \vec{u}. \quad (4.7)$$

Identificando las matrices constituyentes del sistema

$$\left. \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial \vec{x}} \right|_{ref} = A(t), \quad \left. \frac{\partial g(\vec{u})}{\partial \vec{u}} \right|_{ref} = B(t) \quad (4.8)$$

se tiene el siguiente sistema lineal variable en el tiempo

$$\dot{\delta x} = A\delta \vec{x} + B\delta \vec{u}. \quad (4.9)$$

En lo sucesivo se calculará un controlador tomando estas matrices A y B como representativas del sistema, y en capítulos posteriores se validará como controlador apto para el sistema no lineal real.

4.2. Generación de la referencia

En el problema de tracking es fundamental la generación de un perfil de actitud de referencia. Cualquier perfil aleatorio que permitiera unas velocidades angulares razonables en relación a la potencia de control disponible (de forma que no se viole la hipótesis de pequeñas desviaciones) serviría para comprobar las características del sistema de control. Sin embargo, se elegirá un perfil de actitud realista, similar al de un satélite que pueda estar sobrevolándonos en este momento.

Fundamentalmente, el perfil de actitud de referencia se divide en 3 subtipos: iluminación máxima de paneles solares, estabilización entorno a una referencia móvil, y transición entre las anteriores. La referencia de actitud construida cumple los requisitos de actitud de cada perfil minimizando la energía necesaria para su seguimiento.

En esta sección se calcula el vector de estados de referencia \vec{x}_{ref} y la señal de control de referencia \vec{u}_{ref} a partir del cuaternión de actitud de referencia q_{ref} . Una vez obtenido éste, se derivan la velocidad angular de referencia $\vec{\omega}_{ref}$ y la aceleración angular de referencia $\vec{\dot{\omega}}_{ref}$, necesarias para calcular el momento cinético de las ruedas de referencia \vec{h}_{ref} y la señal de control de referencia \vec{u}_{ref} , respectivamente.

4.2.1. Iluminación máxima de paneles solares

Este perfil es cuasi-estacionario en ejes inerciales, y sólo obligará al sistema de control a anular las perturbaciones externas. Se toma como perfil de referencia en ausencia de acceso a estaciones terrestres, con el objeto de iluminar perpendicularmente los paneles solares.

Para encontrar la actitud que permite la iluminación máxima de los paneles se puede tener en cuenta el gobierno de STK sobre los paneles solares, del cual se hace uso en este perfil de actitud.

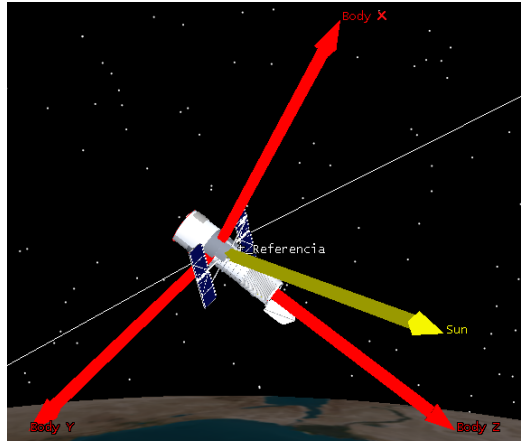


Figura 4.1: Asignación de ejes cuerpo en STK. El eje de apuntamiento es el \vec{Z}

STK controla el ángulo de los paneles solares en torno al eje cuerpo ‘Y’ (ver figura 4.1), de forma que su vector normal y el vector satélite-Sol formen un ángulo mínimo.

Por lo tanto, la condición a imponer para conseguir que el vector normal a los paneles sea paralelo al vector satélite-Sol es que el eje ‘Y’ del satélite sea perpendicular a dicho vector.

Puesto que la condición impuesta es vectorial, es necesario añadir una condición adicional para determinar unívocamente la actitud del satélite durante este perfil. Esta condición consiste en que la actitud de máxima iluminación sea aquella que se consigue girando el cuaternión de actitud previa al perfil de seguimiento del Sol mediante la rotación de ángulo de Euler mínimo que permita la perpendicularidad apropiada. Es decir, se construye girando el último perfil de actitud de acceso a estación terrestre (perfil de actitud precedente) mediante la aplicación del cuaternión de rotación obtenido de los vectores \vec{r}_{\odot} e \vec{Y}_{body} del último instante de acceso a la estación.

Para evitar que la cámara del satélite sea dañada, el eje de la cámara (eje ‘Z’ cuerpo en la figura 4.1) no puede apuntar al Sol. Así, de las infinitas orientaciones que permiten la condición de iluminación máxima hay que excluir un conjunto de cuaterniones cuyo eje ‘Z’ exhiba un ángulo menor de 0.27° (radio angular solar) con respecto al vector satélite-Sol.

En cada instante de tiempo se computa el vector solar mediante sus coordenadas celestes,

$$\vec{r}_{\odot} = \begin{bmatrix} \cos(\delta_{\odot}) \cos(AR_{\odot}) \\ \cos(\delta_{\odot}) \sin(AR_{\odot}) \\ \sin(\delta_{\odot}) \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Se obtiene la dirección del eje Y ‘cuerpo’ del vehículo del último cuaternión de actitud del perfil de referencia anterior, a través de la matriz de cosenos directores, con

$$\vec{Y}_{body}^F = A(q_{ref}^F) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

donde $A(q_{ref}^F)$ se calcula según la fórmula de Euler-Rodriguez de la ecuación (3.13).

Con estos dos vectores se puede construir en cada instante de tiempo el cuaternión de rotación $q_{rot}^{est-Sol}$ que, aplicado a dicho q_{ref}^F , da como resultado el cuaternión de actitud deseado. Este cuaternión de rotación se expresa como

$$q_{rot}^{est-Sol} = \begin{bmatrix} \vec{e} \sin \theta/2 \\ \cos \theta/2 \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

donde el eje de Euler \vec{e} y el ángulo de Euler θ se computan a partir de

$$\vec{e} = \frac{\vec{r}_{\odot} \times \vec{Y}_{body}^F}{|\vec{r}_{\odot} \times \vec{Y}_{body}^F|} \quad (4.13)$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \text{acos}(\vec{r}_{\odot} \cdot \vec{Y}_{body}^F), \quad (4.14)$$

de manera que el eje de giro es perpendicular a ambos \vec{r}_{\odot} y \vec{Y}_{body}^F y el ángulo girado es tal que el ángulo final entre ambos vectores es $\pi/2$.

Finalmente, el cuaternión de actitud de referencia en este perfil de actitud de seguimiento del Sol se obtiene como

$$q_{ref} = q_{rot}^{est-Sol} \otimes q_{ref}^F \quad (4.15)$$

4.2.2. Estabilización en torno a referencia móvil

Es el perfil de actitud fundamental en la misión: el apuntamiento del sensor del satélite a una estación terrestre.

Se trata de seguir con el eje 'Z' cuerpo el vector satélite-estación. El cuaternión de actitud de seguimiento en el instante j será, de entre los infinitos cuaterniones de actitud que cumplen la condición fundamental de alineación de su eje 'Z' con el vector satélite-estación, el obtenido como producto del giro mínimo desde el cuaternión de actitud anterior, en el instante $(j - 1)$. Esto implica que el cuaternión de actitud en cada instante depende del último cuaternión del perfil de actitud anterior.

Desde el instante en el que la estación objetivo es accesible, se computan para cada instante de tiempo los vectores de posición del satélite y de la estación. Se calculan el eje y ángulo de Euler necesarios para alinear el eje 'Z' cuerpo con el vector satélite-estación y se aplica el cuaternión de rotación resultante al cuaternión de actitud inmediatamente anterior.

Para cada instante de tiempo, el vector satélite-estación se obtiene como la diferencia

$$\vec{r}_{sat-est} = \vec{r}_{est} - \vec{r}_{sat}, \quad (4.16)$$

donde \vec{r}_{est} es el vector de posición de la estación objetivo y \vec{r}_{sat} el vector de posición del satélite, ambos referidos al sistema de referencia inercial.

El vector de posición de la estación objetivo queda determinado conociendo la hora sidérea local LST y la latitud de la estación ϕ , a través de

$$\vec{r}_{est} = R_{\oplus} \begin{bmatrix} \cos \phi \cos LST \\ \cos \phi \sin LST \\ \sin \phi \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

y el vector de posición del satélite se obtiene a través de los elementos orbitales, $\{a, \Omega, i, u\}$. Para ello se ha de girar el vector $(a, 0, 0)^T$ según los tres ángulos de Euler que suponen la ascensión recta del nodo ascendente Ω , la inclinación i y el argumento de la latitud u

$$\vec{r}_{sat} = C_{\Omega} C_i C_u \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

donde

$$C'_\Omega = \begin{bmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C'_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{bmatrix} \text{ y } C'_u = \begin{bmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

son las matrices de giro adecuadas.

Nótese que, al haber empleado coordenadas esféricas en la definición del vector de posición de la estación \vec{r}_{est} (ecuación 4.17), es necesario emplear la latitud esférica de la estación, y no la geodética.

De forma análoga al perfil de seguimiento del Sol, se calcula un cuaternión de rotación q_{rot}^{track} de forma que el producto de cuaterniones

$$q_{ref}^{(k)} = q_{rot}^{track} \otimes q_{ref}^{(k-1)}, \quad (4.20)$$

donde $q_{ref}^{(k-1)}$ es el cuaternión de actitud del instante anterior, da como resultado $q_{ref}^{(k)}$, el cuaternión de actitud que cumple la condición de apuntamiento a la estación objetivo para el instante k .

Este cuaternión de rotación viene dado por

$$q_{rot}^{track} = \begin{bmatrix} \vec{e} \sin \theta/2 \\ \cos \theta/2 \end{bmatrix}, \quad (4.21)$$

donde el eje de Euler \vec{e} y el ángulo de Euler θ se computan a partir de

$$\vec{e} = \vec{Z}_{body}^{(k-1)} \times \vec{r}_{sat-est} \quad (4.22)$$

$$\theta = \arccos(\vec{Z}_{body}^{(k-1)} \cdot \vec{r}_{sat-est}). \quad (4.23)$$

El vector $\vec{Z}_{body}^{(k-1)}$ es de nuevo el eje 'Z' cuerpo del cuaternión de actitud del instante anterior ($k-1$), y se calcula mediante la matriz de cosenos directores con la expresión

$$\vec{Z}_{body}^{(k-1)} = \begin{bmatrix} 1 - 2(q_2^2 + q_3^2) & 2(q_1q_2 + q_3q_4) & 2(q_1q_3 - q_2q_4) \\ 2(q_1q_2 - q_3q_4) & 1 - 2(q_1^2 + q_3^2) & 2(q_2q_3 + q_1q_4) \\ 2(q_1q_3 + q_2q_4) & 2(q_2q_3 - q_1q_4) & 1 - 2(q_1^2 + q_2^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

donde q_i son los elementos del conjugado del cuaternión $q_{ref}^{(k-1)}$.

Nótese que al construir la actitud como giros mínimos infinitesimales desde la actitud anterior, la velocidad angular requerida para cumplir el requisito de apuntamiento es mínima.

4.2.3. Perfil de actitud de transición

La concatenación de los dos perfiles de actitud anteriores supone saltos instantáneos en la referencia de actitud, y por tanto la violación de la hipótesis de pequeñas desviaciones en la que se fundamenta la formulación del problema (figura 4.2.a). Además, aceleraciones angulares demasiado grandes durante la maniobra pueden ser perjudiciales desde el punto de vista estructural en determinados vehículos [5]. Para evitarlos, se suavizan los saltos instantáneos superponiendo maniobras de transición de actitud entre perfiles consecutivos (figura 4.2.b). En la sección 6.1.5 se demuestra la necesidad de este perfil de actitud mediante simulaciones numéricas.

Fijado un tiempo de transición, se toma el último cuaternión de actitud del perfil inicial y el cuaternión de actitud del perfil final, transcurrido dicho tiempo de transición. Se calcula el

cuaternión de rotación total entre dichas actitudes y se construye un cuaternión de rotación en función del tiempo que, aplicado al cuaternión inicial, permite la transición en el tiempo fijado hasta el cuaternión final de la maniobra de transición. Además, la maniobra se realiza de forma que haya compatibilidad en el módulo de los vectores velocidad y aceleración angular en los instantes de inicio y fin de la maniobra.

Si q_1 es el último cuaternión de actitud del perfil de actitud inicial, y q_2 es el cuaternión de actitud del perfil de actitud final transcurrido el tiempo de transición T_{tr} , se tiene el cuaternión de rotación total entre ambos

$$q_{rot} = q_2 \otimes q_1^* \quad (4.25)$$

y por tanto el eje y el ángulo de Euler total a aplicar a q_1 para obtener q_2 , mediante

$$q_{rot} = \begin{bmatrix} \vec{e}_{tr} \text{ sen } \Theta_{tr}/2 \\ \cos \Theta_{tr}/2 \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

Si se calcula una ley cualquiera $\theta_{tr}(t)$ tal que $\theta(T_{tr}) = \Theta_{tr}$, con Θ_{tr} el ángulo de Euler total a recorrer durante la transición, se puede obtener el cuaternión de actitud de la maniobra de transición para cada instante de tiempo a través de

$$q_2(t) = q_{rot}(t) \otimes q_1 \quad (4.27)$$

donde

$$q_{rot}(t) = \begin{bmatrix} \vec{e}_{tr} \text{ sen } \theta_{tr}(t)/2 \\ \cos \theta_{tr}(t)/2 \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

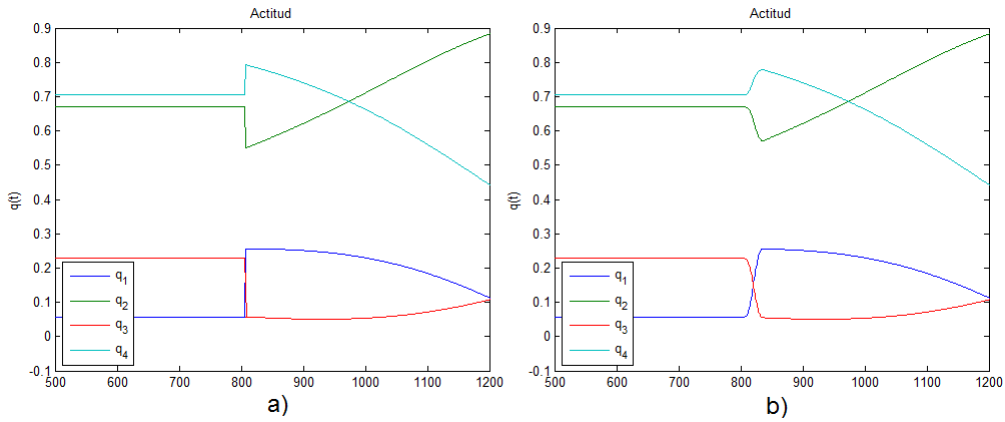


Figura 4.2: Transición brusca (a) y maniobra de transición suave entre perfiles de actitud (b)

Un requisito añadido a la ley $\theta_{tr}(t)$ es que sus derivadas primera y segunda sean iguales en los instantes inicial y final de la transición a las de los perfiles de actitud sobre los que se superpone la maniobra de transición. De esta forma se construye la ley $\theta_{tr}(t)$ como un polinomio de 5º grado (figura 4.3)

$$\theta_{tr}(t) = a_1 + a_2t + a_3t^2 + a_4t^3 + a_5t^4 + a_6t^5 \quad (4.29)$$

que ha de cumplir las siguientes condiciones:

$$\theta_{tr}(0) = 0, \quad \theta_{tr}(T_{tr}) = \Theta_{tr} \quad (4.30)$$

$$\dot{\theta}_{tr}(0) = \omega_{ini}, \quad \dot{\theta}_{tr}(T_{tr}) = \omega_{fin} \quad (4.31)$$

$$\ddot{\theta}_{tr}(0) = \dot{\omega}_{ini}, \quad \ddot{\theta}_{tr}(T_{tr}) = \dot{\omega}_{fin}. \quad (4.32)$$

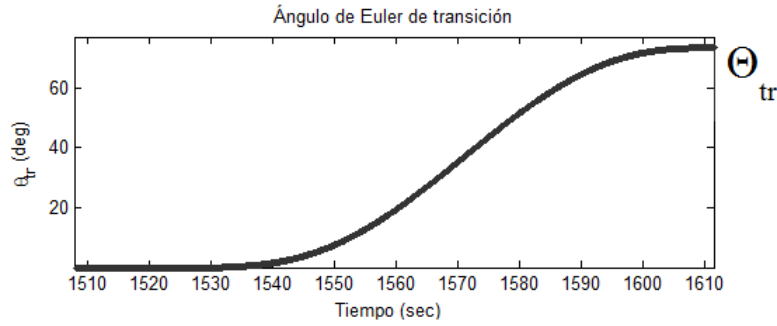


Figura 4.3: Evolución del ángulo de Euler durante una maniobra de transición

Por tanto, los coeficientes a_i se pueden obtener del siguiente sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & T_{tr} & T_{tr}^2 & T_{tr}^3 & T_{tr}^4 & T_{tr}^5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2T_{tr} & 3T_{tr}^2 & 4T_{tr}^3 & 5T_{tr}^4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6T_{tr} & 12T_{tr}^2 & 20T_{tr}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Theta_{tr} \\ \omega_{ini} \\ \omega_{fin} \\ \dot{\omega}_{ini} \\ \dot{\omega}_{fin} \end{bmatrix}. \quad (4.33)$$

Nótese que, a pesar de obtener una ley $\theta_{tr}(t)$ que permite una transición suave del módulo de los vectores velocidad y aceleración angular, las componentes de éstos vectores experimentan pequeños saltos en los instantes de inicio y fin de la maniobra de transición (concretamente, en el inicio de la transición seguimiento de estación - seguimiento del Sol y en el fin de la transición seguimiento del Sol - seguimiento de estación).

Esto se debe al cambio instantáneo del eje de Euler de los perfiles de actitud de seguimiento al eje de Euler constante de la maniobra de transición (figura 4.4). Estas variaciones instantáneas en las componentes de $\vec{\omega}_{ref}$ y $\dot{\vec{\omega}}_{ref}$ serán suficientemente pequeñas como para no violar la hipótesis de pequeños errores. La resolución matemática del problema de la trayectoria de referencia que permita continuidad total en todas las variables de estado se aleja del objetivo de este proyecto, y se propone como trabajo futuro. No obstante, en el capítulo 7 se propone un método alternativo de generación de una referencia con estas características, mediante el uso integrado de MATLAB y STK.

Será necesario calcular también las leyes de referencia de la velocidad y aceleración angular a partir del cuaternión de actitud de referencia.

La velocidad angular de referencia se calcula en cada instante de tiempo a partir del cuaternión de rotación instantánea entre los instantes k y $k+1$. Teniendo en cuenta la relación (3.12) y la codificación del cuaternión de actitud (3.8), en cada instante k se obtiene

$$\vec{\omega}_{ref}^{(k)} = \vec{e}_{rot} \frac{\theta_{rot}}{t^{(k+1)} - t^{(k)}}, \quad (4.34)$$

donde \vec{e}_{rot} y θ_{rot} son el eje y el ángulo de Euler de la rotación instantánea entre los instantes k y $k+1$

$$\theta_{rot} = 2 \arccos(q_{rot4}) \quad (4.35)$$

$$\vec{e}_{rot} = \frac{1}{\sin(\theta_{rot}/2)} \vec{q}_{rot} \quad (4.36)$$

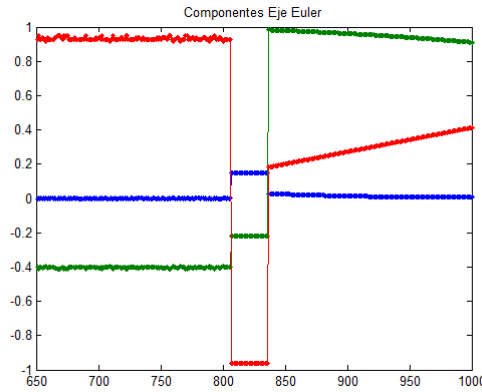


Figura 4.4: Componentes del eje de Euler durante la transición. Se observan de izquierda a derecha las componentes del perfil de seguimiento del Sol, del perfil de transición y del perfil de seguimiento de estación terrestre

y donde, a su vez, q_{rot} es el cuaternión de rotación instantánea en el mismo intervalo, y se obtiene como

$$q_{rot} = q_{ref}^{(k)*} \otimes q_{ref}^{(k+1)}. \quad (4.37)$$

Una vez obtenida la velocidad angular de referencia, el momento cinético de las ruedas de referencia se calcula como

$$\vec{h}_{ref} = -I\vec{\omega}_{ref}, \quad (4.38)$$

donde I es el tensor de inercia del sistema en ejes principales.

La aceleración angular de referencia $\dot{\vec{\omega}}_{ref}$ se obtiene a partir de la velocidad angular de referencia $\vec{\omega}_{ref}$ por diferencia progresiva

$$\dot{\vec{\omega}}_{ref}^{(k)} = \frac{\vec{\omega}_{ref}^{(k+1)} - \vec{\omega}_{ref}^{(k)}}{t^{(k+1)} - t^{(k)}}. \quad (4.39)$$

Por último, la señal de control de referencia se obtiene como

$$\vec{u}_{ref} = - \begin{bmatrix} (I_1 - J_a)\dot{\omega}_{1,ref} \\ (I_2 - J_a)\dot{\omega}_{2,ref} \\ (I_3 - J_a)\dot{\omega}_{3,ref} \end{bmatrix}. \quad (4.40)$$

Debido a la concatenación de perfiles de actitud, el cálculo definitivo de $\vec{\omega}_{ref}$ y $\dot{\vec{\omega}}_{ref}$ se realiza tras la superposición de los perfiles de actitud de transición. Sin embargo es necesario un primer cálculo antes de dicha superposición para obtener los valores iniciales que permiten calcular la ley de $\theta_{tr}(t)$ en el sistema de ecuaciones (4.33).

4.3. Control del error. Formulación LQR

El controlador óptimo empleado en este proyecto es el *regulador LQR de horizonte finito*. Es necesario usar éste en contraposición al LQR horizonte infinito puesto que el sistema es variable en el tiempo. Es decir, es el controlador LQR aplicable al problema de tracking.

Como se ha expuesto en el capítulo 3, el modelo del sistema, formado por las ecuaciones cinemáticas (3.16), dinámicas del vehículo (3.26) y dinámicas de las ruedas de reacción (3.29), es fuertemente no lineal. El problema de control óptimo aplicado a este sistema no lineal consiste en seleccionar una señal de control $u(t)$ para el sistema que minimice la función de coste J (ecuación 4.42) –con ϕ y L elegidas en función de los objetivos de control– y cumpla la restricción de estado final de la ecuación (4.43).

Mediante el cálculo variacional y la teoría de los multiplicadores de Lagrange se puede plantear la resolución del problema de control óptimo no lineal de la tabla 4.1.

Modelo del sistema:	$\dot{x} = f(x, u, t), \quad t \geq t_0, \quad t_0 \text{ dado.} \quad (4.41)$
Función de coste:	$J(t_0) = \phi(x(T), T) + \int_{t_0}^T L(x, u, t) dt. \quad (4.42)$
Restricción del estado final:	$\psi(x(T), T) = 0. \quad (4.43)$
Controlador Óptimo:	
Hamiltoniano:	$H(x, u, t) = L(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t). \quad (4.44)$
Ecuación de estado:	$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = f, \quad t \geq t_0 \quad (4.45)$
Ecuación de coestado	$-\dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial f^T}{\partial x} \lambda + \frac{\partial L}{\partial x}, \quad t \leq T \quad (4.46)$
Condición de estacionariedad	$0 = \frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial L}{\partial u} + \frac{\partial f^T}{\partial u} \lambda. \quad (4.47)$
Condiciones de contorno:	$x(t_0) \text{ dada, condición inicial,} \quad (4.48)$
	$(\phi_x + \psi_x^T \nu - \lambda)^T \Big _T dx(T) + (\phi_t + \psi_t^T \nu + H) \Big _T dT = 0, \text{ condición final} \quad (4.49)$

Tabla 4.1: Controlador óptimo no lineal continuo en el tiempo

La resolución matemática consiste en un problema de contorno de dos puntos no lineal para las ecuaciones diferenciales de estado y coestado, o ecuación dinámica del multiplicador de Lagrange λ . Estas ecuaciones de diseño del controlador óptimo no lineal no son fáciles de resolver, y no existe un algoritmo de diseño para ello.

La **linealización** de las ecuaciones de estado en torno a la referencia (problema de tracking

de la sección 4.1), permite simplificar esta formulación obteniendo excelentes resultados. El controlador LQR (del inglés, *linear quadratic regulator*) es la piedra angular del control óptimo moderno. Consiste en ecuaciones matriciales explícitas fácilmente resolubles por ordenador. Tiene gran relevancia porque muchos sistemas planteados en ingeniería son lineales, y muchos no lineales pueden linealizarse entorno a un punto de operación, como es el caso que en este proyecto se trata. La solución obtenida es un control por realimentación en bucle cerrado.

Modelo del sistema:	
$\dot{x} = Ax + Bu, \quad t \geq t_0, \quad x(t_0) = x_0 \text{ dado.}$	(4.50)
Función de coste:	
$J(t_0) = \frac{1}{2}x^T(T)S(T)x(T) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T (x^T Qx + u^T Ru) dt$	(4.51)
con	
$S(T) \geq 0, \quad Q \geq 0, \quad R > 0$	(4.52)
Control óptimo por realimentación:	
Ecuación diferencial de Riccati:	
$-\dot{S} = A^T S + SA - SBR^{-1}B^T S + Q,$	(4.53)
$t \leq T, \quad S(T) \text{ dada.}$	
Ganancia óptima de realimentación:	
$K = R^{-1}B^T S.$	(4.54)
Realimentación variable en el tiempo:	
$u = -K(t)x.$	(4.55)

Tabla 4.2: LQR en tiempo continuo

Considérese el sistema lineal multivariable de la ecuación (4.50) de la tabla 4.2, con estado $x \in \mathbb{R}^n$ y control $u \in \mathbb{R}^m$, y donde las matrices de la planta son dependientes del tiempo, aunque por simplicidad no se mostrará esta dependencia explícitamente.

Se trata de encontrar la señal de control $u(t)$ que minimiza la función de coste (4.51). Las matrices de peso del estado Q , del control R y del estado final $S(T)$ son simétricas y formadas por parámetros de diseño elegidos dependiendo de los objetivos de control.

Por ejemplo, si $S(T)$ se selecciona muy grande, el control forzará la disminución estado final $x(T)$ para mantener la función de coste en valores mínimos. Las matrices Q y $S(T)$ se asumen semidefinidas positivas ($Q \geq 0, S(T) \geq 0$). Entonces Q y $S(T)$ tendrán autovalores no negativos de manera que $x^T Qx$ y $x(T)^T S(T)x(T)$ son no negativas para todo $x(t)$.

Del mismo modo, se asume que R es definida positiva ($R > 0$), con lo que $u^T Ru$ es positiva para todo $u(t)$. Por lo tanto, la función de coste J será siempre positiva y el problema de minimización tiene sentido. Debido a que la función de coste se construye como forma cuadrática, ésta es una forma de energía generalizada.

En este caso lineal, las ecuaciones de estado y coestado son

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{4.56}$$

$$-\dot{\lambda} = Qx + A^T \lambda, \tag{4.57}$$

donde el signo negativo indica que la ecuación de coestado ha de integrarse hacia atrás en el tiempo. La condición de estacionariedad proporciona el control en términos del coestado según $u(t) = -R^{-1}B^T \lambda(t)$. Para encontrar el control óptimo, se resuelve el problema de contorno de dos puntos asociado a la dinámica del estado y del coestado mediante el *método de barrido* de Bryson [2], en el que se asume que $\lambda(t) = S(t)x(t)$ para una cierta matriz desconocida $S(t)$.

El control óptimo se obtiene en términos de esta matriz auxiliar $S(t)$ de la siguiente manera: Primero, puede probarse que la matriz auxiliar $S(t)$ satisface la ecuación diferencial de Riccati, ecuación (4.53). El control óptimo se obtiene en función de la solución de Riccati $S(t)$ según

$$u(t) = -R^{-1}B^T S(t)x(t). \tag{4.58}$$

Por tanto, definiendo la ganancia de realimentación óptima como (4.54), el control óptimo puede escribirse como la ley de control de realimentación de estados de (4.55).

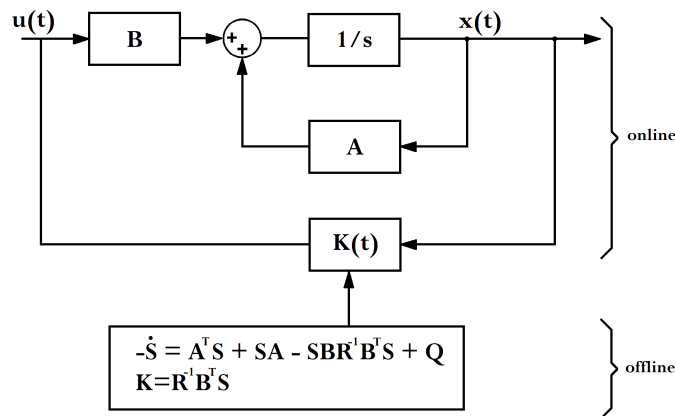


Figura 4.5: Esquema de control LQR horizonte finito

Un diagrama de bloques del LQR se muestra en la figura 4.5. Es un sistema de control por realimentación con ganancias de realimentación variables en el tiempo $K(t)$, y un bucle de diseño exterior. Incluso si el sistema (A,B) es invariante en el tiempo, el control óptimo resulta una realimentación de estados variable en el tiempo.

Esta es la razón por la que un controlador óptimo LQ no puede determinarse usando técnicas clásicas de diseño en el dominio de la frecuencia. Si el modelo del sistema (4.50) no es una descripción exacta de la planta, el LQR aún actúa adecuadamente si las discrepancias entre modelo y planta no son grandes. De hecho, el LQR tiene *garantizadas* importantes propiedades de *robustez*, como se demostrará mediante simulaciones numéricas en el capítulo 6 de este proyecto fin de carrera.

4.3.1. Diseño LQR

Para realizar el diseño del controlador óptimo LQR, se seleccionan en primer lugar las matrices de pesos Q , R y $S(T)$. Después, se resuelve la ecuación diferencial de Riccati obteniendo $S(t)$, a partir de la cual se computa $K(t)$.

La ecuación diferencial de Riccati se resuelve hacia atrás en el tiempo, usando como condición final la matriz $S(T)$. Esta ecuación debe resolverse fuera de línea (off-line), de manera que la ganancia en el tiempo obtenida se almacena. A continuación se suele hacer una simulación por computador para probar la bondad del controlador. Si el resultado no es satisfactorio, se seleccionan nuevas matrices de diseño Q , R y $S(T)$, y se repite el proceso.

Así, gracias al método de barrido (*sweep method*), el problema LQR se descompone en dos etapas: resolución fuera de línea de una ecuación diferencial hacia atrás en el tiempo, y control de la planta por realimentación. Este esquema jerárquico de control, compuesto por un bucle de realimentación interno cuya ganancia se computa mediante una ecuación cuadrática externa, es típico en control moderno. El control óptimo es fundamentalmente un algoritmo de diseño no causal, que necesita información futura sobre la planta y sobre los objetivos del controlador.

El proceso de diseño del controlador LQR contrasta fuertemente con el diseño clásico, en el que la ganancia de realimentación K se selecciona directamente. En control óptimo moderno las matrices de pesos Q , R y $S(T)$ son seleccionadas heurísticamente por el ingeniero. Una primera aproximación para estas matrices es la regla de Bryson [3]: se seleccionan los elementos diagonales de Q , $S(T)$ y R como los inversos de los valores máximos aceptables de los cuadrados de $x_i(t)$, $x_i(T)$ y $u_j(t)$, respectivamente:

$$\begin{aligned} Q_{ii} &= \frac{1}{\text{máx}[x_i(t)]^2} & i = 1, 2, \dots, 9 \\ S_{ii} &= \frac{1}{\text{máx}[x_i(T)]^2} & i = 1, 2, \dots, 9 \\ R_{jj} &= \frac{1}{\text{máx}[u_j(t)]^2} & j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Los términos fuera de la diagonal de las matrices de ponderación pueden ser usados si existe interacción entre los componentes de las entradas o estados, aunque generalmente son nulos.

La elección final de las matrices de pesos se basará en las necesidades de control y la observación de resultados de simulación.

Después, la ganancia de realimentación K se obtiene de las *ecuaciones matriciales de diseño*. Esto supone la gran ventaja de permitir que todos los bucles de control en un sistema multivariable se cierren simultáneamente y garantizando la estabilidad en bucle cerrado.

En este proyecto se aplica el controlador LQR continuo calculado a partir del sistema linealizado al sistema no lineal real, y se probarán sus actuaciones ante la presencia de perturbaciones externas.

4.4. Problema de tracking extendido

A continuación se extiende el problema de tracking al vector de estados completo, incluyendo la formulación adicional para el cuaternión de actitud, cuyas particularidades matemáticas se ponen de manifiesto. El sistema puede representarse según:

$$\dot{\vec{x}} = f(\vec{x}) + g(\vec{u}) \quad (4.60)$$

donde \vec{x} es el vector de estados

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{\omega} \\ q \\ \vec{h} \end{bmatrix}. \quad (4.61)$$

Se tratará de estabilizar el estado \vec{x} en torno a un estado de referencia \vec{x}_{ref} , que cumple las ecuaciones del modelo

$$\dot{\vec{x}}_{ref} = f(\vec{x}_{ref}) + g(\vec{u}_{ref}), \quad (4.62)$$

minimizando el error $\vec{\delta x}$, de forma que el problema pasa a las variables de error $\vec{\delta x}$ y $\vec{\delta u}$

$$\vec{\delta x} = \begin{bmatrix} \vec{\delta \omega} \\ \vec{a} \\ \vec{\delta h} \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

$$\vec{\delta u} = \vec{u} - \vec{u}_{ref}, \quad (4.64)$$

donde \vec{a} es un cierto vector 3x1 que *codifica* el error del cuaternión de actitud q respecto a la referencia q_{ref} , como se explicará en la siguiente sección.

Dadas las particularidades del cuaternión de actitud, la formulación de la linealización del cuaternión de error difiere de la linealización convencional, posible para las variables $\vec{\omega}$ y \vec{h} .

4.4.1. Ecuaciones linealizadas del cuaternión de error

El cuaternión de error δq , por analogía con $\vec{x} = \vec{x}_{ref} + \vec{\delta x}$, se define empleando el producto de cuaterniones según:

$$q = q_{ref} \otimes \delta q. \quad (4.65)$$

Para encontrar la ecuación diferencial cinemática del cuaternión de error, se toma derivada en la anterior ecuación:

$$\dot{q} = \dot{q}_{ref} \otimes \delta q + q_{ref} \otimes \dot{\delta q}, \quad (4.66)$$

y si se usa la ecuación cinemática (3.16) del cuaternión q y del cuaternión de referencia q_{ref} :

$$\frac{1}{2}q \otimes \begin{bmatrix} \vec{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}q_{ref} \otimes \begin{bmatrix} \vec{\omega}_{ref} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \delta q + q_{ref} \otimes \dot{\delta q}. \quad (4.67)$$

Ahora, se sustituye (4.65) en (4.67) y se llega a:

$$\frac{1}{2}q_{ref} \otimes \delta q \otimes \begin{bmatrix} \vec{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}q_{ref} \otimes \begin{bmatrix} \vec{\omega}_{ref} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \delta q + q_{ref} \otimes \dot{\delta q} = q_{ref} \otimes \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \vec{\omega}_{ref} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \delta q + \dot{\delta q} \right), \quad (4.68)$$

y cancelando q_{ref} en el lado izquierdo de ambos miembros de (4.68), se obtiene:

$$\dot{\delta q} = \frac{1}{2} \left(\delta q \otimes \begin{bmatrix} \vec{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \vec{\omega}_{ref} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \delta q \right). \quad (4.69)$$

El cuaternión de actitud (4 grados de libertad) es la parametrización de menor dimensión que permite una representación no singular de la actitud. No obstante, está sujeto a la restricción de norma unidad, por lo que realmente sólo tiene 3 grados de libertad. Es típico representar el cuaternión de error mediante el vector de Gibbs (o parámetro de Rodrigues) \vec{a} , que lo codifica de la siguiente forma [9]:

$$\delta q(\vec{a}) = \frac{1}{\sqrt{4 + \|\vec{a}\|^2}} \begin{bmatrix} \vec{a} \\ 2 \end{bmatrix}. \quad (4.70)$$

Obsérvese que tiene módulo unidad. Al contener la información de norma unitaria en tres grados de libertad, no es una representación globalmente no singular del error de actitud –es singular para la rotación de 180°. Sin embargo, la hipótesis inicial de pequeños errores permite obviar este inconveniente.

El vector de Gibbs permite linealizar el cuaternión de error de actitud y será de gran utilidad en el filtro de Kalman que se desarrollará en la sección 5.3, al permitir el tratamiento del error de estimación libre de la restricción de módulo unidad.

Aproximando la anterior expresión en serie de Taylor hasta el primer orden:

$$\delta q(\vec{a}) \approx \begin{bmatrix} \frac{\vec{a}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.71)$$

Puesto que se tiene $\vec{\omega} = \vec{\omega}_{ref} + \delta\vec{\omega}$, introduciendo esta definición en (4.68) se llega a:

$$\dot{\delta q} = \frac{1}{2} \left(\delta q \otimes \begin{bmatrix} \delta\vec{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} + \delta q \otimes \begin{bmatrix} \vec{\omega}_{ref} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \vec{\omega}_{ref} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \delta q \right). \quad (4.72)$$

El primer término de (4.72) es $\delta q \otimes \begin{bmatrix} \delta\vec{\omega} \\ 0 \end{bmatrix}$. Usando la ecuación (4.71) se encuentra:

$$\delta q \otimes \begin{bmatrix} \delta\vec{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \frac{\vec{a}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \delta\vec{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta\vec{\omega} + \frac{1}{2}\vec{a} \times \delta\vec{\omega} \\ \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \delta\vec{\omega} \end{bmatrix}, \quad (4.73)$$

y despreciando los términos de orden dos se llega a la siguiente aproximación:

$$\delta q \otimes \begin{bmatrix} \delta\vec{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \delta\vec{\omega} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.74)$$

donde se han despreciado los productos de dos errores. Sustituyendo en (4.72) se llega a la siguiente aproximación de primer orden:

$$\dot{\delta q} \approx \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} \delta\vec{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} + \delta q \otimes \begin{bmatrix} \vec{\omega}_{ref} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \vec{\omega}_{ref} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \delta q \right), \quad (4.75)$$

ecuación que se puede expresar matricialmente, si se escribe el primer producto usando la primera fórmula de (3.4) y el segundo usando la segunda fórmula de (3.4):

$$\begin{aligned} \dot{\delta q} &\approx \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} \delta\omega_1 \\ \delta\omega_2 \\ \delta\omega_3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \omega_3^{ref} & -\omega_2^{ref} & \omega_1^{ref} \\ -\omega_3^{ref} & 0 & \omega_1^{ref} & \omega_2^{ref} \\ \omega_2^{ref} & -\omega_1^{ref} & 0 & \omega_3^{ref} \\ -\omega_1^{ref} & -\omega_2^{ref} & -\omega_3^{ref} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \delta q_3 \\ \delta q_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3^{ref} & \omega_2^{ref} & \omega_1^{ref} \\ \omega_3^{ref} & 0 & -\omega_1^{ref} & \omega_2^{ref} \\ -\omega_2^{ref} & \omega_1^{ref} & 0 & \omega_3^{ref} \\ -\omega_1^{ref} & -\omega_2^{ref} & -\omega_3^{ref} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \delta q_3 \\ \delta q_4 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} \delta\omega_1 \\ \delta\omega_2 \\ \delta\omega_3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \omega_3^{ref} & -\omega_2^{ref} & \omega_1^{ref} \\ -\omega_3^{ref} & 0 & \omega_1^{ref} & \omega_2^{ref} \\ \omega_2^{ref} & -\omega_1^{ref} & 0 & \omega_3^{ref} \\ -\omega_1^{ref} & -\omega_2^{ref} & -\omega_3^{ref} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \delta q_3 \\ \delta q_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \omega_3^{ref} & -\omega_2^{ref} & -\omega_1^{ref} \\ -\omega_3^{ref} & 0 & \omega_1^{ref} & -\omega_2^{ref} \\ \omega_2^{ref} & -\omega_1^{ref} & 0 & -\omega_3^{ref} \\ \omega_1^{ref} & \omega_2^{ref} & \omega_3^{ref} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \delta q_3 \\ \delta q_4 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \delta\omega_1 \\ \delta\omega_2 \\ \delta\omega_3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \omega_3^{ref} & -\omega_2^{ref} & 0 \\ -\omega_3^{ref} & 0 & \omega_1^{ref} & 0 \\ \omega_2^{ref} & -\omega_1^{ref} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \delta q_3 \\ \delta q_4 \end{bmatrix}. \quad (4.76) \end{aligned}$$

Por tanto, usando (4.71) en (4.76):

$$\frac{d}{dt} \delta q(\vec{a}) \approx \begin{bmatrix} \dot{\vec{a}} \\ \frac{\dot{\vec{a}}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \delta\omega_1 \\ \delta\omega_2 \\ \delta\omega_3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \omega_3^{ref} & -\omega_2^{ref} & 0 \\ -\omega_3^{ref} & 0 & \omega_1^{ref} & 0 \\ \omega_2^{ref} & -\omega_1^{ref} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{a} \\ \frac{\vec{a}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (4.77)$$

de donde se llega a las ecuaciones cinemáticas definitivas de \vec{a} , parámetro con el que se codifica el cuaternión de error:

$$\dot{\vec{a}} = \begin{bmatrix} \delta\omega_1 \\ \delta\omega_2 \\ \delta\omega_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \omega_3^{ref} & -\omega_2^{ref} \\ -\omega_3^{ref} & 0 & \omega_1^{ref} \\ \omega_2^{ref} & -\omega_1^{ref} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad (4.78)$$

o lo que es lo mismo, $\dot{\vec{a}} = \delta\vec{\omega} - \vec{\omega}_{ref} \times \vec{a} = \delta\vec{\omega} + \vec{a} \times \vec{\omega}_{ref}$.

Esta codificación en tres grados de libertad garantiza que el cuaternión de error tiene módulo unidad en todo instante de tiempo.

4.4.2. Ecuaciones linealizadas de los errores $\delta\vec{\omega}$ y $\delta\vec{h}$

Para estas variables del vector de estados, los errores respecto a la referencia se escriben según:

$$\delta\vec{\omega} = \vec{\omega} - \vec{\omega}_{ref} \quad (4.79)$$

$$\delta\vec{h} = \vec{h} - \vec{h}_{ref}. \quad (4.80)$$

Y teniendo en cuenta las relaciones (4.60) y (4.62) y se obtiene, respectivamente:

$$\begin{aligned} \dot{\delta\vec{\omega}} &= \dot{\vec{\omega}} - \dot{\vec{\omega}}_{ref} = f_{\vec{\omega}}(\vec{\omega}) + g_{\vec{\omega}}(\vec{u}) - f_{\vec{\omega}}(\vec{\omega}_{ref}) - g_{\vec{\omega}}(\vec{u}_{ref}) \\ &= f_{\vec{\omega}}(\delta\vec{\omega} + \vec{\omega}_{ref}) - f_{\vec{\omega}}(\vec{\omega}_{ref}) + g_{\vec{\omega}}(\delta\vec{u} + \vec{u}_{ref}) - g_{\vec{\omega}}(\vec{u}_{ref}) \end{aligned} \quad (4.81)$$

$$\begin{aligned} \dot{\delta\vec{h}} &= \dot{\vec{h}} - \dot{\vec{h}}_{ref} = f_{\vec{h}}(\vec{h}) + g_{\vec{h}}(\vec{u}) - f_{\vec{h}}(\vec{h}_{ref}) - g_{\vec{h}}(\vec{u}_{ref}) \\ &= f_{\vec{h}}(\delta\vec{h} + \vec{h}_{ref}) - f_{\vec{h}}(\vec{h}_{ref}) + g_{\vec{h}}(\delta\vec{u} + \vec{u}_{ref}) - g_{\vec{h}}(\vec{u}_{ref}), \end{aligned} \quad (4.82)$$

donde las funciones $f_{\vec{\omega}}$ y $g_{\vec{\omega}}$ corresponden las ecuaciones dinámicas del vehículo (3.26) separadas en las partes dependientes del estado y del control, respectivamente:

$$\begin{aligned} f_{\vec{\omega}_1} &= \frac{1}{(I_1 - J_a)} [(I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 - h_3\omega_2 + h_2\omega_3], & g_{\vec{\omega}_1} &= -\frac{1}{(I_1 - J_a)} u_1 \\ f_{\vec{\omega}_2} &= \frac{1}{(I_2 - J_a)} [(I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 - h_1\omega_3 + h_3\omega_1], & g_{\vec{\omega}_2} &= -\frac{1}{(I_2 - J_a)} u_2 \\ f_{\vec{\omega}_3} &= \frac{1}{(I_3 - J_a)} [(I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 - h_2\omega_1 + h_1\omega_2], & g_{\vec{\omega}_3} &= -\frac{1}{(I_3 - J_a)} u_3 \end{aligned} \quad (4.83)$$

Asimismo, las funciones $f_{\vec{h}}$ y $g_{\vec{h}}$ son las ecuaciones dinámicas de las ruedas de reacción (3.29) separadas en las partes dependientes del estado y del control, respectivamente:

$$\begin{aligned} f_{\vec{h}_1} &= -\frac{J_a}{I_1 - J_a} [(I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 - h_3\omega_2 + h_2\omega_3], & g_{\vec{h}_1} &= \frac{I_1}{I_1 - J_a} u_1, \\ f_{\vec{h}_2} &= -\frac{J_a}{I_2 - J_a} [(I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 - h_1\omega_3 + h_3\omega_1], & g_{\vec{h}_2} &= \frac{I_2}{I_2 - J_a} u_2, \\ f_{\vec{h}_3} &= -\frac{J_a}{I_3 - J_a} [(I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 - h_2\omega_1 + h_1\omega_2], & g_{\vec{h}_3} &= \frac{I_3}{I_3 - J_a} u_3. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Nótese que las funciones $f_{\vec{\omega}}$, $g_{\vec{\omega}}$, $f_{\vec{h}}$ y $g_{\vec{h}}$ son independientes del cuaternión de actitud y del cuaternión de error.

Bajo la suposición de que los errores $\delta\vec{\omega}$ y $\delta\vec{h}$ serán pequeños, pueden escribirse las ecuaciones linealizadas definitivas de estas variables de error:

$$\dot{\delta\vec{\omega}} = \left. \frac{\partial f_{\vec{\omega}}}{\partial \vec{\omega}} \right|_{ref} \delta\vec{\omega} + \left. \frac{\partial g_{\vec{\omega}}}{\partial \vec{u}} \right|_{ref} \delta\vec{u} = A_{\vec{\omega}}(t)\delta\vec{\omega} + B_{\vec{\omega}}(t)\delta\vec{u} \quad (4.85)$$

$$\dot{\delta\vec{h}} = \left. \frac{\partial f_{\vec{h}}}{\partial \vec{\omega}} \right|_{ref} \delta\vec{\omega} + \left. \frac{\partial g_{\vec{h}}}{\partial \vec{u}} \right|_{ref} \delta\vec{u} = A_{\vec{h}}(t)\delta\vec{h} + B_{\vec{h}}(t)\delta\vec{u}, \quad (4.86)$$

De donde se identifican las matrices asociadas al sistema lineal en los grados de libertad $\vec{\omega}$ y \vec{h} .

4.4.3. Matrices constitutivas del sistema lineal

Las matrices asociadas al sistema lineal, escritas en términos de sus submatrices, son:

$$A(t) = \begin{bmatrix} A_{\vec{\omega},\vec{\omega}} & A_{\vec{\omega},\vec{a}} & A_{\vec{\omega},\vec{h}} \\ A_{\vec{a},\vec{\omega}} & A_{\vec{a},\vec{a}} & A_{\vec{a},\vec{h}} \\ A_{\vec{h},\vec{\omega}} & A_{\vec{h},\vec{a}} & A_{\vec{h},\vec{h}} \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} B_{\vec{\omega}} \\ B_{\vec{a}} \\ B_{\vec{h}} \end{bmatrix}. \quad (4.87)$$

Expandiendo las submatrices de $A(t)$:

$$A_{\vec{\omega},\vec{\omega}}(t) = \left. \frac{\partial f_{\vec{\omega}}(\vec{x})}{\partial \vec{\omega}} \right|_{ref} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{h_3 - \omega_3 (I_2 - I_3)}{I_1 - J_a} & \frac{h_2 - H_0 + \omega_2 (I_2 - I_3)}{I_1 - J_a} \\ \frac{h_3 - \omega_3 (I_1 - I_3)}{I_2 - J_a} & 0 & -\frac{h_1 + \omega_1 (I_1 - I_3)}{I_2 - J_a} \\ \frac{H_0 - h_2 + \omega_2 (I_1 - I_2)}{I_3 - J_a} & \frac{h_1 + \omega_1 (I_1 - I_2)}{I_3 - J_a} & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{\vec{\omega},\vec{h}}(t) = \left. \frac{\partial f_{\vec{\omega}}(\vec{x})}{\partial \vec{h}} \right|_{ref} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\omega_3}{I_1 - J_a} & -\frac{\omega_2}{I_1 - J_a} \\ -\frac{\omega_3}{I_2 - J_a} & 0 & \frac{\omega_1}{I_2 - J_a} \\ \frac{\omega_2}{I_3 - J_a} & -\frac{\omega_1}{I_3 - J_a} & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{\vec{h},\vec{\omega}}(t) = \left. \frac{\partial f_{\vec{h}}(\vec{x})}{\partial \vec{\omega}} \right|_{ref} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{J_a [h_3 - \omega_3 (I_2 - I_3)]}{I_1 - J_a} & -\frac{J_a [h_2 - H_0 + \omega_2 (I_2 - I_3)]}{I_1 - J_a} \\ -\frac{J_a [h_3 - \omega_3 (I_1 - I_3)]}{I_2 - J_a} & 0 & \frac{J_a [h_1 + \omega_1 (I_1 - I_3)]}{I_2 - J_a} \\ -\frac{J_a [H_0 - h_2 + \omega_2 (I_1 - I_2)]}{I_3 - J_a} & -\frac{J_a [h_1 + \omega_1 (I_1 - I_2)]}{I_3 - J_a} & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{\vec{h},\vec{h}}(t) = \left. \frac{\partial f_{\vec{h}}(\vec{x})}{\partial \vec{h}} \right|_{ref} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{J_a \omega_3}{I_1 - J_a} & \frac{J_a \omega_2}{I_1 - J_a} \\ \frac{J_a \omega_3}{I_2 - J_a} & 0 & -\frac{J_a \omega_1}{I_2 - J_a} \\ -\frac{J_a \omega_2}{I_3 - J_a} & \frac{J_a \omega_1}{I_3 - J_a} & 0 \end{bmatrix},$$

Teniendo en cuenta que las funciones $f_{\vec{\omega}}$, $g_{\vec{\omega}}$, $f_{\vec{h}}$ y $g_{\vec{h}}$ son independientes del cuaternión de error, las submatrices correspondientes son nulas

$$A_{\vec{\omega},\vec{a}}(t) = \left. \frac{\partial f_{\vec{\omega}}(\vec{x})}{\partial \vec{a}} \right|_{ref} = \underline{0}_{(3 \times 3)}$$

$$A_{\vec{h},\vec{a}}(t) = \left. \frac{\partial f_{\vec{h}}(\vec{x}, \vec{u})}{\partial \vec{a}} \right|_{ref} = \underline{0}_{(3 \times 3)}$$

Las submatrices correspondientes al cuaternión de error se identifican directamente de la ecuación (4.78),

$$\begin{aligned} A_{\vec{a},\vec{\omega}}(t) &= \underline{I}_{(3 \times 3)} \\ A_{\vec{a},\vec{a}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix} \\ A_{\vec{a},\vec{h}}(t) &= \underline{0}_{(3 \times 3)}. \end{aligned}$$

De manera análoga, las submatrices de $B(t)$:

$$\begin{aligned} B_{\vec{\omega}} &= \left. \frac{\partial g_{\vec{\omega}}(\vec{u})}{\partial \vec{u}} \right|_{ref} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{I_1 - J_a} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{I_2 - J_a} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{I_3 - J_a} \end{bmatrix} \\ B_{\vec{h}} &= \left. \frac{\partial g_{\vec{h}}(\vec{u})}{\partial \vec{u}} \right|_{ref} = \begin{bmatrix} \frac{I_1}{I_1 - J_a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{I_2}{I_2 - J_a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{I_3}{I_3 - J_a} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Y, de nuevo, la submatriz $B_{\vec{a}}$ se obtiene identificando la dependencia (nula) de las ecuaciones (4.78) con el vector de control

$$B_{\vec{a}} = \left. \frac{\partial g_{\vec{a}}(\vec{u})}{\partial \vec{u}} \right|_{ref} = \underline{0}_{(3 \times 3)}.$$

Nótese que todas las variables incluidas en las matrices son de referencia y el subíndice se ha omitido por claridad.

4.4.4. Uso en control

El sistema lineal, planteado en las variables de error en función de las matrices A (9×9) y B (9×3), queda determinado como

$$\dot{\vec{\delta}x} = A\vec{\delta}x + B\vec{\delta}u, \quad (4.88)$$

con

$$\vec{\delta}x = \begin{bmatrix} \delta\omega_1 \\ \delta\omega_2 \\ \delta\omega_3 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \delta h_1 \\ \delta h_2 \\ \delta h_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{\delta}u = \begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \\ \delta u_3 \end{bmatrix}.$$

En base a estas matrices del sistema lineal se calcula una ganancia de control LQR $K(t)$, con la que se procederá a controlar el sistema no lineal real.

La señal de control del sistema será por tanto

$$\vec{u} = \vec{u}_{ref} - K \begin{bmatrix} \delta\omega_1 & \delta\omega_2 & \delta\omega_3 & a_1 & a_2 & a_3 & \delta h_1 & \delta h_2 & \delta h_3 \end{bmatrix}^T, \quad (4.89)$$

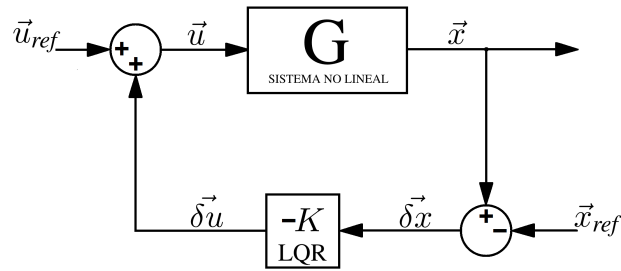


Figura 4.6: Esquema de Control

y obsérvese que habrá que calcular el valor de \vec{a} durante la simulación del sistema real. Esto se hace de la siguiente forma: dado en un instante de tiempo q_{ref} y el cuaternión real q , se tiene que $q = q_{ref} \otimes \delta q$. Despejando δq :

$$\delta q = q_{ref}^* \otimes q, \tag{4.90}$$

y puesto que $\delta q(\vec{a}) \approx \begin{bmatrix} \vec{a} \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, se tiene que $\vec{a} \approx 2\vec{\delta q}$, es decir, se aproxima \vec{a} por dos veces la parte

vectorial del cuaternión de error. A partir de la ecuación (4.70), el parámetro de Gibbs se obtiene en función del cuaternión de error como

$$\vec{a} = 2 \frac{\vec{\delta q}}{\delta q_4}. \tag{4.91}$$

Capítulo 5

Estimación de Actitud

En el capítulo 4 se desarrolla el problema de control de seguimiento cuando el estado es perfectamente conocido. Desafortunadamente, los sensores de actitud no tienen precisión infinita, ni proveen información de actitud de manera continua. No es posible conocer perfectamente la actitud del vehículo espacial.

En los vehículos espaciales se suelen disponer varios sensores de actitud de varios tipos, de manera que la actitud del vehículo con la que se trabaja en el sistema de control es una *estimación* de la actitud real, obtenida como resultado de medidas posiblemente sobredeterminadas de diferente naturaleza procedentes de múltiples sensores de actitud.

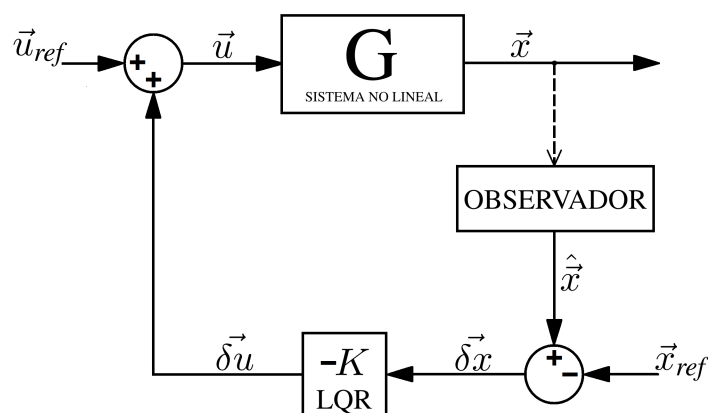


Figura 5.1: El controlador es alimentado por un observador

Se presentan a continuación las dos estrategias básicas de determinación de actitud:

- **Estimación estática** Mediante sensores ópticos/magnéticos se obtienen medidas vectoriales con las que es posible determinar estáticamente la actitud en base a dos o más medidas. Estos sensores proporcionan gran precisión, pero suelen tener un ancho de banda demasiado pequeño (de 1 a 30 Hz). Es necesario un ancho de banda elevado de forma que el control por realimentación no tenga retrasos que degraden la precisión.
- **Estimación dinámica** Los giróscopos proporcionan la velocidad angular del vehículo, la cual puede integrarse en el tiempo para estimar la actitud. Dan menor precisión pero con un ancho de banda ilimitado en la práctica (del orden del MHz).

Posteriormente se desarrollará un método de unificación de ambas estrategias, el Filtro de Kalman.

5.1. Estimación con sensores ópticos

Si se dispusiera de la medida vectorial en ejes cuerpo e inerciales de un cierto cuerpo celeste, podría determinarse unívocamente la actitud a través de la relación

$$A\hat{V}_i = \hat{W}_i \quad (i = 1, \dots, n), \quad (5.1)$$

donde $\hat{V}_1, \dots, \hat{V}_n$ es un conjunto de vectores de referencia unitarios, que son n direcciones conocidas (por ejemplo la dirección de la Tierra, el Sol, una estrella o el campo magnético terrestre) en el sistema de coordenadas de referencia. Los vectores $\hat{W}_1, \dots, \hat{W}_n$ son, a su vez, los vectores unitarios de observación, que son las mismas n direcciones medidas en el sistema de ejes cuerpo fijado al vehículo espacial. La matriz A es la matriz de cosenos directores o matriz de actitud entre los sistemas de referencia “B” y “R”.

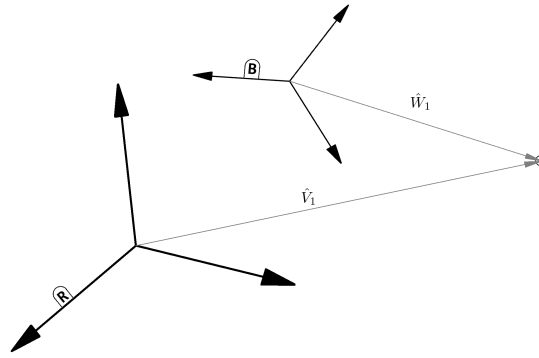


Figura 5.2: Medidas vectoriales de un cuerpo celeste en ejes cuerpo e inerciales

Sin embargo, debido a que ambos vectores estarán corrompidos por errores, no existe solución exacta para la matriz A , incluso para $n = 2$.

En este trabajo se consideran dos enfoques para resolver este problema: el determinístico, método TRIAD (TRIAxial Attitude Determination) y el óptimo, método Q.

5.1.1. Método TRIAD

Dados dos vectores de referencia unitarios y no paralelos \hat{V}_1 y \hat{V}_2 y los correspondientes vectores de observación unitarios \hat{W}_1 y \hat{W}_2 , se trata de encontrar una matriz ortogonal A que satisfaga

$$A\hat{V}_1 = \hat{W}_1 \quad \text{y} \quad A\hat{V}_2 = \hat{W}_2. \quad (5.2)$$

Puesto que la matriz A está sobredeterminada por las ecuaciones anteriores, se comienza planteando dos triadas de vectores de referencia y observación explícitamente ortonormales, según

$$\hat{r}_1 = \hat{V}_1 \quad (5.3)$$

$$\hat{r}_2 = \frac{(\hat{V}_1 \times \hat{V}_2)}{|\hat{V}_1 \times \hat{V}_2|} \quad (5.4)$$

$$\hat{r}_3 = \frac{\hat{V}_1 \times (\hat{V}_1 \times \hat{V}_2)}{|\hat{V}_1 \times \hat{V}_2|} \quad (5.5)$$

$$\hat{s}_1 = \hat{W}_1 \quad (5.6)$$

$$\hat{s}_2 = \frac{(\hat{W}_1 \times \hat{W}_2)}{|\hat{W}_1 \times \hat{W}_2|} \quad (5.7)$$

$$\hat{s}_3 = \frac{\hat{W}_1 \times (\hat{W}_1 \times \hat{W}_2)}{|\hat{W}_1 \times \hat{W}_2|}. \quad (5.8)$$

Existe una única matriz ortogonal A que satisface

$$A\hat{r}_i = \hat{s}_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.9)$$

dada por

$$A = \sum_{i=1}^3 \hat{s}_i \hat{r}_i^T, \quad (5.10)$$

Definiendo las matrices M_{ref} y M_{obs} como las formadas por columnas por los vectores \hat{r}_i y \hat{s}_i ,

$$M_{ref} = \begin{bmatrix} \hat{r}_1 & \hat{r}_2 & \hat{r}_3 \end{bmatrix}, \quad M_{obs} = \begin{bmatrix} \hat{s}_1 & \hat{s}_2 & \hat{s}_3 \end{bmatrix}, \quad (5.11)$$

la ecuación (5.10) puede reescribirse como

$$A = M_{obs} M_{ref}^T. \quad (5.12)$$

La ecuación (5.10) o su equivalente, la ecuación (5.12), determinan la solución del método TRIAD.

Una condición necesaria y suficiente para que la matriz A dada por la ecuación (5.10) satisfaga también la ecuación (5.2) es

$$\hat{V}_1 \cdot \hat{V}_2 = \hat{W}_1 \cdot \hat{W}_2. \quad (5.13)$$

La solución TRIAD no es simétrica en los índices 1 y 2, sino que da más importancia a la medida W_1 . Puesto que parte de la información contenida en el segundo vector es descartada, la solución TRIAD resulta más precisa cuando (\hat{W}_1, \hat{V}_1) se elige como el par de vectores observación-referencia de mayor precisión.

5.1.2. Método Q

Es un algoritmo de estimación estática que permite determinar la matriz óptima de actitud a partir de dos o más medidas vectoriales.

Si \vec{u}_B^i es la medida 'i' en ejes cuerpo y \vec{u}_R^i es la medida 'i' en ejes del sistema de referencia, una matriz de cosenos directores A es óptima cuando minimiza una cierta función de pérdidas. En este proyecto la función de pérdidas elegida es la propuesta por Wahba [21]

$$J(A) = \sum_i w_i \|\vec{u}_B^i - A\vec{u}_R^i\|, \quad (5.14)$$

con w_i el peso de la medida 'i'. Esta función puede reescribirse en

$$J(A) = -2 \sum_i \vec{W}_i A \vec{V}_i + cte. \quad (5.15)$$

donde los vectores no normalizados \vec{W}_i y \vec{V}_i se definen como

$$\vec{W}_i = \sqrt{w_i} \vec{u}_B^i \quad (5.16)$$

$$\vec{V}_i = \sqrt{w_i} \vec{u}_B^i. \quad (5.17)$$

Por tanto, la función de pérdidas es mínima cuando

$$J'(A) = \sum_i \vec{W}_i A \vec{V}_i = \text{tr}(W^T A V) \quad (5.18)$$

es máxima, con W la matriz formada por columnas por los vectores \vec{W}_i , y V la matriz formada por columnas por los vectores \vec{V}_i .

Según Davenport [6], para encontrar la matriz A que maximiza $J'(A)$ se puede parametrizar A en cuaterniones usando la fórmula de Euler-Rodrigues de la ecuación (3.13).

Tras álgebra laboriosa, substituyendo (3.13) en (5.18) se tiene que

$$J'(Q) = q^T K q, \quad (5.19)$$

donde K es la matriz (4x4)

$$K = \begin{bmatrix} S - I\sigma & \vec{Z} \\ \vec{Z}^T & \sigma \end{bmatrix}, \quad (5.20)$$

con las matrices $B = WV^T$ y $S = B^T + B$, $\sigma = \text{tr}(B)$ y \vec{Z} el vector (3x1)

$$\vec{Z} = \begin{bmatrix} B_{23} - B_{32} \\ B_{31} - B_{13} \\ B_{12} - B_{21} \end{bmatrix}. \quad (5.21)$$

Haciendo uso de la teoría de los multiplicadores de Lagrange, pueden hallarse los extremos de la ecuación (5.19), añadiendo $qq^T = 1$ como restricción de normalización. Se define así

$$g(q) = q^T K q - \lambda q^T q, \quad (5.22)$$

donde λ es el multiplicador de Lagrange, $g(q)$ se maximiza sin restricciones, y el multiplicador λ es tal que se cumple la restricción de normalización $qq^T = 1$.

Maximizando respecto a q^T , se obtiene el problema de autovalores

$$Kq = \lambda q. \quad (5.23)$$

Así, el cuaternión que parametriza la matriz óptima de actitud en el sentido de la ecuación (5.14) es un autovector de K . Además, el cuaternión que minimiza la función de pérdidas (5.14) es el correspondiente al autovalor mayor.

5.2. Estimación con medidas inerciales

Cuando sólo se dispone de las medidas de velocidad angular de los giróscopos, se estima el estado a través del observador formado por las ecuaciones cinemáticas. Es decir, conocida una actitud inicial, se integra la derivada del cuaternión de actitud obtenida de $\vec{\omega}_{gyr}$ a través de la

ecuación (5.24). De la teoría de procesos gaussianos se desprende que la covarianza del error crece con el tiempo, por lo que la estimación se degrada cada vez más.

$$\dot{\hat{q}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \hat{q}_4 & -\hat{q}_3 & \hat{q}_2 & \hat{q}_1 \\ \hat{q}_3 & \hat{q}_4 & -\hat{q}_1 & \hat{q}_2 \\ -\hat{q}_2 & \hat{q}_1 & \hat{q}_4 & \hat{q}_3 \\ -\hat{q}_1 & -\hat{q}_2 & -\hat{q}_3 & \hat{q}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^{gyr} \\ \omega_2^{gyr} \\ \omega_3^{gyr} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

5.3. Fusión de sensores. Filtro de Kalman (MEKF)

Se considera un modelo continuo - discreto del sistema, que integra la información de un conjunto de giróscopos y sensores de estrellas. El filtro de Kalman para sistemas continuos-discretos permite aunar las estrategias de estimación estática y dinámica minimizando la covarianza del error, definida según

$$P(t) = E \left[(x(t) - \hat{x}(t)) (x(t) - \hat{x}(t))^T \right]. \quad (5.25)$$

Cuando las ecuaciones constituyentes del sistema son no lineales es necesario utilizar el Filtro de Kalman Extendido (EKF). Es una variación del filtro de Kalman que permite estimar el estado mediante un filtro de Kalman aplicado a las ecuaciones linealizadas del error. Si, además, la actitud se expresa en cuaterniones q , es conveniente modificar el EKF resultando en el Filtro Extendido de Kalman Multiplicativo (MEKF). Éste preserva el módulo unidad en el cuaternión estimado, por lo que, desde el punto de vista analítico, no es necesario renormalizar. Sin embargo, durante el proceso de integración numérica, la acumulación de errores puede romper la norma unitaria del cuaternión. Como se indica en la sección 5.4, este hecho hace imprescindible la renormalización del cuaternión propagado, especialmente en el problema de tracking con información imperfecta.

El MEKF es la variación del filtro de Kalman más adecuada para el problema objeto de este proyecto y se desarrolla a continuación según el trabajo de F. Landis Markley [12]. El MEKF representa la actitud real como el producto de cuaterniones

$$q(t) = \delta q(\vec{a}(t)) \otimes q_{ref}(t), \quad (5.26)$$

donde $q_{ref}(t)$ es un cierto cuaternión de referencia unitario y $\delta q(\vec{a}(t))$ es un cuaternión unitario que representa la rotación desde $q_{ref}(t)$ al cuaternión real de actitud (nótese que este cuaternión de referencia no se ha de confundir con el de referencia de actitud de capítulos anteriores, y como se explica a continuación, se identificará con la estimación del cuaternión de actitud). El error de actitud $\delta q(\vec{a}(t))$ se parametriza mediante el vector de Gibbs de la ecuación (4.70), según se explicó en la sección 4.4.

Las dos representaciones de actitud $\vec{a}(t)$ y $q_{ref}(t)$ de la ecuación (5.26) son claramente redundantes, ya que diferentes valores en ambas representaciones pueden dar lugar a la misma actitud estimada. La idea básica del MEKF es calcular una estimación sin restricciones del vector de error de actitud $\vec{a}(t)$ (de 3 componentes) mientras se utiliza el cuaternión correctamente normalizado $q_{ref}(t)$ de manera que se obtenga una representación no singular de la actitud.

Dada una estimación $\vec{a}(t)$, la ecuación (5.26) indica que la estimación de la actitud correspondiente al cuaternión de actitud real es $\delta q(\vec{a}(t)) \otimes q_{ref}(t)$. Se elimina la redundancia en la representación de actitud escogiendo, cada vez que se tiene una actualización del error, el cuaternión de referencia $q_{ref}(t)$ de forma que $\vec{a}(t)$ es idénticamente cero. Puesto que $\delta q(0)$ es el cuaternión

identidad, el cuaternión de referencia es la mejor estimación del cuaternión real. Esto supone la principal ventaja conceptual del MEKF frente a otros algoritmos de estimación de actitud.

La identificación de $q_{ref}(t)$ como la estimación de la actitud real implica sin embargo que $\vec{a}(t)$ es una representación de tres componentes del error de estimación de actitud, sin restricciones adicionales. Esto permite un tratamiento consistente de la estadística del error de actitud, con la covarianza de los ángulos de error de actitud en ejes cuerpo (en rad²) representada por la covarianza de $\vec{a}(t)$.

El proceso de filtrado continuo-discreto se realiza en tres fases: propagación, medida y reset. La etapa de propagación se realiza de manera que se mantiene $\hat{\vec{a}}(t) \equiv 0$. Sin embargo, en la actualización de la medida discreta se asigna un valor finito $\hat{\vec{a}}(+)$ a \vec{a} . Inmediatamente después de la actualización de las medidas, el cuaternión de referencia aún mantiene su valor previo a la actualización $q_{ref}(-)$, de forma que ya no representa la estimación óptima.

La fase de reseteo corrige esta situación trasladando la información de actualización desde $\hat{\vec{a}}(+)$ a una nueva referencia $q_{ref}(+)$ y reseteando $\hat{\vec{a}}(+)$ a cero. Puesto que el cuaternión real no se modifica con esta operación, la ecuación (5.26) requiere

$$\delta q(\hat{\vec{a}}(+)) \otimes q_{ref}(-) = \delta q(\vec{0}) \otimes q_{ref}(+) = q_{ref}(+). \quad (5.27)$$

5.3.1. Fase de propagación

Puesto que q_{ref} es un cuaternión unitario, ha de cumplir una ecuación cinemática de la forma

$$\dot{q}_{ref} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \vec{\omega}_{ref} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes q_{ref} \quad (5.28)$$

donde $\vec{\omega}_{ref}$ tiene análogamente a q_{ref} la interpretación de la velocidad angular de la actitud referencial. Se muestra a continuación que $\vec{\omega}_{ref}$ se determina mediante el requerimiento de $\hat{\vec{a}}$, lo cual es la condición para que la referencia de actitud sea la estimación óptima de la actitud.

Tomando derivadas en la ecuación (5.26) e introduciendo la ecuación diferencial cinemática general y la ecuación (5.28), se obtiene

$$\begin{bmatrix} \vec{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes q = 2 \frac{d[\delta q(\vec{a})]}{dt} \otimes q_{ref} + \delta q(\vec{a}) \otimes \begin{bmatrix} \vec{\omega}_{ref} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes q_{ref} \quad (5.29)$$

Sustituyendo la ecuación (5.26) por q en el miembro izquierdo y postmultiplicando la ecuación completa por el conjugado de q_{ref} se puede obtener

$$2 \frac{d[\delta q(\vec{a})]}{dt} = \begin{bmatrix} \vec{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \delta q(\vec{a}) - \delta q(\vec{a}) \otimes \begin{bmatrix} \vec{\omega}_{ref} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

La técnica EKF más utilizada para aproximar la estimación de una función no lineal de \vec{a} y $\vec{\omega}$ por la misma función no lineal de sus estimaciones $\hat{\vec{a}}$ y $\hat{\vec{\omega}}$ proporciona

$$2 \frac{d[\delta q(\hat{\vec{a}})]}{dt} = \begin{bmatrix} \hat{\vec{\omega}} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \delta q(\hat{\vec{a}}) - \delta q(\hat{\vec{a}}) \otimes \begin{bmatrix} \vec{\omega}_{ref} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.31)$$

puesto que $\vec{\omega}_{ref}$ no es una variable aleatoria. El requisito de que $\hat{\vec{a}}$ sea cero implica que $\delta q(\hat{\vec{a}})$ es el cuaternión identidad, es decir, constante. Por tanto la ecuación (5.31) implica que

$$\vec{\omega}_{ref}(t) = \hat{\vec{\omega}}(t). \quad (5.32)$$

Nótese de nuevo que el subíndice “ref” se refiere en la velocidad angular a la estimación de la misma, y no ha de confundirse con la velocidad angular del perfil de actitud de referencia de capítulos anteriores.

Se considera en este trabajo el modelo de dinámica del error de giróscopos de Farrenkopf [8], en el que la velocidad angular de salida se escribe como

$$\vec{\omega}_{gyr}(t) = \vec{\omega}(t) + \vec{b}(t) + \vec{\eta}_1(t), \quad (5.33)$$

donde el vector de error de deriva $\vec{b}(t)$ sigue la ley

$$\dot{\vec{b}}(t) = \vec{\eta}_2(t), \quad (5.34)$$

y $\vec{\eta}_1(t)$ y $\vec{\eta}_2(t)$ son ruidos blancos gaussianos de desviaciones estándar η_1 y η_2 . Esta es una aproximación excelente para la clase de giróscopos utilizados en navegación. En este proyecto se utilizarán estas desviaciones estándar como parámetros últimos de caracterización de los giróscopos.

La velocidad angular estimada se puede escribir en función del error de estimación de la misma

$$\hat{\vec{\omega}}(t) = \vec{\omega}_{gyr}(t) - \hat{\vec{b}}(t). \quad (5.35)$$

El filtro de Kalman estima el vector de estados de 6 componentes formado por el parámetro de error de estimación de actitud y el error de estimación de la velocidad angular (o *bias*),

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \vec{a}(t) \\ \vec{b}(t) \end{bmatrix}. \quad (5.36)$$

Nótese que la estimación del cuaternión de actitud no aparece explícitamente en este vector de estados. La propagación de la estimación $\hat{\vec{x}}(t)$ de este vector de estados es trivial ya que $\hat{\vec{a}}(t)$ es idénticamente cero por definición, y la ecuación (5.34) implica que $\dot{\hat{\vec{b}}}(t) = 0$.

La fase de propagación comprende la propagación de este vector de estados y de la matriz de covarianzas del error. De la teoría de procesos gaussianos se desprende la ecuación diferencial matricial de propagación de la matriz de covarianza

$$\dot{P} = FP + PF^T + GQG^T, \quad (5.37)$$

donde las matrices F , G y Q se determinarán a continuación. Dicha matriz de covarianza se puede escribir en términos de sus submatrices como

$$P \equiv E\{(\vec{x} - \hat{\vec{x}})(\vec{x} - \hat{\vec{x}})^T | Z\} = \begin{bmatrix} P_a & P_c \\ P_c^T & P_b \end{bmatrix}. \quad (5.38)$$

La partición de la matriz de covarianza en las submatrices de actitud (P_a), correlación (P_c) y bias (P_b) será útil en lo sucesivo.

Se considera de nuevo el vector de Gibbs, escrito en términos del cuaternión de error de estimación como

$$\vec{a} = 2 \frac{\delta \vec{q}}{\delta q_4}. \quad (5.39)$$

Tomando derivadas y utilizando la ecuación (5.30) se tiene que la dinámica del error es

$$\dot{\vec{a}} = (I_{3 \times 3} + \frac{1}{4} \vec{a} \vec{a}^T)(\vec{\omega} - \vec{\omega}_{ref}) - \frac{1}{2}(\vec{\omega} + \vec{\omega}_{ref}) \times \vec{a} \equiv \vec{f}(\vec{x}, t). \quad (5.40)$$

Esta es la ecuación cinemática exacta, no depende de la aproximación EKF ni del modelo de la dinámica del vehículo espacial. Combinando las ecuaciones (5.32), (5.33) y (5.35), se tiene que

$$\vec{\omega} - \vec{\omega}_{ref} = \hat{\vec{b}} - \vec{b} - \vec{\eta}_1, \quad (5.41)$$

e introduciendo este resultado en la ecuación (5.40) e ignorando términos de orden dos o mayor en los errores \vec{a} y \vec{b} , se obtiene el modelo lineal EKF para el error de actitud

$$\vec{f}(\vec{x}, t) \approx \hat{\vec{b}} - \vec{b} - \vec{\eta}_1 - \vec{\omega}_{ref} \times \vec{a}. \quad (5.42)$$

Se definen las matrices

$$F(t) \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{a}} & \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{b}} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[\vec{\omega}_{ref}^\times] & -I_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad (5.43)$$

$$G(t) \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{\eta}_1} & \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{\eta}_2} \\ 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad (5.44)$$

y

$$E \left\{ \begin{bmatrix} \vec{\eta}_1(t) \\ \vec{\eta}_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\eta}_1(t') \\ \vec{\eta}_2(t') \end{bmatrix}^T \right\} = \delta(t - t') Q(t), \quad (5.45)$$

donde

$$\left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \right]_{ij} \equiv \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad (5.46)$$

y $\delta(t - t')$ es la función delta de Dirac. La matriz $Q(t)$ es diagonal y está formada por las covarianzas de los errores $\vec{\eta}_1(t)$ y $\vec{\eta}_2(t)$, al asumir que éstos son procesos estadísticamente independientes.

5.3.2. Fase de actualización

Una medida vectorial se modela como una función de m componentes $\vec{h}(\vec{v}_B)$ de un vector \vec{v}_B medido en ejes cuerpo, y corrompido por un ruido blanco gaussiano. La representación de \vec{v}_B en ejes cuerpo es la transformación de su representación \vec{v}_I en ejes inerciales mediante la matriz de actitud asociada al cuaternión de actitud real

$$\vec{v}_B = A(q) \vec{v}_I \approx \left\{ I_{3 \times 3} - [\vec{a}^\times] - \frac{1}{2} (a^2 I_{3 \times 3} - \vec{a} \vec{a}^T) \right\} A(q_{ref}) \vec{v}_I, \quad (5.47)$$

donde se han utilizado las ecuaciones (3.6), (5.26) y la aproximación de la matriz de error de actitud en función del vector de Gibbs

$$A(\delta q(\vec{a})) \approx I_{3 \times 3} - [\vec{a}^\times] - \frac{1}{2} (a^2 I_{3 \times 3} - \vec{a} \vec{a}^T). \quad (5.48)$$

Substituyendo la ecuación (5.47) en $\vec{h}(\vec{v}_B)$ y desarrollando en serie hasta el primer orden en \vec{a} en torno al valor de referencia previo a la actualización se obtiene

$$\vec{h}(\vec{v}_B) = \vec{h} \vec{v}_B - \left. \frac{\partial \vec{h}}{\partial \vec{v}} \right|_{\vec{v}_B} [\vec{a}^\times] \vec{v}_B = \vec{h}(\vec{v}_B) + H_a \vec{a}, \quad (5.49)$$

donde $\bar{v}_B \equiv A(q_{ref}(-))\vec{v}_I$ es el vector medido en ejes cuerpo predicho por el cuaternión previo a la actualización, y H_a es la matriz de sensibilidad del error de actitud, que se define como

$$H_a \equiv \left. \frac{\partial \vec{h}}{\partial \vec{v}} \right|_{\bar{v}_B} [\bar{v}_B^\times]. \quad (5.50)$$

En nuestro caso, el modelo de medida es simplemente $\vec{h}(\vec{v}) = \vec{v}$, por lo que

$$H_a = [\bar{v}_B^\times]. \quad (5.51)$$

Puesto que las medidas no dependen explícitamente de los errores de los giróscopos, la matriz de sensibilidad de las medidas ($m \times 6$) es

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{h}}{\partial \vec{a}} & \frac{\partial \vec{h}}{\partial \vec{b}} \end{bmatrix} = [H_a \quad 0_{m \times 3}]. \quad (5.52)$$

Las medidas vectoriales se obtienen del sensor estelar y se consideran de tres componentes, por lo que $m = 3$.

La matriz de ganancia de Kalman viene dada por

$$K = \begin{bmatrix} P_a(-) \\ P_c^T(-) \end{bmatrix} H_a^T [H_a P_a(-) H_a^T + R]^{-1}, \quad (5.53)$$

donde R es la covarianza del ruido blanco asociado a la medida. La actualización del estado se obtiene como

$$\hat{\vec{x}}(+)=\hat{\vec{x}}(-)+K[\vec{h}_{obs}-\vec{h}(\bar{v}_B)-H_a\hat{\vec{a}}(-)] \quad (5.54)$$

donde \vec{h}_{obs} es el valor medido y el valor predicho $\vec{h}(\bar{v}_B)$ viene dado por la estimación previa a la actualización de la ecuación (5.49). La actualización de la matriz de covarianza se realiza según

$$P(+)=P(-)-KH_a[P_a(-) \quad P_c^T(-)]. \quad (5.55)$$

5.3.3. Fase de reset

El reseteo del cuaternión emplea la ecuación (5.27) junto a la parametrización del vector de Gibbs, ecuación (4.70). Si se realiza un reseteo tras cada actualización de una medida, el término $H_a\hat{\vec{a}}(-)$ de la ecuación (5.54) es idénticamente nulo.

Con objeto de aumentar la eficiencia computacional, la fase reset se realiza una vez que se han actualizado todas las medidas de un conjunto simultáneo. En este trabajo se consideran dos medidas vectoriales simultáneas procedentes del sensor de estrellas. Por lo tanto, la estimación $\hat{\vec{a}}(-)$ en la ecuación (5.54) para la segunda medida es el $\hat{\vec{a}}(+)$ tras la actualización de la primera medida.

Una vez realizadas todas las actualizaciones de las medidas, es fundamental realizar el reset antes de comenzar la siguiente propagación para asegurar que $\hat{\vec{a}}$ es nulo al principio de la propagación de forma que se pueda evitar la propagación de $\hat{\vec{a}}(t)$ entre medidas. El reseteo no modifica la covarianza del error puesto que ésta ni aumenta ni disminuye el contenido total de información de la estimación; sólo traslada esta información de una parte de la representación de la actitud a otra.

5.3.4. Algoritmo MEKF

Una vez establecidas las fases del filtrado, se procede a detallar el proceso de cálculo sistemático del MEKF empleado en los programas elaborados.

- **Inicialización** Se fija $\hat{q} = \hat{q}_0$ y $P(0) = P_0$, los valores iniciales estimados de la actitud y su covarianza (por ejemplo obtenidos del algoritmo Q). Se tiene por tanto $\hat{b} = \vec{0}$ y $\hat{x} = \vec{0}$.
- **Fase de propagación** Se propaga el cuaternión de actitud como

$$\dot{\hat{q}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \hat{q}_4 & -\hat{q}_3 & \hat{q}_2 & \hat{q}_1 \\ \hat{q}_3 & \hat{q}_4 & -\hat{q}_1 & \hat{q}_2 \\ -\hat{q}_2 & \hat{q}_1 & \hat{q}_4 & \hat{q}_3 \\ -\hat{q}_1 & -\hat{q}_2 & -\hat{q}_3 & \hat{q}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\omega}_1 \\ \hat{\omega}_2 \\ \hat{\omega}_3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.56)$$

y la covarianza del error $P(t)$

$$\dot{P}(t) = F(\hat{q})P(t) + P(t)F(\hat{q})^T + Q. \quad (5.57)$$

Ambas propagaciones se computan mediante la velocidad angular estimada, es decir

$$\hat{\vec{\omega}}(t) = \vec{\omega}(t)_{gyr} - \hat{b}. \quad (5.58)$$

- **Fase de medida** En cada instante de medida k , se realiza la actualización recogiendo secuencialmente la información de las dos medidas vectoriales consideradas.

Para la primera medida, se obtiene la matriz de sensibilidad H_a^k como

$$H_a^k = \left[C(\hat{q}^k) \vec{v}_1^k \right]^\times. \quad (5.59)$$

Se calcula entonces la ganancia de Kalman:

$$K_k = \begin{bmatrix} P_a^k \\ P_c^k \end{bmatrix} H_a^{kT} \left[H_a^k P_a^k H_a^{kT} + R_1 \right]. \quad (5.60)$$

Se actualizan el vector de estado y la covarianza

$$\hat{x}^+ = \hat{x}^- + K_k \left[\vec{w}_1 - \hat{w}_1 \right] \quad (5.61)$$

$$P_0^+ = P_0^- - K_k H_a^k \begin{bmatrix} P_a^k & P_c^k \end{bmatrix}. \quad (5.62)$$

Nótese que la fase de propagación ha mantenido el error \hat{a} idénticamente nulo, por lo que no influye en esta primera actualización. Sin embargo, la actualización del vector de estados se refleja en el nuevo \hat{a}^+ , que sí influye en la siguiente medida.

Para la segunda medida, se calcula de nuevo la ganancia de Kalman como

$$K_k = \begin{bmatrix} P_a^k(+) \\ P_c^k(+) \end{bmatrix} H_a^{kT} \left[H_a^k P_a^k(+) H_a^{kT} + R_2 \right], \quad (5.63)$$

donde H_a^k se obtiene del vector de la segunda medida en el instante k , de forma análoga a la ecuación (5.78), y las matrices $P_a^k(+)$ y $P_c^k(+)$ son las correspondientes submatrices de P_0^+ resultado de la actualización de la medida anterior.

Las observaciones Se actualizan el vector de estado y la covarianza para la siguiente medida,

$$\hat{x}^+ = \hat{x}^- + K_k \left[\vec{w}_2 - \hat{w}_2 - H_a^k \hat{a}^- \right] \quad (5.64)$$

$$P_0^+ = P_0^- - K_k H_a^k \begin{bmatrix} P_a^k(+), & P_c^k(+), \end{bmatrix}. \quad (5.65)$$

En este caso sí influye el vector de Gibbs no nulo de la actualización previa. Nótese que para la segunda medida \hat{x}^- es \hat{x}^+ resultado de la primera actualización. Del mismo modo ocurre con las cantidades \hat{a}^- y P_0^- .

El nuevo vector \hat{x}^+ se almacena en los vectores \hat{a} y \hat{b} según

$$\hat{x}^+ = \begin{bmatrix} \hat{a}^+ \\ \hat{b}^+ \end{bmatrix}. \quad (5.66)$$

Nótese que el vector \hat{b} es constante durante la siguiente fase de propagación. Por tanto, cuanto menor sea el tiempo de actualización más continua será la corrección de $\vec{\omega}_{gyr}(t)$ y menor será el error de estimación.

Esta formulación también es válida en el caso de que sólo haya disponible una medida.

- **Fase de reset** Finalmente, se actualiza \hat{q}_k

$$\hat{q}_k^+ = \delta q(\vec{a}^+) \otimes \hat{q}_k^- = \frac{1}{\sqrt{4 + \|\hat{a}^+\|^2}} \begin{bmatrix} \vec{a} \\ 2 \end{bmatrix} \otimes \hat{q}_k^-, \quad (5.67)$$

y se reinicia el vector de estados para el siguiente tramo de propagación

$$\hat{x} = \vec{0}. \quad (5.68)$$

Se itera el procedimiento propagación/medida/reset, partiendo de

$$\hat{q}(t_k) = \hat{q}_k^+ \quad (5.69)$$

$$P(t_k) = P_k^+. \quad (5.70)$$

5.4. Problema de tracking con información imperfecta

Consiste en el problema general de determinación y control de actitud. Es la fusión de los problemas de estimación y de control de actitud.

En la sección 4.4 se plantea el problema de tracking extendido: se obtiene un sistema lineal en las variables de error caracterizado por las matrices A y B , y asociado al sistema real. La particularidad de que el vector de estados (10x1) contenga al cuaternión de actitud resulta en un vector de error de una dimensión menos (9x1), al codificar el cuaternión de error mediante el vector de Gibbs \vec{a} , de dimensión 3x1. En la sección 4.3 se formula la matriz de realimentación del vector de estados, calculada en base a las matrices A y B del sistema lineal asociado.

Si se tiene acceso al estado, como se ha desarrollado en la sección 4.4, la señal de control de realimentación del sistema real es $\vec{u} = \vec{u}_{ref} - K \vec{\delta x}$, donde el vector de error $\vec{\delta x}$ se calcula como la desviación desde el estado de referencia al estado real.

Si no se dispone de información real del estado, el vector de error se calcula como la desviación desde el estado de referencia al estado estimado mediante el Filtro de Kalman Extendido Multiplicativo (MEKF), expuesto en la sección anterior. Este es el error que el sistema de control cree que está cometiendo, y en lo sucesivo se denominará *error ficticio* $\tilde{\delta x}$.

En este caso la fase de propagación comprende la propagación del vector de estado estimado, más la integración de las ecuaciones dinámicas del estado real completo. Además, se ha de propagar la matriz de covarianza P según las ecuaciones del MEKF.

La propagación del vector de estado estimado en principio comprende la propagación de $\hat{\omega}$, \hat{q} y \hat{h} . Por simplicidad, se asume que el momento cinético de las ruedas \vec{h} es perfectamente conocido en todo instante. Se puede implementar la estimación de dicha variable incluyendo datos de sensores tacométricos de tipo magnético u óptico. Esta ampliación del MEKF se propone como trabajo futuro.

La velocidad angular estimada $\hat{\omega}$ se obtiene, al igual que en el MEKF, como la velocidad angular dada por los giróscopos $\vec{\omega}_{gyr}$ corregida con la estimación del bias \hat{b} . A su vez, $\vec{\omega}_{gyr}$ se construye artificialmente en cada paso de integración del método de Runge-Kutta como la suma de la velocidad angular real $\vec{\omega}$ y el vector de ruidos del modelo de Farrenkopf $\vec{\eta}_{gyr}$, generado a priori

$$\hat{\omega} = \vec{\omega} + \vec{\eta}_{gyr} - \hat{b}. \quad (5.71)$$

Nótese que, propagando la velocidad angular real en cada paso de integración, la velocidad angular estimada se construye aritméticamente, por lo que no se propaga.

Así, la única propagación necesaria del vector de estados estimado es la actitud estimada \hat{q} . Al igual que en el MEKF, su propagación consiste en la integración de las ecuaciones cinemáticas mediante la velocidad angular estimada $\hat{\omega}$.

Además de los vectores de estado real y estimado, será necesario propagar la matriz de covarianza del error P , mediante la ecuación (5.57). Así, la función de integración del método Runge-Kutta se extiende en este caso a 50 componentes:

- **Vector de estados real** \hat{x} , de 10 componentes
- **Cuaternión de actitud estimado** \hat{q} , de 4 componentes
- **Matriz de covarianza** $P_{6 \times 6}$, de 36 componentes

La propagación del estado real se realiza integrando las ecuaciones dinámicas del error, tal y como se realizó en el apartado de control. Sin embargo, el error del vector de estados que multiplica la ganancia de control de Riccati es el error ficticio, compuesto según

$$\tilde{\delta x} = \begin{bmatrix} \hat{\omega} - \vec{\omega}_{ref} \\ \tilde{a} \\ \vec{h} - \vec{h}_{ref} \end{bmatrix}, \quad (5.72)$$

donde \tilde{a} es el vector de Gibbs que codifica el error de actitud entre el cuaternión estimado y el de referencia.

5.4.1. Algoritmo de cálculo

Se expone a continuación el algoritmo de cálculo empleado en el problema de tracking con información imperfecta, estructurado de manera similar al del MEKF.

Es importante diferenciar en este algoritmo el vector de estados convencional, formado por las variables $(\vec{\omega}, q, \vec{h})$, y el vector de estados del MEKF, formado por las variables de error de actitud y bias (\vec{a}, \vec{b}) .

- **Inicialización** Se fijan las condiciones iniciales para el vector de estados real. En este caso, por simplicidad en la interpretación se toma una condición inicial igual al estado de referencia inicial. Se fijan a su vez $\hat{q} = \hat{q}_0$ y $P(0) = P_0$, los valores iniciales estimados de la actitud y su covarianza (por ejemplo obtenidos del algoritmo Q). En este trabajo se supone un conocimiento inicial perfecto de la actitud y una covarianza del error inicial nula. Se tiene por tanto \hat{b} y $\hat{a} = \vec{0}$.

Se genera a priori el vector de ruidos de Farrenkopf. Permitirá obtener artificialmente la velocidad angular de los giróscopos para cualesquiera velocidades angulares reales que se desprendan de la propagación dinámica del vector de estados real. Se construye como

$$\vec{\eta}_{gyr}(t) = \vec{b}(t) + \vec{\eta}_1(t), \quad (5.73)$$

$$\dot{\vec{b}}(t) = \vec{\eta}_2(t). \quad (5.74)$$

- **Fase de propagación** Se realiza una propagación dinámica del estado real, con la salvedad de que el error empleado es el error ficticio. El vector de control es por tanto

$$\vec{u} = \vec{u}_{ref} - K\vec{\delta x}, \quad (5.75)$$

donde $\vec{\delta x}$ viene dado por la ecuación (5.72).

Este vector de control se emplea para propagar la velocidad angular del vehículo espacial, mediante las ecuaciones dinámicas no lineales

$$\begin{aligned} (I_1 - J_a)\dot{\omega}_1 &= (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 - h_3\omega_2 + h_2\omega_3 - u_1 + M_1 \\ (I_2 - J_a)\dot{\omega}_2 &= (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 - h_1\omega_3 + h_3\omega_1 - u_2 + M_2 \\ (I_3 - J_a)\dot{\omega}_3 &= (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 - h_2\omega_1 + h_1\omega_2 - u_3 + M_3. \end{aligned} \quad (5.76)$$

Nótese que, puesto que se trata de simular el sistema real, el gradiente gravitatorio M_i ha de calcularse según el cuaternión de actitud real.

Este vector de control ficticio es también argumento de entrada para la propagación del momento cinético de las ruedas, mediante las ecuaciones (3.29), donde el resto de parámetros de entrada son reales.

Se propaga el cuaternión de actitud real mediante las ecuaciones cinemáticas, a través de la velocidad angular real.

Al igual que en el algoritmo MEKF, se propaga el cuaternión de actitud estimada mediante la ecuación cinemática (5.56), donde la velocidad angular estimada $\hat{\vec{\omega}}$ se obtiene algebricamente como

$$\hat{\vec{\omega}} = \vec{\omega} + \vec{\eta}_{gyr} - \dot{\vec{b}}. \quad (5.77)$$

Esta velocidad angular estimada se emplea en la propagación de la matriz de covarianza, que al igual que en el MEKF, se calcula mediante la ecuación (5.57).

Puesto que la propagación se realiza mediante integración numérica, es importante renormalizar los cuaterniones de actitud real y estimada. La acumulación de errores numéricos ocasiona la pérdida de la norma unitaria, lo que produce resultados incorrectos —el error de estimación de actitud crece en el tiempo de forma errónea.

- **Fase de medida** En cada instante de medida k , se realiza la actualización recogiendo secuencialmente la información de las dos medidas vectoriales consideradas.

Para la primera medida, se obtiene la matriz de sensibilidad H_a^k como

$$H_a^k = \left[C(\hat{q}^k) \vec{v}_1^k \right]^\times. \quad (5.78)$$

Se calcula entonces la ganancia de Kalman:

$$K_k = \begin{bmatrix} P_a^k \\ P_c^k \end{bmatrix} H_a^{kT} \left[H_a^k P_a^k H_a^{kT} + R_1 \right]. \quad (5.79)$$

Se actualizan el vector de estado MEKF y la covarianza

$$\hat{x}^+ = \hat{x}^- + K_k \left[\vec{w}_1 - \hat{w}_1 \right] \quad (5.80)$$

$$P_0^+ = P_0^- - K_k H_a^k \begin{bmatrix} P_a^k & P_c^k \end{bmatrix}. \quad (5.81)$$

Al igual que en el MEKF puro, la fase de propagación ha mantenido el error \hat{a} idénticamente nulo, por lo que no influye en esta primera actualización. Sin embargo, la actualización del vector de estados se refleja en el nuevo \hat{a}^+ , que sí influye en la siguiente medida.

Para la segunda medida, se calcula de nuevo la ganancia de Kalman como

$$K_k = \begin{bmatrix} P_a^k(+), \\ P_c^k(+), \end{bmatrix} H_a^{kT} \left[H_a^k P_a^k(+), H_a^{kT} + R_2 \right], \quad (5.82)$$

donde H_a^k se obtiene del vector de la segunda medida en el instante k , de forma análoga a la ecuación (5.78), y las matrices $P_a^k(+)$ y $P_c^k(+)$ son las correspondientes submatrices de P_0^+ resultado de la actualización de la medida anterior.

Se actualizan el vector de estado MEKF y la covarianza para la siguiente medida,

$$\hat{x}^{++} = \hat{x}^- + K_k \left[\vec{w}_2 - \hat{w}_2 - H_a^k \hat{a}^- \right] \quad (5.83)$$

$$P_0^+ = P_0^- - K_k H_a^k \begin{bmatrix} P_a^k(+), & P_c^k(+), \end{bmatrix}. \quad (5.84)$$

En este caso sí influye el vector de Gibbs no nulo de la actualización previa. Nótese que para la segunda medida \hat{x}^- es \hat{x}^+ resultado de la primera actualización. Del mismo modo ocurre con las cantidades \hat{a}^- y P_0^- .

Es importante notar que, en este caso, los vectores observados \vec{w}_i se obtienen artificialmente como una deformación del vector de posición estelar transformado mediante el cuaternión de actitud *real* y no de referencia, corrompidos por un ruido blanco gaussiano. Es decir, se construye como

$$\vec{w}_i = C(q) \vec{v}_i + \vec{\eta}_{w_i}. \quad (5.85)$$

El nuevo vector \hat{x}^{++} se almacena en los vectores \hat{a} y \hat{b} según

$$\hat{x}^{++} = \begin{bmatrix} \hat{a}^+ \\ \hat{b}^+ \end{bmatrix}. \quad (5.86)$$

Nótese que el vector \hat{b} es constante durante la siguiente fase de propagación. Por tanto, cuanto menor sea el tiempo de actualización más continua será la corrección de $\vec{\omega}_{gyr}(t)$ y menor será el error de estimación.

Esta formulación también es válida en el caso de que sólo haya disponible una medida.

- **Fase de reset** Finalmente, se actualiza \hat{q}_k

$$\hat{q}_k^+ = \delta q(\vec{a}^+) \otimes \hat{q}_k^- = \frac{1}{\sqrt{4 + \|\hat{a}^+\|^2}} \begin{bmatrix} \vec{a} \\ 2 \end{bmatrix} \otimes \hat{q}_k^-, \quad (5.87)$$

y se reinicia el vector de estados MEKF para el siguiente tramo de propagación

$$\hat{x} = \vec{0}. \quad (5.88)$$

Se itera el procedimiento propagación/medida/reset, partiendo de

$$\hat{q}(t_k) = \hat{q}_k^+ \quad (5.89)$$

$$P(t_k) = P_k^+. \quad (5.90)$$

Puesto que en este problema también se ha de propagar el vector de estado real, la estructuración de la actualización es ligeramente diferente. Si la actualización se ha realizar en un cierto instante k , la propagación se efectúa hasta el instante $k + 1$, de forma que a la condición inicial para el vector de estados real se asigna la propagación de dicho vector de estados en el instante $k + 1$. Así, la condición inicial para el siguiente tramo de propagación para la función completa Y del método de Runge-Kutta, tras la fase de reset, será:

$$Y_0 = \begin{bmatrix} \vec{x}_{j+1} \\ q^+(q_j^-) \\ P_0^+(P_{0j}^-) \end{bmatrix}. \quad (5.91)$$

De esta forma se mantiene la compatibilidad en el vector de estados real.

Capítulo 6

Simulación

En este capítulo se muestran las características del algoritmo de control de actitud mediante simulaciones numéricas. En la sección 6.1 se demuestra la efectividad del controlador LQR horizonte finito ante varias situaciones y se comprueba su robustez bajo condiciones desfavorables. También se analiza cualitativa y cuantitativamente el efecto de la sintonización del controlador, a través de las matrices de pesos, sobre las capacidades máximas del sistema de control de actitud.

En la sección 6.2 se revisan los métodos de estimación de actitud desarrollados en el capítulo 5 mediante simulaciones, y se realiza un análisis paramétrico del método de estimación preferido, el filtro de Kalman extendido multiplicativo. Finalmente, en la sección 6.3 se prueba mediante simulaciones numéricas la eficacia del sistema de estimación y control de actitud, como unión de ambas disciplinas.

6.1. Problema de tracking con información perfecta

En esta sección se realiza un análisis del problema de tracking con acceso perfecto al estado mediante simulaciones.

Para caracterizar las actuaciones del ADCS se observarán la evolución del cuaternión de actitud, los momentos de control y el error de apuntamiento. Este error, también conocido como “APE” (acrónimo anglosajón de *Absolute Pointing Error*) según la publicación de requerimientos de la ESA para el observatorio espacial Herschel [4], es el ángulo de Euler correspondiente al cuaternión de error entre el cuaternión de actitud de referencia y el simulado, es decir

$$APE(t) = 2 \operatorname{acos} \delta q_4(t), \quad (6.1)$$

donde $\delta q_4(t)$ se obtiene de

$$\delta q(t) = q_{ref}(t)^* \otimes q_{sim}(t). \quad (6.2)$$

También se pueden caracterizar las actuaciones del sistema ADCS a través del índice de energía (o *energy index*), que es una medida de la energía consumida por los actuadores y se obtiene según Junkins [5] como

$$E = \int_0^T |\vec{u}(t)\vec{\omega}^w(t)| dx = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^3 |u_{ij}\omega_{ij}^w| dx \quad [J], \quad (6.3)$$

donde $\omega^w(t)$ es el vector formado por las velocidades angulares de las tres ruedas de reacción. También se puede interpretar como la integral de la potencia consumida P por las ruedas de reacción, la cual también se utilizará para evaluar los requisitos energéticos del ADCS.

Las características másicas del sistema serán constantes para todas las simulaciones. Se muestran en la tabla 6.1.

Tensor de inercia del sistema	$I = \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 175 \end{bmatrix} \text{ [kg}\cdot\text{m}^2]$
Momento de inercia axial de las ruedas	$J_a = 1 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

Tabla 6.1: Parámetros másicos del sistema

Con objeto de analizar sus efectos de manera más clara, las matrices de pesos de sintonización del controlador se toman de la siguiente forma simplificada:

- Matriz de pesos de control R

$$R = R_{ii}I_{(3 \times 3)}, \quad (6.4)$$

- Matriz de pesos de error de estados Q es

$$Q = \text{diag} [1 \quad 1 \quad 1 \quad Q_{qq} \quad Q_{qq} \quad Q_{qq} \quad Q_{hh} \quad Q_{hh} \quad Q_{hh}], \quad (6.5)$$

- Matriz de pesos de error de estado final S(T)

$$S(T) = \text{diag} [1 \quad 1 \quad 1 \quad S_{qq} \quad S_{qq} \quad S_{qq} \quad S_{hh} \quad S_{hh} \quad S_{hh}], \quad (6.6)$$

La variación de la matriz R se hace a través de la variación de R_{ii} . La variación de las matrices Q y $S(T)$ sólo influye en el error de actitud, mediante la variación de los parámetros Q_{qq} y S_{qq} . Los parámetros Q_{hh} y S_{hh} serán la unidad en todas las simulaciones, excepto en la sección 6.1.4.

En la figura 6.1 se muestra la traza del satélite durante la simulación propuesta (caso 1). Es representativa de todos los perfiles de actitud al incluir fases de iluminación de paneles solares (traza amarilla en la figura), fases de seguimiento de estación terrestre (traza negra en la figura) y las maniobras de transición entre dichos perfiles de actitud. Comienza con un perfil de seguimiento del Sol, luego pasa sobre Sevilla de Sur a Norte, y tras otra fase de seguimiento del Sol pasa sobre la ciudad de Yakutat, de Norte a Sur.

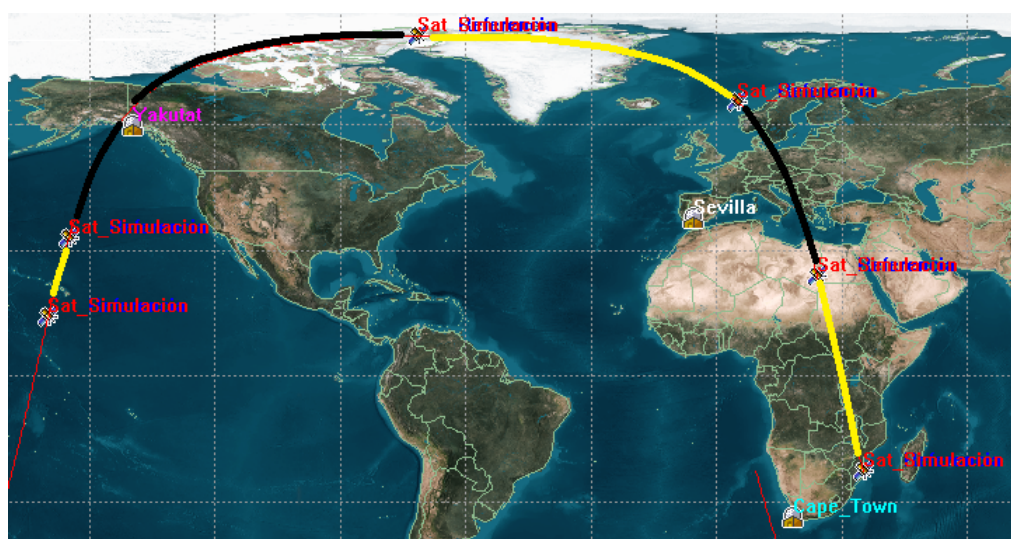


Figura 6.1: Traza del satélite durante la simulación del caso 1

En la figura 6.2 se presenta el perfil de actitud de referencia y el error de apuntamiento típico durante el tiempo de simulación. Se observa a la izquierda las cuatro componentes del cuaternión de actitud de seguimiento del Sol, constante en el tiempo y con error cada vez más pequeño (perfil 'A' en la figura). A continuación se realiza la maniobra de transición al perfil de seguimiento de Sevilla, donde el error de apuntamiento es mayor (perfil 'B'). Este perfil de transición da paso al perfil de seguimiento de estación, donde la actitud varía con el tiempo más lentamente y el error de actitud vuelve a ser pequeño (perfil 'C'). Tras otra maniobra de transición, se repite la secuencia para el siguiente objetivo terrestre.

El error de apuntamiento mayor durante el seguimiento de Yakutat se debe a que el paso sobre esta ciudad es más próximo a la vertical local (cénit) de esta ciudad, es decir, la traza pasa más cerca de esta estación que de Sevilla (ver figura 6.1). Esto implica unas velocidades angulares de referencia mayores durante la maniobra de seguimiento, lo cual induce a su vez errores de seguimiento mayores.

Además de estos perfiles de actitud, también se analizarán las actuaciones ante una condición inicial (actitud) distinta de la de referencia, es decir, la maniobra automática de estabilización.

La efectividad y eficacia del sistema de control dependen en gran medida de la sintonización del controlador LQR. Se analiza a continuación el efecto de las matrices de pesos R , $S(T)$ y Q en las actuaciones del sistema de control.

6.1.1. Efecto de R

En este apartado se analiza el impacto de la sintonización del controlador a través de la matriz de peso de la señal de control R . Para ello se simula el problema de tracking con información perfecta variando sus elementos diagonales, R_{ii} , con los parámetros de simulación de la figura 6.2. Nótese que la desviación de actitud inicial sólo afecta al eje 1.

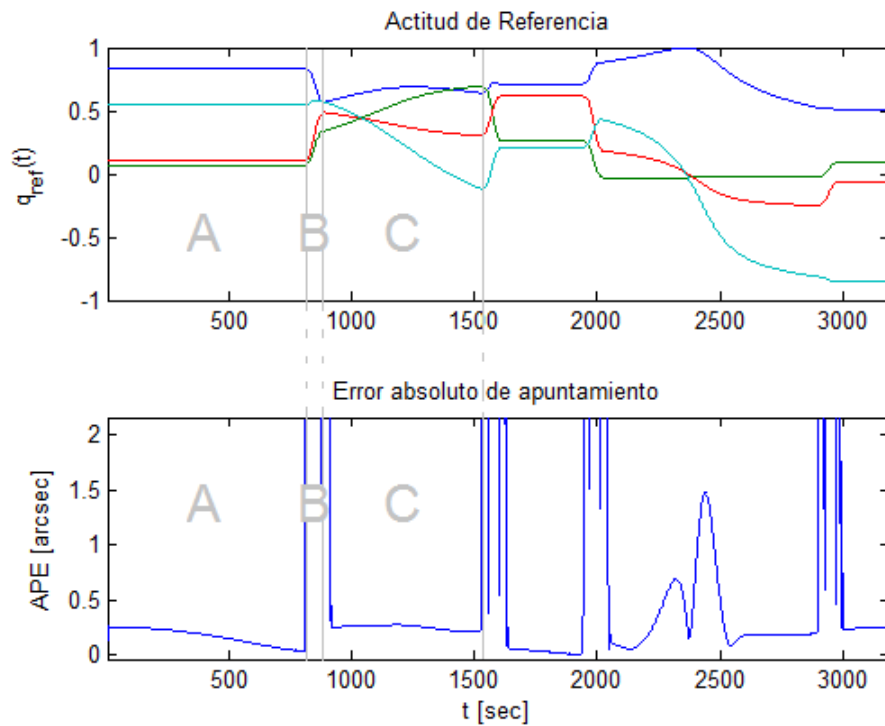


Figura 6.2: Perfil de actitud de referencia durante dos pasos de estación y error de apuntamiento típico asociado

Penalización del error de actitud	$Q_{qq} = 10^3$
Penalización de la señal de control	$R_{ii} = 10^k, \quad k = 1, 2, \dots, 7$
Penalización del error de actitud final	$S_{qq}(T) = 10^7$
Condiciones iniciales	q_0 formado por rotación de q_{ref0} mediante ángulo y eje de Euler $\{\Theta_0 = 60^\circ, \vec{e}_0 = [1 \ 0 \ 0]^T\}$. $\vec{h}_0 = \vec{\omega}_0 = 0$

Tabla 6.2: Parámetros de simulación para análisis de R

Al aumentar los elementos diagonales de la matriz de pesos R la función de coste aumentará en mayor medida si el vector de control crece. Por lo tanto, aumentar R_{ii} supone penalizar las actuaciones a costa de conseguir un control más barato en términos de potencia y par. La figura 6.3 muestra la mejora dramática de la maniobra de estabilización inicial al disminuir la penalización R_{ii} . Se toma como representativa la primera componente del cuaternión de actitud q_1 por claridad en la representación.

Se observa cómo disminuye el error de actitud y aumenta el par de control necesario al disminuir la penalización sobre el vector de control R_{ii} (figuras 6.4 y 6.5).

Nótese que el esfuerzo de control necesario crece mucho para R_{ii} bajos.

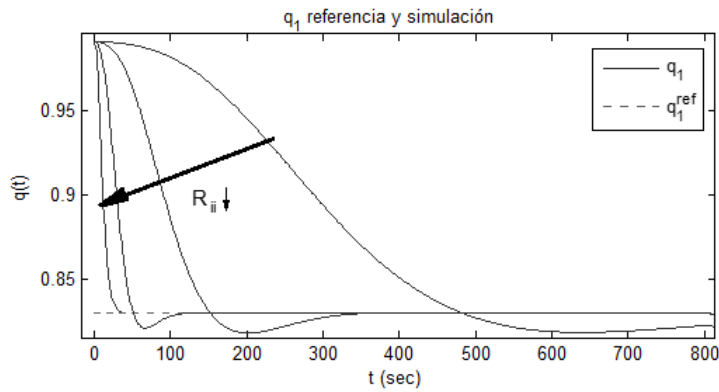


Figura 6.3: Primera componente de la actitud q_1 para $R_{ii} = 10, 10^3, 10^5$ y 10^7

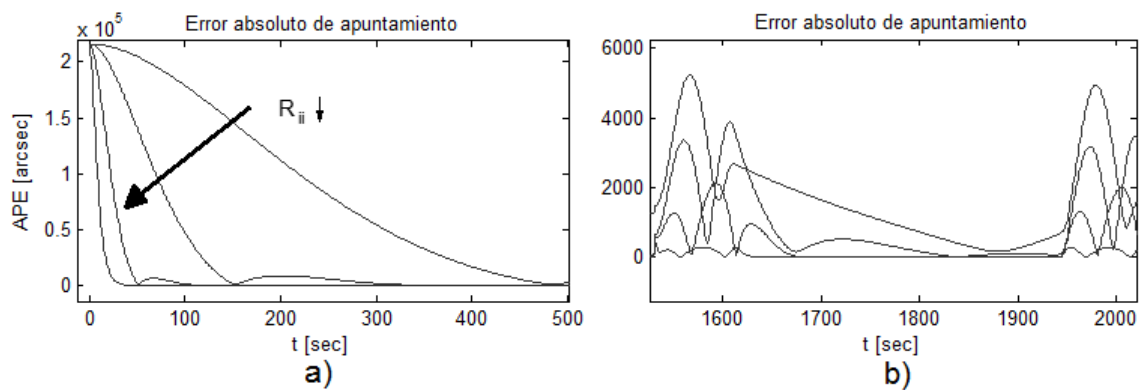


Figura 6.4: Error de apuntamiento con $R_{ii} = 10^k, k = 1, 3, 5, 7$, durante la estabilización inicial (a) y un perfil de seguimiento del Sol entre dos maniobras de reorientación (b)

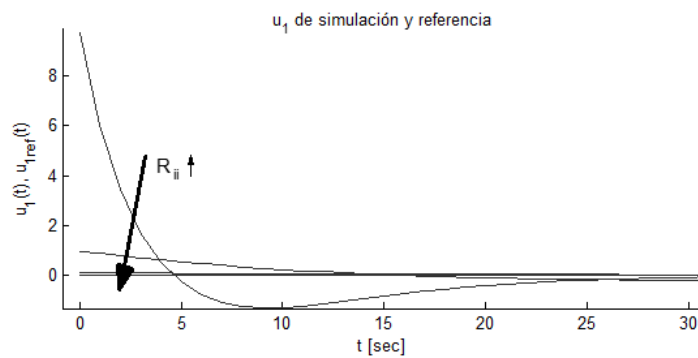


Figura 6.5: Ley de control de la rueda '1' u_1 para $R_{ii} = 10, 10^3, 10^5$ y 10^7

Un incremento de la penalización también disminuye la potencia necesaria para la maniobra de estabilización inicial (la que mayor esfuerzo de control necesita), teniendo un impacto menor en la potencia consumida por las ruedas durante el resto de la misión. La figura 6.6 y la tabla 6.3 describen la potencia consumida durante la estabilización frente a la maniobra más exigente del resto de la misión, una maniobra de reorientación.

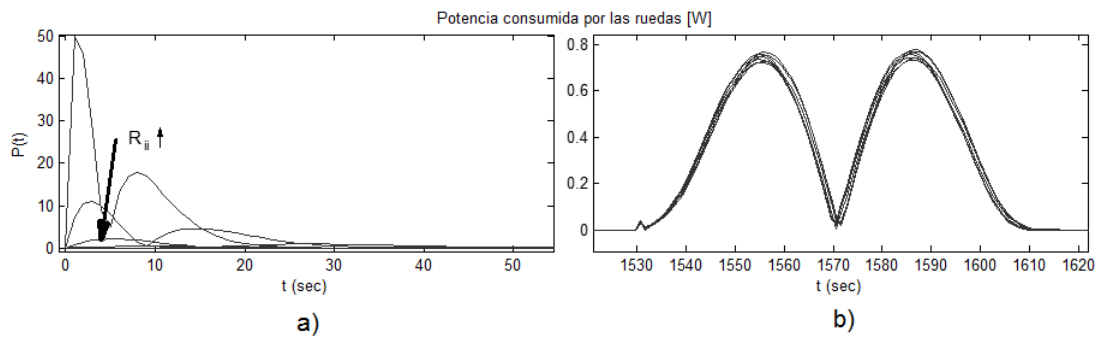


Figura 6.6: Potencia consumida para varios R_{ii} , durante la maniobra de estabilización (a) y una maniobra de reorientación (b)

R_{ii}	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7
P_{max} estabilización [W]	49.98	10.996	2.114	0.3856	0.06922	0.01234	0.0022
P_{max} slew [W]	0.7759	0.7688	0.7422	0.7314	0.744	0.7581	0.7682
\overline{APE} [arcsec]	685.16	1038.77	1812.55	3312.85	6314.14	12845.32	27073.81

Tabla 6.3: Potencia máxima consumida por el conjunto de ruedas de reacción durante las maniobras de estabilización inicial y de reorientación en función de R_{ii}

El incremento de la penalización del control disminuye el consumo energético durante el tiempo de simulación, fundamentalmente debido a la disminución del esfuerzo de control durante la estabilización inicial (en la figura 6.6.b, la potencia de control es prácticamente constante con R_{ii}). La tabla 6.4 muestra el efecto de R_{ii} sobre el índice de energía E .

R_{ii}	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7
Índice de energía [J]	365.4	207.6	130.9	102.5	94.23	92.56	92.57

Tabla 6.4: Índice de energía consumido durante la simulación para diferentes R_{ii}

6.1.2. Efecto de Q

Se analiza a continuación la sintonización del controlador a través de la penalización del error de actitud, la matriz de pesos Q . Para ello se simula el algoritmo con los parámetros de la tabla 6.5.

Penalización del error de actitud	$Q_{qq} = 10^k, \quad k = 2, \dots, 7$
Penalización de la señal de control	$R_{ii} = 10^3$
Penalización del error de actitud final	$S_{qq}(T) = 10^7$
Condiciones iniciales	q_0 formado por rotación de q_{ref_0} mediante ángulo y eje de Euler $\{\Theta_0 = 60^\circ, \vec{e}_0 = [1 \ 0 \ 0]^T\}$. $\vec{h}_0 = \vec{\omega}_0 = 0$

Tabla 6.5: Parámetros de simulación para análisis de Q_{qq}

Como es de esperar, un aumento de la penalización del error de actitud disminuye rápidamente el error de apuntamiento en la maniobra de estabilización inicial (figura 6.7.a), a costa de un aumento de las velocidades y aceleraciones angulares de las ruedas de reacción. La figura 6.7.b muestra la velocidad angular de la rueda ‘1’ como representativa de este efecto.

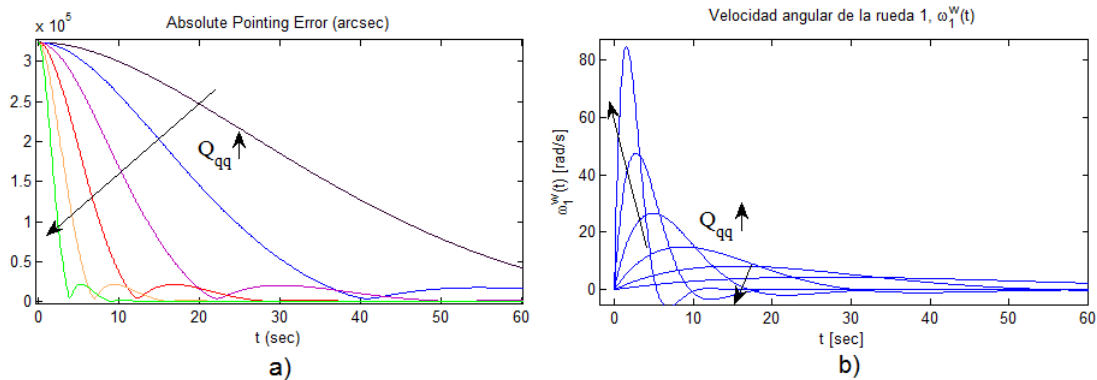


Figura 6.7: Error APE (a) y velocidad angular de la rueda ‘1’ (b) durante la maniobra de adquisición de actitud para diferentes Q_{qq}

Este comportamiento se indica cuantitativamente en la tabla 6.6. Se muestra la disminución con Q_{qq} de un tiempo característico de estabilización, tomado como aquel intervalo de tiempo en el que el error APE queda acotado por debajo de 50 arcsec. También se aprecia el incremento con Q_{qq} de la potencia máxima necesaria para realizar dicha maniobra de estabilización.

Q_{qq}	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7
$t / APE = 50 \text{ arcsec} [\text{sec}]$	274.61	165.91	97.81	55.303	31.201	17.501
$P_{max} [\text{W}]$	0.7178	4.32	24.93	141.3	796.6	4468

Tabla 6.6: Tiempo en estabilizar por debajo de $APE = 50 \text{ arcsec}$ y potencia máxima consumida durante la maniobra de estabilización inicial, para diferentes sintonizaciones Q_{qq}

La maniobra de seguimiento de Sevilla también exhibe un menor error de apuntamiento a medida que aumenta la penalización Q_{qq} (figura 6.8.a). Nótese que para Q_{qq} pequeñas aumenta el tiempo de estabilización desde la maniobra de reorientación previa, por lo que el tiempo útil de observación se ve reducido. El impacto sobre la velocidad angular de la rueda ‘1’ es muy pequeño - en la figura 6.8.b las funciones se solapan.

La tabla 6.7 indica los errores de apuntamiento mínimo y máximo durante esta maniobra de seguimiento de estación. El error mínimo es menor que 1 arcsec para valores medios de Q_{qq} , mientras que el error máximo está contaminado por el retardo de estabilización desde la maniobra de reorientación anterior. Las pequeñas velocidades angulares necesarias durante este paso por Sevilla admiten potencias máximas muy pequeñas (del orden de μW). Cuanto mayor es Q_{qq} menores son los APE mínimo y máximo.

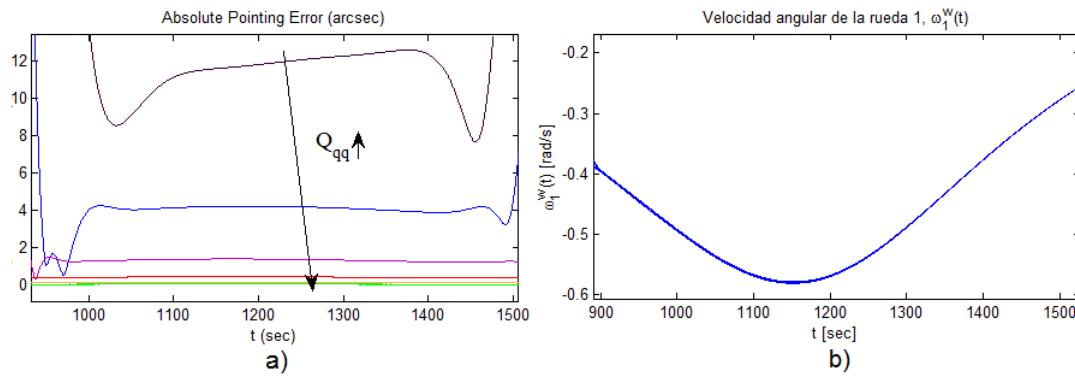


Figura 6.8: Error APE y velocidad angular de la rueda ‘1’ durante la maniobra de tracking de Sevilla para diferentes Q_{qq}

Q_{qq}	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7
APE mínimo [arcsec]	7.6415	0.514	0.323	0.2637	0.0938	0.03011
APE máximo [arcsec]	221	93.923	53.76	41.807	47.543	46.0177
P_{max} [μW]	555	554	553.6	553.1	552.9	552.6

Tabla 6.7: Errores de apuntamiento mínimo y máximo y potencia máxima requerida durante el seguimiento de Sevilla, para diferentes sintonizaciones Q_{qq}

La tabla 6.8 evalúa el efecto global de Q_{qq} durante todo el tiempo de simulación. Muestra la variación del error de apuntamiento medio y el coste óptimo para cada sintonización Q_{qq}

Q_{qq}	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7
\overline{APE} [arcsec]	7688.0	4268.85	2394.1	1345.7	758.1	428.3
Coste óptimo [10^6]	0.003985	0.02042	0.111	0.6193	3.4711	19.4994

Tabla 6.8: APE medio y coste óptimo en función de Q_{qq}

Se observa en definitiva que una sintonización estricta del controlador (R_{ii} pequeñas y/o Q_{qq} grandes) mejora radicalmente las actuaciones del satélite, sin embargo lo hace a costa de aumentar mucho el esfuerzo de control, esto es, el par motor a aplicar por las ruedas de reacción. La figura 6.9 muestra la señal de control durante la maniobra de transición más exigente del tiempo de simulación propuesto. Ésta a penas cambia con la penalización del error de actitud en esta maniobra.

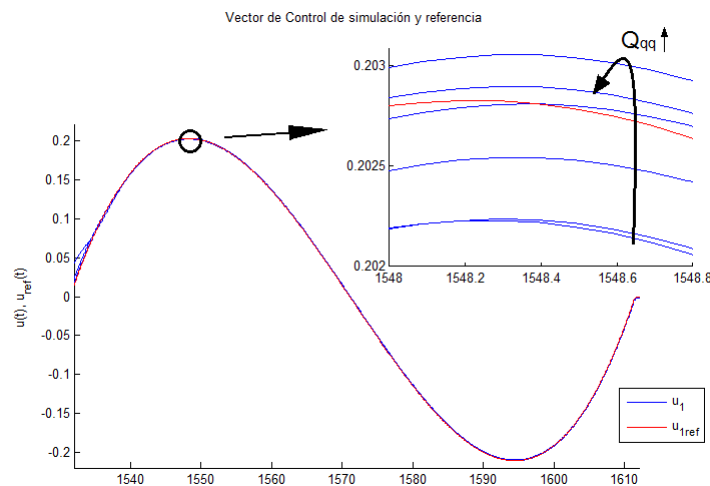


Figura 6.9: Señal de control u_1 y de referencia u_{ref_1} durante una maniobra de transición para $Q_{qq} = 10^2, \dots, 10^7$

Sin embargo, durante la maniobra de estabilización inicial el esfuerzo de control aumenta de manera drástica, representando una situación poco realista (figura 6.10). Para penalizaciones del error de actitud Q_{qq} mayores de 10^5 , el par de control necesario es mayor de 10 N·m, muy lejos del rango aceptable para los motores eléctricos de las ruedas de reacción. Suponen también unos requerimientos de potencia inadmisibles para el sistema de control de actitud de un vehículo espacial de tamaño medio.

Será necesario tener en cuenta en el sistema de control las limitaciones físicas reales de los actuadores. Si el controlador LQR se sintoniza de manera muy exigente, generalmente las ruedas no podrán actuar según dictamine el controlador debido a dos límites físicos:

- límite de aceleración angular: los motores de las ruedas de reacción no desarrollan un par ilimitado. Se limita el vector de control según el par máximo de los motores, $u \leq T_{max}$. Se desarrolla en el apartado 6.1.5.
- límite de velocidad angular: los motores llegan a una velocidad máxima, la velocidad angular de saturación. Se limita el momento cinético máximo que pueden almacenar las ruedas de reacción, $h \leq h_{max}$. Se desarrolla en el apartado 6.1.8

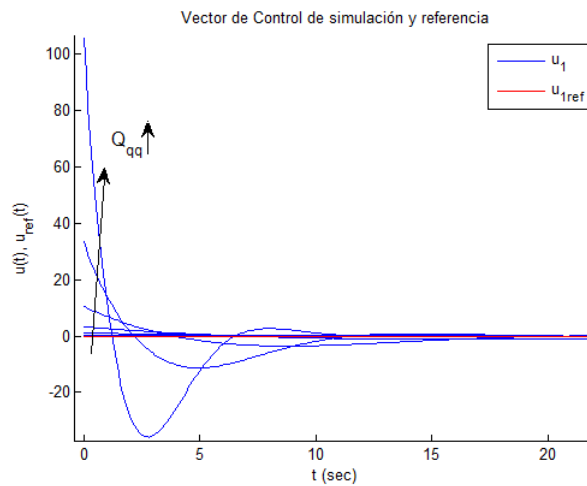


Figura 6.10: Señal de control u_1 y de referencia u_{ref_1} durante la estabilización inicial para $Q_{qq} = 10^2, \dots, 10^7$

6.1.3. Efecto de S(T)

La matriz $S(T)$ penaliza el error del vector de estados final. Un aumento de sus elementos diagonales mejorará las actuaciones en el entorno del instante final, teniendo un impacto despreciable durante el resto del tiempo de simulación, por lo que su importancia es relativa considerando un funcionamiento continuo del procesador del ADCS.

En la figura 6.11 se muestra el error de seguimiento para $S(T)$ igual a 10, 10^3 y 10^5 , obtenido con los parámetros de simulación de la tabla 6.9.

Penalización del error de actitud	$Q_{qq} = 10^3$
Penalización de la señal de control	$R_{ii} = 100$
Penalización del error de actitud final	$S_{qq}(T) = 10, 10^3 \text{ y } 10^5$
Condiciones iniciales	q_0 formado por rotación de q_{ref_0} mediante ángulo y eje de Euler $\{\Theta_0 = 60^\circ, \vec{e}_0 = [1 \ 0 \ 0]^T\}$. $\vec{h}_0 = \vec{\omega}_0 = 0$

Tabla 6.9: Parámetros de simulación para el análisis de $S(T)$

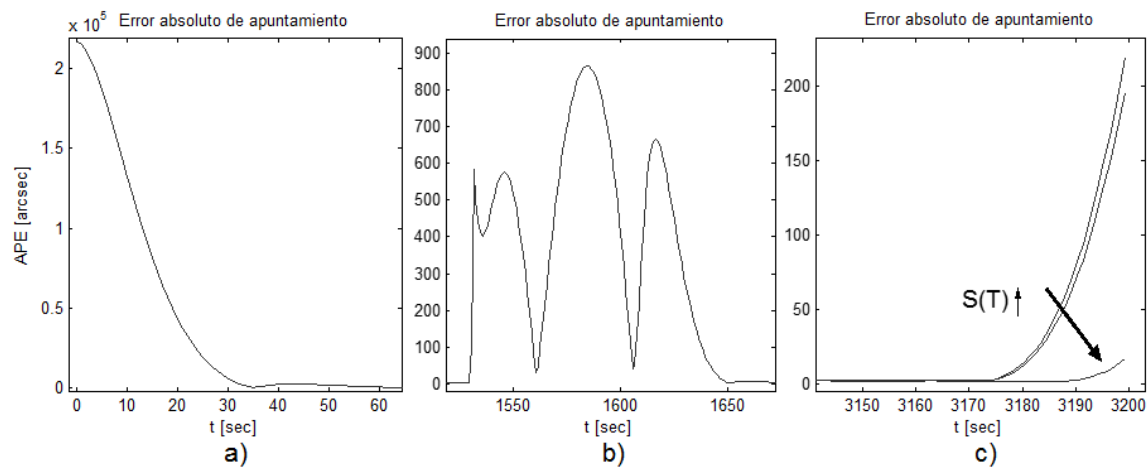


Figura 6.11: Error de apuntamiento para varios $S(T)_{qq}$, durante la maniobra de estabilización (a), una maniobra de reorientación (b) y el entorno del estado final (c). En a) y b) las funciones se solapan completamente.

Sin embargo, la naturaleza del controlador LQR de horizonte finito impone necesidades especiales. El cálculo fuera de línea y por adelantado de la ganancia de realimentación LQR precisa el almacenamiento en memoria para su uso posterior. La misión típica de un satélite de observación se extienden al menos durante 5 años, lo cual precisaría un buffer de memoria demasiado grande.

La simulación en tiempo real sigue un esquema como el de la figura 6.12. Cada cierto intervalo de tiempo se computa la ganancia de control, basada en los elementos orbitales del satélite durante ese tramo, y se almacena en un buffer, para su aplicación posterior. Este procedimiento se suele repetir, al menos, en cada revolución del satélite.

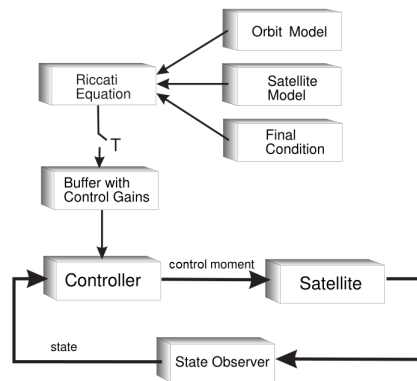


Figura 6.12: Esquema de ejecución en tiempo real. Adaptado de Ph.D. Thesis Rafal Wisniewski

Por tanto, una penalización $S(T)$ reducida en un tramo de simulación tendrá como resultado una condición inicial desfavorable para el siguiente tramo.

La figura 6.13 muestra la transición a seguimiento de una estación terrestre, ejecutada en tiempo real para varias penalizaciones $S(T)$. Penalizaciones menores inducen errores iniciales en el seguimiento de la estación, reduciendo el tiempo útil de observación.

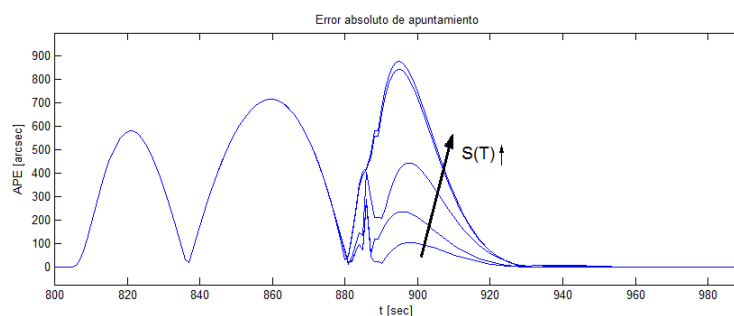


Figura 6.13: Concatenación de simulaciones en tiempo real, maniobra de transición a seguimiento de estación.

El cálculo por tramos de la ganancia de Riccati permite particularizar las características del mismo en función de las necesidades de control de cada perfil de actitud, mediante un controlador de sintonización mixta. Es decir, en los perfiles de seguimiento de estación puede sintonizarse el ADCS para la máxima precisión a cualquier coste, y en perfiles de iluminación y transición la precisión pueden sintonizarse para un consumo energético menor. Se eligen por tanto dos sintonizaciones diferentes, una más precisa y cara, y otra más barata en términos de potencia. Los controladores están caracterizados por los parámetros R_{ii} , Q_{qq} y $S(T)_{qq}$ de la tabla 6.10.

	Controlador preciso	Controlador barato
R_{ii}	10^2	10^5
Q_{qq}	10^7	10^4
$S(T)_{qq}$	10^7	10^4

Tabla 6.10: Parámetros de sintonización de los controladores.

La figura 6.14 muestra el error de apuntamiento resultado de los controladores laxo, preciso y mixto durante el tiempo de simulación. El controlador mixto sigue la sintonización precisa en los perfiles de seguimiento de estación, mientras que en los perfiles de iluminación y maniobra de transición sigue al controlador barato. En el controlador laxo (y mixto) se observa un tiempo de estabilización inicial de unos 5 minutos, mientras que el controlador preciso conseguiría una estabilización casi instantánea a costa de un enorme esfuerzo de control, muy superior al par máximo entregado por los motores eléctricos empleados en los sistemas ADCS reales.

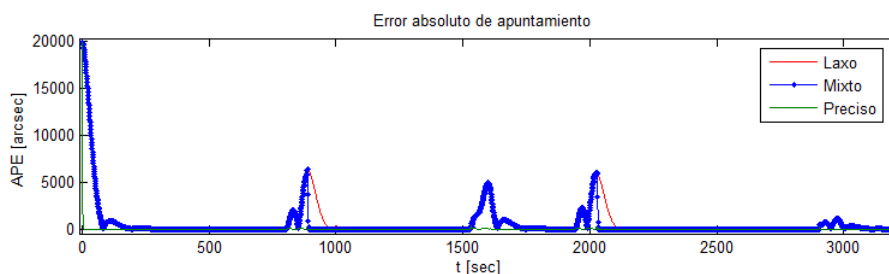


Figura 6.14: Error APE para controladores preciso, barato y mixto

Durante la maniobra de observación de la estación terrestre (figura 6.15.a) el controlador mixto, mediante la sintonización precisa, consigue un error APE medio de unos 0.1 arcosegundos,

mientras que la sintonización económica permite un error de apuntamiento mínimo 10 veces mayor (apenas aparece en la figura). Durante los subsiguientes perfiles de maniobra de transición al perfil de iluminación, iluminación y nueva transición al siguiente perfil de seguimiento de estación terrestre (figura 6.15.b), el controlador mixto consigue economizar la operación, a costa de un mayor error de apuntamiento.

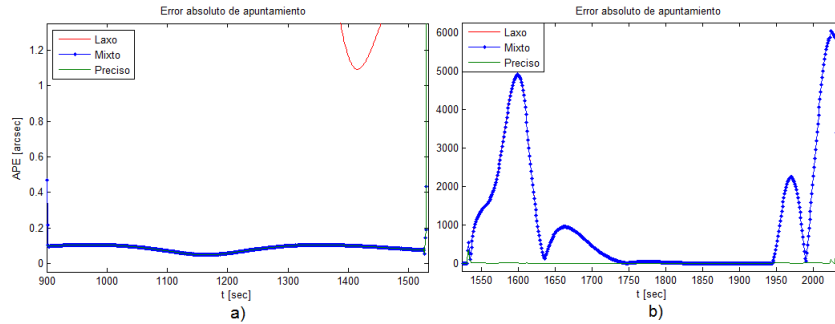


Figura 6.15: Error *APE* para controladores preciso, barato y mixto durante la observación de Sevilla (a), y durante los perfiles de transición a iluminación, iluminación y transición a nuevo objetivo (b)

Durante el tiempo de simulación total, el controlador mixto consigue un ahorro energético del 26 % respecto al controlador preciso, manteniendo la precisión de apuntamiento durante las observaciones terrestres.

En el tramo 1 (estabilización inicial, carga de paneles y transición a seguimiento de estación de Sevilla), el error medio de apuntamiento al Sol es de 0.31°. Este error de apuntamiento supone una carga de energía sólo un 0.002 % menor en los paneles solares debida a la penalización del factor de forma, mientras que el sistema de control de actitud ha consumido un 70 % menos de energía que si estuviera sintonizado para precisión.

6.1.4. Efecto de penalizaciones Q_{hh} y $S_{hh}(T)$ nulas

El análisis de la sintonización del controlador sólo se ha enfocado en el efecto de las matrices de penalización de los errores de estado y estado final sobre el error de actitud, ya que se supone que es la variable de error crítica para las actuaciones del sistema de control realizado. Es decir, en las simulaciones anteriores las penalizaciones sobre los errores $\delta\vec{\omega}$ y $\delta\vec{h}$ se han mantenido iguales a la unidad mientras que las penalizaciones Q_{qq} y S_{qq} eran de órdenes de magnitud del millón. Se considera en este apartado evaluar las características del controlador cuando la penalización sobre el error de estado y estado final en el momento cinético de las ruedas es nulo.

En este caso las matrices de penalización del error del estado Q y estado final $S(T)$ son de la forma

$$Q = \text{diag} \left[1 \ 1 \ 1 \ Q_{qq} \ Q_{qq} \ Q_{qq} \ Q_{hh} \ Q_{hh} \ Q_{hh} \right] \quad (6.7)$$

$$S(T) = \text{diag} \left[1 \ 1 \ 1 \ S_{qq} \ S_{qq} \ S_{qq} \ S_{hh} \ S_{hh} \ S_{hh} \right], \quad (6.8)$$

El resto de parámetros de simulación se recogen en la tabla 6.11. Los resultados de simulación se analizan y se comparan con una simulación de iguales parámetros excepto Q_{qq} y S_{qq} , que serán la unidad. La figura 6.16 muestra el error de apuntamiento para las penalizaciones del estado iguales a 1 y a 0.

Penalización del error de actitud	$Q_{qq} = 10^8$
Penalización de la señal de control	$R_{ii} = 10^3$
Penalización del error de actitud final	$S_{qq}(T) = 10^7$
Condiciones iniciales	q_0 formado por rotación de q_{ref_0} mediante ángulo y eje de Euler $\{\Theta_0 = 60^\circ, \vec{e}_0 = [1 \ 0 \ 0]^T\}$. $\vec{h}_0 = \vec{\omega}_0 = 0$

Tabla 6.11: Parámetros de simulación para análisis de Q_{hh} y S_{hh} nulos

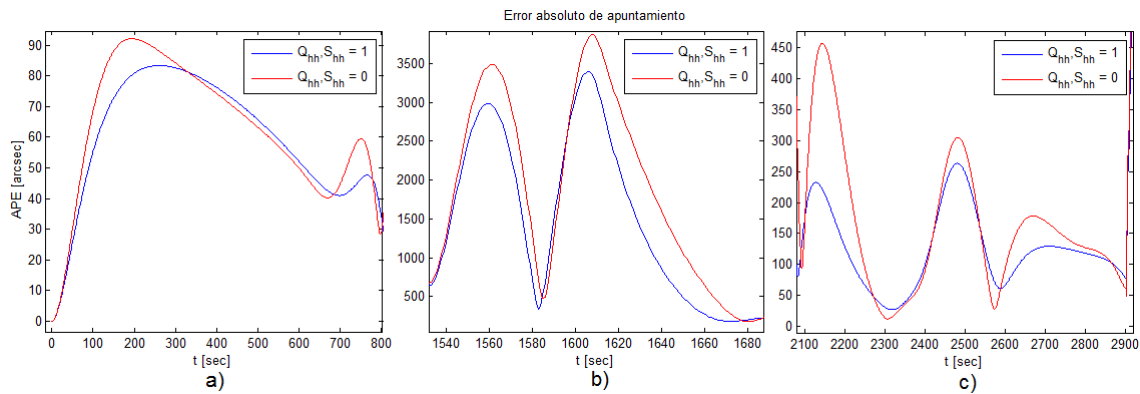


Figura 6.16: Error APE para $[Q_{hh} \ S_{hh}] = [1 \ 1]$ y $[0 \ 0]$ durante una fase de seguimiento del Sol (a), una maniobra de reorientación (b) y seguimiento de estación (c)

A pesar de que la variación de Q_{hh} y S_{hh} es pequeña se observa un incremento del error de apuntamiento cuando las penalizaciones Q_{hh} y S_{hh} son nulas. El error de apuntamiento medio durante la simulación aumenta un 22 % (de 600.7 a 774.4 arcsec). Además, la energía consumida durante la simulación aumenta en un 0.2 %.

La figura 6.17 muestra la diferencia de potencia consumida para penalizaciones iguales a 0 y 1,

$$\Delta P(t) = P(t)|_{Q_{hh}, S_{hh}=0} - P(t)|_{Q_{hh}, S_{hh}=1}. \tag{6.9}$$

Se observa cómo la potencia consumida aumenta cuando dichas penalizaciones son nulas durante todo el tiempo de simulación, pero el aumento es más acusado durante las maniobras de reorientación.

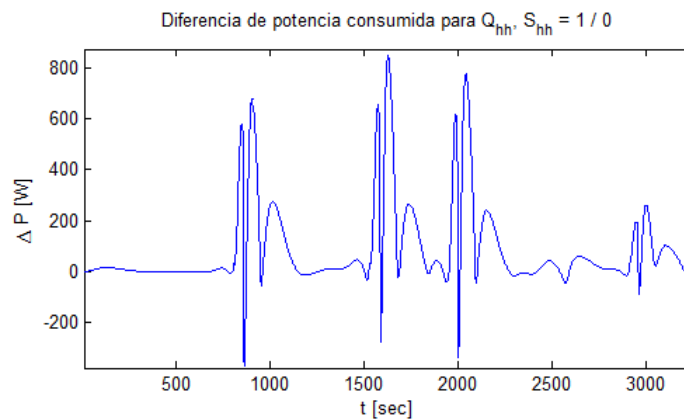


Figura 6.17: Diferencia de potencia consumida para $[Q_{hh} \ S_{hh}] = [1 \ 1]$ y $[0 \ 0]$

Para analizar el impacto de Q_{hh} y S_{hh} por perfiles de actitud, se propone una medida del rendimiento del controlador, denominada índice de rendimiento. El índice de rendimiento es el cociente entre la potencia instantánea y el error de apuntamiento en arcosegundos en cada instante,

$$\eta(t) = \frac{P(t)}{APE(t)}, \tag{6.10}$$

y se representa en la figura 6.18.

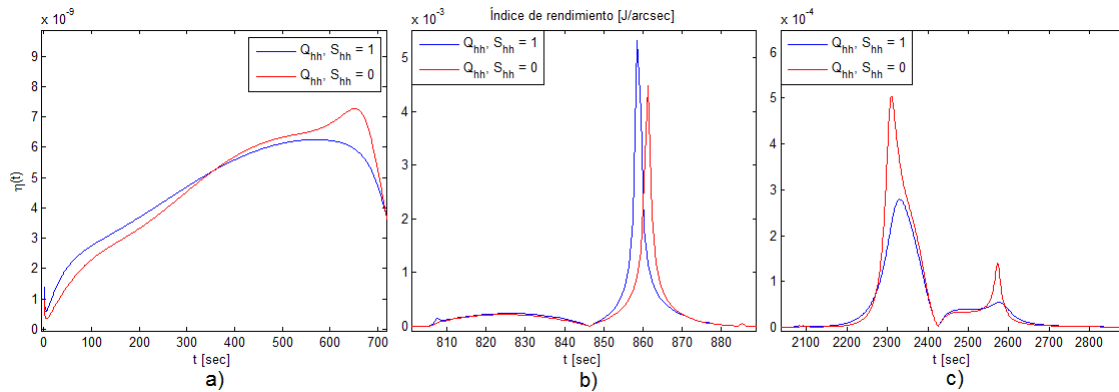


Figura 6.18: Índice de rendimiento para $[Q_{hh} \ S_{hh}] = [1 \ 1]$ y $[0 \ 0]$ durante una fase de seguimiento del Sol (a), una maniobra de reorientación (b) y seguimiento de estación (c)

Se observa en esta figura que el rendimiento es mayor en el caso de la penalización unidad en casi todo el tiempo de simulación, excepto durante la fase de seguimiento de la estación. Una hipotética sintonización del controlador que maximice las actuaciones por perfil de actitud, como la descrita en la sección 6.1.3, debe tener en cuenta este efecto.

El rendimiento global del controlador, definido como el cociente entre el error APE medio y el índice de energía durante la simulación, disminuye cuando se anula la penalización de 0.15 a 0.12 J/arcsec.

6.1.5. Efecto de limitación del par motor

Según se introdujo en la sección 6.1.2, en este apartado se limita el par máximo que pueden proporcionar las ruedas de reacción y se analiza el impacto en las actuaciones de limitaciones más o menos restrictivas.

En este caso se simula una etapa distinta de la misión, en torno al instante de paso por Sevilla al atardecer, de Sur a Norte. Se simula la fase de seguimiento de Sevilla en la que se da dicho instante y la maniobra de transición previa. En la figura 6.19 se muestra la traza del satélite durante este nuevo intervalo de simulación, en la que la traza durante el seguimiento de Sevilla se muestra en negro y la traza durante la maniobra de reorientación en rojo.

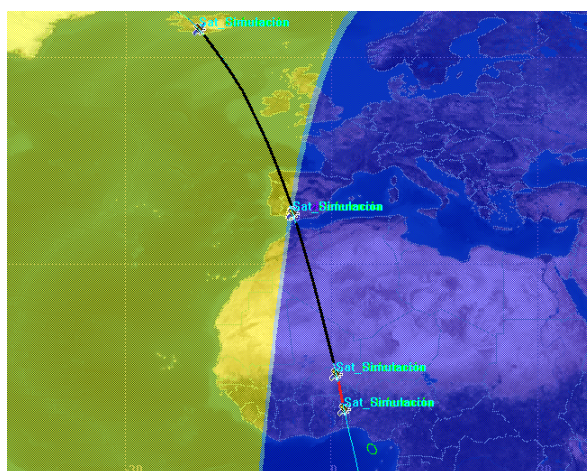


Figura 6.19: Traza del satélite durante la simulación del caso 2. En rojo la maniobra de transición y en negro la maniobra de seguimiento de Sevilla

Nótese que el área bañada por el Sol está capturada en el instante de paso por Sevilla, es decir, el satélite pasa exactamente sobre Sevilla al atardecer como especifican los requisitos de la misión de la sección 1.1.

De entre todas las maniobras de tracking posibles durante la vida útil del satélite, en este apartado se elige la simulación de ésta puesto que al tratarse de el paso más cercano posible sobre una estación terrestre (sobrevuela exactamente por el cénit de Sevilla) será la maniobra de tracking de objetivo terrestre más exigente en términos de par de control necesario. Además, muestra el paso del satélite sobre Sevilla al atardecer, hecho que motiva el problema orbital.

Los parámetros de simulación empleados son:

Penalización del error de actitud	$Q_{qq} = 10^3$
Penalización de la señal de control	$R_{ii} = 10^2$
Penalización del error de actitud final	$S_{qq}(T) = 10^7$
Condiciones iniciales	q_0 igual a q_{ref_0} (error inicial nulo), $\vec{h}_0 = \vec{\omega}_0 = 0$

Tabla 6.12: Parámetros de simulación para análisis de la limitación T_{max}

Si se simula en primer lugar sin limitar el vector de control y con los parámetros de simulación de la tabla 6.12, la evolución del cuaternión de actitud y el error de apuntamiento asociado son los de la figura 6.20. El controlador es suficientemente bueno para que los cuaterniones de actitud de referencia y simulado se solapen aparentemente en la figura. El error de actitud APE es grande durante la transición, mientras que durante el seguimiento baja a órdenes de magnitud de 10 arcsec.

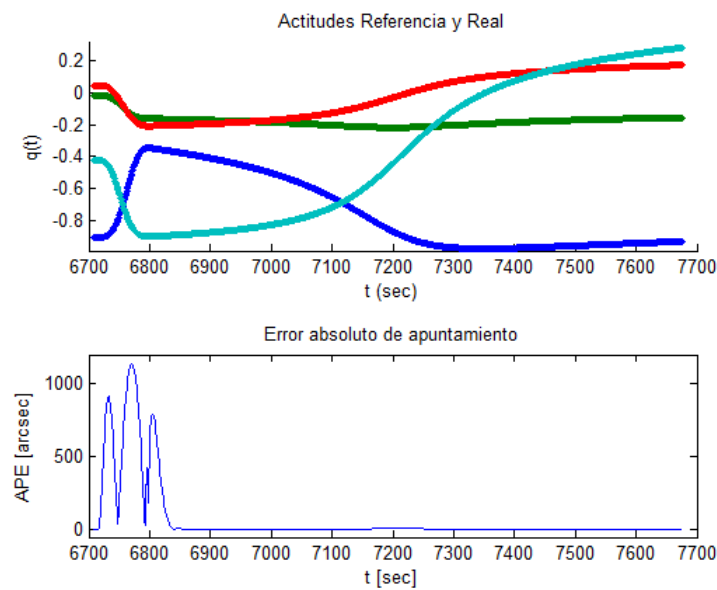


Figura 6.20: Perfil de actitud de referencia y simulado, y APE asociado durante el paso por Sevilla al atardecer y la maniobra de transición previa (de 6700 a 6800s aproximadamente)

El vector de control necesario para conseguir estas actuaciones se muestra en la figura 6.21. Se observan niveles de momento necesario del orden de 0.1 N·m en la maniobra de transición previa, y del orden de 5 mN·m en la maniobra de tracking de Sevilla. A pesar de tratarse de niveles de momento no muy grandes, se limita a continuación el par máximo por debajo de estos valores y se analiza la respuesta.

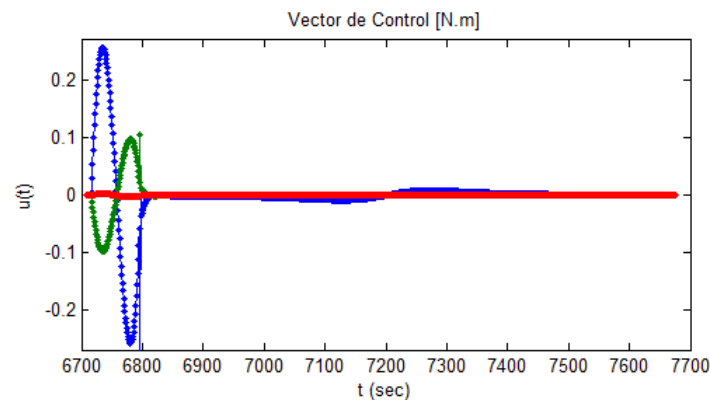


Figura 6.21: Vector de momentos de control necesarios durante el paso por Sevilla al atardecer y la maniobra de transición previa

Para ello se impone una ley en la función de la derivada del vector de estados del integrador Runge-Kutta de la forma:

$$Si |u| > T_{max} \Rightarrow |u| = T_{max}. \tag{6.11}$$

Si se limita a $T_{max} = 0,1 \text{ N}\cdot\text{m}$, la respuesta del sistema cambia según se presenta en la figura 6.22. Puesto que los actuadores no pueden imprimir los momentos de control necesarios durante la maniobra de transición de actitud, el error de apuntamiento crece mucho respecto al caso sin limitación de la figura 6.20. Se observan grandes sobreoscilaciones tras el perfil de transición.

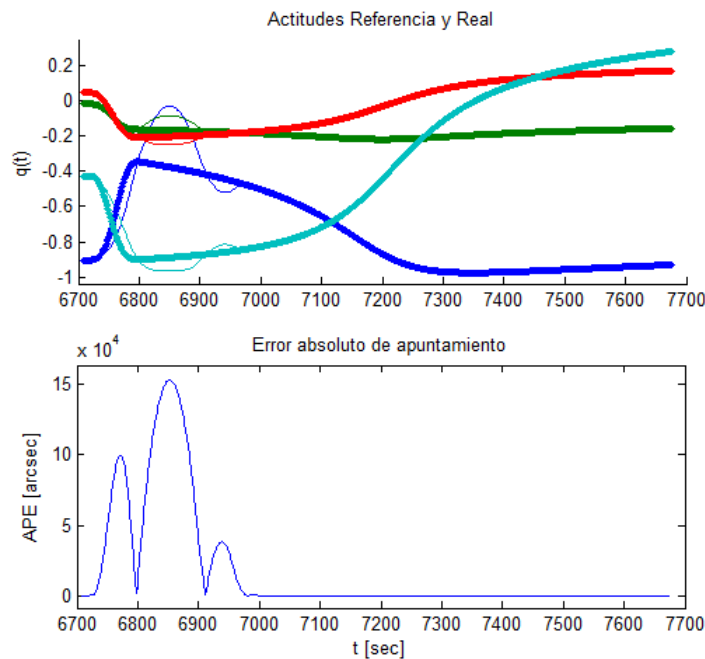


Figura 6.22: Actitudes de simulación y referencia y APE asociado, con limitación $T_{max} = 0.1 \text{ N}\cdot\text{m}$. Se dan sobreoscilaciones hasta $t \approx 7000\text{s}$

Una vez se consigue estabilizar en torno a la referencia de tracking de Sevilla, los momentos de control necesarios están por debajo del límite físico de los actuadores. Por lo tanto el error de actitud evoluciona de la misma forma que el del caso sin limitación, y el cuaternión de actitud se solapa con el de referencia.

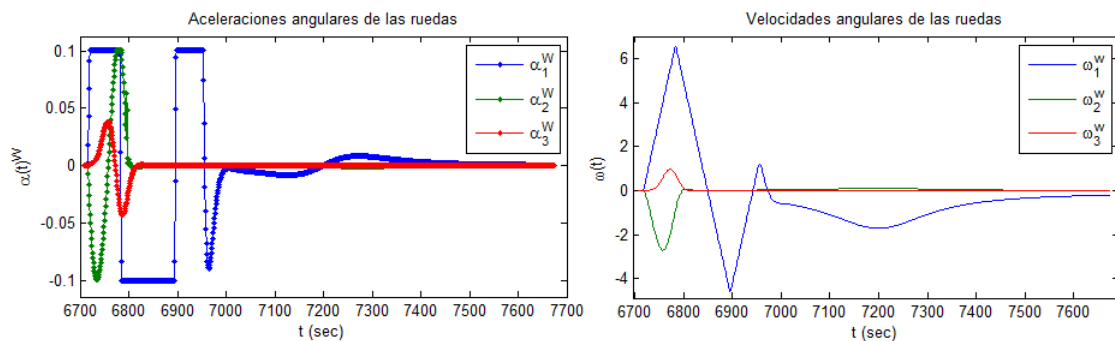


Figura 6.23: Aceleraciones y velocidades angulares de las ruedas, con limitación $T_{max}=0.1 \text{ N}\cdot\text{m}$

La figura 6.23 muestra la evolución de las velocidades y aceleraciones angulares de las ruedas de reacción. Se observa cómo, casualmente, la única rueda de reacción que ha llegado al límite de par es la rueda ‘1’, por lo que las sobreoscilaciones se dan fundamentalmente en torno al eje X_{body} (observable mediante la representación en STK). Esto se debe a que el eje de Euler es aproximadamente perpendicular al vector nadir durante la maniobra de observación de Sevilla.

La velocidad angular de dicho eje presenta un perfil triangular, con pendiente máxima limitada por el par de control. Una pendiente limitada obliga al sistema de control a alargar la señal de control para encerrar el área necesaria para realizar la maniobra, por lo que se producen sobreoscilaciones prolongadas más allá del tiempo establecido para realizar la maniobra de transición de

actitud. Esto penaliza el tiempo útil de observación de Sevilla.

Desde el punto de vista energético es también perjudicial una señal de control inadmisibles por parte de los actuadores. Se ha calculado que el índice de energía consumido durante la simulación sin limitación de par es de 58.3 J, mientras que si se impone el límite de par de 0.1 N·m con referencia de transición, el índice aumenta hasta 728 J.

Para enfatizar la necesidad de imponer un perfil de referencia durante la transición de actitud, se simula a continuación sin dicho perfil de referencia, de manera que la referencia de actitud presente un salto instantáneo desde el perfil de seguimiento del Sol anterior al perfil de tracking de Sevilla.

Si se impone un límite de par $T_{max} = 0.27$ N·m, que es el par máximo necesario con referencia de actitud (figura 6.21), la respuesta del sistema es la mostrada en la figura 6.24. Se observa que en ausencia de un perfil de referencia de actitud suave durante la maniobra, a pesar de que el par motor no limita por encima de las necesidades del caso con referencia de transición, las actuaciones se ven muy perjudicadas. Las sobreoscilaciones se prolongan mucho en el tiempo de simulación, por encima del tiempo de estabilización del caso $|u_{max}| \leq 0.1$ N·m, en unos 300s.

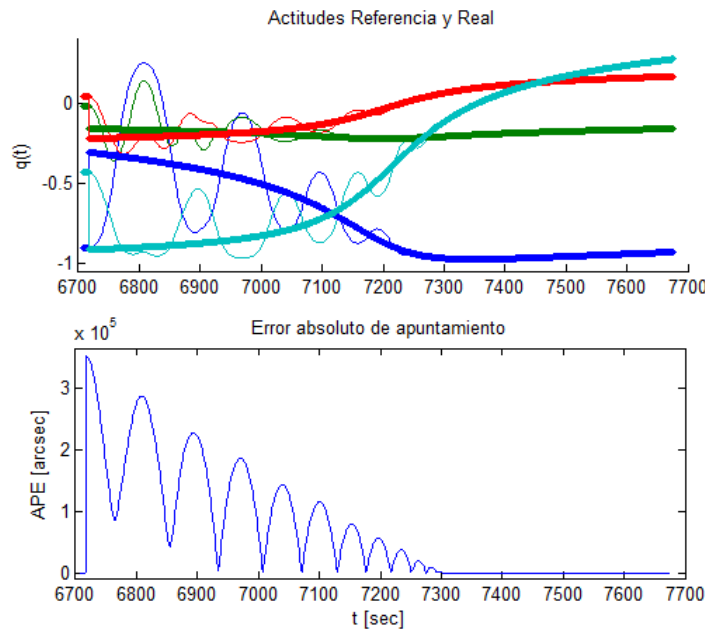


Figura 6.24: Actitudes de simulación y referencia y APE asociado, con limitación $T_{max}=0.27$ N·m y sin referencia de maniobra de transición. Se dan sobreoscilaciones hasta $t \approx 7300$ s

Energéticamente, la penalización de no disponer de referencia para la maniobra de transición es también mayor que en el caso de limitación $|u_{max}| \leq 0.1$ N·m con referencia de transición - el índice de energía es de 876 J contra los 728 J del caso con transición y límite 0.1.

A pesar del tiempo de estabilización considerable, es notable la **robustez** del método de control: ante errores de actitud grandes (más de 80° en este caso), establecidos de manera instantánea y con par de control limitado por debajo del dictado por el propio controlador, el sistema de control es capaz de llevar a cabo su misión.

6.1.6. Efecto del gradiente gravitatorio

El gradiente gravitatorio es un momento perturbador inherente a las propiedades másicas del satélite. Modifica el momento cinético del sistema de forma periódica y tiene un módulo generalmente pequeño, por lo que provoca movimientos lentos en el satélite si no se controla. Esto permite asumir que el momento cinético del sistema es constante, considerando el GG como una perturbación en las ecuaciones del sistema y dejando que sea el controlador el que anule sus efectos.

La figura 6.25 muestra las componentes del GG sobre el satélite durante 24 horas de simulación.

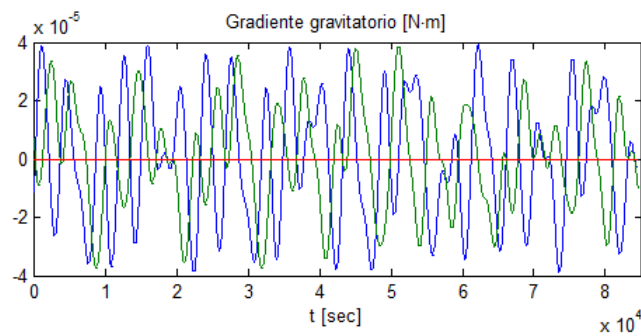


Figura 6.25: Gradiente gravitatorio durante un día. La componente 3 es nula debido a la simetría de revolución del satélite

Si se simula con límite de par de control $T_{max} = 0$ (es decir, movimiento libre) por un periodo de 24 h (equivalente a casi 14 revoluciones), se aprecian los efectos a largo plazo del gradiente gravitatorio. La figura 6.26 muestra los movimientos de libración del vehículo espacial generados por el gradiente gravitatorio, a través de las velocidades angulares y el cuaternión de actitud. Se trata de un movimiento periódico y muy lento. Partiendo de una situación propicia para que actúe el gradiente gravitatorio (eje mayor aproximadamente perpendicular al vector nadir), el eje Z tarda unas 13 horas en dar una revolución en ejes inerciales.

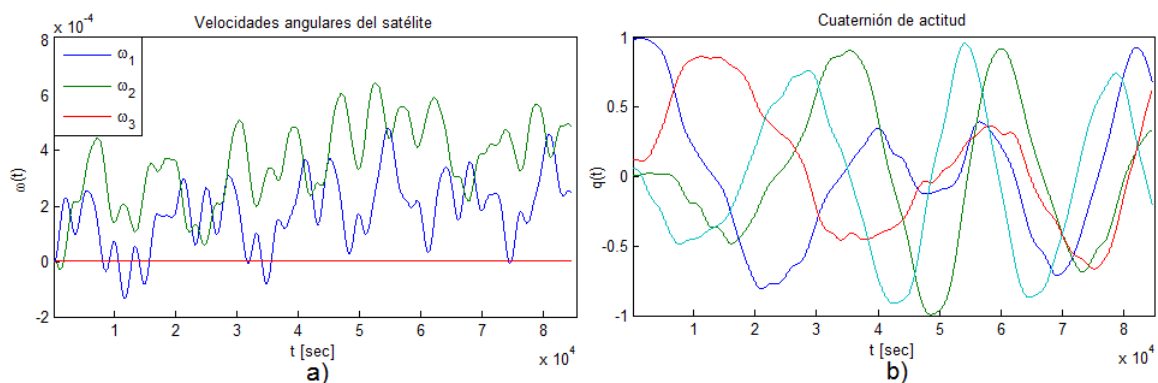


Figura 6.26: Velocidades angulares (a) y actitud (b) durante un día de simulación sin control bajo el efecto del GG

Sin embargo, en periodos cortos de tiempo no puede considerarse una perturbación despreciable. En la figura 6.27 se observan los primeros 800 segundos de la simulación anterior. A pesar de ser una perturbación de intensidad pequeña puede provocar errores de apuntamiento grandes en satélites para aplicaciones de observación terrestre.

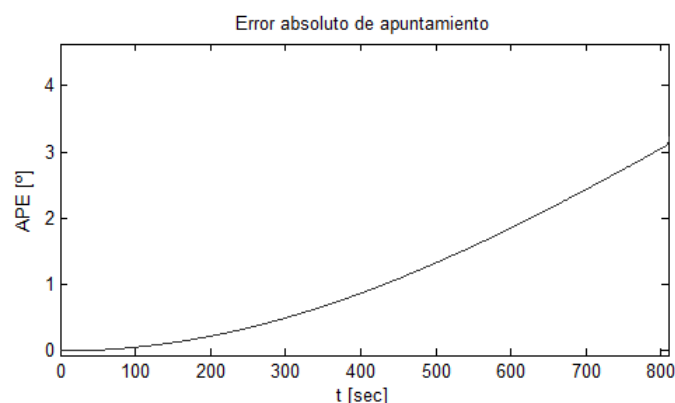


Figura 6.27: Desviación de actitud provocada por el GG sobre un satélite sin control

Tras tan sólo 800 segundos (13 minutos) de simulación sin control, el gradiente gravitatorio provoca una deriva de actitud que supone un error de 3° , equivalente a unos 40 km de desviación mínima respecto a un objetivo en la superficie de la tierra.

6.1.7. Efecto del volante de inercia, H_0

Si se desea añadir estabilidad al sistema de control se puede añadir un volante de inercia. Permite incrementar la estabilidad ante perturbaciones externas manteniendo un momento cinético de base en uno de los ejes principales.

Simulando con un volante de inercia en el eje 3 con momento cinético de $H_0 = 100 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$ y sin control activo sobre las ruedas de reacción, la estabilización giroscópica pasiva mitiga el efecto perturbador del gradiente gravitatorio. En la figura 6.28 se observa el error de apuntamiento. En este caso, la deriva en actitud es de sólo 43 arcsec, 250 veces menor que en el caso de la figura 6.27. En este caso equivale a unos 180 m de desviación mínima respecto a un objetivo en la superficie terrestre.

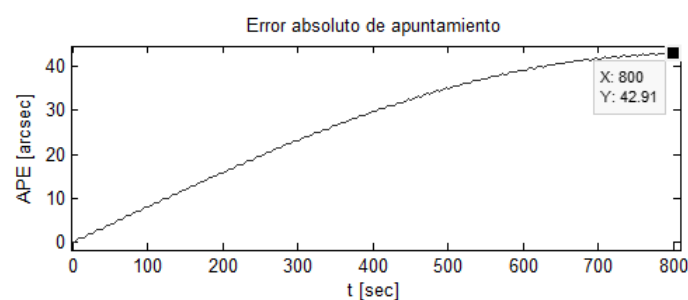


Figura 6.28: Desviación de actitud provocada por el GG sobre un satélite con estabilización pasiva

Sin embargo, el efecto estabilizador del volante de inercia puede perjudicar las actuaciones si en el perfil de actitud se necesitan maniobras rápidas y frecuentes. Si el momento cinético típico proporcionado por el controlador en el caso 1 es de unos $0.2 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$, es adecuado añadir un volante de inercia de un orden similar, se toma $H_0 = 0.5 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$. Se simula por tanto con los parámetros de la tabla 6.13.

Penalización del error de actitud	$Q_{qq} = 10^5$
Penalización de la señal de control	$R_{ii} = 10^2$
Penalización del error de actitud final	$S_{qq}(T) = 10^5$
Condiciones iniciales	q_0 igual a q_{ref_0} (error inicial nulo). $\vec{h}_0 = \vec{\omega}_0 = 0$
Capacidad del volante de inercia	$H_0 = 0.5 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$

Tabla 6.13: Parámetros de simulación para el análisis del efecto del volante de inercia

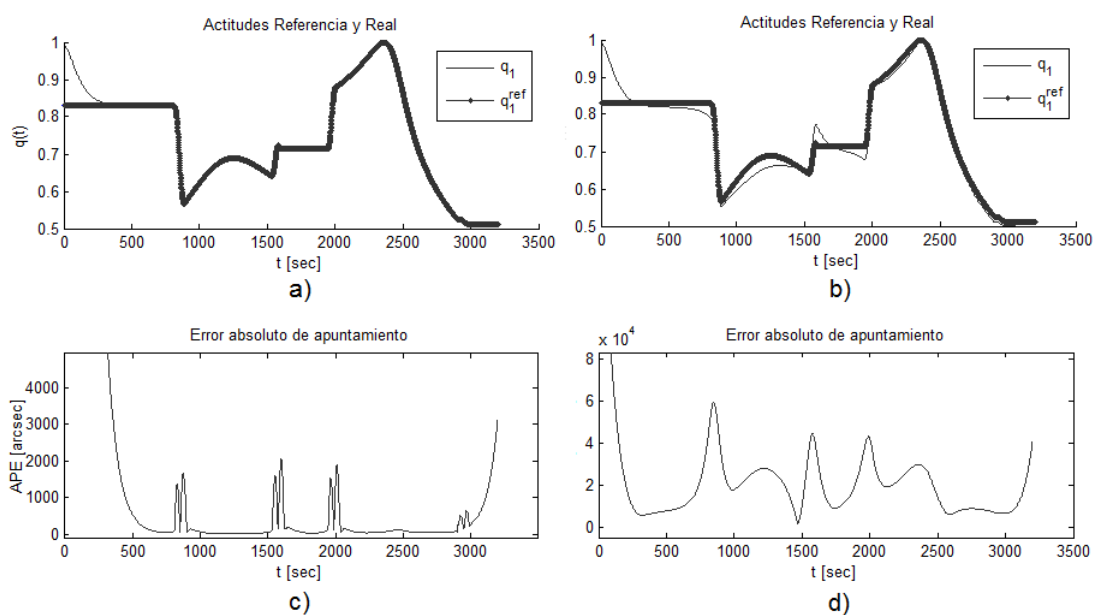


Figura 6.29: q_1 y APE sin volante de inercia (a y c) y con volante (b y d) de $H_0 = 0.5 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$

En la figura 6.29 se muestran la componente de actitud q_1 y el error de apuntamiento antes (a y c) y después (b y d) de añadir un volante de inercia de $H_0 = 0.5 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$ en el eje Z_{body} . Se observan sobreoscilaciones y un empeoramiento general del error de actitud respecto a la referencia, puesto que la rigidez giroscópica del volante de inercia reduce la maniobrabilidad necesaria para el seguimiento de la referencia. Por lo tanto, no es una solución adecuada para la misión especificada en este proyecto fin de carrera.

6.1.8. Efecto de la saturación de las ruedas de reacción

La saturación de las ruedas supone la incapacidad de las mismas de aumentar su velocidad angular por encima de una determinada velocidad angular máxima, la velocidad de saturación. Esta situación se da cuando ciertas perturbaciones seculares aplican momentos externos sobre el sistema durante un tiempo prolongado, aumentando el momento cinético del sistema. Este momento cinético ha de ser absorbido por las ruedas de reacción, de manera que las velocidades angulares del satélite sean las compatibles con el perfil de actitud necesario. Si las ruedas de reacción han de superar la velocidad angular máxima que el motor es capaz de alcanzar durante una determinada maniobra, las actuaciones se verán mermadas durante dicha maniobra.

Penalización del error de actitud	$Q_{qq} = 10^7$
Penalización de la señal de control	$R_{ii} = 10^3$
Penalización del error de actitud final	$S_{qq}(T) = 10^7$
Condiciones iniciales	q_0 formado por rotación de q_{ref_0} mediante ángulo y eje de Euler $\{\Theta_0 = 60^\circ, \vec{e}_0 = [1 \ 0 \ 0]^T\}$, $\vec{h}_0 = \vec{\omega}_0 = 0$

Tabla 6.14: Parámetros de simulación para el análisis de la saturación

Puesto que esta situación es ocasionada por un gran aumento del momento cinético total, el sistema planteado en el capítulo 3 no puede reproducirla – sería necesario modelar las perturbaciones que ocasionan el aumento significativo del momento cinético total. Por tanto, se procede a simular con un límite de saturación ficticio, muy por debajo del que se debe dar en la realidad, que sea menor que la velocidad angular característica de las ruedas ω^w . Obviando el momento cinético base del sistema, la mecánica del problema es muy similar.

Si se simula cuando las velocidades angulares están lejos de la velocidad angular de saturación, con los parámetros de simulación de la tabla 6.14, la transferencia de momento cinético en el vehículo es la representada en la figura 6.30.a.

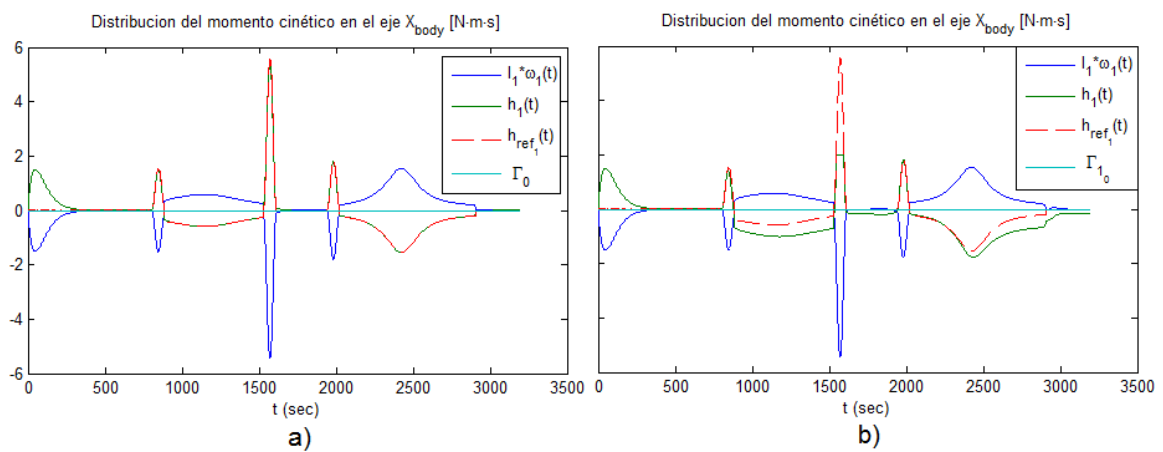


Figura 6.30: Transferencia de momento cinético sin saturación de los actuadores (a), y con $h_{sat} = 2 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$ (b)

Para mantener el momento cinético del sistema Γ_0 (nulo, en azul claro) y conseguir que el momento cinético del satélite varíe de la forma apropiada, el momento cinético de las ruedas (verde) es simétrico al del satélite, cumpliendo $\vec{\Gamma} = I\vec{\omega} + \vec{h}$. El momento cinético de las ruedas puede seguir el perfil de referencia (rojo) ya que no existe límite de saturación.

Si se limita el momento cinético a $2 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$, el controlador modifica las velocidades angulares de las ruedas rompiendo la simetría anterior (figura 6.30.b), aumentando la señal de control de forma que las velocidades angulares del vehículo no cambian aparentemente en relación al caso sin saturación. Sin embargo, las capacidades de apuntamiento del vehículo son penalizadas con severidad, como se puede observar en la figura 6.31.

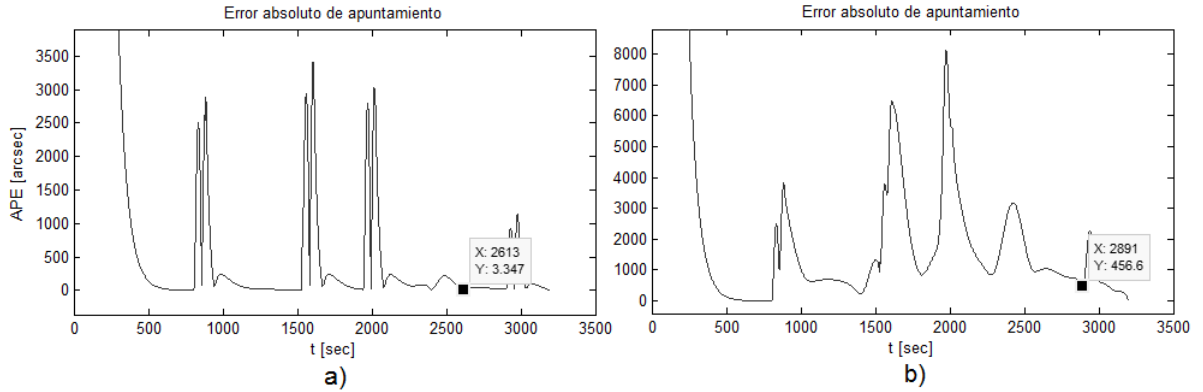


Figura 6.31: Error absoluto de apuntamiento sin saturación de los actuadores (a), y con $h_{sat} = 2 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$ (b). Nótese la diferencia en las representaciones.

A pesar de que el límite de saturación impuesto sólo limita las velocidades angulares máximas durante las maniobras de transición, el error de apuntamiento mínimo durante la fase de seguimiento de Sevilla es más de 100 veces mayor que en el caso sin saturación.

Este fenómeno pone de manifiesto la necesidad de sistemas auxiliares de descarga del momento cinético de las ruedas, como magnetopares, propulsores o sistemas yo-yo, explicados en el capítulo 8.

6.2. Estimación de actitud

En esta sección se simulan las estrategias de estimación de actitud expuestas en el capítulo 5. Para ello se comparará la evolución de las variables de referencia con las estimadas mediante el error de estimación de actitud o “AME” (acrónimo anglosajón de *Attitude Measurement Error*). El AME es el ángulo de Euler del cuaternión de error instantáneo entre el cuaternión de actitud de referencia y el estimado [4], es decir

$$AME(t) = 2 \operatorname{acos} \delta q_4(t), \quad (6.12)$$

donde $\delta q_4(t)$ se obtiene de

$$\delta q(t) = q_{ref}(t)^* \otimes q_{est}(t). \quad (6.13)$$

Este es un requisito de actuaciones que, en la realidad, se conoce a posteriori.

6.2.1. Estimación dinámica

En este caso se supone que sólo se conoce una actitud inicial y se tiene acceso a las velocidades angulares de los giróscopos $\vec{\omega}_{gyr}$. Como se indicó en la sección 5.2, se utiliza como observador las ecuaciones cinemáticas (3.15), de manera que la estimación dinámica se obtiene resolviendo el problema

$$\dot{\hat{q}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \hat{q}_4 & -\hat{q}_3 & \hat{q}_2 & \hat{q}_1 \\ \hat{q}_3 & \hat{q}_4 & -\hat{q}_1 & \hat{q}_2 \\ -\hat{q}_2 & \hat{q}_1 & \hat{q}_4 & \hat{q}_3 \\ -\hat{q}_1 & -\hat{q}_2 & -\hat{q}_3 & \hat{q}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^{gyr} \\ \omega_2^{gyr} \\ \omega_3^{gyr} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{q}_0 = q_{ref}(0). \quad (6.14)$$

En este proyecto las velocidades angulares de los giróscopos se obtienen artificialmente ‘manchando’ la señal de las velocidades angulares de referencia, mediante la adición de ruido según el modelo de Farrenkopf, introducido en la sección 5.3.1. Puesto que las velocidades angulares de referencia se conocen a priori, también se conocen las velocidades angulares de los giróscopos $\vec{\omega}_{gyr}(t)$, calculadas según

$$\vec{\omega}_{gyr}(t) = \vec{\omega}(t) + \vec{\eta}_1(t) + \vec{b} \tag{6.15}$$

$$\dot{\vec{b}}(t) = \vec{\eta}_2(t). \tag{6.16}$$

Los ruidos $\vec{\eta}_1(t)$ y $\vec{\eta}_2(t)$ se asumen ruidos blancos gaussianos de desviaciones estándar η_1 [rad/s] y η_2 [rad/s²]. Las especificaciones de los giróscopos comerciales incluyen sin embargo los coeficientes *RWN* (*Random White Noise*, o ángulo browniano ARW) y *RRW* (*Rate Random Walk*). Éstos permiten obtener las desviaciones típicas η_1 y η_2 para la frecuencia de muestreo empleada f_s , según

$$\eta_1 = RWN\sqrt{f_s} \tag{6.17}$$

$$\eta_2 = RRW\sqrt{f_s}. \tag{6.18}$$

Los giróscopos comerciales abarcan los siguientes rangos de características:

- *RWN*: de 16 a 0.005 *arcsec*/($s\sqrt{Hz}$)
- *RRW*: de 2400 a 3.2 μ *arcsec*/($s^2\sqrt{Hz}$)
- Frecuencia de muestreo f_s : de 10 a 500 Hz. Este rango depende de la tecnología del giróscopo, y su selección determina el retraso en la actuación del sistema de control respecto a las condiciones deseadas. A costa de un mayor coste computacional, una mayor f_s implica un control más preciso, a pesar de que las desviaciones estándar η_1 y η_2 aumenten con ella

Se considera un conjunto de giróscopos típicos de clase navegación espacial, con unas desviaciones estándar de los errores de $\eta_1=15$ °/h (bias) y $\eta_2= 90$ °/h² (deriva o *drift*), dentro de los parámetros reales. La figura 6.32 muestra la velocidad angular 1 de referencia y del giróscopo 1 para dichos valores.

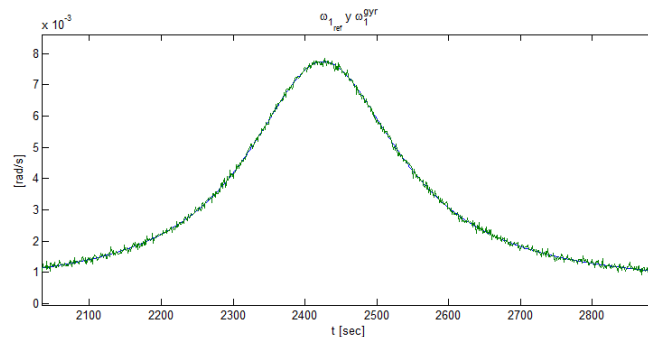


Figura 6.32: Primera componente de la velocidad angular de referencia y del giróscopo, durante una fase de seguimiento de estación

La acumulación de errores propia del proceso de integración y el error de deriva hacen que el error de estimación aumente con el tiempo. En la figura 6.33.a se muestra el error AME basado en

la estimación dinámica de la referencia de actitud mediante los giróscopos anteriores (azul). También se muestran las contribuciones de los errores bias y deriva. El error de deriva es dominante en el dominio de frecuencias bajas, lo que corresponde a tiempos grandes de integración. Se observa que, en este caso, su contribución al error total AME es muy pequeña en los instantes iniciales de la propagación.

La contribución relativa de ambas fuentes de error tendrá un impacto importante en el comportamiento de los métodos de estimación de actitud que se tratan en este proyecto.

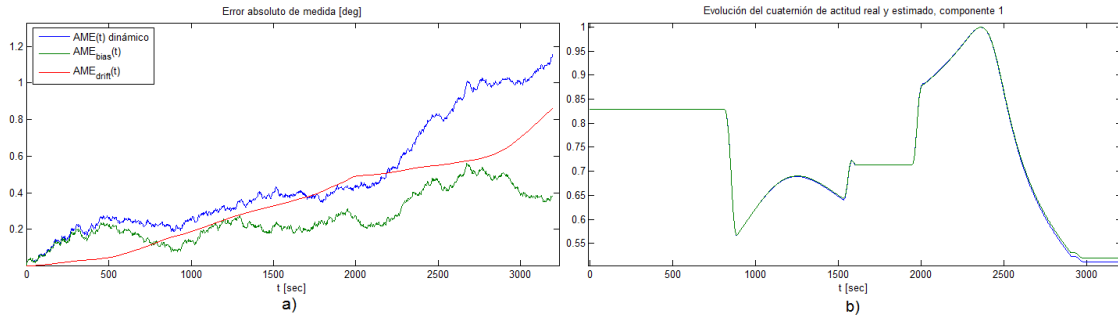


Figura 6.33: Error absoluto de medida AME (a), q_1 de referencia y simulado (b)

Tras sólo una hora de propagación, el error AME es de aproximadamente 1° (el telescopio espacial Herschel tiene especificado un error AME menor de 3.1 arcsec [4]). La primera componente del cuaternión de actitud refleja esta desviación paulatina del estimado respecto a la referencia (figura 6.33.b), reflejando asimismo que esta estrategia de estimación es muy pobre por sí sola.

6.2.2. Estimación estática

Se prueban ahora los algoritmos de estimación de actitud de la sección 5.1. Como se apunta en dicha sección, el sistema de control de actitud de este trabajo utiliza las medidas de sensores ópticos para obtener vectores de posición de ciertas estrellas en ejes cuerpo, identificadas en un mapa estelar en ejes inerciales.

La matriz de rotación entre medidas y observaciones permite obtener la actitud del satélite. Sin embargo las medidas están sujetas a errores, por lo que la resolución de la matriz de rotación suele resultar en un sistema incompatible. Los métodos *TRIAD* y *Q* son dos enfoques para resolver el problema de estimación de actitud (determinístico y óptimo).

Para obtener artificialmente las medidas de los sensores, se gira la matriz de observaciones con el cuaternión de actitud real, y se corrompen con ruido blanco. Si \vec{v}_1 y \vec{v}_2 son las medidas vectoriales en un cierto instante (elegidas al azar y sin dimensiones), y q es el cuaternión de actitud real en ese instante, las medidas de los sensores se obtienen artificialmente de

$$\vec{w}_1 = C(q)\vec{v}_1 + \vec{\eta}_{w_1} \quad (6.19)$$

$$\vec{w}_2 = C(q)\vec{v}_2 + \vec{\eta}_{w_2}, \quad (6.20)$$

donde $C(q)$ es la matriz de cosenos directores asociada a q , y $\vec{\eta}_{w_i}$ es un ruido blanco gaussiano de desviación estándar η_{w_i} . Se toman inicialmente unos valores en la simulación de $\eta_{w_1} = 2,5 \cdot 10^{-5}$ y $\eta_{w_2} = 5 \cdot 10^{-7}$.

La figura 6.34 muestra la componente 1 del cuaternión de actitud real y estimado por el método *Q* cada $t_{act} = 10$ segundos, y el error de estimación cometido.

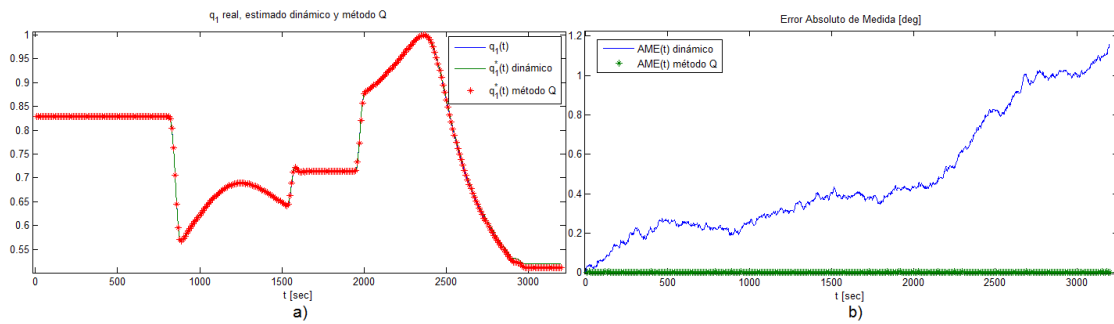


Figura 6.34: (a) Error absoluto de medida AME estático y dinámico(a); (b) q_1 de referencia y \hat{q}_1 método Q

Independientemente de los errores inherentes a ambos tipos de sensores, la estimación estática mantiene un error de estimación menor, gracias a la independencia de la misma del historial de errores de estimación cometidos. Haciendo zoom se observa cómo la estimación estática es mucho más precisa en instantes finales de la simulación (figura 6.35). El error medio de estimación mediante el método Q es de 0.44 arcsec (e independiente del tiempo de simulación), mientras que el de estimación dinámica es de 1725 arcsec en 3200 segundos.

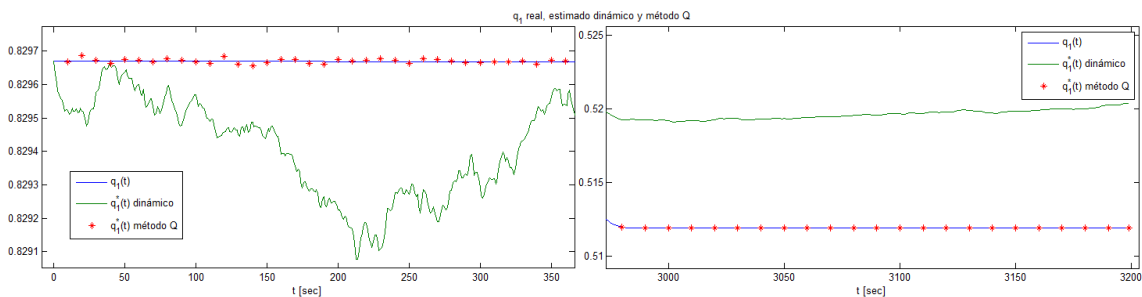


Figura 6.35: Errores de estimación dinámica y estática en instantes iniciales y finales de simulación

Si se aplica el método TRIAD para los mismos sensores de estrellas, se obtiene una respuesta similar, aunque de precisión menor que el método Q (figura 6.36).

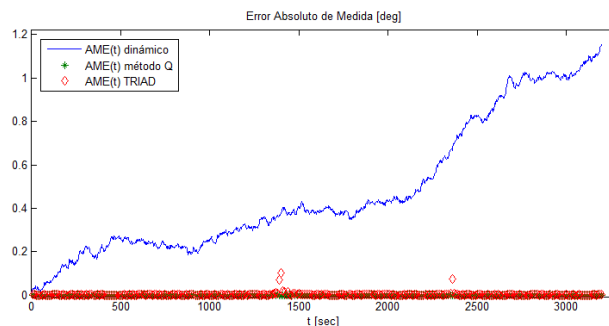


Figura 6.36: Errores de estimación dinámica y estática de métodos Q y TRIAD

Esta figura resume en definitiva las características de las dos estrategias básicas de estimación de actitud: los giróscopos proveen una medida de menor precisión pero de gran disponibilidad,

mientras que la estimación estática permite mayor precisión pero sólo se puede obtener cada cierto tiempo de actualización.

La *fusión de sensores* es la siguiente estrategia natural de estimación de actitud - aunar las medidas de ambos sensores consiguiendo una medida que tenga gran disponibilidad y precisión.

Una primera aproximación es el reseteo del calculo dinámico cada vez que hay una nueva medida vectorial. De esta manera se da prioridad a la medida estática cuando está disponible, integrando en el tiempo las ecuaciones cinemáticas desde dichos valores. El error crece aleatoriamente en el tiempo pero sólo hasta la actualización de la medida del sensor estelar.

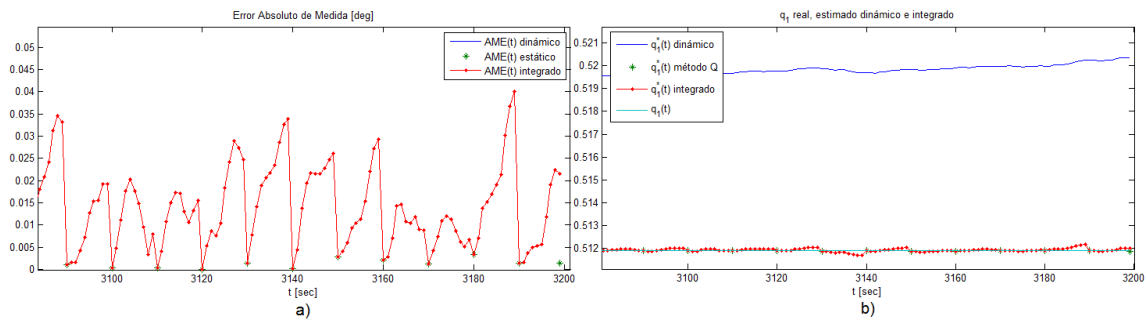


Figura 6.37: Propagación dinámica VS integración de sensores directa: error absoluto de medida (a) y primera componente del cuaternión de actitud (b) en los instantes finales de simulación. En (a) el AME dinámico está fuera del rango representado.

La figura 6.37 muestra los instantes finales de la simulación aplicando la fusión simple de sensores. Efectivamente, el error AME está acotado durante toda la simulación, creciendo entre medidas debido a los errores de los giróscopos y su acumulación. Cada vez que hay una nueva medida el error AME baja hasta el error de la medida correspondiente, procesada mediante el método Q.

Esta medida tiene tanta disponibilidad como la estimación dinámica, mientras que el error de estimación es 50 veces menor en los instantes finales de la simulación (es decir, tras 3200 segundos).

6.2.3. Filtro de Kalman (MEKF)

En esta sección se realiza un análisis exhaustivo mediante simulaciones del filtro de Kalman extendido multiplicativo de la sección 5.3.

Tomando los mismos parámetros de simulación y suponiendo un conocimiento perfecto de las varianzas de los errores de proceso y medida, el MEKF consigue un error de estimación menor, pero no supone una gran mejora. El error medio absoluto de medida en el tiempo de simulación mediante MEKF es de 44.60 arcsec mientras que mediante integración directa es de 44.97 arcsec, es decir, una mejora menor del 1 %. La figura 6.38 muestra el error absoluto de medida para MEKF e integración directa de sensores durante los instantes finales de simulación.

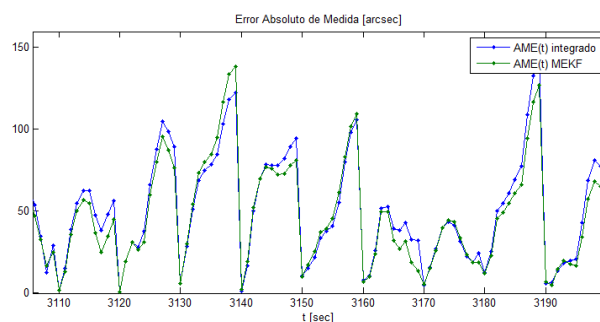


Figura 6.38: AME según MEKF e integración directa

Puesto que el filtrado de Kalman se basa fundamentalmente en la corrección de la velocidad angular estimando el error de la velocidad angular del giróscopo, puede considerarse que la integración directa es la cota superior del error de estimación del filtro de Kalman, ya que en ésta no se emplea ninguna corrección de la velocidad angular.

Como se expondrá en lo sucesivo, la eficacia del filtro de Kalman depende en gran medida de la precisión del giróscopo elegido, a través de las características de ruido η_1 y η_2 .

Inestabilidad

Se simula a continuación considerando los giróscopos de la unidad inercial del observatorio espacial PLATO (*PLANetary Transits and Oscillations of stars*), con unas desviaciones estándar de $\eta_1=0.5$ °/h y $\eta_2=36$ °/h². En este caso, la comparación de errores de medida entre ambos métodos de estimación continua-discreta es la mostrada en la figura 6.39.

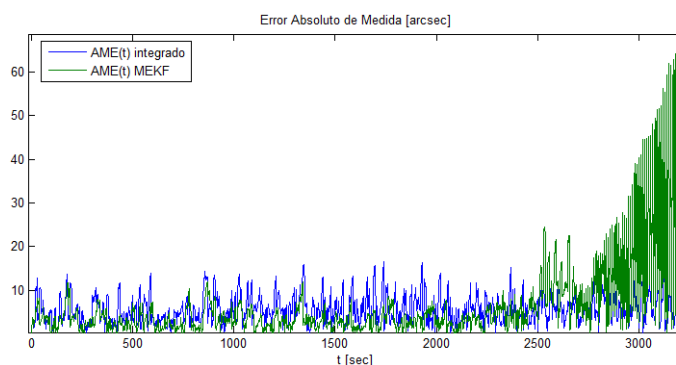


Figura 6.39: AME según MEKF e integración directa, caso PLATO

El error de estimación es en este caso menor que el de integración de sensores directa excepto en los instantes finales de la simulación, donde exhibe problemas de inestabilidad numérica. A pesar de ser aceptado como estándar de estimación de actitud desde su desarrollo en 1960, el filtro de Kalman puede no funcionar correctamente cuando se implementa en la práctica.

Dos de las causas principales de la divergencia del filtro de Kalman son los errores de modelización y la precisión aritmética finita de la máquina. La teoría presentada asume que la aritmética del filtro de Kalman tiene precisión infinita. En los microprocesadores digitales la aritmética tiene precisión finita - sólo un cierto número de bits se utiliza para representar los números en las ecuaciones del filtro de Kalman. Esto puede causar divergencia e incluso inestabilidades en la implementación real.

La teoría también asume que el modelo del sistema se conoce con precisión - las matrices F , Q , H y R son perfectamente conocidas. Se asume también que las secuencias de ruido son estrictamente gaussianas y totalmente incorrelacionadas. Si alguna de estas hipótesis es violada, como suele ocurrir en la realidad, entonces las asunciones teóricas del FK son violadas y la teoría puede no funcionar.

En este proyecto el problema fundamental es la precisión finita de MATLAB. Las correcciones del MEKF se fundamentan en el cálculo de la ganancia de Kalman, ecuación (5.53), que supone el cálculo de la inversa $(H_a P_a H_a^T + R_i)^{-1}$. El número de condición LAPACK de esta matriz es cada vez más pequeño cuando la (asumida) simetría de la matriz de covarianza del error se pierde. Esta simetría se degrada en el proceso de integración numérica del método Runge-Kutta en la fase de propagación debido a pequeños errores de redondeo, y se acumula en el tiempo debido al efecto memoria en la ganancia de Kalman. Eventualmente la matriz mencionada se hace suficientemente singular para la precisión de MATLAB, resultando en la inestabilidad del método. Nótese que además, esta inversa estará peor condicionada cuanto menor sea la matriz R , es decir, la covarianza del error de medida.

Para evitar la divergencia del MEKF o reducir su efecto, la literatura [18] ofrece varias opciones. Entre éstas se incluye aumentar la precisión aritmética de la máquina, disminuir la tolerancia del método de integración numérica o la simetrización forzada de la matriz de covarianza.

La solución que en este caso implica una mayor eficacia y menor costo computacional es la simetrización forzada de la matriz de covarianza P una vez finalizada la fase de propagación, según

$$P = \frac{P + P^T}{2}. \tag{6.21}$$

Al mantener la simetría la matriz P_a , la ecuación (5.53) se calcula adecuadamente puesto que el cálculo de la inversa mantiene la precisión.

Aplicando esta técnica, el MEKF estable comete errores de estimación menores que el método de integración de sensores directa, como muestra la figura 6.40. En este caso, el error medio de estimación de integración directa es de $\overline{AME}_{int} = 5.52$ arcsec, mientras que el de filtro de Kalman es $\overline{AME}_{MEKF} = 3.3$ arcsec, es decir una mejora del 40 %.

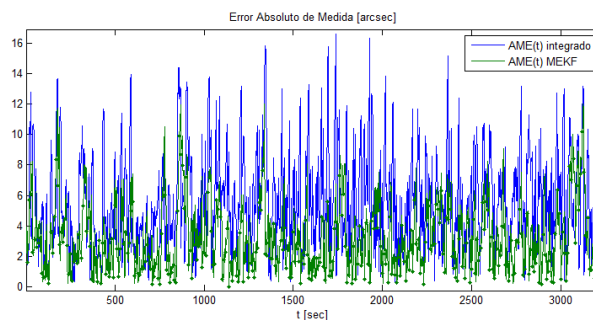


Figura 6.40: AME según MEKF e integración directa, caso PLATO estabilizado

También se puede evitar la inestabilidad reescribiendo la ecuación diferencial matricial de propagación de la matriz de covarianza, ecuación (5.37). Teniendo en cuenta que se ha de cumplir $P = P^T$, y la forma de la matriz G , ecuación (5.44), se propone

$$\dot{P} = FP + PF^T + GQG^T = FP + P^T F^T + Q = FP + (FP)^T + Q. \tag{6.22}$$

Esta solución elimina la necesidad de imponer explícitamente la simetría mediante la ecuación (6.21), con lo que el costo computacional es menor. Además, al suponer la simetría de P en cada instante de la propagación, el error medio de estimación disminuye, aunque la mejora es despreciable. Si no se indica lo contrario, todas las simulaciones siguientes incluirán esta técnica de estabilización propuesta.

Eficacia: influencia de los errores de los giróscopos

La figura 6.41.a muestra el error de estimación mediante MEKF e integración directa en un barrido de simulaciones para valores razonables de η_1 y η_2 . En esta figura se mantienen constantes los parámetros de las medidas vectoriales, es decir, el tiempo de actualización t_{act} y las desviaciones estándar de los errores de medida η_{w_1} y η_{w_2} . La figura 6.41.b muestra el cociente de los errores cometidos mediante ambos métodos en el plano (η_1, η_2) . Se observa que cuanto menores sean ambos errores, más eficaz será la estimación MEKF, pudiéndose alcanzar una mejora del 90 % dentro del rango de desviaciones estándar considerado.

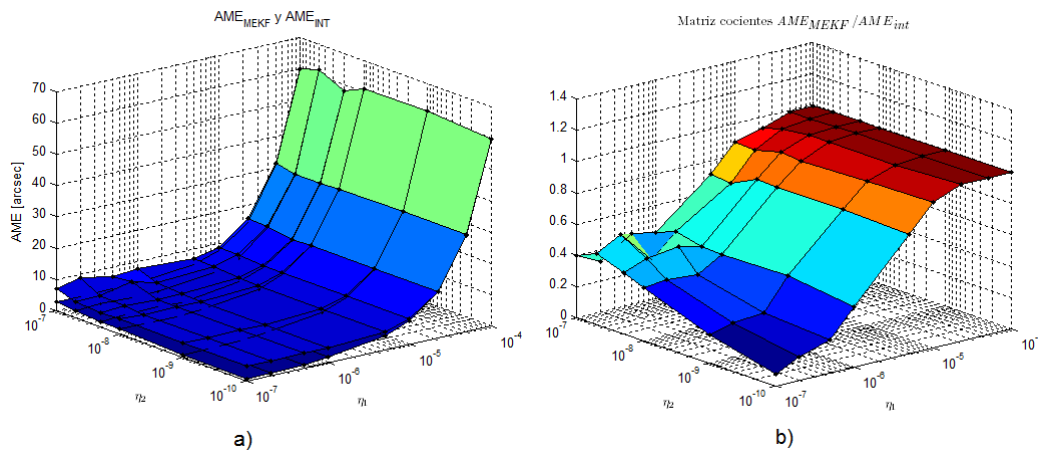


Figura 6.41: \overline{AME}_{MEKF} y \overline{AME}_{int} (a) y $\frac{\overline{AME}_{int}}{\overline{AME}_{MEKF}}$ (b) en el plano (η_1, η_2)

Se puede analizar de la misma forma el impacto de las características de ruido del giróscopo en la inestabilidad del MEKF. La figura 6.42.a muestra el error de estimación cuando no se aplica la simetrización forzada de P . Nótese que, por claridad en la representación, el límite de máxima inestabilidad se ha cortado en $AME_{MEKF} = 100$ arcsec, puesto que en esta región el error es del orden de 10^6 arcsec. Cuanto más se acerquen las características de ruido del giróscopo a esta región, antes aparece la inestabilidad, por lo que el error de estimación es mayor. El umbral a partir del cual aparece la misma depende de las características de estimación estática, es decir, los valores de t_{act} , η_{w_1} y η_{w_2} .

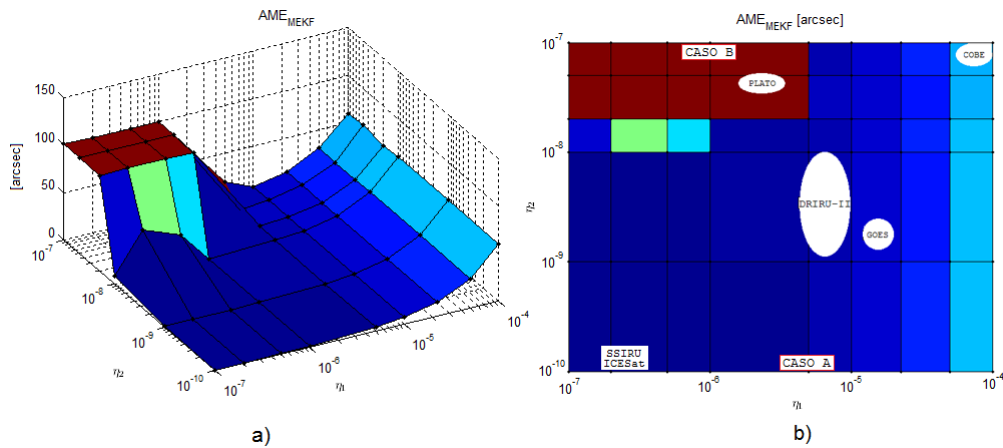


Figura 6.42: $\overline{AME}_{MEKF}(\eta_1, \eta_2)$ inestable (a); proyección en el plano (η_1, η_2) (b)

La figura 6.42.b muestra una vista del plano (η_1, η_2) considerado, con algunos valores de giróscopos comerciales. Se observa que, efectivamente, la unidad inercial de PLATO se encuentra en la región inestable del plano.

Los casos ‘A’ y ‘B’ de la figura 6.42.b enfatizan la influencia de la relación η_v/η_u en el comportamiento del MEKF. Estos dos giróscopos hipotéticos dan como resultado un error medio de estimación MEKF similar, y están caracterizados por:

- **Giróscopo A** Es dominante el ruido aleatorio de alta frecuencia $\vec{\eta}_1$,

$$\eta_1 = 5 \cdot 10^{-6} \text{ rad/s} \tag{6.23}$$

$$\eta_2 = 10^{-10} \text{ rad/s}^2 \tag{6.24}$$

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = 50000 \text{ s.} \tag{6.25}$$

- **Giróscopo B** Es dominante el ruido aleatorio de baja frecuencia $\vec{\eta}_2$,

$$\eta_1 = 10^{-6} \text{ rad/s} \tag{6.26}$$

$$\eta_2 = 10^{-7} \text{ rad/s}^2 \tag{6.27}$$

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = 10 \text{ s.} \tag{6.28}$$

Según Paluszek et al. [15], el giróscopo ‘A’ es asimilable a un giróscopo mecánico, mientras que el ‘B’ lo es a un giróscopo óptico. La figura 6.43 muestra el error AME de propagación dinámica para estos dos giróscopos.

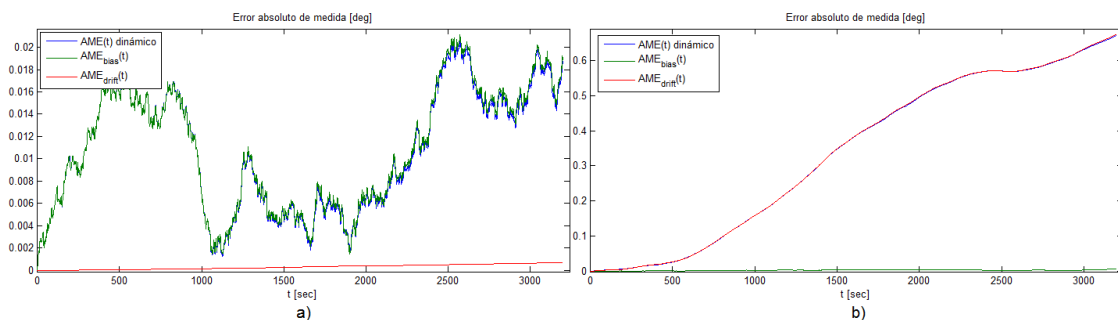


Figura 6.43: Error $AME(t)$ de propagación dinámica para los giróscopos ‘A’ (a) y ‘B’ (b)

La tabla 6.15 muestra el error final de estimación dinámica y el error medio \overline{AME}_{MEKF} para los giróscopos ‘A’ y ‘B’. Se observa que a pesar de que el giróscopo ‘B’ acumula un mayor error de estimación dinámica, permite una estimación MEKF mejor que ‘A’. Es decir, el MEKF es más efectivo cuando el tiempo η_v/η_u es menor. Nótese que este giróscopo ‘B’ pertenece a la región inestable del MEKF sin técnicas correctoras de la robustez (figura 6.41), en cuya simulación obviamente se ha aplicado la simetrización de la matriz de covarianza de la ecuación (6.22).

	Giróscopo ‘A’	Giróscopo ‘B’
$AME_{din} @ 3200 \text{ s [deg]}$	0.02	0.7
$\overline{AME}_{MEKF} [\text{arcsec}]$	4.41	3.24

Tabla 6.15: Error final de estimación dinámica y error medio de estimación MEKF para los giróscopos ‘A’ y ‘B’

Si se compara la evolución del cuaternión de actitud en los instantes finales de simulación, para la estimación MEKF y la integración directa, se aprecia la influencia de la componente de baja frecuencia en los tramos de propagación. En la figura 6.44.b se observa la pendiente monótona de desviación de la estimación de integración directa para el giróscopo ‘B’, frente a la variación más errática del caso ‘A’ (figura 6.44.a). En ese caso el filtro de Kalman no puede estimar con tanta precisión el error del giróscopo \hat{b} , ya que la desviación antes de la actualización es menos representativa del error cometido durante la propagación.

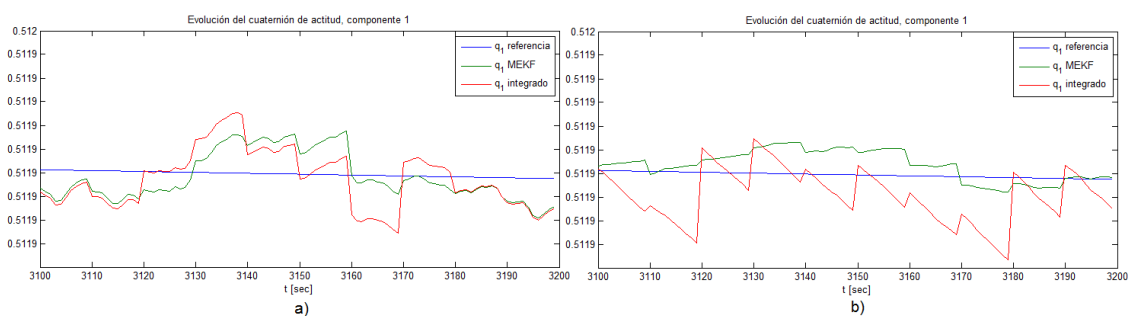
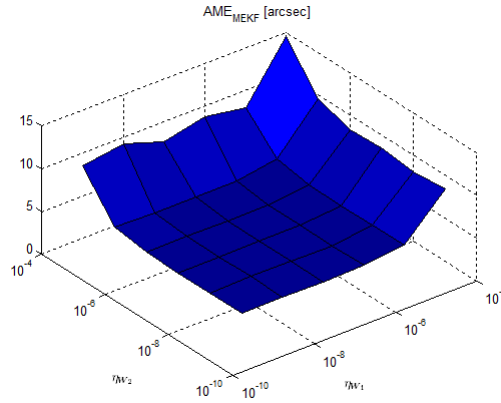


Figura 6.44: Evolución de q_1 de referencia, integración directa y MEKF durante los instantes finales propagación dinámica para los giróscopos ‘A’ (a) y ‘B’ (b)

Eficacia: influencia de ruidos de medida

Para analizar la influencia de los errores de las medidas vectoriales se ha realizado un barrido en las desviaciones típicas de los mismos. La figura 6.45 muestra el error de estimación MEKF para valores de η_{w_1} y η_{w_2} de 10^{-4} a 10^{-9} . Se observa un comportamiento simétrico en η_{w_1} y η_{w_2} , por lo que el orden en que se realicen las actualizaciones de las medidas vectoriales, aunque éstas procedan de sensores de diferentes precisiones, no influye en los resultados del MEKF.


 Figura 6.45: MEKF para η_{w_1} y η_{w_2}

Eficacia: incertidumbre en ruidos de proceso

En todas las simulaciones anteriores se ha supuesto el conocimiento perfecto de las varianzas de los errores de proceso y medida. Sin embargo, en la realidad no se tiene un conocimiento perfecto de dichas covarianzas, sino una estimación. Existe una multitud de métodos de estimación de las covarianza de los errores, publicados desde la década de los 70 hasta el año 2012 [13], que tratan de sintonizar el filtro de Kalman.

Se supone ahora que existe una cierta incertidumbre en las varianzas de los errores de proceso, determinada por un parámetro de incertidumbre ξ_i , de la forma

$$\tilde{\eta}_1(\xi_1) = \eta_1(1 + \xi_1), \quad \xi_1 = 0, \dots, 2 \quad (6.29)$$

$$\tilde{\eta}_2(\xi_2) = \eta_2(1 + \xi_2), \quad \xi_2 = 0, \dots, 2, \quad (6.30)$$

por lo tanto, se consideran incertidumbres en el conocimiento de las desviaciones típicas que van desde el 0 al 200 %.

Las desviaciones reales corresponden a un valor central del plano (η_1, η_2) (figura 6.42),

$$\eta_1 = \tilde{\eta}_1(0) = 5 \cdot 10^{-6} \text{ rad/s} \quad (6.31)$$

$$\eta_2 = \tilde{\eta}_2(0) = 5 \cdot 10^{-8} \text{ rad/s}^2. \quad (6.32)$$

Así, la matriz de covarianza de los errores de proceso es ahora

$$Q = \begin{bmatrix} \tilde{\eta}_1^2 I_{(3 \times 3)} & 0_{(3 \times 3)} \\ 0_{(3 \times 3)} & \tilde{\eta}_2^2 I_{(3 \times 3)} \end{bmatrix}. \quad (6.33)$$

Nótese que, puesto que las covarianzas son siempre positivas, no tiene sentido considerar parámetros de incertidumbre negativos.

La figura 6.46 muestra el error medio de estimación \overline{AME}_{MEKF} para los valores considerados de (ξ_1, ξ_2) . Cuanto mayor sea el parámetro de incertidumbre, más se degrada la estimación MEKF. Se observa también que la degradación de la estimación es más sensible a cambios en η_1 que en η_2 . Esto se debe a que el MEKF está basado en la covarianza de los errores, es decir, η_i^2 . En efecto

$$\frac{\partial(\tilde{\eta}_i^2)}{\partial \xi} = \frac{\partial(\eta_i^2(1 + \xi)^2)}{\partial \xi} = 2\eta_i^2(1 + \xi), \quad (6.34)$$

por lo que la sensibilidad a perturbaciones en la desviación típica depende del cuadrado de la misma. Es decir, la incertidumbre en el error de deriva aleatoria tiene un impacto menor en las actuaciones del filtro de Kalman.

Obsérvese que la estimación MEKF se degrada sólo en un 11 % para incertidumbres del 200 % en ambos errores.

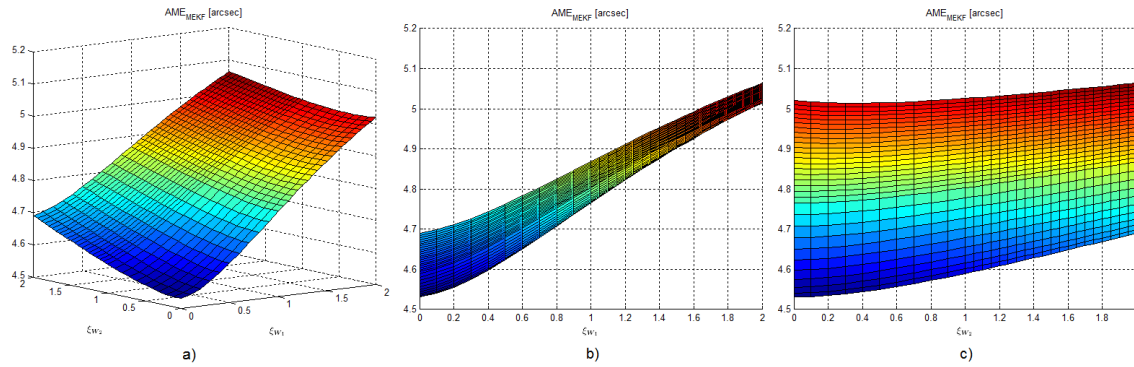


Figura 6.46: \overline{AME}_{MEKF} en el plano (ξ_1, ξ_2)

Eficacia: incertidumbre en ruidos de medida

Del mismo modo que en el ruido de proceso, se considera ahora un cierto índice de incertidumbre en las desviaciones típicas de los errores de medida. En este caso serán

$$\tilde{\eta}_{w_1}(\xi_{w_1}) = \eta_{w_1}(1 + \xi_{w_1}), \quad \xi_{w_1} = 0, \dots, 2 \quad (6.35)$$

$$\tilde{\eta}_{w_2}(\xi_{w_2}) = \eta_{w_2}(1 + \xi_{w_2}), \quad \xi_{w_2} = 0, \dots, 2, \quad (6.36)$$

es decir, al igual que en los ruidos de proceso, se consideran incertidumbres en el conocimiento de las desviaciones típicas que van desde el 0 al 200 %.

Las desviaciones reales η_{w_1} y η_{w_2} son

$$\eta_{w_1} = \tilde{\eta}_{w_1}(0) = 2,5 \cdot 10^{-5} \quad (6.37)$$

$$\eta_{w_2} = \tilde{\eta}_{w_2}(0) = 5 \cdot 10^{-7}. \quad (6.38)$$

Las matrices de covarianza asociadas R_1 y R_2 vendrán dadas en este caso por

$$R_1 = \tilde{\eta}_{w_1}^2 I_{(3 \times 3)} \quad (6.39)$$

$$R_2 = \tilde{\eta}_{w_2}^2 I_{(3 \times 3)}, \quad (6.40)$$

La figura 6.47 muestra el error medio de estimación \overline{AME}_{MEKF} para dichos valores del parámetro de incertidumbre. El error de estimación crece linealmente con ξ_{w_1} , hasta degradarse aproximadamente en un 20 % para una incertidumbre del 200 % en ambos ejes.

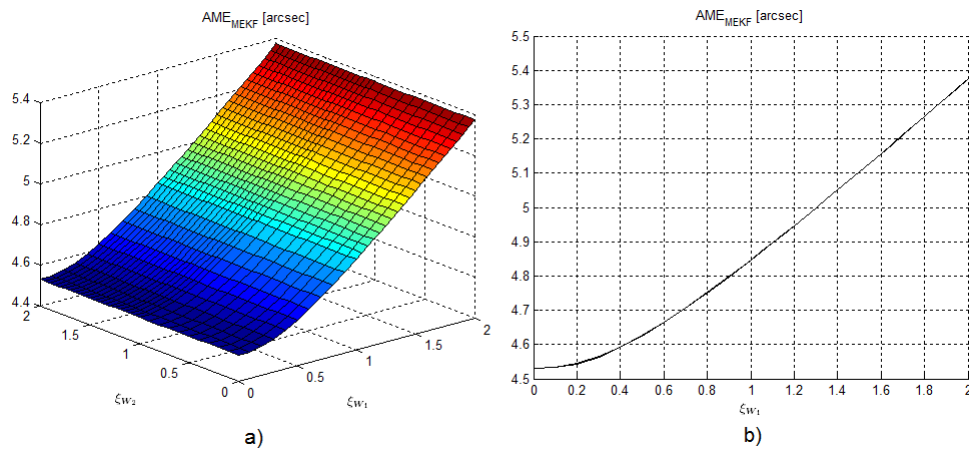


Figura 6.47: \overline{AME}_{MEKF} en el plano (ξ_{w_1}, ξ_{w_2}) (a), proyección $(\xi_{w_1}, \overline{AME}_{MEKF})$ (b)

Sin embargo, la degradación de la estimación con ξ_{w_2} apenas es perceptible en la figura, ya que la desviación estándar η_{w_2} es muy pequeña comparada con η_{w_1} .

Nótese aplicando la simetrización de P , el método sigue siendo estable a pesar de los grandes valores de incertidumbre en η_i y η_{w_i} .

6.3. Problema de tracking con información imperfecta

En este apartado se pone en práctica el problema de tracking con realimentación de estado estimado introducido en la sección 5.4. Se simula el problema completo, unión del problema de control y el problema de estimación de actitud. En este caso, el controlador no se alimenta del error entre el estado real y el de referencia, sino de la diferencia entre el estado de referencia y el estimado mediante el filtro de Kalman extendido multiplicativo de la sección anterior.

El esquema de la figura 6.48 resume el funcionamiento completo de la simulación del sistema de control de actitud propuesto en este proyecto. Se distinguen dos partes fundamentales en el diagrama, la parte de cálculo en línea y la parte fuera de línea. Fuera de línea se ha de calcular el vector de estados de referencia (determinado por la misión y la época), y con éste, la ganancia de realimentación $K(t)$ del regulador LQR horizonte finito. En el caso de simulaciones en tiempo real, esta ganancia se calcula a priori y se almacena en un buffer, para ser utilizada a posteriori.

Los cálculos del sistema que se realizan en línea comprenden dos bloques: el lazo de control, en el que se simula el modelo no lineal del sistema real, y el estimador, un filtro de Kalman. En el diagrama se enfatiza la construcción artificial de las medidas de los sensores, en la entrada del observador del MEKF. Esta construcción artificial hace necesaria la simulación del sistema real, de manera que se puedan generar las medidas de los sensores a partir del vector de estados real.

Nótese que en todo instante se supone perfectamente conocido el momento cinético de las ruedas \vec{h} .

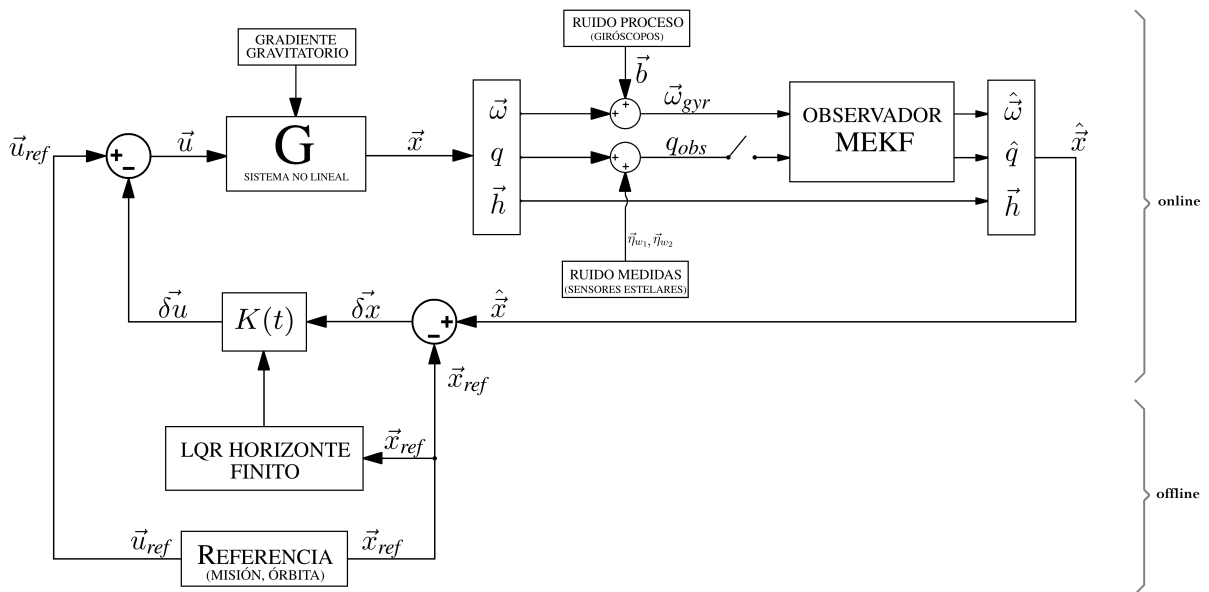


Figura 6.48: Diagrama de flujo del problema de tracking con información imperfecta

Para esta simulación se han empleado los parámetros de simulación de la tabla 6.16, elegidos para obtener buenas actuaciones. Consta de un controlador sintonizado para priorizar la precisión sobre la economía, y un conjunto de sensores de gran precisión. A estos parámetros propios del sistema de control y estimación, se añaden los parámetros mágicos utilizados en las simulaciones anteriores, reflejados en la tabla 6.1.

Controlador LQR	
Penalización del error de actitud	$Q_{qq} = 10^8$
Penalización de la señal de control	$R_{ii} = 10^2$
Penalización del error de actitud final	$S_{qq}(T) = 10^8$
Estimador MEKF	
Error de proceso (Farrenkopf)	$\eta_1 = 3,085 \cdot 10^{-7}$ rad/s, $\eta_2 = 1,096 \cdot 10^{-10}$ rad/s ²
Errores de medida	$\eta_{w_1} = 2,5 \cdot 10^{-6}$, $\eta_{w_2} = 5 \cdot 10^{-7}$
Periodo de actualización STR	5 s
Frecuencia de muestreo	10 Hz

Tabla 6.16: Parámetros de simulación para el problema de tracking con información imperfecta

Con estos parámetros de error de proceso, el giróscopo empleado es asimilable al giróscopo HRG de la unidad inercial SSIRU de Northrop Grumman, actualmente a bordo del telescopio espacial Herschel. La precisión resultante de las medidas vectoriales hace asimilable el sensor de estrellas al TERMA HE5AS, actualmente a bordo del satélite de observación terrestre Cryosat. Las especificaciones de este sensor estelar se pueden encontrar en la tabla 8.2.

En esta simulación se hace necesario aumentar la frecuencia de muestreo desde 1 Hz tomado en todas las simulaciones anteriores a 10 Hz, de forma que las interpolaciones necesarias representen con fidelidad la referencia en el método de Runge-Kutta, evitando errores ficticios mayores

de los que se darían en un sistema ADCS real. Esta frecuencia de cálculo aumenta el costo computacional de manera excesiva, sin embargo, un sistema ADCS real obviamente no necesita generar artificialmente las medidas de los sensores ni propagar el vector de estados real, por lo que el costo computacional real sería aceptable.

En la figura 6.49 se muestran los siguientes errores de actitud cometidos durante el tiempo de simulación propuesto:

- **Error absoluto de medida AME** ángulo de Euler entre el cuaternión de actitud estimado y el real. Mide la bondad de la estimación MEKF. Representado en azul claro.
- **Error angular ficticio** ángulo de Euler entre el cuaternión de actitud estimado y el de referencia. Influye directamente sobre el vector de control aplicado sobre el sistema real. Representado en rojo.
- **Error angular de actualización** ángulo de Euler entre los cuaterniones antes y después de la actualización MEKF. Mide el salto instantáneo producido sobre el error angular ficticio resultado de la actualización MEKF. Representado en verde.
- **Error absoluto de apuntamiento APE** ángulo de Euler entre el cuaternión de actitud real y el de referencia. Describe las actuaciones últimas del sistema de estimación y control de actitud. Representado en azul. Es cualitativamente igual a la suma del error ficticio más el error absoluto de medida.

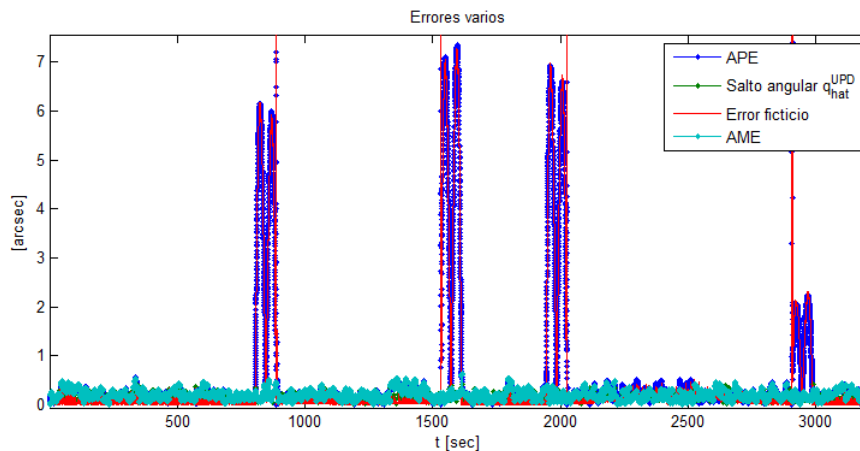


Figura 6.49: Errores angulares relevantes en el problema de tracking con información imperfecta durante el intervalo de simulación

Para comprender el papel que juegan cada uno de estos errores se muestra un zoom en los instantes finales de simulación, figura 6.50. Se observa el error de estimación MEKF en azul claro, que aumenta con el tiempo hasta que en (casi todas) las actualizaciones, efectuadas cada 5 segundos, vuelve a disminuir de forma súbita. El error absoluto de apuntamiento sigue una tendencia similar, gracias a la sintonización precisa del controlador LQR. Cada actualización MEKF supone un incremento súbito del error ficticio (representado en rojo), debido al cambio brusco del cuaternión de actitud estimada. Ya que en este perfil de iluminación de paneles la actitud de referencia es constante, se pueden entender como incrementos del valor absoluto del vector de control aplicado sobre el sistema real. Esto supone pequeños retrasos de seguimiento del cuaternión de actitud real con respecto al estimado, como se refleja en la diferencia de error AME/APE tras las actualizaciones.

En verde se muestra el error de actitud entre el cuaternión de actitud estimada antes y después de las actualizaciones MEKF. Sigue una correlación cualitativa con los incrementos del error ficticio, pero no coinciden cuantitativamente. Esto se debe a que los errores representados, al estar basados en el ángulo de Euler de los cuaterniones de rotación, son una suerte de proyección de los vectores de Gibbs que describen los errores de actitud, con variaciones en las tres dimensiones espaciales. Este hecho se explica geométricamente en el capítulo 7, mediante una visualización en STK.

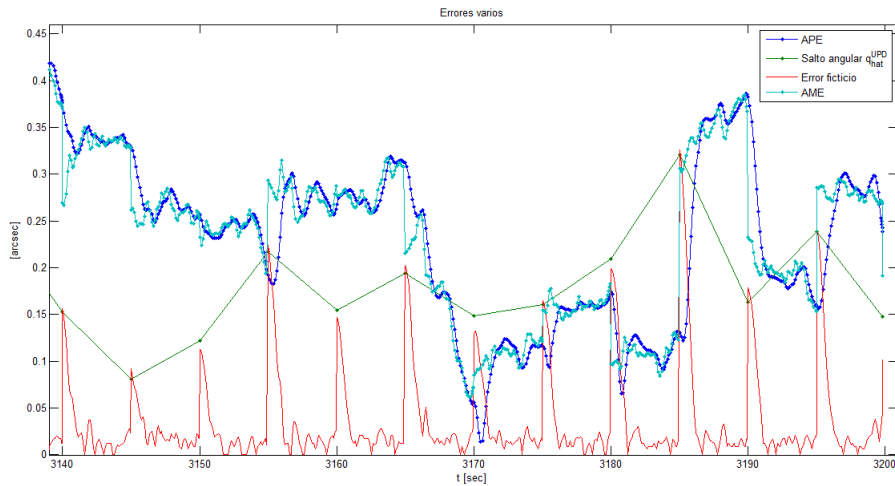


Figura 6.50: Errores angulares relevantes en el problema de tracking con información imperfecta durante un perfil de iluminación de paneles solares

En la figura 6.51 se presentan los errores durante una maniobra de transición de perfiles de actitud. Si bien durante el perfil de iluminación de la figura 6.50 la contribución dominante al error de actitud total *APE* era el error de estimación *AME*, en este caso la rápida variación del perfil de referencia hace que el error más importante sea el error ficticio. Se observa cómo el error *APE* sigue al error ficticio, mientras que el error de estimación se mantiene en cotas similares a las del caso anterior, figura 6.50.

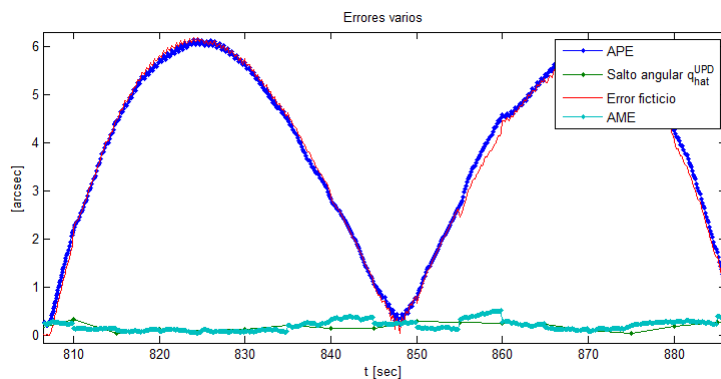


Figura 6.51: Errores angulares relevantes en el problema de tracking con información imperfecta durante una maniobra de actitud

La figura 6.52.a es análoga a las anteriores, durante un perfil de observación de estación terrestre. Las contribuciones al *APE* del error ficticio y *AME* son similares. Se aprecia que el error ficticio tiene un comportamiento muy similar al error *AME* del problema de tracking con infor-

mación perfecta de la figura contigua, figura 6.52.b, a excepción de los saltos exhibidos en los instantes de actualización.

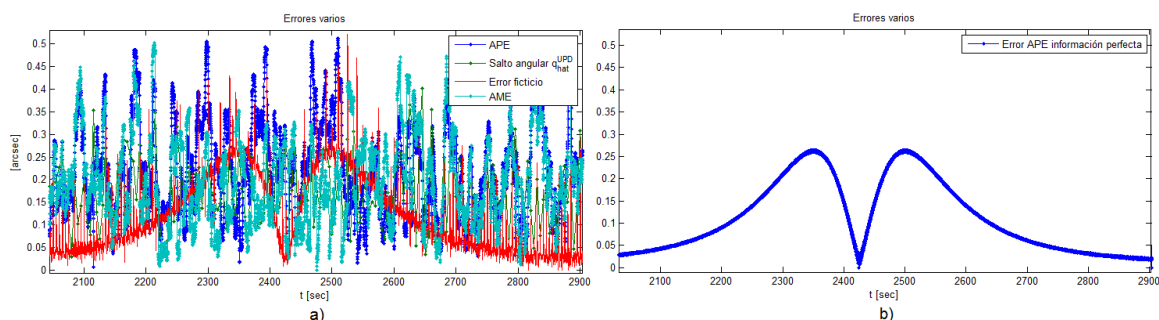


Figura 6.52: Errores angulares relevantes durante el perfil de seguimiento de Sevilla

La tabla 6.17 muestra una comparación entre las actuaciones del problema tratado frente al caso de acceso perfecto al estado. La energía consumida en el problema con realimentación de estado estimado es muy similar al caso de información perfecta, puesto que el error ficticio, que es el causante último del esfuerzo de control imprimido, es en media muy similar al del problema con información perfecta, tal y como se ha mostrado en la figura 6.52.

	Información imperfecta	Información perfecta
\overline{APE} [arcsec]	0.6985	0.5476
\overline{AME} [arcsec]	0.5674	no se aplica
E [J]	773.56	769.49

Tabla 6.17: Comparación de actuaciones globales entre los problemas de tracking con información imperfecta y perfecta.

Gracias a la precisión de los sensores empleados y la eficacia en la estimación de actitud del MEKF, el error medio de estimación AME es de sólo 0.57 arcosegundos durante el tiempo de simulación considerado. Por tanto, como se aprecia en la tabla 6.17, el error medio de apuntamiento APE es muy similar al conseguido con acceso perfecto al estado. Sin embargo la incertidumbre en la estimación introduce un ruido de alta frecuencia en la respuesta, conocido como *error relativo de apuntamiento (RPE)* [4], estabilidad de apuntamiento o “jitter” en la literatura. Este ruido de alta frecuencia (figura 6.52.a) puede penalizar en gran medida las capacidades de la instrumentación optoelectrónica de a bordo, a pesar de mantener un error medio de apuntamiento mínimo.

Durante las misiones científicas de telescopios espaciales (perfiles de actitud de seguimiento de objetos fijos en ejes inerciales), en los que la estabilidad de apuntamiento es un factor capital, esta penalización se mitiga mediante sistemas específicos acoplados al sistema óptico, y se reduce la frecuencia de muestreo del sistema de control y estimación de actitud.

En 1998 la NASA introdujo satisfactoriamente un sistema mecánico pasivo de filtrado de *jitter*, para el tercer satélite-observatorio de rayos X AXAF [14]. El sistema consiste en el acoplamiento de un conjunto de pequeñas ruedas de reacción pasivas, a modo de interfaz entre la estructura del satélite y las ruedas de reacción motrices. Están dimensionadas para ser excitadas a frecuencias superiores a las propias del movimiento nominal del satélite, de manera que absorban las componentes de alta frecuencia del momento de control aplicado por las ruedas de reacción.

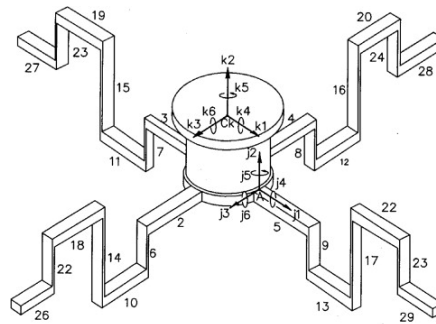


Figura 6.53: Plataforma de amortiguamiento pasivo de ruido de control

Kamesh et al. [10] han publicado recientemente un estudio analítico y experimental de otro elemento estructural pasivo de amortiguamiento de alta frecuencia. Consiste en una plataforma flexible excitable a bajas frecuencias (figura 6.53), sobre la que se monta la rueda de reacción y que sirve como soporte e interfaz con la estructura principal del satélite. Este montaje también permite reducir la amplitud del ruido de alta frecuencia inducido por las ruedas de reacción.

La implementación de estas soluciones mecánicas para la mejora de la estabilidad de apuntamiento se propone como trabajo futuro.

Capítulo 7

Integración MATLAB-STK

Este capítulo motiva la utilización conjunta de MATLAB y STK en el presente proyecto fin de carrera. Sin vocación de guía extendida sobre la integración de estos programas, expone ciertas particularidades encontradas al respecto durante el desarrollo de este proyecto, y apunta el funcionamiento de los programas elaborados y sus relaciones con el entorno STK.

Según se avanzó en los capítulos 3 y 5, el cuaternión de actitud es una forma de representación de actitud computacionalmente eficiente, razón que motiva su uso en este proyecto. Sin embargo resulta una forma de representación poco intuitiva –es matemáticamente asimilable a un número complejo de 4 dimensiones.

Como se puede observar en el capítulo 4, el proceso de generación de la referencia se basa estrictamente en ecuaciones matemáticas. La salida del algoritmo programado es un cuaternión de referencia, cuya interpretación espacial y temporal mediante gráficos de MATLAB es muy compleja. Para validar el seguimiento de la referencia de los objetivos asignados, sería necesario extraer las direcciones de los ejes cuerpo del satélite, y comparar con el vector solar \vec{r}_{sol} y el vector satélite-estación $\vec{r}_{sat-est}$, en cada instante. Aún así, las maniobras de transición tendrían una interpretación aún más abstrusa.

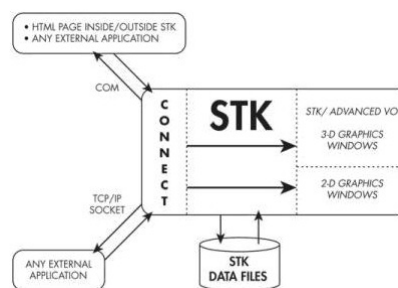


Figura 7.1: Diagrama de bloques de MATLAB-STK Connect

En este proyecto se emplea el software de simulación y representación astrodinámica STK[®] de Analytical Graphics, Inc. Mediante el interfaz MATLAB-STK *Connect*, es posible enviar información de actitud desde MATLAB a STK a través de un determinado puerto, mediante una conexión TCP/IP. Una vez animado el satélite con la información de actitud, se puede simular en las tres dimensiones espaciales y en el tiempo, permitiendo el análisis cualitativo de la dinámica de actitud de salida. Así, el proceso de validación y presentación de los resultados resulta mucho más intuitivo y sencillo.

El interfaz MATLAB-STK *mexConnect* permite además la automatización de tareas repetitivas, como

- Creación de objetos: satélites, estaciones terrestres, sensores, etc. Mediante el comando `stkNewObj`.
- Parámetros de propagadores orbitales: Mediante el comando `stkSetPropClassical`.
- Parámetros de visualización: representación de zonas de umbra y penumbra, creación de vectores, representación de sistemas de referencia, opciones de traza del movimiento del satélite, etc. Mediante las familias de comandos ‘VO’ y ‘Graphics’, ejecutadas a través de `stkExec`.

Estas órdenes permiten crear un escenario y animarlo sin necesidad de intervención en la interfaz gráfica de STK.

La validación visual del perfil de referencia de actitud permite comprobar que tanto el problema orbital como el algoritmo de generación de la referencia son correctos. El proceso de validación es el mostrado en el diagrama de la figura 7.2. El programa `Orbita.m` calcula la órbita necesaria para cumplir los requisitos de la misión. A través del interfaz MATLAB-STK *Connect* genera el satélite de referencia, y le aplica un propagador orbital `J2Perturbation` con los elementos orbitales resultantes, mediante el comando `stkSetPropClassical`. Visualmente se puede inspeccionar en la ventana 2D de STK si el satélite cumple la condición principal establecida en la sección 1.1, esto es, si el satélite pasa sobre Sevilla todos los días al atardecer (figura B.5).

Una vez comprobado, se asignan a la visualización 3D los vectores que definen las restricciones principales de la referencia: el vector solar \vec{r}_{sol} y el vector satélite-estación $\vec{r}_{sat-est}$.

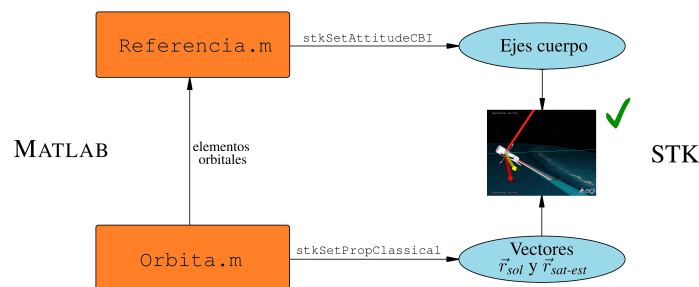


Figura 7.2: Flujos de información entre MATLAB y STK para la validación de la referencia de actitud

Los elementos orbitales calculados se pasan al programa `Referencia.m`. Éste calcula la referencia de actitud en base a dichos elementos keplerianos, además de otros parámetros como el vector de tiempos donde se deseen datos de actitud, la lista de coordenadas de los objetivos terrestres deseados y el tiempo de maniobra de transición. Mediante el comando `stkSetAttitudeCBI` de *mexConnect*, se envía el cuaternión de referencia en función del tiempo al satélite de referencia de STK. La validación visual de la referencia de actitud es ahora trivial, como se observa en la figura 7.3.

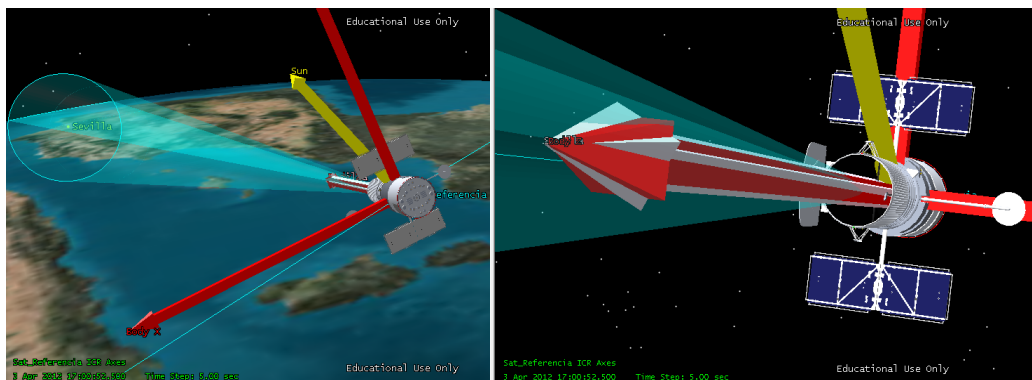


Figura 7.3: Los vectores \vec{Z}_{body} y $\vec{r}_{sat-est}$ se solapan gráficamente

El propósito fundamental del perfil de referencia en este trabajo es la existencia de un perfil cualquiera, en base al cual se calcula el estimador/controlador y se simula la dinámica de actitud del vehículo. A posteriori, la comparación de la simulación con la referencia da información sobre las actuaciones del sistema de control.

Por tanto, la precisión con la que se represente la escena con respecto a los elementos presentes en STK puede considerarse anecdótica. Sin embargo, es necesario calcular con precisión tanto el problema orbital como el algoritmo `Referencia.m` para que exista congruencia cualitativa en la representación, tanto en la ventana 2D como en la 3D. Es necesario obtener datos de los propagadores del propio STK, en base a los cuales realizar los cálculos orbitales. Algunos de los datos tomados de la opción `Report` de STK comprenden:

- Equinoccio vernal
- Instante de GST nulo
- Elevación solar local al atardecer

Es necesario puesto que pequeñas discrepancias entre la propagación realizada en `Orbita.m` (de acuerdo al desarrollo del anexo B) y la propagación de STK ($J2$ Perturbation) pueden provocar falta de sincronía, que se traduce en representaciones incongruentes. Los algoritmos de propagación orbital pueden exhibir diferencias significativas a partir de pequeñas diferencias en algunas constantes empleadas. Por ejemplo, el valor más común del parámetro gravitacional de la Tierra es $\mu = 398600,4418 \times 10^9 \text{ m}^3\text{s}^{-2}$. Sin embargo, algunas aplicaciones comunes se basan en modelos que utilizan el valor $\mu = 398600,4415 \times 10^9 \text{ m}^3\text{s}^{-2}$. Esta diferencia, aparentemente despreciable, puede causar grandes variaciones en los efectos gravitatorios considerados, debido a la magnitud del parámetro μ . La discrepancia orbital puede ser tan grande como varios kilómetros, afectando la geometría de la representación.

Debido a las precisiones que se manejan en control de satélites (del orden del segundo de arco), STK no permite apreciar las diferencias cuantitativas entre los cuaterniones simulado y de referencia. Sin embargo, es útil para comprender cualitativamente la dinámica del problema si se ejecutan los algoritmos con parámetros de simulación que penalicen mucho las actuaciones, pero mantengan el mismo comportamiento. Es necesario degradar las precisiones de apuntamiento a órdenes de magnitud del grado sexagesimal. Un ejemplo ilustrativo es el expuesto en la figura 6.50, de la simulación del problema de tracking con información imperfecta.

Para analizar el comportamiento cualitativo de esta simulación, se puede repetir la misma con unos parámetros de simulación que permitan ver los errores angulares en STK. Se escoge un buen

sensor de estrellas, un controlador de precisión media y un mal conjunto de giróscopos. Además, se elige un tiempo de actualización de 15 s, de manera que sea perceptible el movimiento de los cuaterniones de actitud durante un tiempo prolongado.

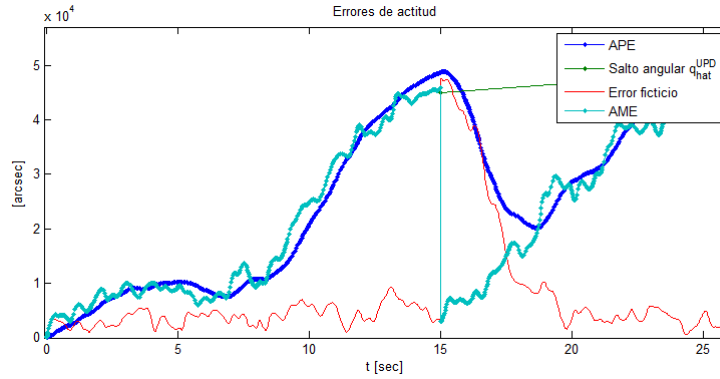


Figura 7.4: Representación de la figura 6.50, adaptada para su análisis en STK.

Una simulación de corta duración en estas condiciones tiene como resultado la figura 7.4. Esta figura muestra los mismos parámetros que la figura 6.50, los errores de actitud, de estimación y el error ficticio. El comportamiento de estos errores angulares es cualitativamente similar, sin embargo son ahora del orden de 10° . De la visualización en STK de esta simulación puede extraerse la captura de pantalla de la figura 7.5. Muestra el cuaternión de referencia, representado por el satélite de ejes en rojo, el cuaternión estimado MEKF, representado por el satélite de ejes en azul claro, y el cuaternión de actitud simulado final, representado por el satélite de ejes en azul. Esta instantánea está tomada tras 14 segundos de simulación, justo antes de la primera actualización de medidas vectoriales del MEKF.

Muestra además las trazas descritas por los tres satélites al moverse en el espacio, con respecto al sistema de referencia inercial. Como se trata del inicio de la simulación (perfil de iluminación), el satélite de referencia no describe traza alguna. Sin embargo se aprecian las trazas de los cuaterniones de actitud estimada y simulada final. Se observa cómo desde el inicio de la simulación, el cuaternión de actitud 'real' se ha ido separando del cuaternión estimado, gracias fundamentalmente al error de estimación. Este error AME ha crecido en el tiempo, y ha provocado momentos de control erróneos que han ido separando el cuaternión de actitud real de la actitud de referencia. A su vez, la poca sensibilidad de los giróscopos ha ignorado la separación creciente del cuaternión de actitud real y estimado.

Más aclaratoria resulta la observación de cómo se distribuye el error de apuntamiento en error ficticio más error de estimación. Si bien el error angular de estimación está contenido en el plano $(\vec{Z}_{body}^{sim}, \vec{Z}_{body}^{est})$, el error ficticio lo está en el plano $(\vec{Z}_{body}^{sim}, \vec{Z}_{body}^{ref})$. Como ambos planos generalmente no coinciden, los errores angulares ficticio y de estimación no son comparables cuantitativamente, y por tanto la relación $APE = AME + \theta_{ficticio}$ se cumple, a lo sumo, cualitativamente.

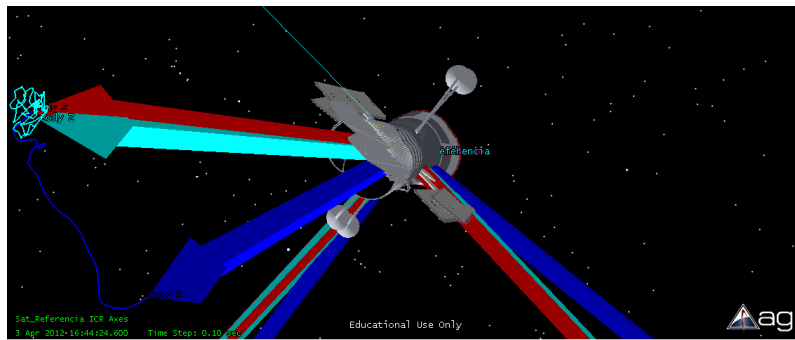


Figura 7.5: Representación STK de la figura 7.4.

Este es sólo un ejemplo de cómo la visualización en STK facilita la comprensión real del movimiento de los satélites, y ayuda a depurar los programas elaborados. Otras posibilidades son la visualización de los efectos del gradiente gravitatorio sobre un vehículo espacial libre, y el efecto estabilizador que un volante de inercia tendría sobre el mismo.

El funcionamiento completo del software desarrollado se muestra esquemáticamente en la figura 7.6.

- **CreaEscenario.m** Establece el lazo de conexión TCP/IP entre MATLAB y STK. Crea y establece los parámetros del escenario de simulación STK, y genera los objetos necesarios para la simulación.
- **Orbita.m** Calcula la órbita requerida, de acuerdo a los desarrollos del apéndice B, y tomando constantes propias de STK. Los elementos keplerianos obtenidos se pasan como argumentos al propagador *J2Perturbation* de STK. Es necesario utilizar este propagador de forma que la órbita resultante sea sometida al efecto de regresión de los nodos característico de las órbitas heliosíncronas. Devuelve los elementos orbitales calculados y la época.
- **Referencia.m** Acepta los elementos orbitales calculados en *Orbita.m*, la lista de estaciones objetivo y el tiempo de maniobra de transición. En base a estos datos, calcula el vector de estados de referencia según las ecuaciones desarrolladas en la sección 4.2. Anima la actitud del satélite de referencia de STK, y devuelve el vector de estados de referencia.
- **Riccati.m** Acepta el vector de estados de referencia calculado en *Referencia.m*, y los parámetros dinámicos del vehículo espacial. Resuelve la ecuación diferencial de Riccati según lo expuesto en la sección 4.3, y devuelve la matriz de realimentación óptima $K(t)$. No interacciona con STK.
- **E_C_Actitud.m** Acepta la matriz $K(t)$ calculada en *Riccati.m*, así como las varianzas de error que caracterizan los sensores (giróscopos y sensores estelares), y la frecuencia de actualización del sensor estelar. En ciertas simulaciones realizadas, también necesita los valores límite de los actuadores (par máximo y/o velocidad de saturación). Según los algoritmos desarrollados en las secciones 4.4 y 5.4, se simulan los problemas de tracking con información perfecta/imperfecta. En el caso del problema de tracking con información perfecta, este programa mandará a STK la información de actitud final simulada, denominada $q_{sim}(t)$ en el diagrama. Para el problema de tracking con información imperfecta, además, mandará el cuaternión de actitud estimada, denominada $q_{est}(t)$ en el diagrama.

En esta lista se omiten otros programas desarrollados, necesarios para generar algunas de las simulaciones explicadas en el capítulo 6, como por ejemplo los realizados para las simulaciones de estimación de actitud pura, en las secciones 6.2.1-6.2.3.

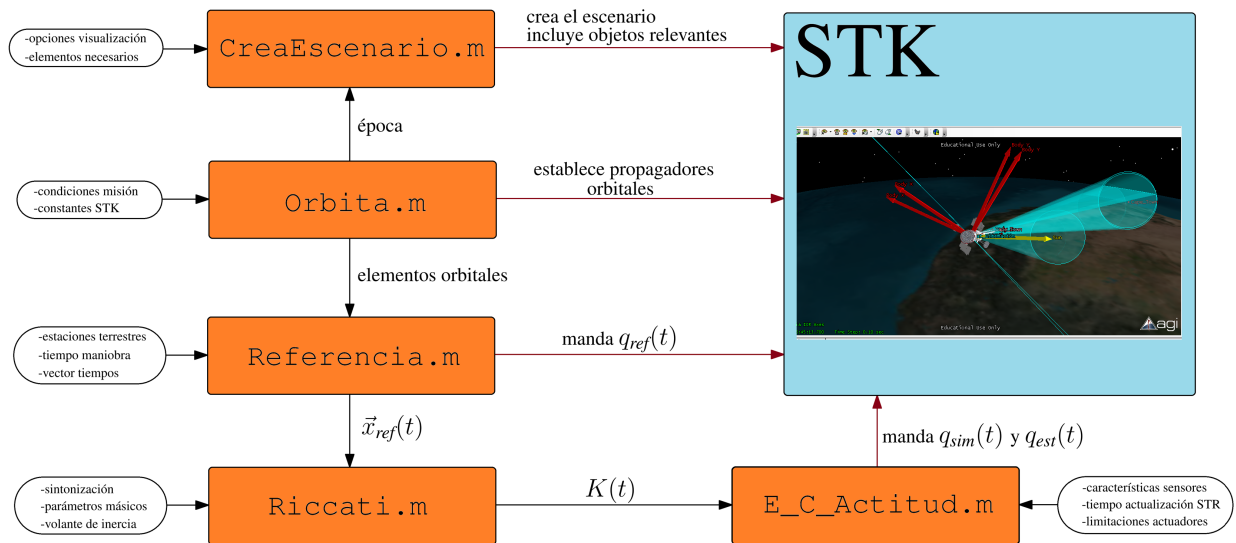


Figura 7.6: Diagrama de flujo de la plataforma de simulación de actitud, basada en MATLAB-STK

Como se observa en el diagrama anterior, las comunicaciones a través del interfaz (señaladas en rojo) son todas unidireccionales –MATLAB no recibe información de STK. Es decir, este proyecto utiliza STK sólo como una herramienta de visualización. Sin embargo, desde STK se puede también enviar información a MATLAB, mediante el comando `stkReport`. Por ejemplo, la recuperación de datos de efemérides desde STK al motor de MATLAB permite la comparación y validación de una propagación calculada por el usuario en MATLAB, con los resultados del propagador orbital de alta precisión (*HPOP*) de STK.

Otra posibilidad, de mayor trascendencia en este trabajo, es el envío hacia MATLAB de información de actitud de un satélite animado en STK. Esto es posible también mediante el comando `stkReport`, de la siguiente manera

```
[stkData,stkNames]=stkReport ('*/Satellite/Sat_ReferenciaSTK','Attitude Quaternions');
```

Esta orden genera la estructura `stkData`, que almacena, entre otros campos, las cuatro componentes del cuaternión de actitud y los tiempos en los que se dan dichos datos.

Esto permite generar trayectorias de referencia de una manera más intuitiva, y sin saltos instantáneos en el eje de Euler, esto es con velocidad angular continua en toda la trayectoria. La longitud y densidad de la malla temporal deseada se ajusta cambiando los parámetros del propagador orbital del satélite, bien mediante la orden `stkSetPropClassical`, bien desde la propia interfaz de usuario de STK.

El menú del simulador de actitud permite generar los perfiles de actitud de manera sencilla e intuitiva. Es posible obtener un perfil de actitud muy similar al generado en el capítulo 4 mediante este método, y correr los algoritmos de estimación y control desarrollados sobre dicha referencia de actitud.

En el menú del simulador de actitud de STK, se selecciona un perfil de tipo restricción solar, y se le superponen maniobras de seguimiento de unos objetivos. Estos objetivos han de estar definidos previamente. STK generará automáticamente los perfiles de actitud elegidos, y

los unirá mediante maniobras de transición de actitud, de una duración determinada por el parámetro '*Slew time*'. Además, si se selecciona la opción '*Match angular velocity*', impondrá continuidad en la velocidad angular durante todo el tiempo de simulación (figura 7.7).

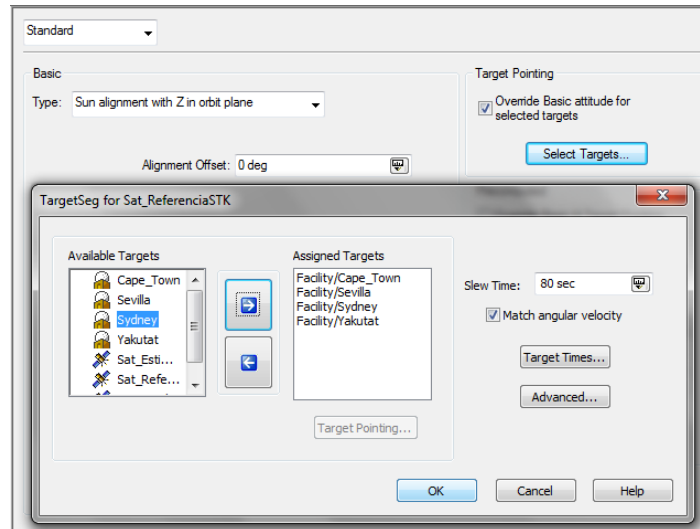


Figura 7.7: Menú del simulador de actitud de STK 9

Una vez generado el perfil de referencia, desde MATLAB se extrae el cuaternión de referencia de la estructura generada `stkData`, mediante `stkFindData`

```
quatREF_STK(1,:) = stkFindData(stkData{1}, 'q1');
quatREF_STK(2,:) = stkFindData(stkData{1}, 'q2');
quatREF_STK(3,:) = stkFindData(stkData{1}, 'q3');
quatREF_STK(4,:) = stkFindData(stkData{1}, 'q4');
tiempos_STK = stkFindData(stkData{1}, 'Time');
```

De acuerdo con la convención adoptada en este trabajo, la componente q_4 del cuaternión de salida es la componente escalar.

Con esta información de actitud, almacenada en las variables `quatREF_STK` y `tiempos_STK` se procede al cálculo de la velocidad y aceleración angular, necesarias para generar el vector de estados completo.

Este procedimiento explota las capacidades de interpretación de STK, puesto que el proceso de planificación de la referencia de actitud es gráfico, escalable e intuitivo. Sin embargo, está restringido al número limitado de perfiles de actitud propios de STK. En este caso, no es posible generar la referencia mediante condiciones vectoriales, como la impuesta al perfil de iluminación del capítulo 4.

Esta restricción puede salvarse imponiendo perfiles de actitud multisegmento, y aplicando en los perfiles de iluminación unos perfiles constantes, calculados mediante MATLAB según lo expuesto en el capítulo 4. La interconexión MATLAB-STK permite así una gran flexibilidad en el proceso de diseño de la referencia.

Capítulo 8

Sensores y Actuadores

En este capítulo se revisan los elementos tecnológicos necesarios para realizar el control y la estimación de actitud: sensores y actuadores.

Además de los algoritmos y ordenadores de abordo, el sistema ADCS requiere un hardware especializado para llevar a cabo su misión. Clásicamente, los dispositivos se dividen en actuadores y sensores. Como sucede en muchos dispositivos realizados para vehículos espaciales, muchas veces los sensores y actuadores son fabricados específicamente para cada misión (custom-made), si bien hay un cierto número de dispositivos estándar disponibles en el mercado. Aunque no se mencionará, típicamente los diseños son redundantes, permitiendo fallos (incluso simultáneos) de varios dispositivos.

8.1. Sensores

Existen tres tipos fundamentales de sensores, de acuerdo al fenómeno físico en el que se basan:

- Ópticos: detectan la dirección relativa de un cuerpo planetario o estelar.
- Mecánicos: miden la velocidad angular del vehículo respecto a un sistema de referencia inercial.
- Magnéticos: sólo se pueden usar en la proximidad (LEO) de planetas con un campo magnético de intensidad suficiente (p.ej. la Tierra).

La precisión típica de estos sensores se puede consultar en la tabla 8.1.

Asimismo, está demostrado que es posible usar el sistema GPS para determinar la actitud en altitudes desde LEO hasta GEO. Su uso se basa en utilizar varias antenas receptoras, deduciéndose la actitud de la diferencia en la señal recibida en ambas.

Típicamente se mezclan varios tipos de sensores con varios anchos de banda y se obtiene la actitud de las medidas mediante un Filtro de Kalman o similar.

A continuación se realiza una revisión somera de estos tipos de sensores.

Sensor	Precisión	Aplicación
Magnetómetros	1.0° (@5000 km alt) 5.0° (@200 km alt)	Actitud medida en relación al campo magnético terrestre local. Precisión determinada fundamentalmente por la variabilidad e incertidumbres en el campo magnético. Útil sólo a altitudes bajo \approx 6.000 km.
Horizonte Terrestre	0.05° (GEO) 0.1° (LEO)	Precisión dominada por incertidumbres en la forma del horizonte. Las unidades más precisas basadas en el escaneo.
Radiación Solar	0.01°	FOV típico de $\pm 30^\circ$
Estrellas	2 arc-sec	FOV típico de $\pm 6^\circ$
Giróscopos	0.001 deg/hr	Uso normal precisa reseteo periódico de la referencia.

Tabla 8.1: Rangos de precisión de diferentes sensores de actitud

8.1.1. Sensores ópticos

Un sensor óptico trata de deducir la dirección (respecto al sistema de ejes en el que se encuentra montado, es decir, ejes cuerpo) de un cuerpo planetario o estelar de referencia. En función del cuerpo utilizado como referencia se clasifican los sensores ópticos en

- Sensores de radiación solar
- Sensores terrestres infrarrojos
- Sensores de estrellas

Si bien en general determinan una dirección (es decir dos ángulos), en algunos casos de sensores más sencillos se encuentra un único ángulo. Un sólido rígido tiene tres grados de libertad en su actitud, y puesto que típicamente se obtendrán bastantes medidas, el problema de la estimación estará en general sobre-determinado. Para resolverlo se emplean métodos estadísticos como el TRIAD o el 'q' y/o filtros de estimación (p.ej. el filtro de Kalman).

8.1.1.1. Sensores de radiación solar (SRS)

Es difícil encontrar un vehículo espacial en el que no se utilicen sensores de radiación solar en la determinación de actitud. El Sol tiene dos importantes cualidades al respecto: su luminosidad, invariante en presencia de otros planetas brillantes o estrellas, y su pequeño radio angular (0.267° desde una órbita geocéntrica) en comparación con el globo terrestre. Este radio es además prácticamente constante para cualquier satélite orbitando alrededor de la Tierra. Existen dos tipos fundamentales de sensores solares, analógicos y digitales. Los sensores digitales son más precisos y versátiles, pero también más caros. Los sensores analógicos dan precisión suficiente para muchas aplicaciones específicas. Existen también *sensores de presencia solar*, los cuales simplemente indican si el Sol se encuentra en el campo de visión.

SRS analógicos: El componente básico de estos sensores es una célula fotoeléctrica. La corriente de salida del dispositivo es, salvo efectos de segundo orden, proporcional al coseno del ángulo de incidencia de los rayos solares. Sólo reciben información de la intensidad de radiación que reciben y no de dónde proviene, puesto que la misma intensidad de radiación (o lo que es equivalente, el coseno del ángulo incidente) puede darse para infinitas orientaciones Sol-sensor.

Para determinar una componente de la dirección del Sol es necesario disponer al menos dos células fotoeléctricas. El esquema más sencillo posible es el **sensor de un eje**, mostrado en la

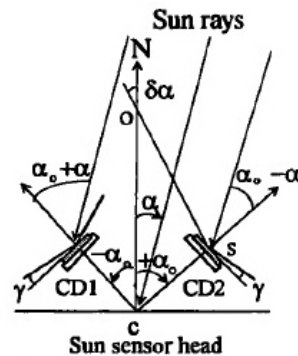


Figura 8.1: Sensor solar de un eje

figura 8.1. La determinación de las tres componentes del vector Sol puede realizarse disponiendo dos sensores de un eje con sus planos de medida a 90° , en un conjunto conocido como **sensor de dos ejes**.

Otro dispositivo de medición de las tres componentes del vector Sol es el **detector solar de máscara de dos ejes** (*two-axis mask sun detector*), mostrado en la figura 8.2. Una pantalla opaca situada sobre cuatro células fotoeléctricas deja pasar la luz solar a través de una abertura. En función de la intensidad de salida de las placas es posible determinar el área iluminada de cada una, determinando así la dirección del vector Sol.

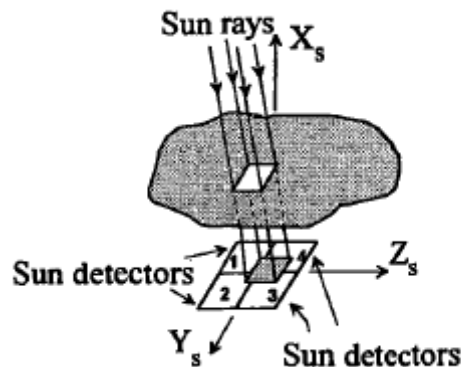


Figura 8.2: Detector solar de máscara de dos ejes

SRS digitales: Están formados por una cámara oscura ranurada en su parte superior, véase la figura 8.3. Esta ranura deja pasar los rayos solares hacia el interior, iluminando una retícula de células fotoeléctricas. En función de las células (bits) que se activen, el cabezal proporciona la componente de la dirección del Sol en el plano perpendicular a la ranura, según un código binario llamado código Gray. Para la determinación completa de la dirección del Sol se disponen, como en el caso analógico, dos sensores en perpendicular.

En esta categoría pueden incluirse los **sensores digitales de aspecto solar** (DSADs). Son similares a los sensores de radiación solar, pero mejoran su precisión. Usan una celda de sensores fotoeléctricos más sensibles, capaces de determinar además del ángulo, la intensidad de la radiación incidente. Una vez conocida la dirección y el ángulo de máxima intensidad, se puede calcular la dirección en la que se encuentra el centroide del Sol, con gran precisión (segundos de arco).

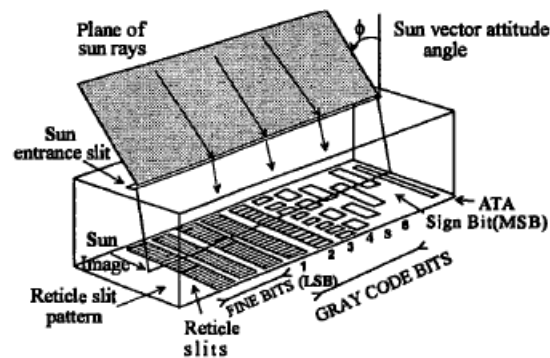


Figura 8.3: Sensor Solar Digital

8.1.1.2. Sensores terrestres infrarrojos

Se basan en la determinación de la huella infrarroja del horizonte terrestre. Existen dos tipos fundamentales:

De barrido Determinan dinámicamente el horizonte de la Tierra. El sistema óptico realiza un barrido de manera que el campo de visión (o FOV, del inglés *field of view*) describe una senda cónica. Cuando el FOV instantáneo empieza o termina de detectar radiación infrarroja, el sistema almacena en ángulo de fase del instante del cruce. Si además se tiene el dato de altitud de vuelo, es posible determinar la actitud relativa al sistema de referencia ligado a la órbita. Los sensores de doble barrido describen dos conos de escaneo, obteniendo cuatro puntos de cruce del horizonte, véase la figura 8.4. Estos sensores no precisan del dato de altitud para calcular la actitud.

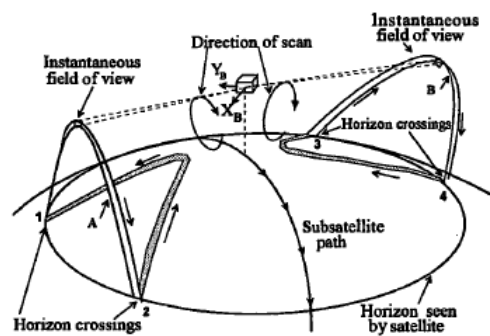


Figura 8.4: Sensor de horizonte terrestre de barrido doble

Estáticos El sistema óptico enfoca y proyecta la imagen del contorno terrestre sobre un conjunto de termopilas, como se muestra en la figura 8.5. En función de la radiación detectada por cada termopila, es posible determinar el centroide de la Tierra con gran precisión.

8.1.1.3. Sensores de estrellas

Se basan en la identificación de una estrella o grupo de estrellas, cuya posición en la esfera celeste está registrada en un catálogo estelar de a bordo. La situación de la imagen estelar en el FOV del sensor permite determinar la actitud de los ejes ligados al sensor, y por ende del vehículo espacial. En función de la misión particular para la que sea diseñado el sensor de estrellas se elegirán unas estrellas u otras como referencia. Una vez determinadas las estrellas objetivo, se ha

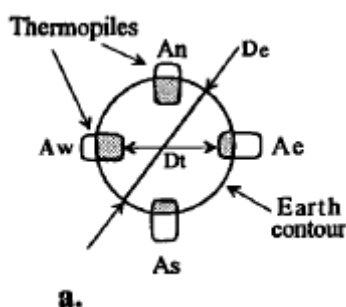


Figura 8.5: Configuración de sensores termoelectricos en el sensor infrarrojo estatico terrestre

de seleccionar la sensibilidad espectral del detector, de manera que la detección de las mismas sea lo más sencilla posible. La limitación espectral de la sensibilidad del detector permite filtrar las estrellas que no se utilizarán como referencia, y que se consideran perturbaciones celestes parásitas (ruido de fondo).

Existen tres tipos fundamentales de rastreadores de estrellas (*star trackers*):

- **Escáneres de estrellas (*star scanners*)** El escáner de estrellas se utiliza en satélites estabilizados por rotación, con el propósito de determinar la dirección del eje de giro del satélite.
- **Rastreadores de estrellas de cabezal fijo (*fixed-head star trackers*)** Los *star trackers* de cabezal fijo se usan para determinar la actitud de satélites estabilizados en los tres ejes. Este tipo de *star trackers* permite la mayor precisión en la determinación de actitud.
- **Rastreadores de estrellas sobre suspensión cardán (*gimballed star trackers*)** Los *star trackers* montados sobre suspensión cardán, una vez la actitud del satélite se ha fijado, tienen la capacidad de escanear varias zonas del cielo. De esta manera puede usarse un gran número de estrellas para el seguimiento y procesamiento. Sin embargo, ciertos inconvenientes inherentes a los sistemas cardán disminuyen la precisión alcanzable en la determinación de actitud. Además el mecanismo de suspensión generalmente resulta un dispositivo de gran tamaño y peso.

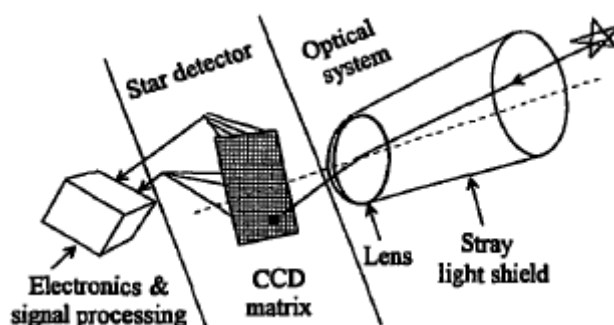


Figura 8.6: Sensor de estrellas CCD

El sensor más utilizado en la actualidad es el detector de carga acoplada (*charge coupled device* o CCD). El CCD es un circuito integrado basado en estado sólido, dispuesto como una matriz de elementos semiconductores fotosensibles llamados *pixels*. La localización de la imagen de la estrella en la matriz CCD se obtiene fácilmente leyendo la salida digital de las filas y columnas

de pixels en los que se ha captado la luz de la estrella. Con resoluciones típicas de 500x500 a 1024x1024 pixels (véase la tabla 8.2), es extendido el uso de la interpolación para mejorar la precisión en estos dispositivos. El sistema óptico desenfoca la proyección de la imagen estelar sobre la matriz CCD, de manera que se ilumine un mayor número de pixels. La medida de la intensidad eléctrica de salida de estos pixels permite determinar el centroide de la estrella con gran precisión, del orden de 1/20 de un pixel (Strikwerda et al. 1991). Con algoritmos de este tipo pueden obtenerse precisiones por debajo del segundo de arco.

Nombre Comercial	TERMA HE5AS	Clementine	A-STR	ASTRO 15	FSC-701
Peso [kg]	0.9	0.29	3	4.5	5.83
Potencia consumida [W]	7 (22-34V)	4.5	8.9-13.5 (20-50V)	-	16
Temperatura operativa [°C]	-40/+25	-	-30/+60	-30/+55	-20/+50
Interfaz de datos	RS422 & MIL-STD-1553	RS422 & MIL-STD-1553	RS422 & MIL-STD-1553	RS422 & MIL-STD-1553B	RS422 & MIL-STD-1553
FOV [°]	22 x 22	28.9 x 43.4	16.4 x 16.4	13.8 x 13.8	22 x 22
CCD [pixels]	1024 x 1024	576 x 384	512 x 512	1024 x 1024	1024 x 1024
Ángulo de exclusión solar [°]	30	-	-	-	30
Precisión, cabeceo y guiñada [arcsec]	<1	-	7	<1	8.7
Precisión, alabeo [arcsec]	<5	-	25	<10	89.2
Tasa del error [%/s]	0.5 precisión completa, 2 reducida	-	0.5 precisión completa, 2 reducida	<0.3 precisión completa, <2 reducida	8
Tasa de refresco [Hz]	4	5	10	-	hasta 30
Tiempo de adquisición [s]	3 - 5	-	<6	0.25 - 5	-
Misiones voladas	Cryosat, Aeolus, Nemo, DSX	Clementine	Rosetta, Mars Express, Venus Express, Cassini, Stereo, Herschel, Planck etc	Spaceway, MSV, WGS	Calipso

Tabla 8.2: Especificaciones de varios star trackers. Adaptado de www.spacealliance.ro

8.1.2. Sensores mecánicos: giróscopos

Los giróscopos mecánicos son dispositivos basados en una masa (rotor) que gira a gran velocidad soportada por un balancín. Fijado a los ejes cuerpo del vehículo, cuando éste experimenta una velocidad angular, el balancín que soporta el rotor gira en torno al eje de salida del giróscopo (eje 'O' en la figura 8.7). La medida del giro del balancín permite obtener la velocidad angular del vehículo espacial. El montaje de dos balancines permite la medida de dos componentes de la velocidad angular (giróscopo de dos grados de libertad). Una configuración de al menos tres giróscopos de 1 g.d.l o de dos giróscopos de 2 g.d.l. permite la medida del vector velocidad angular completo.

Para determinar la actitud es necesario integrar las tres componentes de la velocidad angular, a través de las ecuaciones cinemáticas. Al ser por tanto una medida acumulativa, los errores se su-

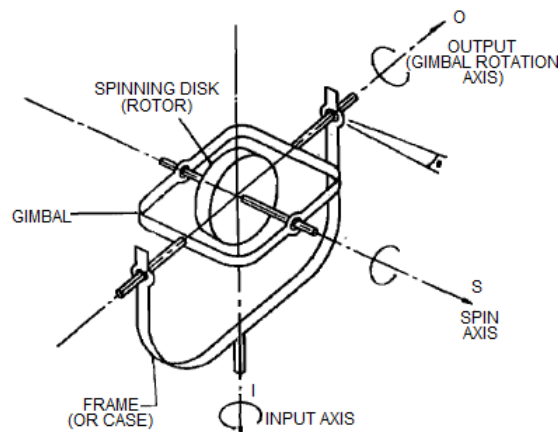


Figura 8.7: Giróscopo de un grado de libertad

man en el tiempo perdiendo precisión. No obstante son deseables por su gran ancho de banda. La utilización conjunta con sensores de actitud de menor ancho de banda pero mayor precisión (sensores de estrellas) permite una estimación de actitud de gran precisión y disponibilidad, mediante algoritmos de filtrado como el Filtro de Kalman.

Además de los mecánicos existe otro tipo de giróscopos: los giróscopos ópticos, como el *giróscopo de anillo láser* (RLG) y el *giróscopo de fibra óptica* (FOG).

El principio de operación del RLG se basa en el patrón de interferencia entre dos rayos láser viajando en sentido opuesto en un anillo láser. Un interferómetro interpreta la diferencia de fase entre los dos rayos, la cual es una medida indirecta del ángulo recorrido (efecto Sagnac).

Un dispositivo similar es el FOG. Basado también en el efecto Sagnac, en este caso el anillo no forma parte del láser. En cambio, un laser externo inyecta los rayos en un anillo de fibra óptica en sentidos opuestos, y la rotación del sistema provoca un cambio de fase relativo entre los rayos cuando interfieren después de haber recorrido el anillo, que es proporcional a la velocidad angular. Éste es por tanto menos sensible que los RLG, en los que la diferencia de fase observada es proporcional a la rotación acumulada, y no a su derivada. Para aumentar la sensibilidad del FOG se incrementa la longitud de fibra óptica, arrollada en una bobina para disminuir su tamaño.

Estos giróscopos son mucho más precisos que los mecánicos, en parte gracias a la nula sensibilidad a aceleraciones fuera del eje de medida. A diferencia de los mecánicos no oponen resistencia a las rotaciones y carecen de partes móviles, por lo que suponen una alternativa fiable a los giróscopos mecánicos.

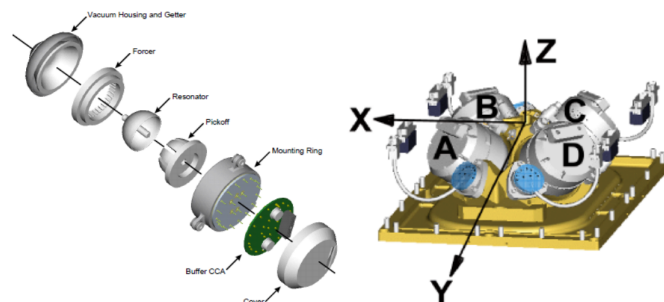


Figura 8.8: Vista explotada y configuración de 4 giróscopos HRG de la unidad inercial SSIRU, a bordo del telescopio espacial Herschel

Un tercer tipo de giróscopos son los *giróscopos de hemisferio resonante* o *HRGs*, no clasificables dentro de las dos categorías anteriores. Son los giróscopos más utilizados actualmente en sistemas de control preciso de actitud. El principio de operación de estos giróscopos es la propiedad de sensibilidad inercial de una onda estacionaria de resonancia en un cuerpo hemisférico. Cuando este cuerpo gira en torno a su eje de simetría, el patrón de vibración del anillo externo del hemisferio exhibe un movimiento de precesión medible con respecto a un sistema de referencia ligado a la superficie hemisférica. Este movimiento de precesión es proporcional al giro aplicado al sistema, por lo que proporcionan información del ángulo girado.

8.1.3. Sensores magnéticos: magnetómetros

Estos sensores miden el vector campo magnético en el sistema de referencia ejes cuerpo. Los magnetómetros inductivos, basados en la Ley de Faraday, son muy utilizados como sensores de actitud en vehículos espaciales por numerosas razones: proporcionan la dirección y magnitud del campo magnético; son fiables, ligeros, y tienen un bajo consumo energético; tienen un amplio rango de temperaturas de operación; y no tienen partes móviles. Sin embargo, los magnetómetros no son sensores de actitud precisos, puesto que el campo magnético terrestre no es conocido con precisión suficiente y los modelos utilizados para predecir la dirección y magnitud del campo magnético en la posición del vehículo está sujetos a errores relativamente grandes. Además, debido a que la intensidad del campo magnético disminuye con la distancia a la Tierra según $1/r^3$, los campos magnéticos residuales del vehículo suelen dominar la medida del campo magnético total, limitando así el uso de magnetómetros - salvo contadas excepciones - a vehículos espaciales por debajo de 1000 km de altitud. La interferencia magnética con otros dispositivos del vehículo hace a veces necesaria la utilización de mástiles de gran longitud para evitar interferencias magnéticas (figura 8.9).

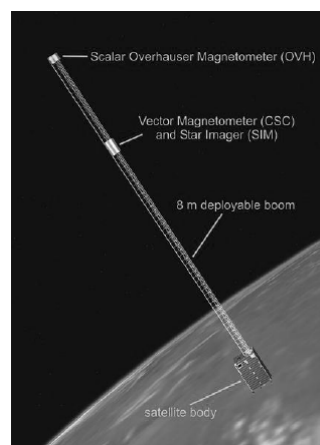


Figura 8.9: Mástil de 8 m aislando los magnetómetros del satélite Ørsted

Existen dos tipos de magnetómetros inductivos:

- **Search-coil** Consiste en una bobina arrollada en torno a un núcleo ferromagnético. Inmersa en un campo magnético variable en el tiempo, la FEM inducida proporciona información de fase precisa en satélites estabilizados por rotación. Puesto que este tipo de magnetómetro sólo perciben cambios en la componente del campo magnético del eje de la bobina, la precesión o nutación del vehículo complicarán enormemente la interpretación de la salida del magnetómetro.

- **Fluxgate o de núcleo saturado** Consta de dos bobinas (primaria y secundaria) arrolladas en oposición sobre dos núcleos magnéticamente saturables. La primaria es excitada con una corriente oscilante (pulsada o conmutada) que satura los núcleos alternativamente en un sentido y el opuesto. En ausencia de cualquier campo magnético externo, la saturación de los núcleos inducirá una FEM en fase con la excitación de la bobina primaria. Un campo magnético externo alterará la simetría, sumando y restando al campo magnético inducido por el circuito primario, de manera que la diferencia de fase proporciona la componente del vector campo magnético en el eje de los núcleos.

Además de los magnetómetros inductivos existe otro tipo, los magnetómetros cuánticos. Se sirven de propiedades atómicas fundamentales, como la resonancia magnética nuclear. Dispositivos pesados y de gran consumo energético, no son apropiados como sensores de actitud en la mayoría de los vehículos espaciales. Son utilizados en mediciones experimentales de a bordo del campo magnético terrestre.

8.2. Actuadores

Existen diferentes tipos de actuadores para controlar la actitud de un vehículo espacial, entre los que destacan:

- Propulsores: basados en la expulsión de masa a alta velocidad.
- Magnetopares o varillas magnéticas: utilizan el campo magnético para provocar un par de control.
- Dispositivos de intercambio de momento cinético: generan momentos de control transfiriendo momento cinético al vehículo espacial completo.
- Elementos estructurales para control pasivo: mástiles, “booms”, disipadores y sistemas yo-yo

Típicamente habrá dos o más tipos de actuadores en un vehículo, ya que sus características son complementarias.

En la tabla 8.3 se resumen algunas características de diversos actuadores.

8.2.1. Propulsores

Son el actuador más eficaz, capaz de ejercer actuaciones de elevada magnitud con rapidez, pero también el más costoso y de uso limitado, ya que utilizan combustible. Para ejercer un par, se utilizan en una configuración en pareja (por cada eje que se pretenda controlar). Nunca se utiliza un único par por eje, sino varias toberas de forma redundante. El conjunto de elementos de propulsión junto con la lógica de control se denomina Sistema de Control de Reacción (RCS).

Los sistemas de propulsión en vehículos espaciales se dividen, en función del propelente utilizado, en tres categorías:

- **Propulsión de gas frío** Es el sistema de propulsión más sencillo. Consta simplemente de un tanque de gas presurizado y una tobera controlable. Para conseguir empujes razonables es necesario almacenar el gas a muy alta presión, resultando en tanques muy pesados.

Actuador	Zona de aplicación	Momento característico	VE que lo utilizan
Propulsores	Sin límite	Para un propulsor de 0.3 N y un brazo de 2 m, momento = 0.6 N·m	STS, ISEE, OSO, ATS, CTS
Magnetopares	Bajo GEO (<35000 km alt.)	Para electroimán típico de 200 A·m, momentos típicos de: 10^{-3} N·m @ 400 km de altitud, 10^{-6} N·m @ GEO	AEROS, OSO, SAS-3, AE
Ruedas de reacción	Sin límite	De 0.025 a 2 N·m	Hubble, Herschel, QuickBird
Volantes de inercia	Sin límite	Momento cinético típico de 10 kg·m ² /s. Momento típico de 0.1 N·m	ATS-6, SAS-3, AE, OAO, GEOS
CMG	Sin límite	Hasta 200 N·m	ISS, LES-7, Skylab

Tabla 8.3: Características típicas de algunos tipos de actuadores

- Propulsión química** Los propulsores químicos utilizados en control de actitud están basados en propulsante líquido. También conocidos en la literatura como *jets*, aceleran en una tobera el producto de la reacción química entre combustible y oxidante líquidos (sistemas bipropelentes, figura 8.10), o de un propelente y un catalizador apropiado (sistemas monopropelentes).
- Propulsión eléctrica** Desarrollan gran impulso específico eyectando una masa ionizada acelerada en un campo electromagnético o electrostático. Proporcionan niveles de empuje muy reducidos, y son tecnológicamente muy complejos. Su uso está justificado por su bajo uso de combustible en relación al impulso total desarrollado, pero son caros y pesados.

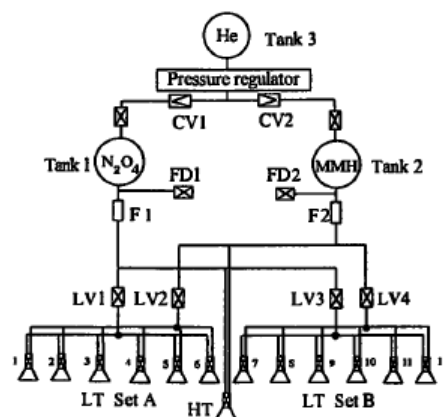


Figura 8.10: Representación esquemática de un sistema de propulsión bipropelente

La selección de propulsores depende de la tarea específica que habrá de llevar a cabo el sistema de propulsión. Un sistema de propulsión completo suele incluir varios propulsores de distintos niveles de empuje. Además del empuje desarrollado, es necesario considerar otras características adicionales para definir completamente un propulsor. Por ejemplo, si el propulsor se utiliza como actuador en control preciso de actitud, el comportamiento en el tiempo del empuje desarrollado es una característica crítica.

En la figura 8.11 se aprecia el comportamiento en el dominio del tiempo de un pulso de empuje. La orden de encendido aplica una corriente eléctrica en la bobina de la válvula de entrada de propergol, pero el empuje se desarrolla tras un retardo inicial inherente al sistema. Este *tiempo de*

encendido T_s se define como el tiempo transcurrido desde la orden eléctrica hasta que se alcanza el 90 % del empuje máximo; $T_s \approx 15$ ms para un propulsor bipropelente de 10 N.

El *tiempo de apagado* (T_{sd}) es el tiempo transcurrido desde que termina la orden 'on' hasta que el empuje es nulo; $T_{sd} \approx 10$ ms para un propulsor bipropelente de 10 N. Si el comando 'on' es demasiado corto entonces el empuje no podrá alcanzar su valor nominal E . En este contexto se puede definir un *tiempo mínimo* de comando de encendido, T_{min} . Otra característica importante de un propulsor es el retardo entre el instante en el que se da el *centroide* del empuje obtenido y el comando 'on' (T_{cd} en la figura).

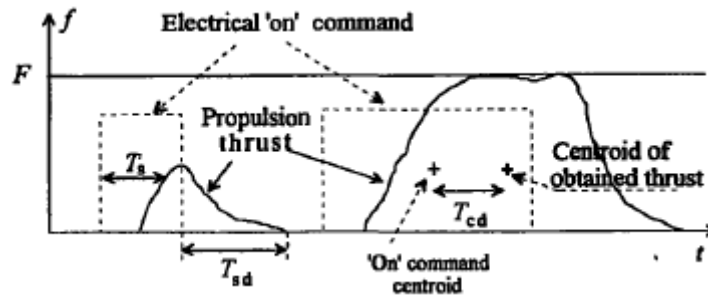


Figura 8.11: Respuesta en el tiempo de un pulso de empuje

En sistemas de control preciso de actitud, quizá la característica más importante sea el *bit de impulso mínimo* (o MIB, del inglés *minimum impulse bit*)- una medida del cambio mínimo de actitud que puede ordenarse al satélite. Niveles menores de empuje permiten MIBs más pequeños. Para un propulsor bipropelente de 10 N son comunes MIBs de 30-40 mN·s; en un propulsor monopropelente catalítico de hidracina de 0.2 N, es posible alcanzar un MIB de tan sólo 5 mN·s.

Es también importante destacar que el impulso específico depende del bit de impulso. Cuanto más pequeño sea el bit de impulso, menor será el I_{sp} - una relación que hace más pronunciada cuando el empuje no alcanza el valor nominal. Este fenómeno incide directamente sobre la masa de combustible consumida en el control de actitud, la cual es a su vez de capital importancia para la vida útil del satélite.

Una característica muy importante de los propulsores es el número máximo de activaciones que puede soportar. Los satélites actuales tienen una vida esperada mayor de una década, así el número de activaciones de los propulsores es muy grande (del orden de cientos de miles). En el mercado pueden encontrarse propulsores que soportan del orden de un millón de activaciones. La tabla 8.4 enumera especificaciones técnicas de dos motores monopropelentes.

8.2.2. Magnetopares

Son elementos que aprovechan la fuerza de Lorentz. Esta fuerza es causada por una partícula cargada en movimiento en un campo magnético, que será el de la Tierra (u otro planeta). Pueden ser permanentes (un imán permanente), que normalmente se usan para maniobras de adquisición de actitud (orientando el vehículo como si de una brújula se tratase). También pueden ser variables y usarse para control y estabilización.

Típicamente se usan en microsátélites, y también en satélites más grandes para descargar el exceso de momento cinético de las ruedas de reacción. En general, los magnetopares o varillas magnéticas son útiles porque sustituyen en muchas aplicaciones al combustible, reduciendo así el peso. Por otro lado, indudablemente suponen una masa seca, y es necesario analizar su viabilidad desde el punto de vista general de la misión.

Datos Técnicos	Unidades	CHT 0.5	CHT 20
Rango de empuje	N	0.75 - 0.2	24.0 - 7.2
Rango de presión operativa	bar	22 - 5.5	22 - 5
Impulso específico	Ns/kg	2230 - 2120	2300 - 2180
MIB	Ns	0.015 - 0.005	0.37 - 0.165
Presión de prueba	bar	33/54	33/54
Presión de encendido	bar	88/144	88/144
Masa	kg	0.19	0.36
Potencia de la válvula	W	5.0	13.0
Potencia del calentador	W	2.5	<3.0
Año de Cualificación		1977	1958
Duración total	h	143	4
Duración en una activación	h	25200	3600
Número de pulsos en caliente		59000	235000
Número de pulsos sin modulación		88000	-
Número de pulsos en frío		311000 a <210°C	10000

Tabla 8.4: Características de los propulsores catalíticos monopropelentes de hidracina CHT 0.5 y 20



Figura 8.12: Magnetopar de un CubeSat

Los magnetopares variables consisten en una bobina y un núcleo (figura 8.12). Cuando la bobina es alimentada eléctricamente, el magnetopar genera un momento magnético. Un gran inconveniente de los magnetopares es el hecho de que el momento generado es inversamente proporcional al cubo de la altitud. Esto resulta en momentos magnéticos pequeños (en GEO, del orden de 10^{-5} N·m). El momento también depende de la dirección relativa entre el eje del dispositivo y el campo magnético terrestre, disminuyendo aún más la eficacia del dispositivo.

Los magnetopares pueden ser activados mediante leyes de control “bang-bang” o proporcionales. La curva de actuación de un magnetopar típico se muestra en la figura 8.13. La magnitud del momento dipolar es típicamente proporcional a la corriente de entrada en el rango lineal especificado. El nivel de saturación se define como el punto a partir de cual la magnitud del momento dipolar obtenido se desvía en un $\pm 30\%$ de la esperada extrapolando la región lineal.

8.2.3. Dispositivos de intercambio de momento cinético

Los dispositivos de intercambio de momento cinético son controladores que permiten cambiar la distribución de momento cinético dentro del vehículo espacial, sin cambiar el momento cinético total del sistema, incluyendo el dispositivo en sí. Por tanto, no implican ningún tipo de consumo de combustible.

La variación del vector momento cinético del dispositivo se consigue de dos maneras:

- Ruedas de reacción y volantes de inercia: cambiando el *módulo* del vector. El controlador

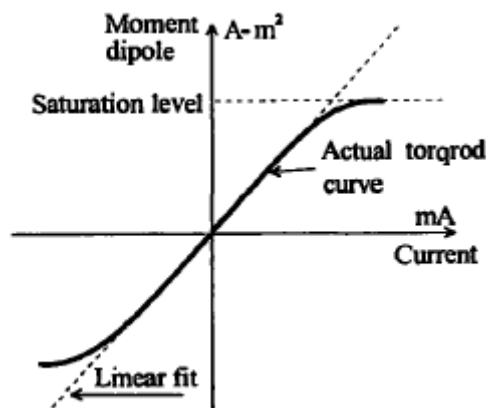


Figura 8.13: Curva típica de funcionamiento de un magnetopar

consiste en un motor eléctrico en cuyo eje se monta un disco de elevada inercia. La señal de control opera la velocidad angular del disco. Tienen una geometría similar, diferenciándose en su modo de operación y en su dimensión.

- CMGs: cambiando la *dirección* del vector. El controlador consiste en un motor eléctrico en cuyo eje se monta un disco de elevada inercia, suspendido a su vez en un balancín. La señal de control opera el ángulo del balancín.

Las **ruedas de reacción** se utilizan principalmente para aplicar momentos sobre el satélite con el objetivo de realizar maniobras. Es importante que las ruedas de reacción puedan dar suficiente momento como para conseguir maniobras de actitud rápidas. También se pueden usar las ruedas para “almacenar” el momento cinético causado por pares perturbadores. No obstante las ruedas tienen un límite de saturación a partir del cual el motor no puede aumentar el momento cinético. Por tanto, se debe “descargar” el momento cinético con otro elemento capaz de disminuirlo, por ejemplo propulsores o actuadores magnéticos. Las ruedas de reacción pueden aplicar un momento que va, típicamente, de 0.01 a 1 N·m.

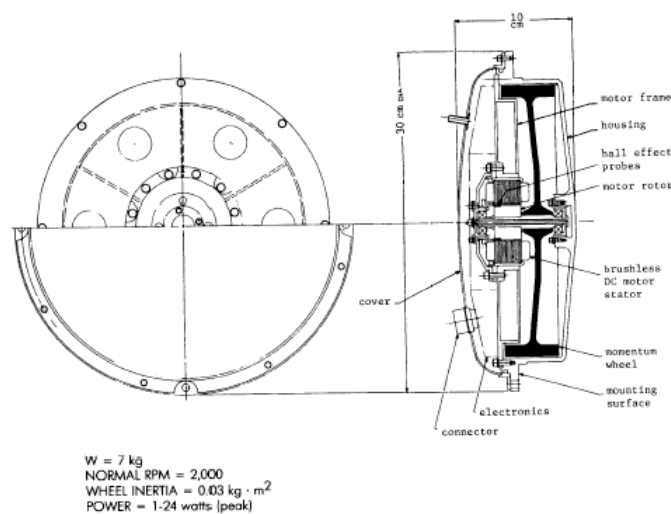


Figura 8.14: Volante de inercia

Los **volantes de inercia** se utilizan fundamentalmente para dar al vehículo espacial un mo-

mento cinético base necesario para estabilización inercial de actitud. Adicionalmente, el volante de inercia puede aplicar momentos para controlar la actitud del vehículo en el eje del volante. Pueden dar un momento cinético que va de 1 a 300 N·m·s.

Una variación interesante del volante de inercia es el *volante de inercia en suspensión cardán*, o *double gimballed momentum wheel* (DGMW) - un volante de inercia de velocidad variable montado en una suspensión de doble balancín. Permite controlar el momento cinético del conjunto variando su módulo (actuando la velocidad angular de la rueda) y/o de su dirección (actuando el ángulo de los balancines).

Gracias a su alta capacidad de generar momentos de control, con un momento de control típico de hasta 0.2 N·m en torno al eje de la rueda y de 1 N·m en torno al cada eje de los balancines, permite el control en tres ejes con precisiones de hasta 18 segundos de arco en régimen estacionario (según el trabajo de Auer [1]). Por redundancia se suelen montar dos ruedas de reacción en el eje de giro y dos motores por balancín. En relación a su potencia de control, minimiza el volumen y peso en comparación con los actuadores clásicos basados en tres ruedas de reacción para control y volantes de inercia para estabilización.

El *giróscopo de control de momento o CMG* (del inglés, *Control Moment Gyro*) es un giróscopo cuyo propósito es generar un momento de control. El momento cinético de un CMG es generado por el rotor, que gira a velocidad constante en torno al eje de giro. De manera recíproca a los sensores giroscópicos, si se provoca una rotación del balancín que soporta el eje de giro del rotor se consigue una variación (de la dirección) del vector momento cinético, creando así un momento de control paralelo al eje de salida.

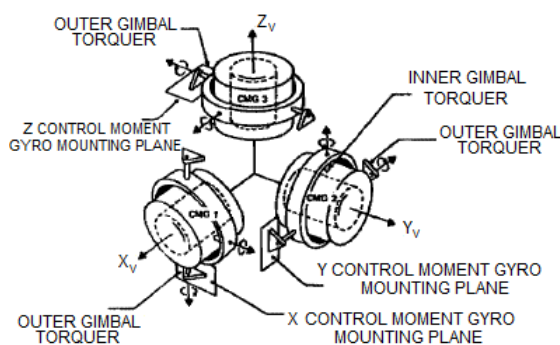


Figura 8.15: Configuración de tres CMGs de dos grados de libertad en el Skylab

La magnitud del momento generado depende de la velocidad de giro del rotor y de la velocidad de rotación del balancín. Puesto que la carrera del balancín suele estar limitada por topes y las velocidades de giro de los balancines no deben exceder ciertos límites, suele ser necesario repartir el momento de control en varios CMGs. Utilizados en vehículos espaciales de gran tamaño, su principal característica es la capacidad de producir grandes pares de control en cortos espacios de tiempo.

Ocasionalmente se pueden dar configuraciones de momento no deseadas, de manera que se hace necesario un sistema auxiliar de control de descarga de momento cinético.

Los rodamientos del rotor de los dispositivos de intercambio de momento cinético merecen mención especial: se distingue entre rodamientos mecánicos y magnéticos. Los dispositivos de intercambio de momento cinético se diseñan para trabajar sin interrupción durante grandes periodos (5-12 años). La baja presión del entorno espacial supone un gran problema para la lubricación de los rodamientos de bolas que todavía no ha sido completamente resuelto. Actualmente se están

desarrollando rodamientos magnéticos con buenas perspectivas de futuro. Este tipo de rodamientos mejora el cociente momento-ruido eliminando los momentos parásitos característicos de los rodamientos de bolas (Bosgra and Smile 1983, Bichler 1991).

8.2.4. Elementos estructurales de control

No son actuadores en el sentido más estricto de la palabra, pero juegan un papel importante en el control (pasivo) de la actitud. Consisten en partes móviles que actúan de diversas formas:

- Incorporando disipación: disipadores de nutación.
- Modificando los momentos de inercia del vehículo (y por tanto afectando la estabilidad): mástiles, “booms”.
- Expulsando masa para modificar el momento cinético total: dispositivo yo-yo.
- Velas solares

Los vehículos espaciales exhiben movimientos periódicos si son perturbados en una posición de equilibrio. En los vehículos espaciales estabilizados por rotación, este movimiento periódico se conoce como *nutación*, mientras que en los vehículos estabilizados por gradiente gravitatorio, el movimiento es oscilatorio y se conoce por *libración*.

Los movimientos de nutación y libración son el resultado de momentos de control o de perturbación, separación del vehículo alizador o movimientos de subsistemas del vehículo como la apertura de plataformas de experimentación o el despliegue de paneles solares y mástiles. Normalmente se trata de eliminar o amortiguar estos movimientos puesto que afectan las actuaciones de sensores, instrumentación, antenas, etc. Sin embargo, Weiss et al. [1974] han mostrado cómo la nutación puede ser beneficiosa para escanear la Tierra. En estos casos el movimiento de escaneo deseado puede aplicarse sin consumir energía, excitando modos de movimiento de nutación controlados.

Disipadores de nutación

Es conocido que un vehículo espacial puede ser estabilizado por rotación en torno a su *eje menor* o a su *eje mayor*. La nutación aparece en el caso de que el vehículo no gire en torno a un eje principal. Por tanto, el problema de la *amortiguación de la nutación* es el de alinear el eje nominal de giro con el vector momento cinético disipando el exceso de energía cinética asociada al movimiento de nutación. En un sólido rígido, esto es posible sólo si el eje de giro es el *eje mayor*, es decir, el eje principal de mayor momento de inercia. La tabla 8.5 resume las características de varios tipos de amortiguadores pasivos.

Los vehículos espaciales reales siempre tienen algún tipo de amortiguamiento. Éste puede ser inherente al sistema (amortiguamiento estructural), debido a componentes del vehículo (movimiento de fluidos, tubos termosifón bifásicos), o debido a los amortiguadores de nutación. Lord Kelvin [Chatayev, 1961] mostró que un cuerpo estabilizado giroscópicamente puede perder su estabilidad en presencia de disipación de energía. Bracewell y Garriot [1958] mostraron que un vehículo espacial ligeramente flexible sin rotores ni motores sólo puede ser estabilizado en torno a su eje mayor.

Amortiguador de corrientes Eddy

Amortiguador	Mecanismo de disipación de energía	Características
Péndulo Corrientes Eddy	Fricción viscosa Corrientes Eddy	Robusto, Larga vida útil Delicado, gran tasa de disipación de energía, constante de amortiguamiento variable
Ball-In-Tube	Fricción viscosa y de rodadura	Robusto, Larga vida útil, Apto para varias velocidades de giro, no puede usarse en la parte estática de un vehículo estabilizado por rotación doble
Anillo viscoso	Fricción viscosa	Construcción simple, larga vida útil

Tabla 8.5: Amortiguadores de nutación

En estos amortiguadores, la energía de disipación necesaria se extrae del movimiento de una placa conductora relativo a un imán. Permiten variar el coeficiente de amortiguamiento cambiando la fuerza del electroimán. La tasa de disipación de energía por unidad de peso es mucho mayor que en los amortiguadores fluidos.

Amortiguador Ball-in-Tube

Este tipo de amortiguador, mostrado en la figura 8.16, consiste en un tubo estanco en el cual permite el movimiento libre de una bola. El amortiguamiento se da por fricción de la bola con el tubo y con un fluido que dificulta su movimiento. El amortiguador se comporta como un péndulo centrífugo cuya frecuencia de vibración es directamente proporcional a la velocidad de giro del cuerpo en el que se monta. Por tanto, si el amortiguador se sintoniza inicialmente, permanece sintonizado para distintas velocidades de rotación. Estos amortiguadores se colocan en la parte giratoria de un vehículo estabilizado por rotación doble y en los vehículos espaciales estabilizados por rotación (de un sólo cuerpo).

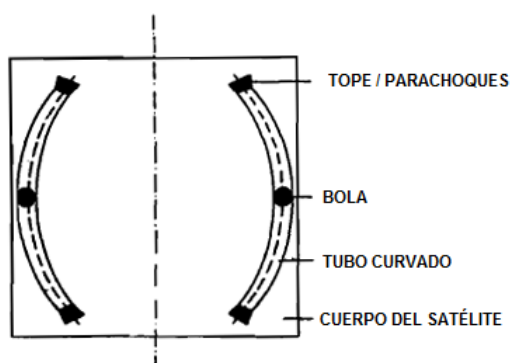


Figura 8.16: Amortiguador de Nutación Ball-In-Tube

Amortiguador de anillo viscoso

Los amortiguadores de anillo viscoso disipan energía moviendo un fluido dentro de un anillo. Aunque el estudio de estos anillos comenzó en 1960 [Carrier y Miles, 1960], el interés en estos dispositivos ha aumentado por la disipación de energía que se da en los tubos termosifón bifásicos. Estos tubos termosifón bifásicos (más conocidos por su término en inglés, *heat pipes*) son unos dispositivos de control térmico, y están compuestos generalmente por un tubo de aluminio lleno de un fluido. Se utilizan para mantener condiciones casi-isotermas durante la fase no giratoria de

una misión espacial. Durante la fase giratoria, los *heat pipes* funcionan como amortiguadores de anillo viscoso. El ATS-5, lanzado en agosto de 1969, giraba inicialmente en torno a su eje menor y se debía girar en torno a su eje mayor una vez que el motor de empuje hubiera entrado en ignición en el apogeo y la vaina hubiera sido expulsada. Sin embargo, la inesperadamente alta disipación de energía de los *heat pipes* hizo que el vehículo entrara en barrena plana antes de que la vaina fuera expulsada. Una vez ésta fue expulsada, el vehículo espacial comenzó a girar en torno al deseado eje mayor, aunque el sentido de giro era el opuesto al esperado.

En la figura 8.17 se muestra un modelo sencillo de un amortiguador de anillo viscoso montado en un plano paralelo al eje de giro de un vehículo estabilizado por rotación doble.

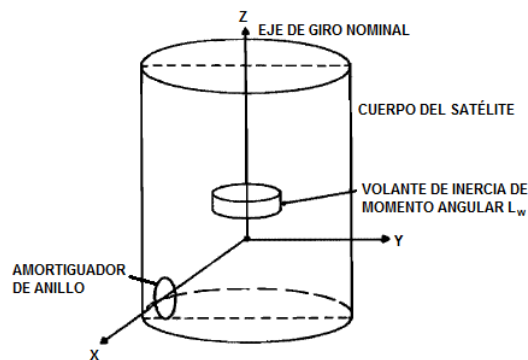


Figura 8.17: Amortiguador de nutación de anillo viscoso en un plano paralelo al eje de giro

Expulsión de masa

Se emplean para detener rápidamente una rotación, por ejemplo tras la separación del satélite de la última etapa del vehículo lanzador. También se utilizan para descargar momento cinético del sistema de control cuando las ruedas de reacción entran en saturación. Ejemplo: sistemas yo-yo. Se expulsan dos masas unidas a la estructura mediante cables arrollados al cuerpo del satélite; al acelerarse “concentran” el momento cinético, frenando la rotación. Cuando los cables se tensan, las masas se liberan.



Figura 8.18: Sistema yo-yo de frenado del giro de la tercera etapa del Mars Exploration Rover

Disipadores de libración (GG)

Como se revisó en la sección 2.1.3, el gradiente gravitatorio estabiliza el vehículo espacial entorno a la situación de equilibrio, aunque suelen darse movimientos angulares de cierta amplitud en cabeceo y alabeo. Puesto que los sistemas de estabilización pasiva son comparativamente baratos, suelen utilizarse aún cuando los tiempos característicos de estabilización pueden ser muy grandes.

- **Sistema masa-muelle-amortiguador** Integrado en el satélite, la energía disipada en el amortiguador viscoso ayuda a disipar el movimiento oscilatorio del satélite.
- **Mástil amortiguador** El mástil utilizado para aumentar los momentos de inercia para alcanzar la estabilidad deseada por GG se puede montar sobre un gran muelle externo. En el extremo del mismo se coloca un amortiguador que aumenta la disipación de energía del satélite.
- **Amortiguador por histéresis magnética** Si una barra de material permeable magnéticamente se coloca dentro del satélite, el movimiento angular del satélite con respecto al campo magnético terrestre inducirá pérdidas por histéresis magnética. Efectivo sólo en órbitas bajas.
- **Mástil articulado** Ampliamente utilizado, se basa en articular el mástil en la unión con el satélite. El mecanismo suele estar articulado en dos grados de libertad, de manera que proporciona disipación en cabeceo y alabeo. El eje de guiñada es mucho más difícil de amortiguar.
- **Rueda amortiguadora** Consiste en una rueda libre inmersa en un fluido viscoso. Permite amortiguar el movimiento angular del satélite en torno al eje de giro de la rueda.

Velas solares

Mención especial merece el control (activo) de actitud experimental de la sonda IKAROS, esquematizado en la figura 8.19. Fue lanzada en Junio de 2010 por la agencia espacial japonesa JAXA en dirección a Venus. Estabilizada por rotación propia, ha desplegado una vela solar cuadrada de 14 m de lado que permite la navegación interplanetaria.

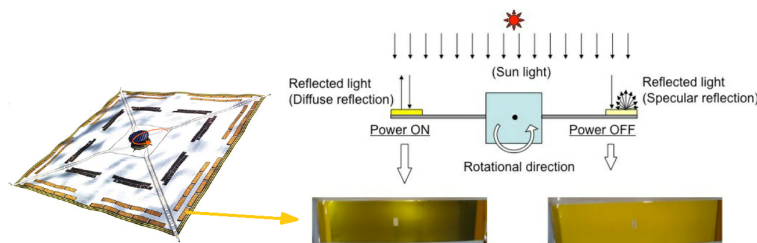


Figura 8.19: Sistema de control de actitud de IKAROS

La vela (de tan solo $7.5\mu\text{m}$ de espesor) incluye elementos de cristal líquido a lo largo de sus extremos distales, que permiten modificar su reflectividad según comandos ON/OFF. Cambiando la reflectividad en sincronía con la rotación del vehículo consigue una fuerza total de presión solar asimétrica, generando un momento de control que a la larga modifica el eje de rotación del vehículo espacial.

Capítulo 9

Conclusiones y trabajo futuro

De la realización de este proyecto se pueden extraer varias conclusiones:

La implementación de un controlador lineal sobre un sistema de naturaleza marcadamente no lineal da buenos resultados. El sistema de control exhibe gran estabilidad y robustez en el seguimiento de la trayectoria de referencia y la compensación de la perturbación considerada, el gradiente gravitatorio. La violación de la hipótesis de pequeños errores, sobre la que se fundamenta el algoritmo de control, no produce la inestabilidad del método de control, tal y como se ha constatado mediante simulaciones numéricas.

La sintonización del sistema de control permite cumplir teóricamente cualquier requerimiento de actuaciones. En este proyecto se muestran los comportamientos extremos del sistema ante variaciones de las matrices de sintonización R , Q y $S(T)$. Este conjunto de respuestas analizadas establece una base cualitativa y cuantitativa que permite comprender la influencia de dichos parámetros sobre las actuaciones del sistema, y facilita así el diseño heurístico del controlador óptimo que haya de cumplir unos requerimientos de actuaciones determinados.

El controlador selecciona los momentos de control necesarios para cumplir los objetivos dictados por las matrices de pesos. Estos momentos de control permiten dimensionar los actuadores, de forma que sean capaces de entregar la potencia y par de control necesarios. Sin embargo, se observa que si las ruedas de reacción no son físicamente capaces de entregar la señal de control requerida por el sistema ADCS, éste sigue siendo capaz de controlar el vehículo espacial, so pena de una disminución de las actuaciones. Es decir, de nuevo se pone de manifiesto la robustez del LQR horizonte infinito.

La implementación en tiempo real del sistema de control ha de contemplar la necesidad de un buffer de almacenamiento de la ganancia de control. El cálculo repetido y fuera de línea de esta ganancia permite particularizar las características del LQR horizonte finito en función de las necesidades de cada perfil de actitud. La sintonización por tramos del sistema de control maximiza el rendimiento global del sistema de control: asegura la precisión de apuntamiento durante la observación de objetivos terrestres y minimiza el consumo energético en fases de la misión donde la precisión no es capital.

Necesidad e importancia de la generación de una buena trayectoria de referencia. La referencia de actitud tiene un gran impacto sobre las actuaciones del sistema de control. El algoritmo de cálculo del vector de estados de referencia de este proyecto se ha basado en dos restricciones vectoriales:

- el eje óptico del satélite ha de coincidir con la dirección satélite-estación durante los perfiles de observación de objetivo terrestre.

- el eje de rotación de los paneles solares ha de ser perpendicular al vector solar si no se tiene acceso a la estación objetivo, de manera que la iluminación de los paneles solares sea máxima.

Cabe notar que durante cada perfil de actitud existen infinitas actitudes que cumplen la restricción aplicable. Además, existen infinitas maniobras de actitud que permiten la transición entre ambos perfiles de actitud. Un análisis energético de las posibles trayectorias que cumplan ambas restricciones puede minimizar los esfuerzos de control necesarios para cumplir con los mismos requisitos de la misión.

Eficacia del MEKF. Se han analizado mediante simulaciones las actuaciones del observador elegido, el filtro de Kalman extendido multiplicativo. Se concluye que las características relativas de ruido de los giróscopos influyen en la eficacia del estimador, e incluso pueden provocar la inestabilidad del método. Se ha probado con resultados satisfactorios una técnica de estabilización del MEKF, basada en la simetrización forzada de la matriz de covarianza del error de estimación.

Finalmente se ha probado la viabilidad del sistema ADCS completo mediante simulaciones numéricas del problema de tracking con información imperfecta, con resultados satisfactorios. La eficacia del estimador supone un cuello de botella para las actuaciones últimas del sistema ADCS: aunque el controlador se sintonice para precisión y los actuadores tengan gran autoridad, el sistema ADCS podrá a lo sumo igualar la precisión de apuntamiento a la precisión de estimación. Del mismo modo, una sintonización poco exigente del controlador impedirá un error de apuntamiento pequeño, aunque el conjunto de sensores permita un error de estimación muy pequeño. Se observa en la respuesta del sistema una componente de ruido de alta frecuencia que puede tener un gran impacto sobre las capacidades de seguimiento del vehículo espacial.

Se proponen a continuación varias modificaciones/extensiones de este proyecto fin de carrera que pueden resultar interesantes como trabajo futuro.

En cuanto al sistema,

- **Flexibilidades** En este proyecto se ha considerado el vehículo espacial como un sólido rígido. Sin embargo los satélites reales suelen incorporar elementos estructurales cuya dinámica ha de ser modelada en la dinámica del sistema, como paneles solares, mástiles, etc.
- **Perturbaciones seculares** En este proyecto se desprecia el efecto de las perturbaciones seculares poco importantes en la órbita empleada, y se supone constante el momento cinético total del vehículo. Se propone la reformulación de las ecuaciones dinámicas de forma que reflejen el cambio del momento cinético total del sistema, causado por perturbaciones seculares persistentes en el tiempo. De esta manera se puede modelar la estrategia de descarga de momento cinético de las ruedas de reacción mediante RCS o magnetopares.
- **Cuatro ruedas de reacción en configuración piramidal** Los sistemas ADCS reales basados en ruedas de reacción suelen incorporar una rueda más por redundancia, incrementando la fiabilidad del sistema. Las cuatro ruedas de reacción se disponen en una configuración piramidal, de forma que el fallo de sólo una de ellas siga permitiendo la operación triaxial del sistema.

- **Volante de inercia en doble suspensión cardán** Como se mencionó en la sección 8.2.3, estos actuadores permiten el intercambio de momento cinético cambiando en dos ejes el eje de giro de un volante de inercia, consiguiendo grandes momentos de control. Además, mediante la variación de la velocidad de giro del volante se puede conseguir gran precisión en el control.
- **Volante de inercia/energía** Se trata de un sistema integrado de control de actitud y de energía, en el que las ruedas de reacción sirven como actuadores de actitud y reservorios de energía cinética, eliminando la necesidad de baterías químicas en los vehículos espaciales. Puede resultar de ayuda el trabajo de Tsiotras et al. [20].

En cuanto a la referencia del vector de estados,

- **Trayectoria óptima** Existen infinitas trayectorias de referencia que cumplen las restricciones vectoriales impuestas, se propone el análisis energético de las mismas, de forma que el coste energético de la misión sea el menor posible.
- **Maniobra de transición de actitud** Se propone el cálculo de la referencia de actitud para una maniobra de transición que se realice con eje de Euler variable, de forma que haya compatibilidad total en las velocidades angulares en la concatenación de todos los perfiles de actitud de la misión.

En cuanto al observador,

- **Estimación completa del vector de estados** El filtro de Kalman considerado sólo estima las variables de estado q y $\vec{\omega}$. Se puede implementar la estimación del momento cinético de las ruedas de reacción incluyendo datos de sensores tacométricos de tipo magnético u óptico.
- **Reducción mecánica de jitter** En la sección 6.3 se presentan dos métodos mecánicos de reducción del ruido de alta frecuencia resultado del proceso de estimación/control. Se propone el modelado y simulación de estas soluciones mecánicas pasivas.

Apéndice A

Sistemas de Referencia

En este anexo se exponen los sistemas de referencia utilizados en este proyecto.

A.A. J2000

Sistema de referencia inercial. Centrado en el vehículo, está formado por los ejes

- X, dirección del primer punto de Aries
- Z, normal al plano de la eclíptica
- Y, completa el triedro

Considera el ecuador medio y equinoccio medio en la época J2000, dada el 1 de Enero de 2000 a las 12:00:00.000, en la escala de tiempos TDB. Los ejes J2000 se consideraban los mejores ejes inerciales hasta el desarrollo del sistema ICRF.

El sistema de referencia J2000 se construye aplicando el algoritmo transformacional (también conocido como teoría FK5 IAU76) entre ICRF y el sistema de ejes ligado a la Tierra. El algoritmo utiliza la Teoría de Precesión de la Unión Astronómica Internacional (IAU) de 1976, el modelo de Nutación de 1980 y el Tiempo Sidéreo Medio de Greenwich Aparente (expresado en función del tiempo en UT-1), actualizado por el IERS (International Earth Rotation Service) en la nota técnica IERS Technical Note No. 21 para incluir ajustes en los equinoccios.

A.B. ICRF

El Sistema Internacional de Coordenadas Celestes se define como un sistema de ejes inerciales asociado a un sistema de referencia relativista centrado en el baricentro del sistema Solar (a veces denominado BCRF - *Barycentric Celestial Reference Frame*). La IAU es la autoridad que define el ICRF. Este sistema de referencia se considera la mejor realización de un sistema inercial construido hasta la fecha, y representa una mejora respecto

a la teoría del sistema de ejes J2000. Si bien ambos sistemas son muy similares, no son idénticos; además, el sistema J2000 gira (aunque muy lentamente) con respecto al sistema ICRF.

Los catálogos estelares más recientes y las efemérides de los cuerpos celestes se expresan frecuentemente en este sistema de ejes. Se construye a través de su algoritmo de transformación desde el sistema de Ejes Tierra. El algoritmo actual utiliza el modelo de precesión P03, el modelo de nutación IAU2000A y el ángulo de rotación terrestre (expresado como función lineal del tiempo en UT1). Los modelos P03 y IAU2000A están documentados en la nota técnica número 32 de la convención del IERS de 2003 [7].

A.C. TrueOfDate

Es un sistema de referencia inercial, similar a J2000, pero con el ecuador y equinoccio verdaderos evaluados en el instante de medida a partir del sistema ICRF.

A.D. VVLH - Velocidad Vehículo Horizontal Local

Es el sistema de referencia ligado a la órbita utilizado.

Centrado en el vehículo, está formado por los ejes

- Z, opuesto al vector de posición del vehículo (dirección nadir): $\vec{Z}_{VVLH} = -\vec{r}_{sat}$
- X, paralelo al vector velocidad (tangente a la órbita)
- Y, opuesto a la normal orbital. Completa el triedro

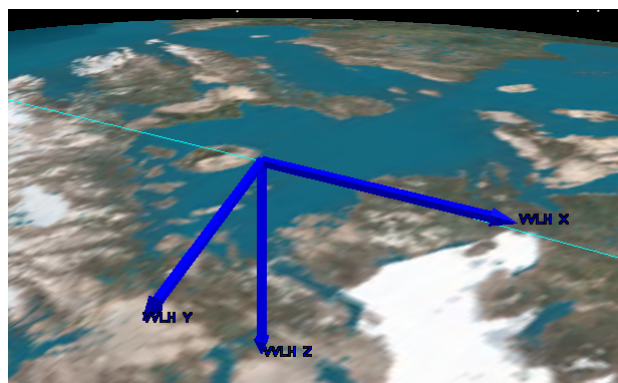


Figura A.1: Sistema de referencia VVLH

Se construye como rotaciones sucesivas según los elementos orbitales de la órbita de trabajo:

- Transformación de la ascensión recta del nodo ascendente Ω : rotación en torno a Z un ángulo Ω

$$q_{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sin(\Omega/2) & \cos(\Omega/2) \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.1})$$

- Transformación de la inclinación i : rotación en torno a X un ángulo i

$$q_i = [\operatorname{sen}(i/2) \quad 0 \quad 0 \quad \operatorname{cos}(i/2)]^T \quad (\text{A.2})$$

- Transformación del argumento de la latitud u : rotación en torno a Z un ángulo u

$$q_u = [0 \quad 0 \quad \operatorname{sen}(u/2) \quad \operatorname{cos}(u/2)]^T \quad (\text{A.3})$$

Si bien las rotaciones sucesivas aplicadas según los elementos orbitales Ω , i y u generan un sistema de referencia fijo con respecto a VVLH, no produce el propio sistema VVLH, sino unos ejes intermedios '3'. Es necesario aplicar dos rotaciones fijas para llegar a la designación exacta de los ejes VVLH,

- Rotación en torno a Z un ángulo $\pi/2$

$$q_{31} = \frac{\sqrt{2}}{2} [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1]^T \quad (\text{A.4})$$

- Rotación en torno a X un ángulo $-\pi/2$

$$q_{03} = \frac{\sqrt{2}}{2} [-1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T \quad (\text{A.5})$$

Así, los ejes VVLH (ejes '0') se expresan, en ejes inerciales J2000 (ejes '1'), como

$$q_{01} = q_{\Omega} \otimes q_i \otimes q_u \otimes q_{31} \otimes q_{03} \quad (\text{A.6})$$

Por tanto, si un cuaternión q está expresado en ejes inerciales J2000, la transformación a ejes orbitales VVLH se realiza según

$$q_{20} = q_{01}^* \otimes q_{21} \quad (\text{A.7})$$

Apéndice B

Cálculo orbital

Los requisitos de la misión expuestos en la sección 1.1 dictaminan que la disposición de la órbita depende fundamentalmente del rango de altitudes deseado y del paso sobre Sevilla en unas condiciones determinadas. En este apéndice se calculan los elementos keplerianos de la órbita que satisface todas las condiciones.

Radio orbital: elemento orbital a

Puesto que el satélite ha de sobrevolar la ciudad de Sevilla todos los días, despreciando perturbaciones el periodo terrestre ha de ser proporcional al periodo orbital del satélite

$$T_{\oplus} = nT_{sat}, \quad \text{entonces} \quad n = \frac{T_{\oplus}}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{a^3}} = \frac{T_{\oplus}}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{(R_{\oplus} + h_{sat})^3}}, \quad (\text{B.1})$$

donde n es un número entero.

Si la altitud ha de estar comprendida entre 600 y 1200 km,

- para $h_{sat} = 600$ km, $n = 14,85$
- para $h_{sat} = 1200$ km, $n = 13,12$

por tanto el único valor admisible es $n = 14$, con lo que el radio orbital resulta $a = 7258,68$ km.

Inclinación: elemento orbital i

Puesto que la órbita ha de pasar por Sevilla todos los días a la misma hora solar (18 horas), la órbita ha de ser heliosíncrona. Por tanto, la inclinación de la órbita será aquella que permite que, para el radio orbital dado, la perturbación de la ascensión recta del nodo ascendente $\dot{\Omega}$ sea igual a la tasa de variación de la ascensión recta del Sol $\dot{\alpha}$, es decir $\dot{\Omega} = \dot{\alpha}$.

Para una órbita circular, la perturbación sobre la RAAN debida al J2 es

$$\dot{\Omega} = -\frac{3}{2}n\frac{R_{\oplus}^2}{a^2}J_2\cos(i), \quad (\text{B.2})$$

y como $\dot{\Omega} = \dot{\alpha}$, la inclinación de la órbita ha de ser

$$i = \arccos\left(-\frac{2}{3} \frac{a^2 \dot{\alpha}}{n J_2 R_{\oplus}^2}\right) = 98,95^\circ. \quad (\text{B.3})$$

Argumento de la latitud: elemento orbital u

Considerando la época el instante de paso por Sevilla, en el día 3 de Abril de 2012, puede decirse que u en la época se obtiene planteando el triángulo esférico formado por el plano orbital en el instante de paso por Sevilla (figura B.1).

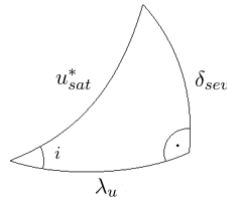


Figura B.1: Triángulo esférico del vehículo

Se obtienen las relaciones

$$\text{sen}(u_{sat}^*) = \frac{\text{sen}(\phi_{sev})}{\text{sen}(i)} \quad (\text{B.4})$$

$$\text{cos}(\lambda_u) = \frac{\text{cos}(u_{sat}^*)}{\text{cos}(\phi_{sev})}. \quad (\text{B.5})$$

Por lo que el argumento de la latitud en la época (aún por determinar), es $u_{sat}^* = 37,73^\circ$.

Ascensión recta del nodo ascendente Ω

Se puede plantear en función de la hora sidérea local LST como:

$$\Omega^* = LST - \lambda_u, \quad (\text{B.6})$$

donde λ_u viene determinada por el triángulo esférico de la figura B.1. Nótese que al tratarse de una órbita retrógrada, λ_u es negativa.

Para obtener LST es necesario calcular la hora UT cuando en Sevilla, en el día 13 de Abril son las 18:00 hora solar, es decir, la hora UT del instante de paso del satélite sobre Sevilla.

Si a este instante lo denominamos t^* , y t_0 es el instante de referencia 3 de Abril de 2012 a las 12:00, se dan las relaciones siguientes para la hora sidérea local (figura B.2)

$$LST = GST + \lambda = \sigma + AR_{\odot}, \quad (\text{B.7})$$

El tiempo sidéreo de Greenwich GST se obtiene propagando el del instante de referencia:

$$GST = GST_0 + \omega_{\oplus}(t^* - t_0), \quad (\text{B.8})$$

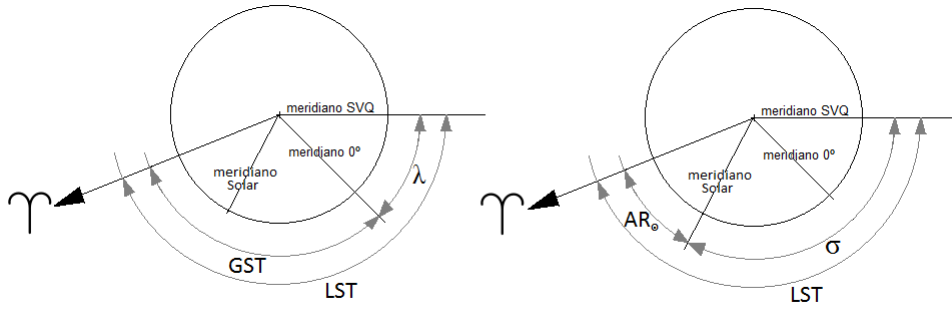


Figura B.2: Relaciones de la órbita heliosíncrona

donde el tiempo tiempo sidéreo de Greenwich del instante de referencia se obtiene a su vez según $GST_0 = \omega_{\oplus}(t_1 - t_0)$, donde t_1 es un instante cercano en el que GST es nulo. Este instante t_1 se obtiene de STK y es el 3 de Abril de 2012 a las 11:15.216.

Combinando las ecuaciones (B.7) y (B.8), el instante t^* es

$$t^* = \frac{1}{\omega_{\oplus}}(\sigma + AR_{\odot} - GST_0 - \lambda) + t_0. \quad (\text{B.9})$$

La ascensión recta del sol AR_{\odot} se calcula planteando el triángulo esférico formado por el plano de la eclíptica en Sevilla (figura B.3)

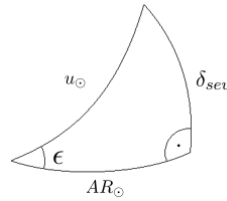


Figura B.3: Triángulo esférico del Sol

$$\cos(AR_{\odot}) = \frac{\cos(u_{\odot})}{\cos(\delta_{\odot})}, \quad (\text{B.10})$$

del que también se obtiene la declinación del Sol δ_{\odot} :

$$\text{sen}(\delta_{\odot}) = \text{sen}(\epsilon) \text{sen}(u_{\odot}). \quad (\text{B.11})$$

Si se desprecia la excentricidad de la órbita terrestre alrededor del Sol, la ascensión recta del Sol depende del tiempo a través del argumento de la latitud del Sol

$$u_{\odot} = u_{\odot 0} + \dot{\alpha}t^*, \quad (\text{B.12})$$

donde $u_{\odot 0}$ se calcula a su vez propagando desde el equinoccio de primavera de 2012 hasta el instante de referencia t_0 . Según STK, el equinoccio vernal fue el día 20 de Marzo a las 20 horas, 28 minutos y 22.38 segundos.

La hora solar σ de la ecuación (B.7) es el ángulo entre el meridiano solar y el meridiano de Sevilla. Planteando el triángulo astronómico de la figura B.4, se tiene

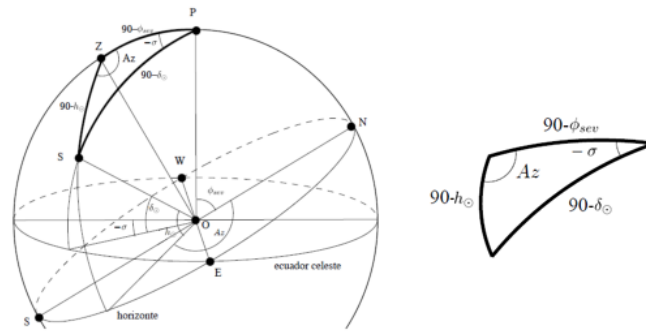


Figura B.4: Triángulo astronómico

$$\cos(90-h_{\odot}) = \cos(90-\phi_{sev}) \cos(90-\delta_{\odot}) + \sin(90-\phi_{sev}) \sin(90-\delta_{\odot}) \cos(-\sigma), \quad (\text{B.13})$$

entonces

$$\cos(\sigma) = \frac{\sin(h_{\odot}) - \sin(\phi_{sev}) \sin(\delta_{\odot})}{\cos(\phi_{sev}) \cos(\delta_{\odot})}. \quad (\text{B.14})$$

Si se considera el atardecer como el instante en el que el Sol se esconde completamente bajo el horizonte, la elevación del Sol h_{\odot} habrá de ser igual a menos el radio angular solar, $h_{\odot} = -0,266^{\circ}$.

Las ecuaciones (B.9), (B.11), (B.12) y (B.14) suponen un sistema de ecuaciones no lineal para t^* . Resolviendo iterativamente y sumando el instante de referencia t_0 , el instante (hora UT) del atardecer del día 3 de Abril de 2012 en Sevilla es el 3 de Abril de 2012, a las 18 horas, 44 minutos y 9.8939 segundos. Este instante se toma como la época de referencia para los elementos orbitales u y Ω .

Introduciendo este instante en la ecuación (B.7), y LST en la ecuación (B.6), se obtiene que la $RAAN$ en la época es $\Omega^* = 114,82^{\circ}$.

La figura B.5 muestra el gráfico de STK del paso por Sevilla exactamente al atardecer.

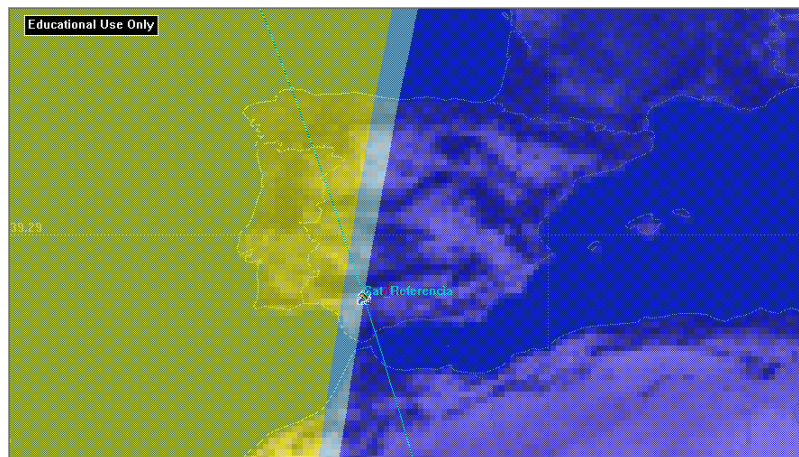


Figura B.5: Paso del satélite por Sevilla, al atardecer

Bibliografía

- [1] AUER, W., "A Double Gimballed Momentum Wheel for 3-Axis Attitude Control," Guidance and control 1982; Proceedings of the Annual Rocky Mountain Guidance and Control Conference, Keystone, CO; United States; 30 Jan.-3 Feb. 1982. pp. 51-61.
- [2] BRYSON, A. E., Jr. y HO, Y.-C. (1975), "Applied Optimal Control," Hemisphere, New York.
- [3] BRYSON, A. E., (1994), "Control of Spacecraft and Aircraft," Princeton University Press, Princeton, NJ.
- [4] ESA (2004), "Herschel/Planck System Requirements Specifications," SCI-PT-RS-05991, issue 3.3, July 2004.
- [5] JUNKINS, JOHN L. y TURNER, JAMES D. (1986), "Optimal Spacecraft Rotational Maneuvers," New York, Elsevier.
- [6] KEAT, J. (1977), "Analysis of Least-Squares Attitude Determination Routine, DOAOP," Computer Sciences Corp., Report CSC/TM-77/6034, Feb. 1977.
- [7] DENIS, D., MCCARTHY AND PETIT, G. (2004), "IERS Technical Note 32," IERS Conventions (2003). IERS Convention Center, Frankfurt am Main.
- [8] FARRENKOPF, R. L., "Analytic Steady-State Accuracy Solutions for Two Common Spacecraft Attitude Estimators," Journal of Guidance and Control, Vol. 1, No. 4, pp. 282-284, 1978.
- [9] GIBBS, J. W., "Scientific Papers," Vol. 2, Dover, New York, pp. 65-66, 1961.
- [10] KAMESH D., PANDIYAN R., ASHITAVA G. (2012), "Passive Vibration Isolation of Reaction Wheel Disturbances Using a Low Frequency Flexible Space Platform," Journal of Sound and Vibration, Volume 331, Issue 6, 12 March 2012, pp 1310-1330.
- [11] LARSON, W. J. y WERTZ, J. R. (1999), "Space Mission Analysis and Design," W. J. Larson and Microcosm, Inc.
- [12] MARKLEY, F. L., "Attitude Error Representations for Kalman Filtering," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 26, No. 2, March-April 2003, pp. 311-317.
- [13] MATISKO, P. and HAVLENA, V. (2012), "Noise Covariance Estimation for Kalman Filter Tuning Using Bayesian Approach and Monte Carlo," Int. J. Adapt. Control Signal Process, doi: 10.1002/acs.2369.

- [14] PENDERGAST, K. J., SCHAUWECKER, C. J., (1998), “*Use of a Passive Reaction Wheel Jitter Isolation System to Meet the Advanced X-Ray Astrophysics Facility Imaging Performance Requirements*,” Proc. SPIE Vol. 3356, p. 1078-1094, Space Telescopes and Instruments V, Pierre Y. Bely; James B. Breckinridge; Eds.
- [15] PALUSZEK, M., THOMAS, S., MUELLER, J., and BHATTA, P. (2008), “*Spacecraft Attitude and Orbit Control*,” Princeton Satellite Systems, Inc.
- [16] SHUSTER, M. D. and OH, S. D., “*Three-Axis Attitude Determination from Vector Observations*,” Journal of Guidance and Control, Vol. 4, No. 1, January-February 1981, pp. 70-77.
- [17] SIDI, M. J. (1997), “*Spacecraft Dynamics and Control: A Practical Engineering Approach*,” Vol. 7 of Cambridge Aerospace Series, Cambridge University Press, New York, NY.
- [18] SIMON, D. (2006), “*Optimal State Estimation: Kalman, H - ∞ , and Nonlinear Approaches*,” John Wiley & Sons, New York, NY.
- [19] THALES ALENIA SPACE, “*Memorandum on H-Gyro Anomaly Characterization*,” H-P-TN-AI-0181, issue 2, July 2009.
- [20] TSIOTRAS, P., SHEN, H., HALL, C., “*Satellite Attitude Control and Power Tracking with Energy/Momentum Wheels*,” Journal of Guidance Control & Dynamics, 24(1), 2001, pp. 23-35.
- [21] WAHBA G., “*A Least Squares Estimate of Satellite Attitude, Problem 65.1*,” SIAM Review, July 1966, pp. 385-386.
- [22] WERTZ, J. R. (1978), “*Spacecraft Attitude Determination and Control*,” D. Reidel Publishing Company, Boston, MA.
- [23] WIE, B. (1998), “*Space Vehicle Dynamics and Control*,” American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc.

Recursos electrónicos utilizados

- <http://www.agi.com/>
- <http://www.flixan.com>
- <http://infosatgeomatrica.com>
- <http://www.isas.jaxa.jp>
- <http://ntrs.nasa.gov>
- <http://www.sciencedirect.com>
- <http://www.spacealliance.ro/>