

Guía de Estudio de Electrónica Analógica

para el examen de

Admisión a la Sección de Bioelectrónica

Departamento de Ingeniería Eléctrica

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico
Nacional

Compilación realizada por

Dr. Carlos Alvarado Serrano

Dr. Oliverio Arellano Cárdenas

Dr. David Elías Viñas

Dr. Pablo Rogelio Hernández Rodríguez

Dr. Lorenzo Leija Salas

Dr. Arturo Vera Hernández

Con la colaboración de

M. en C. Rubén Pérez Valladares

Contenido

TEMARIO ELECTRÓNICA ANALÓGICA.....	3
TEORÍA BÁSICA PARA ANÁLISIS DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS Y ANÁLISIS TRANSITORIO.....	6
EJERCICIOS RESUELTOS RELACIONADOS CON TEORÍA BÁSICA PARA ANÁLISIS DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS Y ANÁLISIS TRANSITORIO	44
AMPLIFICADORES OPERACIONALES	97
CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA, PROCESAMIENTO ANALÓGICO DE SEÑALES Y AMPLIFICACIÓN DE VOLTAJE	132
EJERCICIOS RESUELTOS RELACIONADOS CON PROCESAMIENTO ANALÓGICO DE SEÑALES	174

TEMARIO ELECTRÓNICA ANALÓGICA

Impartido por los Profesores:

Dr. Oliverio Arellano Cárdenas

Dr. Carlos Alvarado Serrano

MÓDULO 1

Tema 1: Teoría de Circuitos.

- 1.1 Corriente, voltaje y potencia.
- 1.2 Ley de Ohm.
- 1.3 Leyes de Kirchhoff.
- 1.4 Generadores (Fuentes de alimentación).
 - 1.4.1 Fuentes de voltaje. a) Ideal. b) Constante.
 - 1.4.2 Fuentes de corriente. a) Ideal b) Constante
- 1.5 Aparatos de medición
 - 1.5.1 Voltímetro
 - 1.5.2 Amperímetro
- 1.6 Teorema de Superposición
- 1.7 Teorema de Thevenin
- 1.8 Teorema de Norton
- 1.9 Conversión Delta-Estrella y Estrella-Delta (Conversión $\Delta - Y$ y $Y - \Delta$).

Tema 2: Análisis Transitorio

- 2.1 Respuesta de entrada cero.
- 2.2 Respuesta a un escalón.
- 2.3 Respuesta al impulso.
- 2.4 Respuestas transitorias de CD conmutadas.

Tema 3: Amplificadores Operacionales

- 3.1 Introducción.
- 3.2 El amplificador operacional (Amp.Op.) ideal.
- 3.3 Configuraciones en lazo abierto.
 - 3.3.1 El amplificador diferencial.
 - 3.3.2 El amplificador inversor.
 - 3.3.3 El amplificador no inversor.
- 3.4 Configuraciones con retroalimentación.
 - 3.4.1 Ganancia, resistencia de entrada, resistencia de salida y ancho de banda en circuitos con retroalimentación (lazo cerrado).
 - 3.4.2 Retroalimentación de voltaje en serie.
 - 3.4.3 Retroalimentación de voltaje en paralelo.
 - 3.4.4 Retroalimentación de corriente en serie.
 - 3.4.5 Retroalimentación de corriente en paralelo.
- 3.5 Amplificadores diferenciales.
 - 3.5.1 Con un Amp.Op.
 - 3.5.2 Con dos Amp.Op.
 - 3.5.3 Con tres Amp.Op.
- 3.6 Amplificadores sumadores.
- 3.7 Interpretación de las hojas de datos y características de un amplificador operacional.

MÓDULO 2:

Tema 1: Circuitos de corriente alterna.

- 4.1 Capacitor.
- 4.2 Inductor.
- 4.3 Estado estacionario de CA y fasores. Números complejos.
- 4.4 Impedancia y admitancia de elementos. Resistor. Inductor. Capacitor.

4.5 Función de transferencia. Polos y ceros.

Tema 2: Procesamiento analógico de señales

5.1 Conceptos básicos sobre señales, información, interferencia y ruido.

5.2 Sistema de medida. Funciones. Necesidad de la instrumentación.

5.3 Procesamiento analógico.

5.4 Clasificación de señales. Señales analógicas y digitales. Señales unipolares, diferenciales y flotantes. Señales de alta y baja impedancia

5.5 Sistema de medición electrónico. Estructura. Rango dinámico y relación señal a ruido. Funciones: Ajuste de amplitud y nivel. Adaptación de impedancia. Conversiones entre dominios. Filtrado. Linealización. Compensación de interferencias. Comparación de niveles y detección de umbral. Adaptación de terminales.

5.6. Tipos de errores: Absoluto. Relativo. Sistemático. Aleatorio. Estático. Dinámico.

Tema 3: Amplificación de voltaje.

6.1 Amplificadores de voltaje ideales.

6.2 Amplificadores de voltaje reales.

6.3 Factores de calidad de amplificadores con entrada y salida diferenciales.

6.4 Amplificador operacional retroalimentado en voltaje. Propiedades de la retroalimentación negativa. Ganancia en lazo abierto y lazo cerrado. Amplificador operacional con retroalimentación positiva y negativa.

BIBLIOGRAFÍA

- *Análisis de Redes*

Van Valkenburg, Edit. Limusa, (1979).

- *Circuitos*

A. Bruce Carlson. Edit. Thomson Learning, 2001. ISBN: 978-9706860330.

- *Circuit Analysis Demystified*

McMahon. McGraw-Hill. (2008). ISBN-13: 978-0071488983.

- *Introductory Circuit Analysis*

Robert L. Boylestad. Edit. Prentice Hall, 10th edition (2002). ISBN-13: 978-0130974174.

- *Design with operational amplifiers and analog integrated circuits, 3rd. Edition*

Sergio Franco, Edit. McGraw-Hill, (2002). ISBN-13: 978-0072320848.

- *Operational amplifiers and linear integrated circuits*

Robert F. Coughlin, Frederick F. Driscoll. Edit. Prentice Hall 6th Ed. (2000). ISBN-13: 978-0130149916.

- *Operational Amplifiers 2nd. Edition*

Arpad Barna, Dan I. Porat. Edit. John Wiley and Sons. (1989). ISBN-13: 978-0471847151.

- *Analog Signal Processing*

Ramón Pallás Areny, John G. Webster, Edit. John Wiley & Sons, (1999). ISBN-10: 0471125288

-Basic Engineering Circuit Analysis 11th Edition. J. David Irwing , R. Mark Nelms, Wiley (2014). ISBN: 978-1-118-95599-4

TEORÍA BÁSICA PARA ANÁLISIS DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS Y ANÁLISIS TRANSITORIO

Conceptos básicos

Corriente, voltaje y potencia.

Unidad básica de carga \Rightarrow Electrón
1 electrón = 1.6021×10^{-19} coulombs

Corriente eléctrica \Rightarrow Transferencia de carga

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (\text{amperes, A})$$

1A \Rightarrow 6.24×10^{18} electrones que pasan en una sección transversal en 1s.
Trabajo por unidad de carga \Rightarrow Voltaje o tensión

$$v = \frac{w}{q} \quad (\text{volts, V})$$

w = trabajo (o energía) en joules

Si a una cantidad diferencial de carga dq se le da un incremento diferencial de energía dw , el potencial de la carga se incrementa por la cantidad:

$$v = \frac{dw}{dq}$$

si este potencial se multiplica por la corriente:

$$\frac{dw}{dq} \times \frac{dq}{dt} = \frac{dw}{dt} = p \quad (\text{watts, W}) \Rightarrow p = vi$$

$$w = \int_{-\infty}^t p \, dt$$

\therefore La energía en cualquier tiempo dado t es

Módulo de Electrónica Analógica

Temario general

- 1 Teoría básica para el análisis de circuitos eléctricos
- 2 Amplificadores operacionales
- 3 Procesamiento analógico

Profesores:

Dr. Oliverio Arellano Cárdenas
Dr. Carlos Alvarado Serrano

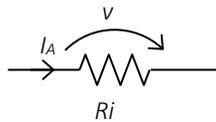
Ley de Ohm

Cuando un material es atravesado por una corriente se cumple que:

$$v = R \cdot i = R \frac{dq}{dt}$$

Donde

- v es la tensión que se mide en volts (V).
- i es la intensidad de la corriente que atraviesa al material, y se mide en Amperes (A).
- R es la resistencia que se mide en ohms (Ω).

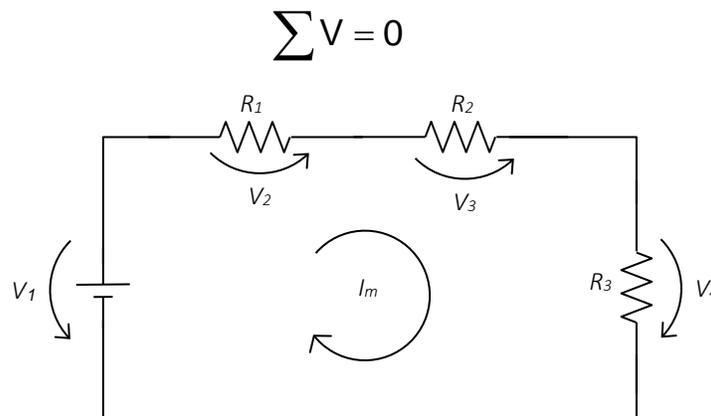


A veces esto se expresa como: $i = G \cdot v$, donde $G = 1/R$ se conoce como conductancia, la cual se mide en mhos ($\text{S} = \Omega^{-1}$)

Leyes de Kirchhoff

Ley de Kirchhoff de voltajes

La suma de las caídas de voltaje de todos los componentes de una malla cerrada es igual a cero.



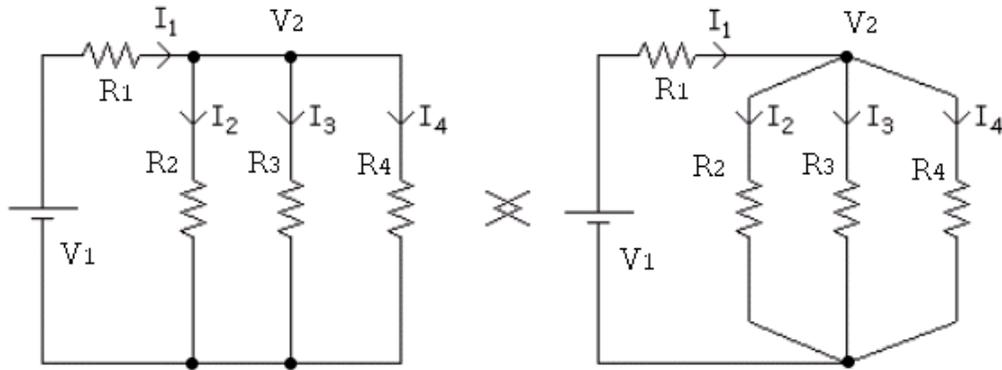
$$V_2 + V_3 + V_4 - V_1 = 0$$

$$\Rightarrow I_m R_1 + I_m R_2 + I_m R_3 - V_1 = 0$$

Ley de Kirchhoff de corrientes

La suma de las corrientes que entran en un nodo es igual a la suma de las corrientes que salen de él.

$$\sum I_{\text{Entrantes}} = \sum I_{\text{Salientes}}$$



$$I_1 = I_2 + I_3 + I_4$$

$$\Rightarrow I_1 = (V_1 - V_2)/R_1 = V_2/R_2 + V_2/R_3 + V_2/R_4$$

Resistencias

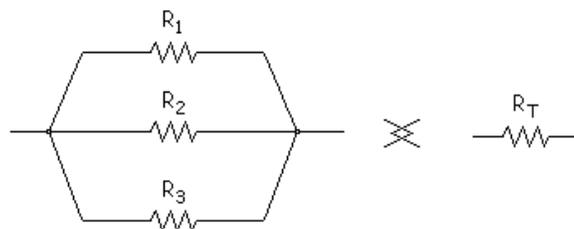
Resistencias en serie

Dos o más resistencias en serie (que las atraviesa la misma corriente) son equivalentes a una única resistencia cuyo valor es igual a la suma de las resistencias.



Resistencias en paralelo

Cuando se tienen dos o más resistencias en paralelo (que soportan la misma tensión), pueden ser sustituidas por una resistencia equivalente, como se ve en el dibujo:



el valor de esa resistencia equivalente (R_T) lo conseguimos mediante esta expresión:

$$\frac{1}{R_T} = \sum \frac{1}{R_i}$$

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Para el caso particular de dos resistencias en paralelo, la resistencia equivalente se puede calcular como sigue:

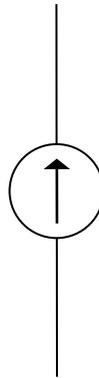
$$R_T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Generadores (Fuentes de alimentación)

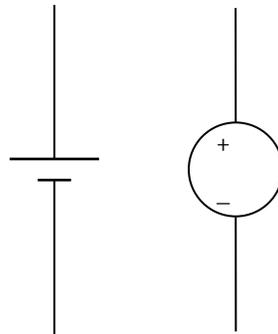
Fuentes continuas

Pueden ser tanto fuentes de corriente como de voltaje, y su utilidad es suministrar corriente o voltaje, respectivamente, de forma continua.

Fuente de corriente continua



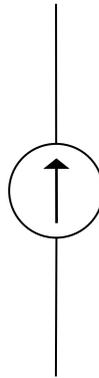
Fuente de voltaje continuo



Fuentes Alternas

Pueden ser tanto fuentes de corriente como de voltaje, y su utilidad es suministrar corrientes o voltajes, respectivamente, de forma alterna (por ejemplo: de forma senoidal, de forma triangular, de forma cuadrada., etc...).

Fuente de corriente alterna



Fuente de voltaje alterno

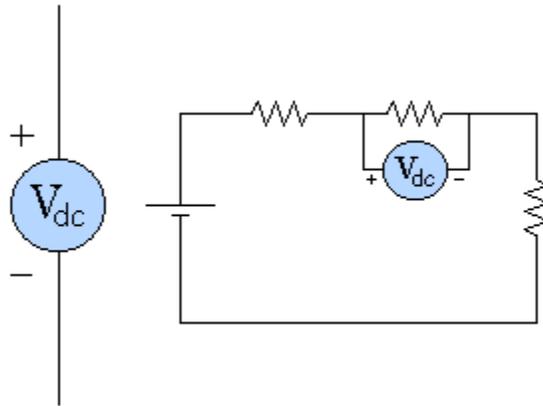


Aparatos de medición.

Voltímetro.

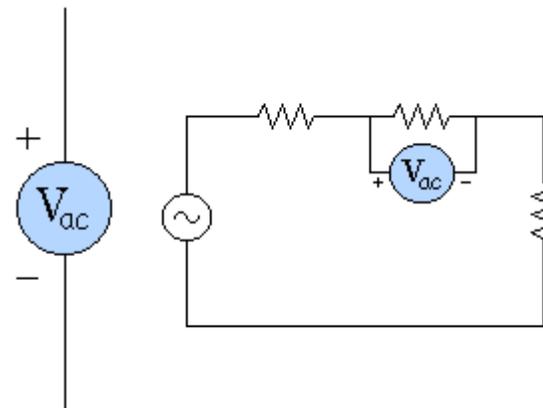
Aparato que mide voltajes eficaces tanto en continua como en alterna, y su colocación es de forma obligatoria en "paralelo" al componente sobre el cual se quiere medir su tensión.

Voltímetro de continua



dc = direct current (corriente directa, corriente continua)

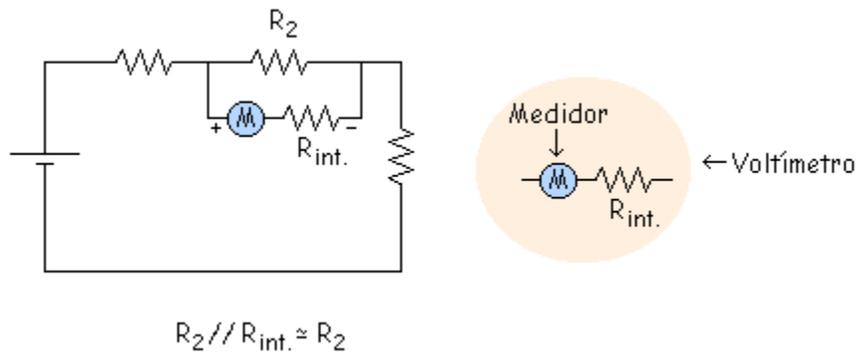
Voltímetro de alterna



ac = altern current (corriente alterna)

Errores al medir con voltímetros

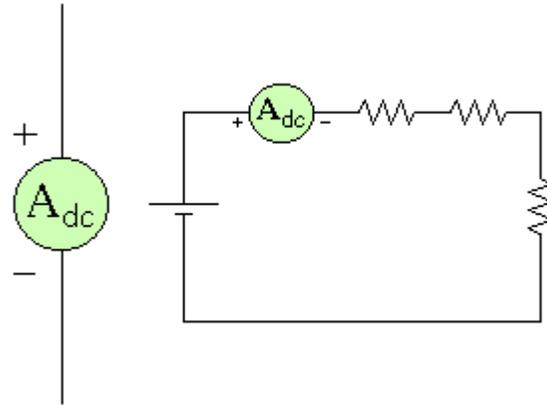
Al medir con un voltímetro se comete un pequeño error porque dentro del voltímetro hay una resistencia interna ($R_{int.}$), que tiene un valor muy grande (idealmente, infinito).



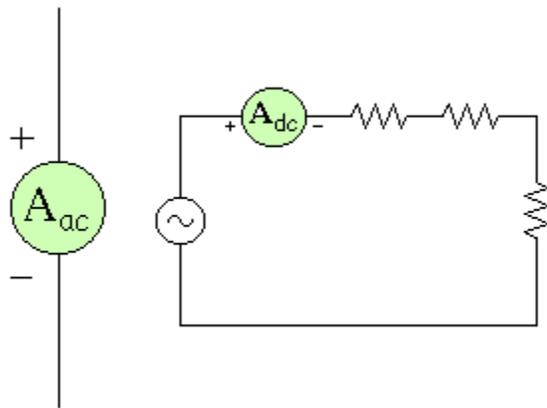
Amperímetro.

Aparato que mide el valor medio de la corriente, y su colocación es de forma obligatoria en "serie" con el componente del cual se quiere saber la corriente que le atraviesa.

Amperímetro de continua

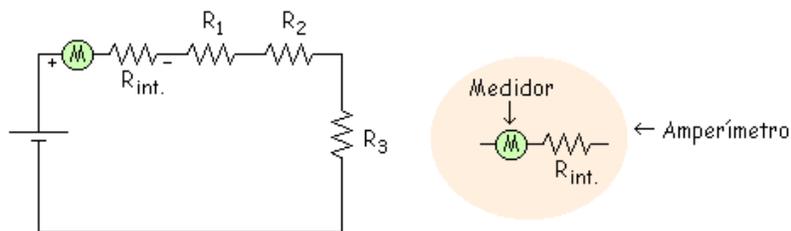


Amperímetro de alterna



Errores al medir con amperímetros

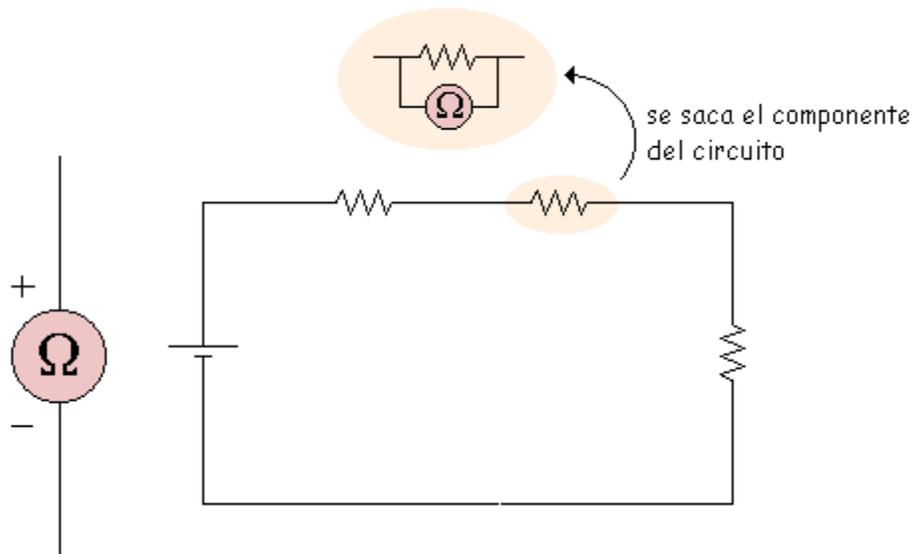
Como ocurre con el voltímetro, al medir con el amperímetro se comete un error debido a una resistencia interna ($R_{int.}$) de valor muy pequeño (idealmente, igual a cero).



$$R_{int.} + R_1 + R_2 + R_3 \approx R_1 + R_2 + R_3$$

Ohmetro

Aparato que mide el valor de las resistencias, y que de forma obligatoria hay que colocar en paralelo al componente estando éste separado del circuito (sin que le atraviese ninguna intensidad). Mide resistencias en Ohms (Ω).



Errores al medir con óhmetros

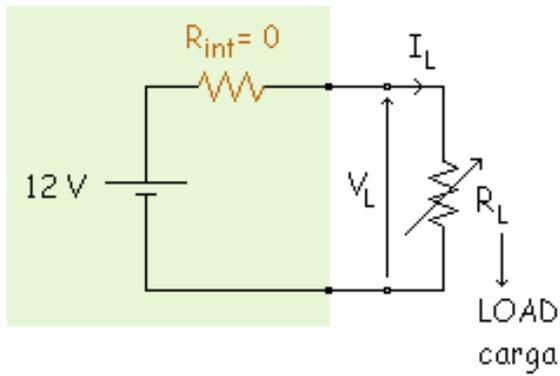
Como se ha visto anteriormente, todo aparato de medición comete un error que a veces se suele despreciar, con los óhmetros ocurre lo mismo, aunque se desprecie ese error hay que tener en cuenta que se suele hacer una pequeña aproximación.

Fuentes de voltaje.

Para funcionar, los circuitos electrónicos deben poseer al menos una fuente de energía eléctrica, que puede ser una fuente de voltaje o de corriente.

Fuente de voltaje ideal

Es una fuente de voltaje que produce un voltaje de salida constante, es una Fuente de Voltaje con Resistencia interna cero. Todo el voltaje va a la carga R_L .



$$V_L = 12 \text{ V. (cte)}$$

R_L resistencia de carga
 V_L tensión en la carga
 I_L corriente en la carga

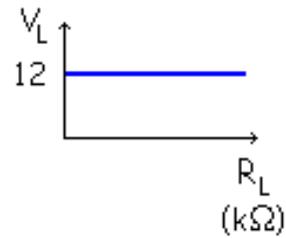
Ley de Ohm $V_L = R_L \cdot I_L$

Si varía $R_L \Rightarrow$ varía I_L $I_L \downarrow = \frac{V_L}{R_L} \uparrow$

$R_L = 1 \text{ k}\Omega \quad I_L = \frac{12}{1} = 12 \text{ mA}$

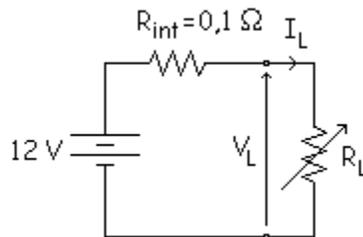
$R_L = 2 \text{ k}\Omega \quad I_L = \frac{12}{2} = 6 \text{ mA}$

$R_L = 4 \text{ k}\Omega \quad I_L = \frac{12}{4} = 3 \text{ mA}$



Fuente de voltaje real

Son las fuentes de voltaje que tenemos en la realidad, como ya hemos dicho no existe una fuente ideal de voltaje, ninguna fuente real de voltaje puede producir una corriente infinita, ya que toda fuente real tiene cierta resistencia interna.

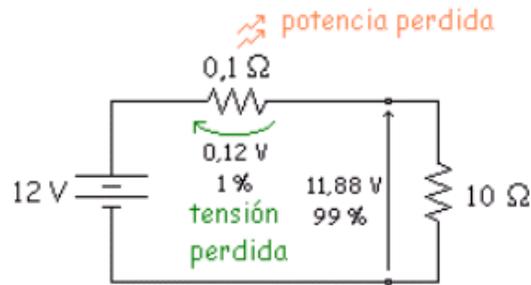


$$I_L = \frac{12}{0,1 + R_L}$$

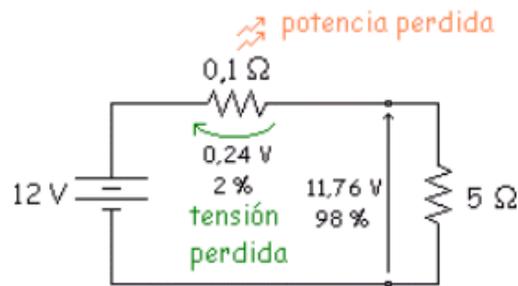
$$V_L = R_L \cdot \frac{12}{0,1 + R_L} \neq \text{cte}$$

Veamos que ocurre en 2 casos, cuando R_L vale 10Ω y cuando vale 5Ω .

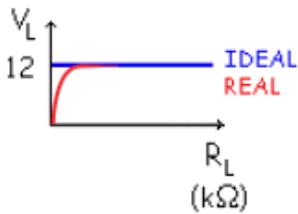
$$R_L = 10\ \Omega \quad I_L = \frac{12}{0,1+10} = 1,188\ \text{A} \quad V_L = 10 \cdot 1,188 = 11,88\ \text{V}$$



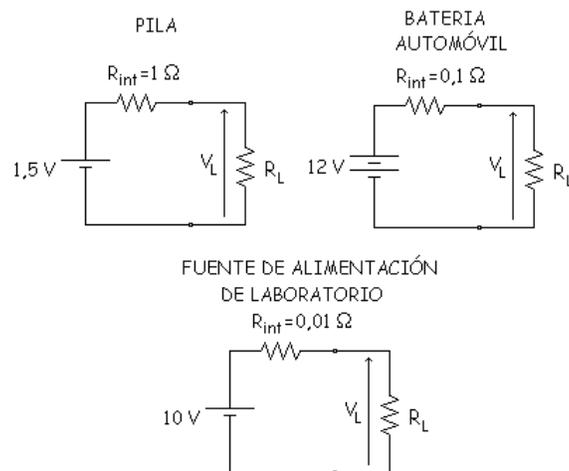
$$R_L = 5\ \Omega \quad I_L = \frac{12}{0,1+5} = 2,353\ \text{A} \quad V_L = 5 \cdot 2,353 = 11,76\ \text{V}$$



Ahora el voltaje en la carga no es horizontal, esto es, no es ideal como en el caso anterior.

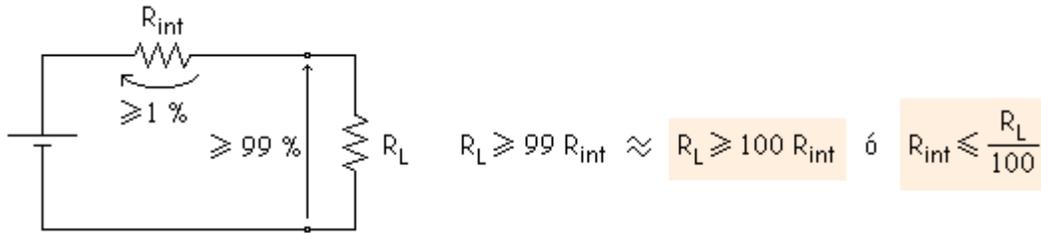


Algunos ejemplos de fuentes de voltaje reales son:

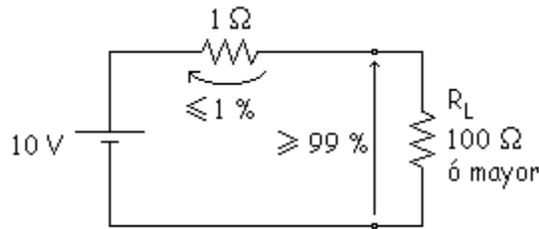


Fuente de voltaje (aproximadamente) constante

Para que una fuente de voltaje sea considerada como una "Fuente de voltaje constante", se tiene que cumplir que la resistencia interna de la fuente (R_{int}) no esté, esto es, que sea despreciable. Para que despreciemos la R_{int} se tiene que cumplir:

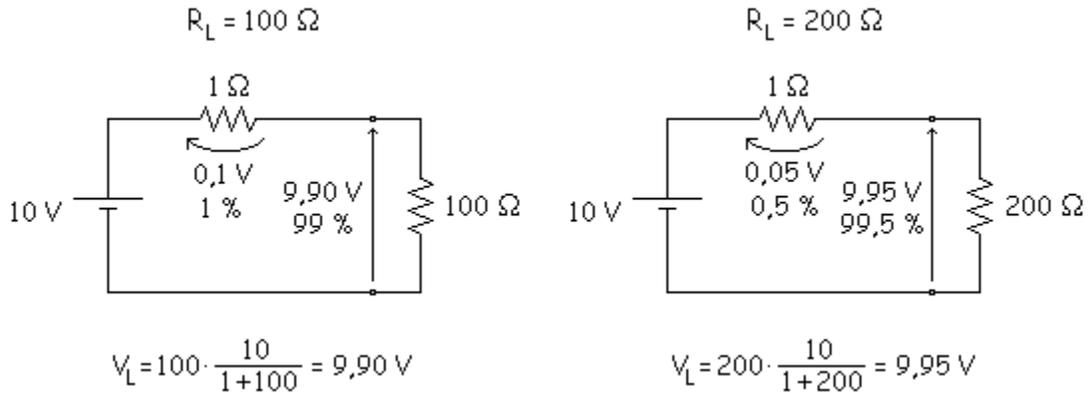


Solo se pierde el 1 % en el peor caso, por lo tanto se está aproximando a la fuente de voltaje ideal.



Si $R_L \geq 100 \Omega \Rightarrow$ Fuente de tensión constante

Veamos que ocurre en 2 valores diferentes de R_L .

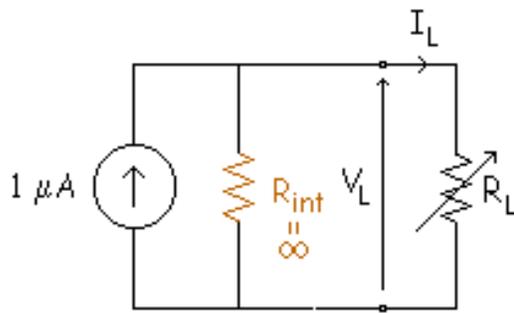


Fuentes de corriente

Una fuente de corriente tiene una resistencia interna muy grande, así produce una corriente de salida que no depende del valor de la resistencia de carga.

Fuente de corriente ideal

No existe, es ideal como en el caso anterior de la fuente de voltaje ideal.



$$I_L = 1 \mu A \text{ (cte)}$$

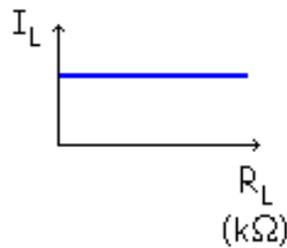
Si varía $R_L \Rightarrow$ varía V_L $V_L \uparrow = R_L \uparrow \cdot I_L$

$$R_L = 100 \text{ k}\Omega \quad V_L = 100 \cdot 1 \cdot 10^{-3} = 0,1 \text{ V}$$

$$R_L = 200 \text{ k}\Omega \quad V_L = 200 \cdot 1 \cdot 10^{-3} = 0,2 \text{ V}$$

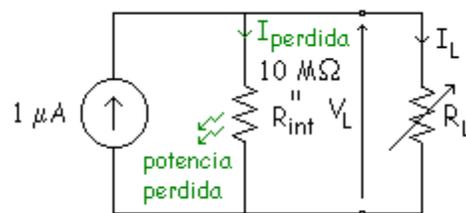
$$R_L = 400 \text{ k}\Omega \quad V_L = 400 \cdot 1 \cdot 10^{-3} = 0,4 \text{ V}$$

Ley de Ohm $V_L = R_L \cdot I_L$



Fuente de corriente real

Son las fuentes que existen en la realidad.



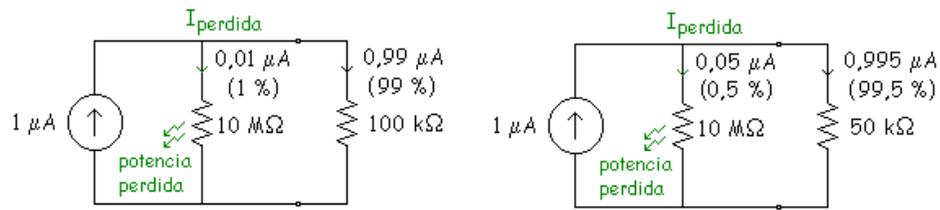
$$V_L = 1 \cdot (10 // R_L)$$

$$I_L = \frac{V_L}{R_L} = \frac{1 \cdot (10 // R_L)}{R_L} \neq \text{cte}$$

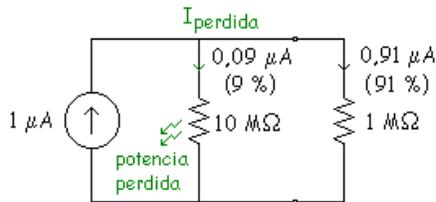
en carga $I_L < 1 \mu A$

Veamos que ocurre con los diferentes valores de R_L .

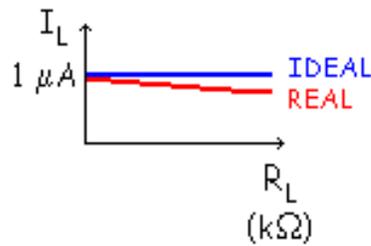
$$R_L = 100 \text{ k}\Omega \quad I_L = \frac{1 \cdot (10 // 0,1)}{R_L} = 0,99 \text{ }\mu\text{A} \quad R_L = 50 \text{ k}\Omega \quad I_L = \frac{1 \cdot (10 // 0,05)}{R_L} = 0,995 \text{ }\mu\text{A}$$



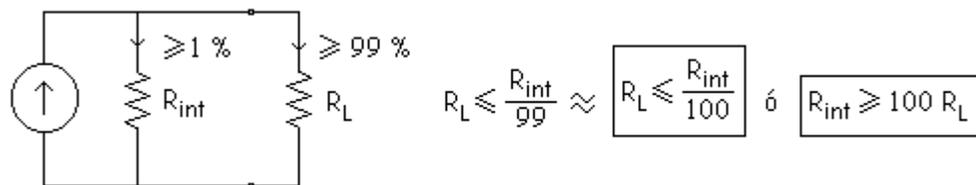
$$R_L = 1 \text{ M}\Omega \quad I_L = \frac{1 \cdot (10 // 0,05)}{R_L} = 0,995 \text{ }\mu\text{A}$$



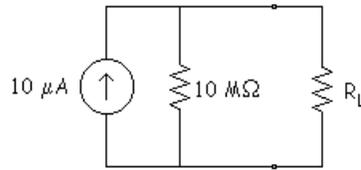
La intensidad de carga tiene esta forma:



Fuente de corriente (aproximadamente) constante

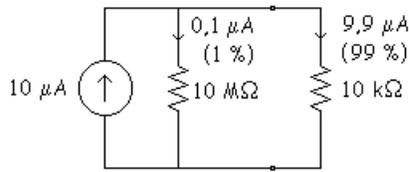


Solo se pierde el 1 % en el peor caso. Con esto nos aproximamos a la fuente de corriente ideal. Veamos 2 valores diferentes de R_L .



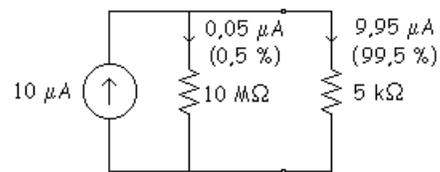
Si $R_L \leq 10 \text{ k}\Omega \Rightarrow$ Fuente de corriente cte

$R_L = 10 \text{ k}\Omega$



$$I_L = \frac{10 \cdot (1 / 0,01)}{0,01} = 9,9 \mu A$$

$R_L = 5 \text{ k}\Omega$

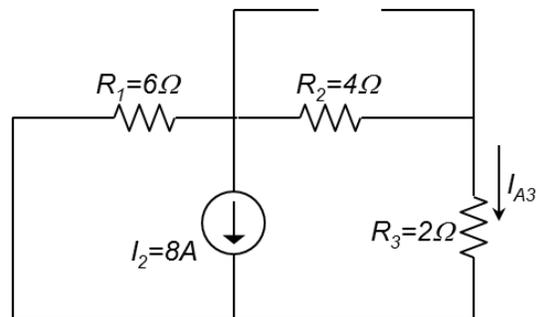
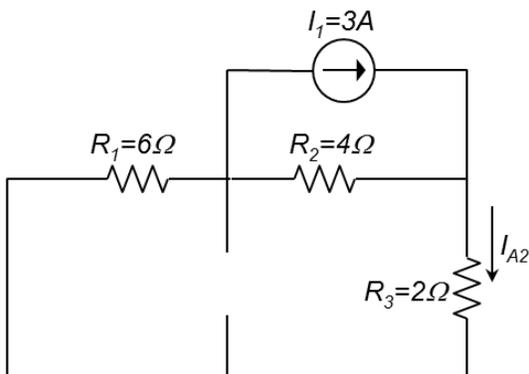
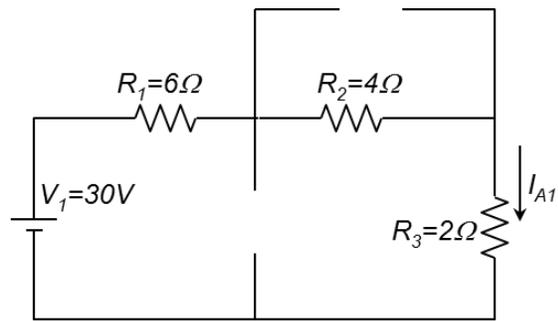
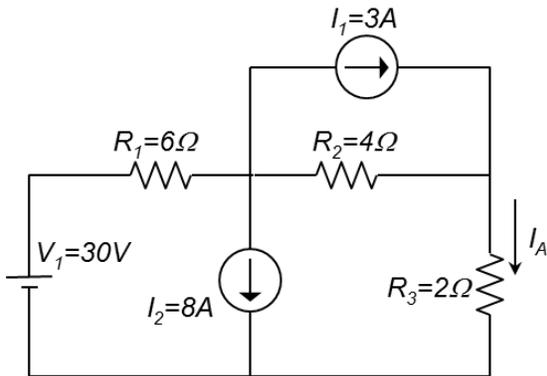


$$I_L = \frac{10 \cdot (1 / 0,005)}{0,005} = 9,95 \mu A$$

Teorema de Superposición

Para un circuito que tiene dos o más fuentes de excitación (de corriente o voltaje), este teorema establece que el valor de cualquier variable (corriente o voltaje) en algún elemento del circuito es igual a la suma algebraica de las contribuciones individuales de todas y cada una de las fuentes consideradas en forma individual, con las demás fuentes pasivadas.

Ejemplo: Calcular la corriente I_A del siguiente circuito, usando el método de superposición de fuentes.



$$I_{A1} = \frac{30}{6+4+2} = 2.5A; \quad I_{A2} = 3 \cdot \frac{4}{(6+2)+4} = 1A; \quad I_{A3} = (-8) \cdot \frac{6}{6+(2+4)} = -4A$$

$$I_A = I_{A1} + I_{A2} + I_{A3} = 2.5 + 1 - 4 = -0.5A$$

Teorema de Thévenin

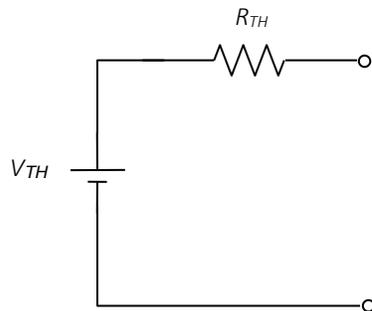
Vamos a dar dos teoremas (Thévenin y Norton) que nos van a servir para hacer más fácil (simplificar) la resolución de los circuitos.

Teorema de Thévenin.

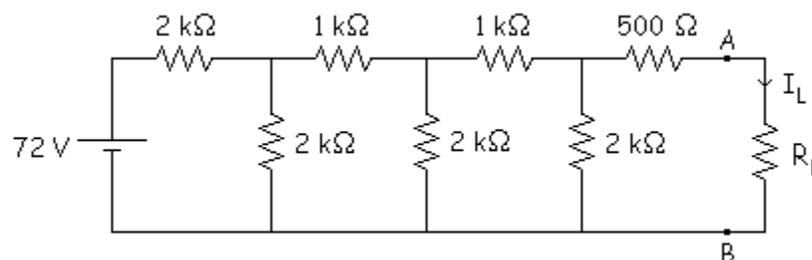
Establece que cualquier red resistiva lineal actúa en sus terminales como una fuente de voltaje ideal de valor V_{TH} conectada en serie con un resistor de valor R_{TH} .

Método:

- 1) Para calcular el voltaje de Thévenin (V_{TH}), primero se quita la carga de los puntos bajo prueba, y se calcula el voltaje resultante en dichos puntos.
- 2) La impedancia de Thévenin (R_{TH}) se calcula pasivando todas las fuentes del circuito (esto es, cortocircuitando las fuentes de voltaje y abriendo las de corriente) y calculando la resistencia resultante en los puntos bajo prueba.
- 3) El circuito equivalente de Thévenin se formará con una fuente de voltaje de valor V_{TH} en serie con una resistencia de valor R_{TH} , resultantes de los dos cálculos previos.

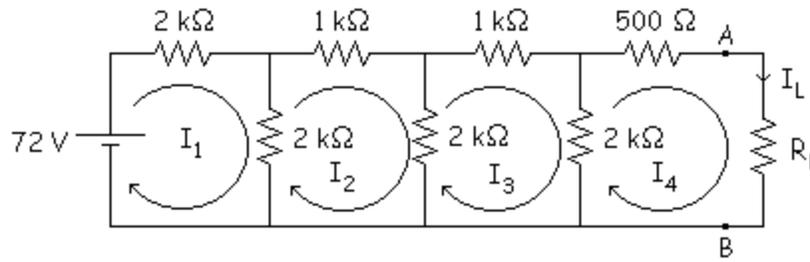


Ejemplo.



- a) Calcular la I_L cuando $R_L = 1,5 \text{ k}\Omega$.
- b) Calcular la I_L cuando $R_L = 3 \text{ k}\Omega$.
- c) Calcular la I_L cuando $R_L = 4,5 \text{ k}\Omega$.

- Ley de Kirchoff de tensiones.



$$\begin{aligned}
 & -72 + 2I_1 + 2 \cdot (I_1 - I_2) = 0 \\
 & 2 \cdot (I_2 - I_1) + 1I_2 + 2 \cdot (I_2 - I_3) = 0 \\
 & 2 \cdot (I_3 - I_2) + 1I_3 + 2 \cdot (I_3 - I_4) = 0 \\
 & 2 \cdot (I_4 - I_3) + 0.5I_4 + 1.5I_4 = 0
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} I_1 = \\ I_2 = \\ I_3 = \\ I_4 = I_L \end{array}$$

a)

$$\begin{aligned}
 & -72 + 2I_1 + 2 \cdot (I_1 - I_2) = 0 \\
 & 2 \cdot (I_2 - I_1) + 1I_2 + 2 \cdot (I_2 - I_3) = 0 \\
 & 2 \cdot (I_3 - I_2) + 1I_3 + 2 \cdot (I_3 - I_4) = 0 \\
 & 2 \cdot (I_4 - I_3) + 0.5I_4 + 3I_4 = 0
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} I_1 = \\ I_2 = \\ I_3 = \\ I_4 = I_L \end{array}$$

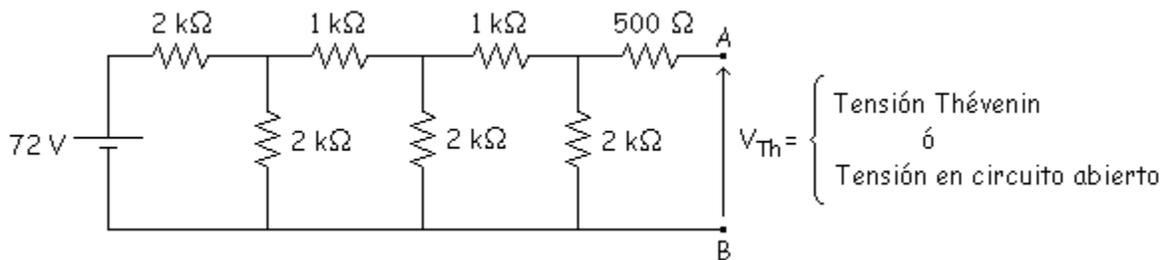
b)

$$\begin{aligned}
 & -72 + 2I_1 + 2 \cdot (I_1 - I_2) = 0 \\
 & 2 \cdot (I_2 - I_1) + 1I_2 + 2 \cdot (I_2 - I_3) = 0 \\
 & 2 \cdot (I_3 - I_2) + 1I_3 + 2 \cdot (I_3 - I_4) = 0 \\
 & 2 \cdot (I_4 - I_3) + 0.5I_4 + 4.5I_4 = 0
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} I_1 = \\ I_2 = \\ I_3 = \\ I_4 = I_L \end{array}$$

c)

- Thévenin.

1. Quitar la carga R_L .

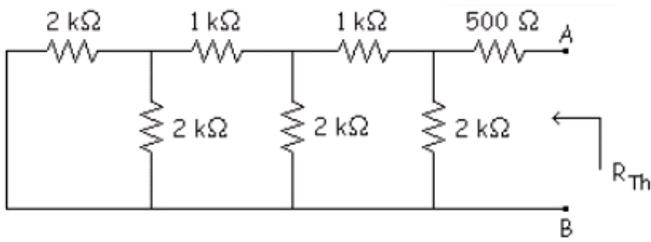


2. Hacemos mallas y calculamos V_{th} :

$$\left. \begin{aligned} -72 + 2I_1 + 2I_1 - 2I_2 &= 0 \\ 2I_2 - 2I_1 + I_2 + 2I_2 - 2I_3 &= 0 \\ 2I_3 - 2I_2 + I_3 + 2I_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} I_1 &= \\ I_2 &= \\ I_3 &= \end{aligned}$$

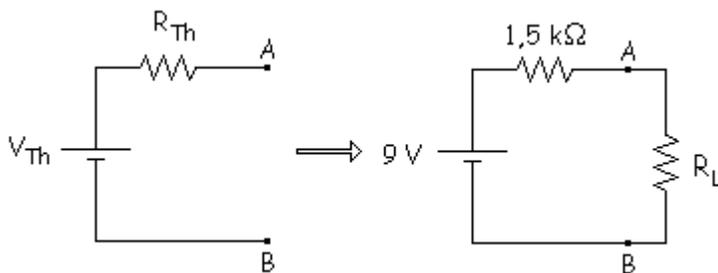
$$V_{TH} = 2I_3 \quad (2k\Omega \cdot I_3)$$

3. Cortocircuitar las fuentes de voltaje independientes y abrir las fuentes de corriente independientes.

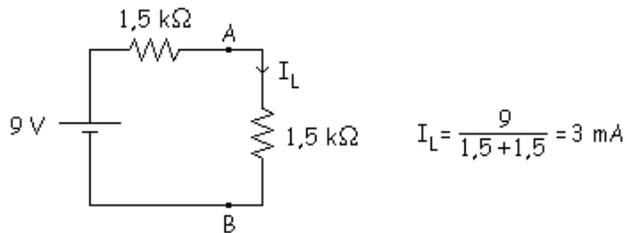


$$R_{Th} = \{ [(2 // 2) + 1] // 2 + 1 \} // 2 + 0,5 = 1,5 \text{ k}\Omega$$

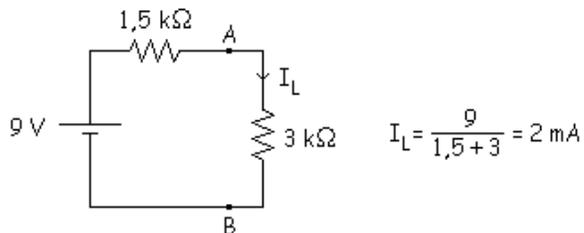
4. Unir la carga al circuito equivalente conseguido.



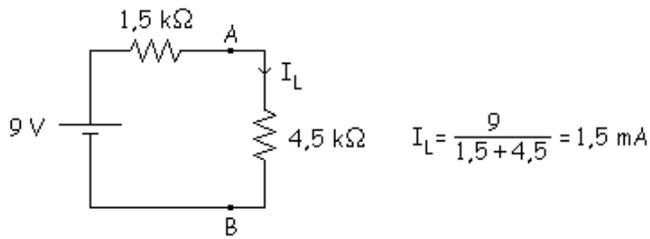
Ahora aplicando Thévenin es mucho más fácil resolver el problema que teníamos.



a)

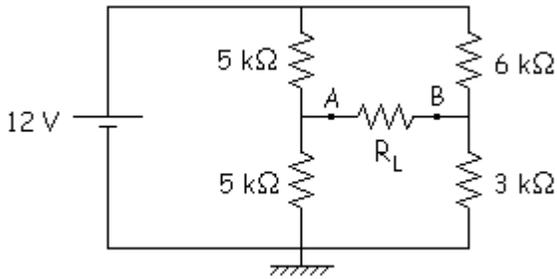


b)

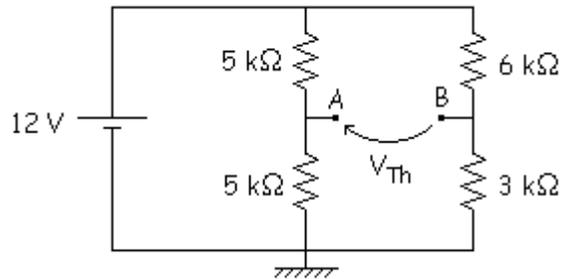


c)

Ejemplo: Calcular el equivalente de Thévenin del siguiente circuito:



1.



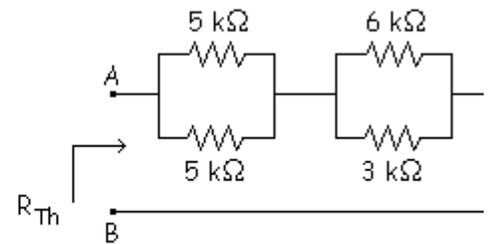
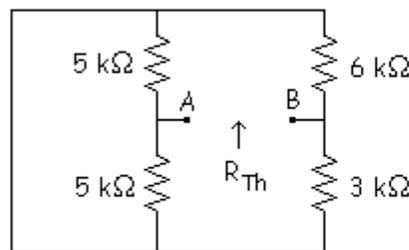
2.

$$V_A = I_A \cdot R \Rightarrow V_A = \frac{12}{5+5} \cdot 5 = 6V$$

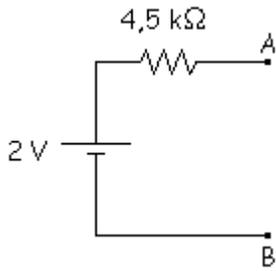
$$V_B = I_B \cdot R \Rightarrow V_B = \frac{12}{6+3} \cdot 3 = 4V$$

$$V_{Th} = V_{AB} = V_A - V_B = 6 - 4 = 2V$$

3.



$$R_{Th} = (5 // 5) + (6 // 3) = 4,5 \text{ k}\Omega$$



Teorema de Norton

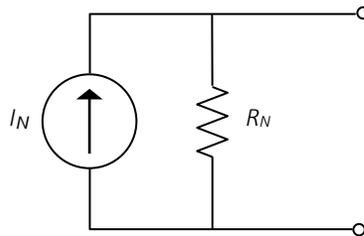
Este teorema está muy relacionado con el Teorema de Thévenin.

Teorema de Norton.

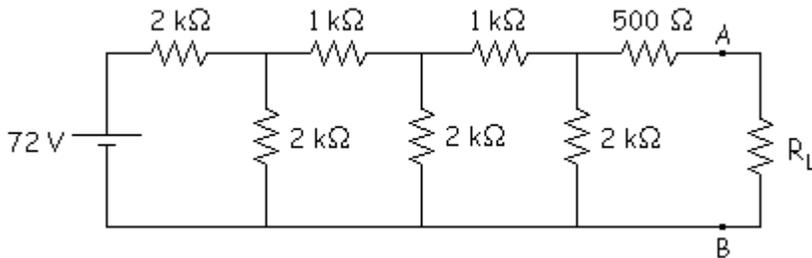
Establece que cualquier red resistiva lineal actúa en sus terminales como una fuente de corriente ideal de valor I_N conectada en paralelo con un resistor de valor R_N .

Método

- 1) Para calcular la corriente de Norton (I_N), se sustituye la carga en los puntos bajo prueba por un cortocircuito y se calcula la corriente resultante en ese punto.
- 2) La impedancia de Norton (R_N) se calcula pasivando todas las fuentes del circuito (esto es, cortocircuitando las fuentes de voltaje y abriendo las de corriente) y calculando la resistencia resultante en los puntos bajo prueba. (Esta es igual a la de Thévenin).
- 3) El circuito equivalente de Norton se formará con una fuente de corriente de valor I_N en paralelo con una resistencia de valor R_N , resultantes de los dos cálculos previos.



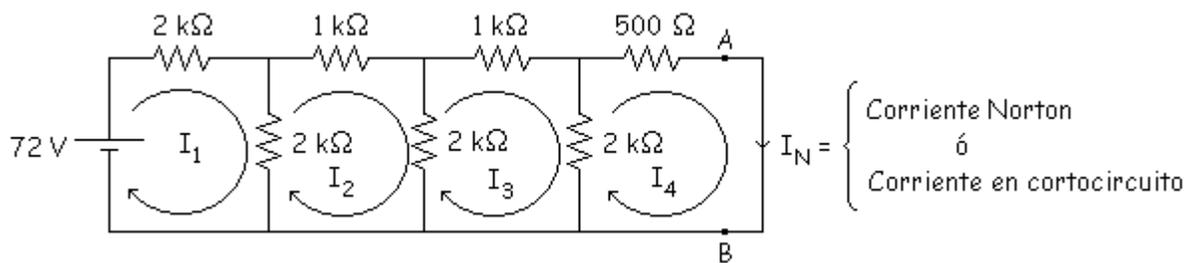
Resolveremos el problema anterior usando el teorema de Norton.



- a) Calcular la I_L cuando $R_L = 1,5 \text{ k}\Omega$.
- b) Calcular la I_L cuando $R_L = 3 \text{ k}\Omega$.
- c) Calcular la I_L cuando $R_L = 4,5 \text{ k}\Omega$.

Norton.

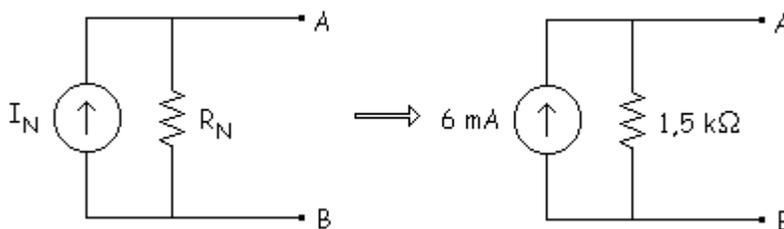
1. Quitar la carga R_L y poner un cortocircuito ($R_L = 0$).



2. Hacemos mallas y calculamos I_N :

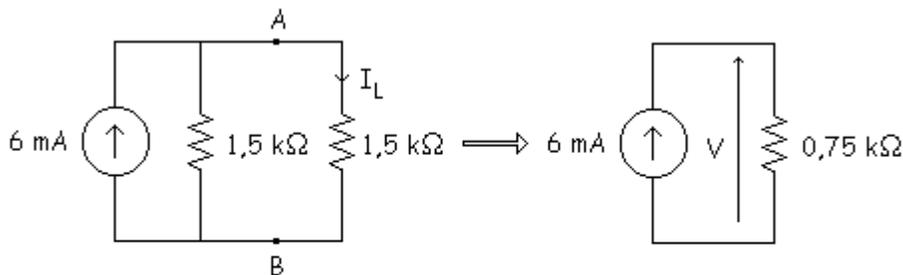
$$\left. \begin{aligned} -72 + 2I_1 + 2 \cdot (I_1 - I_2) &= 0 \\ 2 \cdot (I_2 - I_1) + 1I_2 + 2 \cdot (I_2 - I_3) &= 0 \\ 2 \cdot (I_3 - I_2) + 1I_3 + 2 \cdot (I_3 - I_4) &= 0 \\ 2 \cdot (I_4 - I_3) + 0.5I_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} I_1 &= \\ I_2 &= \\ I_3 &= \\ I_4 = I_N &= 6mA \end{aligned}$$

3. Cortocircuitar las fuentes de voltaje independientes y abrir las fuentes de corriente independientes. $R_N = R_{TH} = 1.5k\Omega$
4. Unir la carga al circuito equivalente conseguido.



Ahora aplicando Norton es mucho más fácil resolver el problema que teníamos.

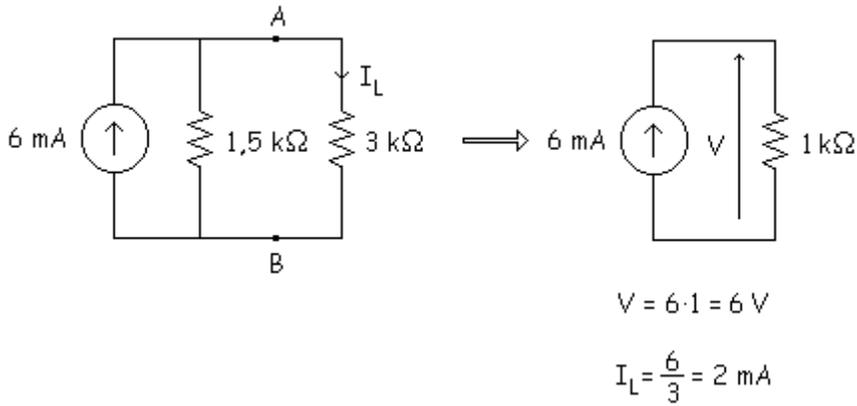
a)



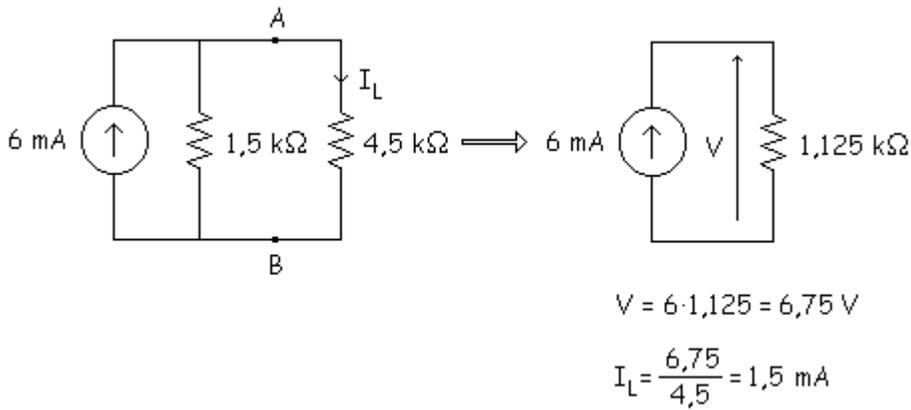
$$V = 6 \cdot 0,75 = 4,5 \text{ V}$$

$$I_L = \frac{4,5}{1,5} = 3 \text{ mA}$$

b)



c)

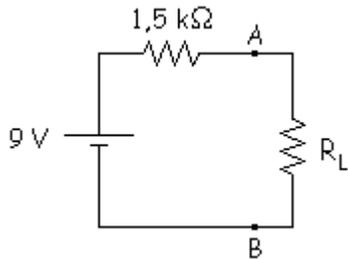


Paso de circuito Thévenin a circuito Norton y de circuito Norton a circuito Thévenin

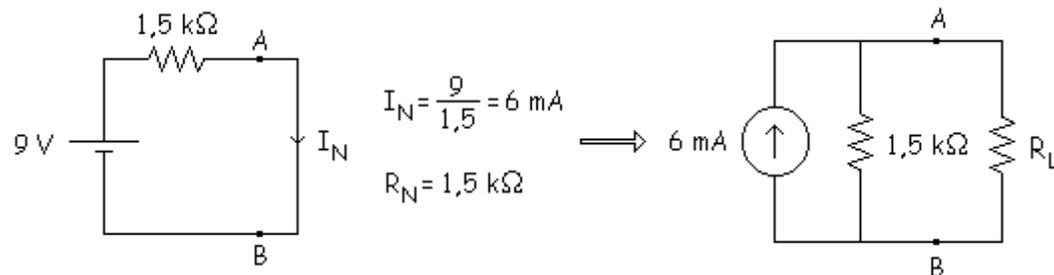
Como se ha dicho anteriormente los teoremas de Thévenin y Norton están relacionados, así se puede pasar de uno a otro.

Paso de circuito Thévenin a circuito Norton

Tenemos el circuito siguiente:

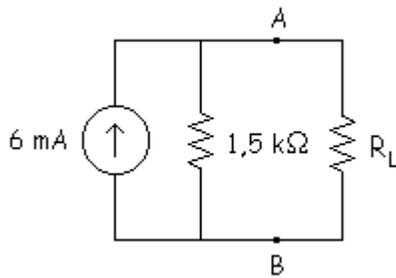


Cortocircuitamos la carga (R_L) y obtenemos el valor de la intensidad Norton, la R_N es la misma que la R_{Th} .

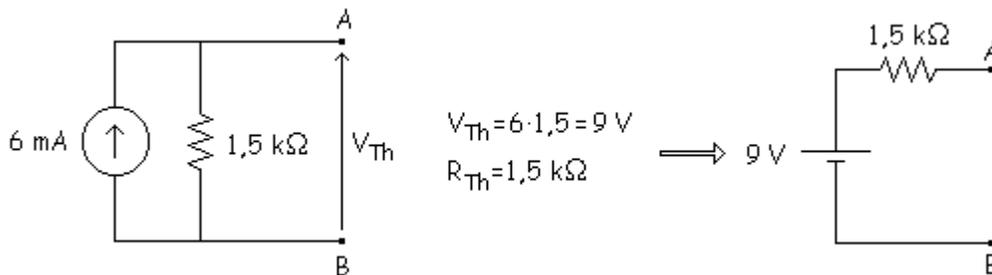


Paso de circuito Norton a circuito Thévenin

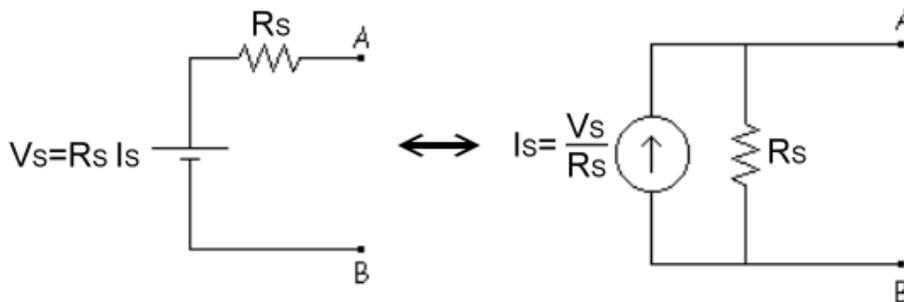
Tenemos este circuito:



Abrimos la carga (R_L) y calculamos la V_{Th} , la R_{Th} es la misma que la R_N .



Un subproducto de estos dos teoremas, es la técnica de conversión o intercambio de fuentes, la cual se describe a continuación:

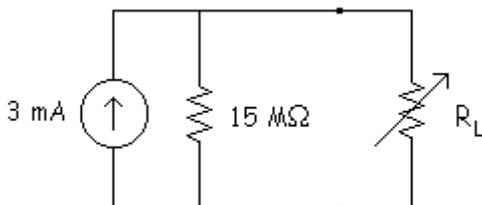


Problemas

En este último apartado de este tema se resolverán algunos problemas relacionados con lo visto anteriormente.

Problema 1.1

En la figura se muestra una fuente de corriente de 2 mA con una resistencia de carga ajustable. Para que la fuente de corriente sea constante, ¿cuál es el máximo valor aceptable para la resistencia de carga?



Solución:

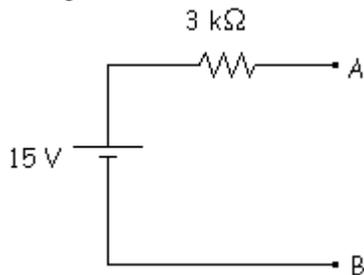
La fuente de corriente es constante cuando la resistencia de carga máxima permisible vale:

$$R_{L\text{máx}} = \frac{15 \text{ M}\Omega}{100} = 150 \text{ k}\Omega$$

La corriente por la carga será aproximadamente de 3 mA para cualquier resistencia de carga entre 0 y 150 kΩ. Mientras la resistencia de carga sea menor que 150 kΩ, podemos ignorar la resistencia interna de 15 MΩ y considerar que la fuente de corriente es ideal.

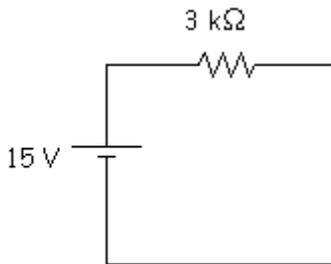
Problema 1.2

En la figura se muestra un circuito Thévenin. Conviértalo en un circuito Norton.



Solución:

En primer lugar, se cortocircuitarán los terminales de carga, como se muestra en la figura:



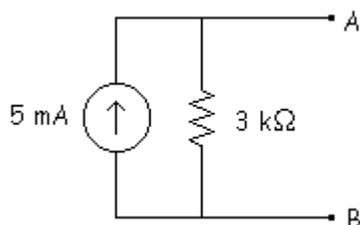
Con esto se calculará la corriente por la carga en este circuito, que es:

$$I_N = \frac{15 \text{ V}}{3 \text{ k}\Omega} = 5 \text{ mA}$$

Esta corriente de carga en cortocircuito es igual a la corriente de Norton. La resistencia Norton es igual a la resistencia Thévenin:

$$R_N = 3 \text{ k}\Omega$$

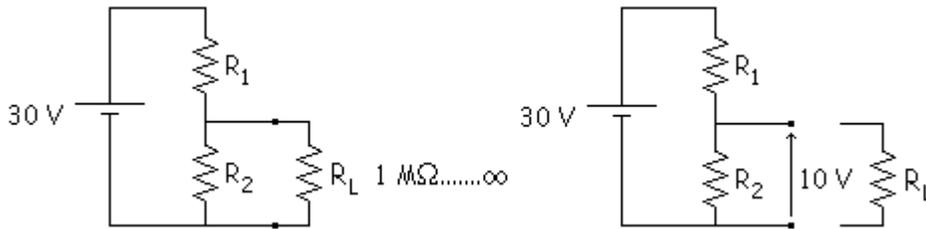
Ahora se dibuja el circuito Norton.



La corriente Norton es igual a la corriente con la carga en cortocircuito (5 mA) y la resistencia Norton es igual a la resistencia Thévenin (3 kΩ).

Problema 1.3

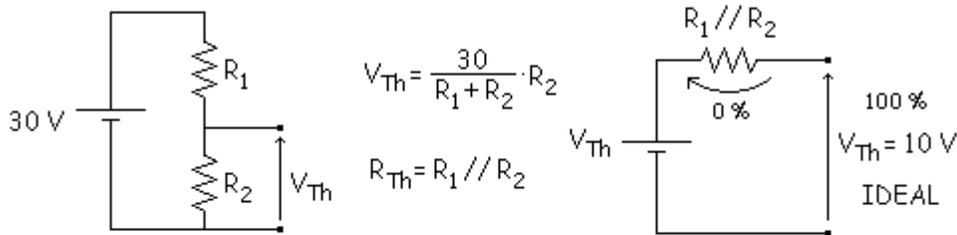
Diseñar un divisor de voltaje para el circuito de la figura que genere una tensión fija de 10 V para todas las resistencias de carga mayores que 1 MΩ.



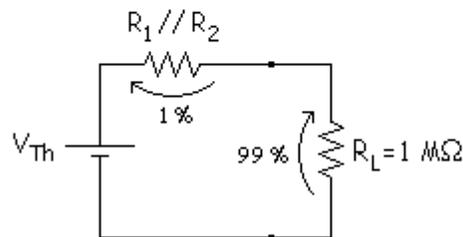
Solución:

Se estudian los casos extremos para determinar los valores de las resistencias R1 y R2.

Caso extremo $R_L = \infty$



Caso extremo $R_L = 1 \text{ M}\Omega$

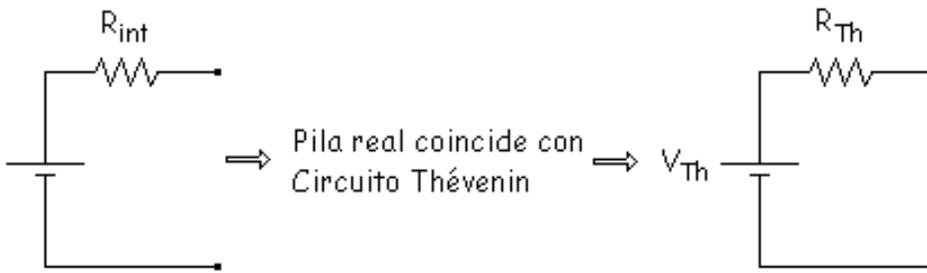


$$R_1 // R_2 = 10 \text{ k}\Omega \left\{ \begin{array}{l} \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 10 \\ 10 = \frac{30}{R_1 + R_2} \cdot R_2 \end{array} \right. \begin{array}{l} R_1 = 30 \text{ k}\Omega \\ R_2 = 15 \text{ k}\Omega \end{array}$$

Problema 1.4

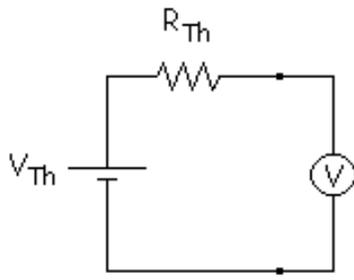
Con una pila D, un multímetro y una caja con varias resistencias, describe un método mediante el cual, empleando una resistencia, hallar la resistencia de Thévenin de la pila.

Solución:

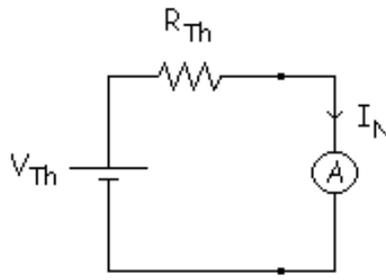


Voltímetro

Amperímetro



$V_{Th} =$



$I_N =$

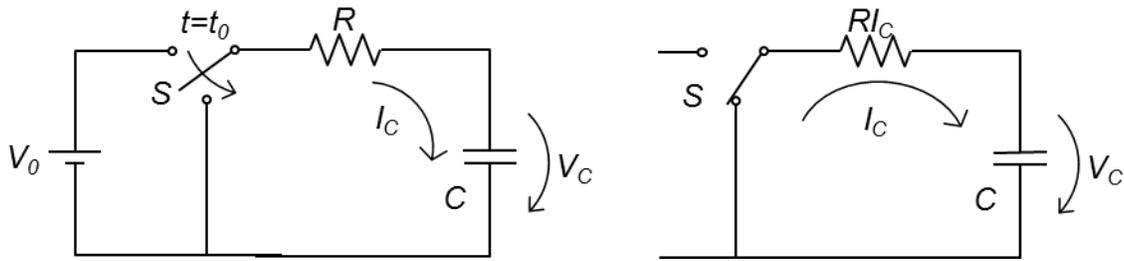
Con estos 2 valores obtenemos el valor de la resistencia Thévenin.

$$V_{Th} = I_N \cdot R_{Th} \implies R_{Th} = \frac{V_{Th}}{I_N}$$

Esta fórmula se suele utilizar para calcular Z_i , Z_o y Z vista desde dos puntos. Es una fórmula muy importante.

Análisis transitorio

Respuesta de entrada cero



Antes del instante $t = t_0$ ($t < t_0$), se tiene que $V_C = V_0$, la energía en el capacitor es $W_C = 1/2CV_0^2$ e $I_C = 0$.

En el instante $t = t_0$, se tiene que:

$$RI_C + V_C = 0$$

$$I_C = C \frac{dV_C}{dt} = CV_C'$$

$$\Rightarrow RCV_C' + V_C = 0$$

La última expresión es una ecuación diferencial homogénea de primer orden y cuya solución es de la forma $V_C = Ae^{st}$ de donde $V_C' = sAe^{st}$.

$$RCsAe^{st} + Ae^{st} = 0$$

puesto que $V_C = Ae^{st} \neq 0$

$$RCs + 1 = 0$$

que es la ecuación característica, de donde:

$$s = -\frac{1}{RC} = -\frac{1}{\tau}$$

donde $\tau = RC$

τ se conoce como la **constante de tiempo** del sistema. Entonces, la respuesta natural de V_C queda definida como:

$$V_C(t) = Ae^{\frac{-t}{\tau}}$$

En el instante del cambio, V_C obedece a la condición de continuidad:

$$V_C(t_0^+) = V_C(t_0^-) = V_0$$

Tomando $t = t_0^+$

$$V_C(t_0^+) = A e^{\frac{-t_0}{\tau}} = V_0$$

de donde : $A = V_0 e^{\frac{+t_0}{\tau}}$

y la respuesta de entrada cero es :

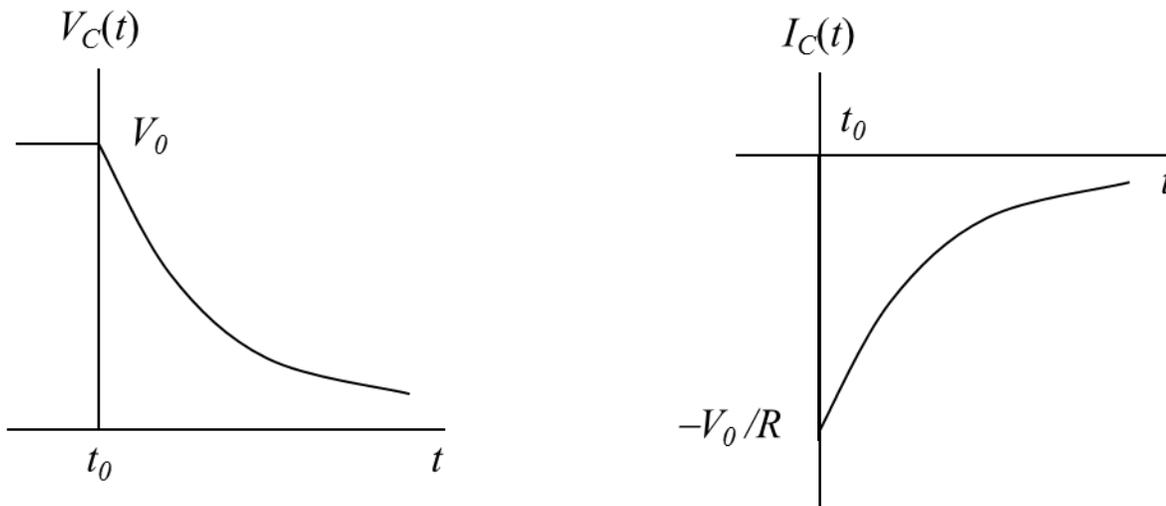
$$V_C(t) = \left(V_0 e^{\frac{t_0}{\tau}} \right) e^{\frac{-1}{\tau} t}, \quad t > t_0$$

De la figura: $I_C = -V_C/R$; por lo tanto, con $t > t_0$ se obtiene:

$$V_C(t) = V_0 e^{\frac{-(t-t_0)}{\tau}}$$

$$I_C(t) = -\frac{V_0}{R} e^{\frac{-(t-t_0)}{\tau}}$$

A continuación se ilustran las formas de onda correspondientes a $V_C(t)$ e $I_C(t)$. Se observa que el voltaje muestra continuidad, pero la corriente salta de $I_C(t_0^-) = 0$ a $I_C(t_0^+) = -V_0/R$. El valor negativo simplemente indica que la corriente transfiere energía de C a R.



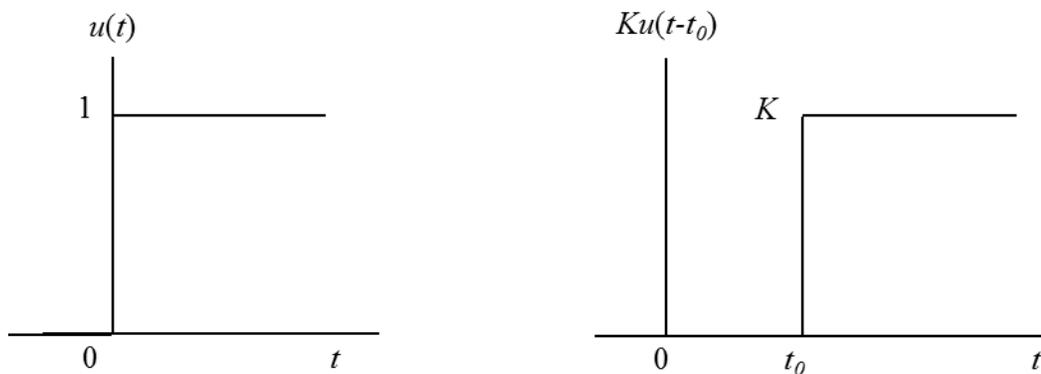
Respuesta a un escalón

Una fuente de CD conmutada se puede expresar mediante la **función escalón unitaria**:

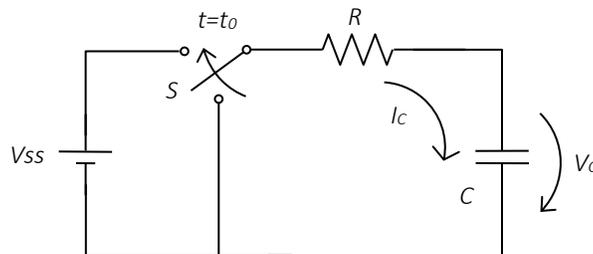
$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

en forma más general, se puede usar una función como sigue:

$$Ku(t-t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ K & t \geq t_0 \end{cases}$$

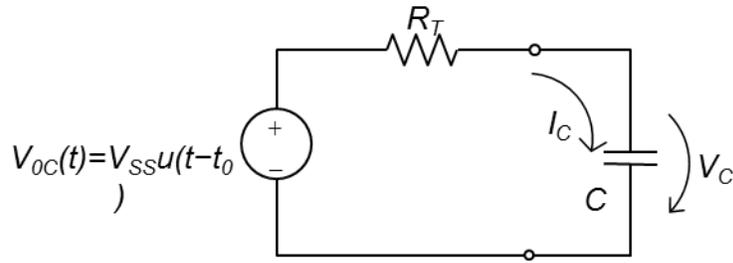


Iniciamos con un circuito RC excitado con una fuente de CD que se enciende en el instante $t=t_0$.



El capacitor inicialmente está descargado por lo que: $V_c(t_0^+) = V_c(t_0^-) = 0$. El circuito puede considerarse como una red de Thévenin respecto al capacitor, con una resistencia R_T y un voltaje de circuito abierto conmutado:

$$V_{0C}(t) = V_{SS}u(t-t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ V_{SS} & t \geq t_0 \end{cases}$$



Puesto que $I_C = CV_C'$ y $R_T I_C + V_C = V_{OC}(t) = V_{SS}$ cuando $t \geq t_0$, el comportamiento transitorio de $V_C(t)$ está regido por la ecuación diferencial no homogénea:

$$\tau V_C' + V_C = V_{SS} \quad t \geq t_0, \text{ donde } \tau = R_T C$$

La solución general de la ecuación diferencial tiene la forma:

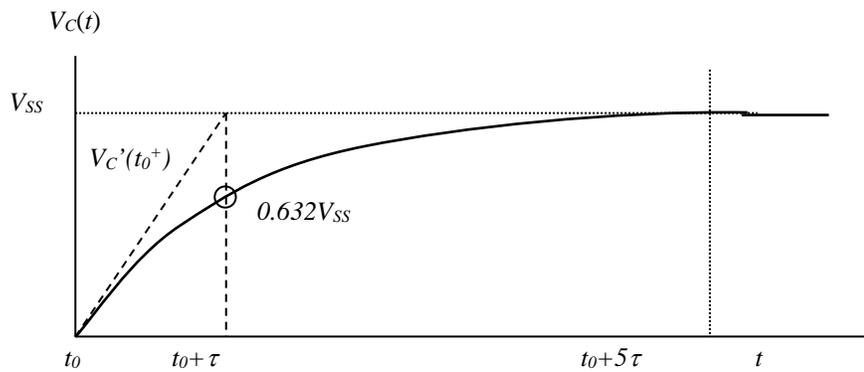
$$V_C(t) = V_{SS} + Ae^{-t/\tau}$$

Si se satisface la condición inicial $V_C(t_0^+) = 0$, la constante A estará dada por:

$$A = -V_{SS}e^{t_0/\tau}$$

por lo que la respuesta al escalón de voltaje del capacitor es:

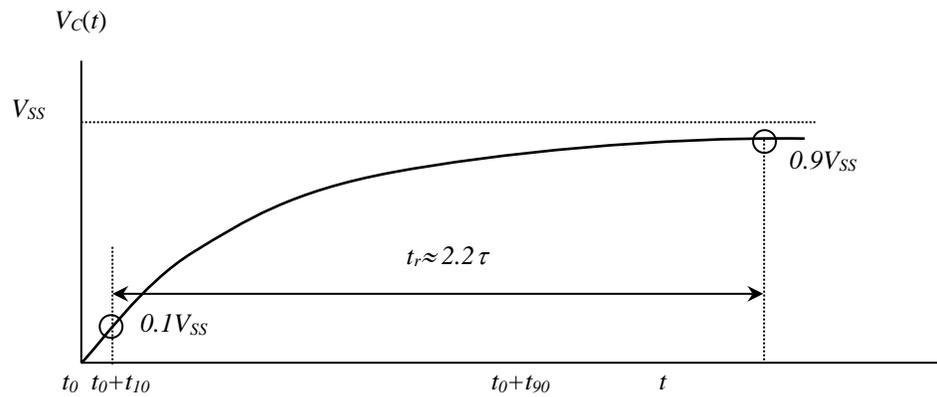
$$V_C(t) = V_{SS} + (-V_{SS}e^{t_0/\tau})e^{-t/\tau} = V_{SS}(1 - e^{-(t-t_0)/\tau}) \quad t \geq t_0$$



La gráfica muestra cómo la respuesta pasa por un intervalo transitorio en su camino al estado estacionario con $V_C(t) = V_{SS}$ conforme $t \rightarrow \infty$. La pendiente inicial es:

$$V_C'(t_0^+) = V_{SS}/\tau$$

La respuesta transitoria se hace cero después de 5 constantes de tiempo, puesto que $V_C(t) \approx V_{SS}$ en el instante $t > t_0 + 5\tau$.

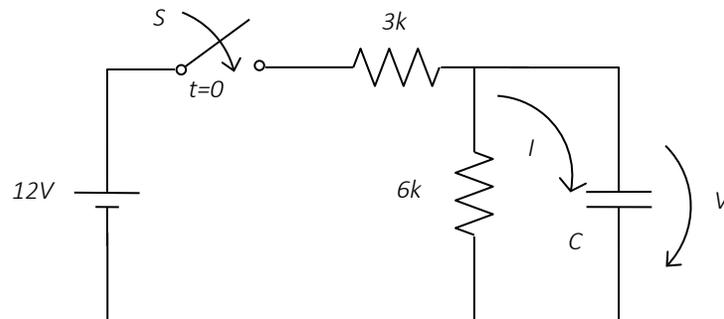


En la figura se muestra el intervalo en que el voltaje en el capacitor pasa de un 10% (t_{10}) a un 90% (t_{90}) de V_{SS} . Este intervalo se llama **tiempo de subida t_r** y está dado como:

$$t_r = t_{90} - t_{10} \approx 2.2 \tau$$

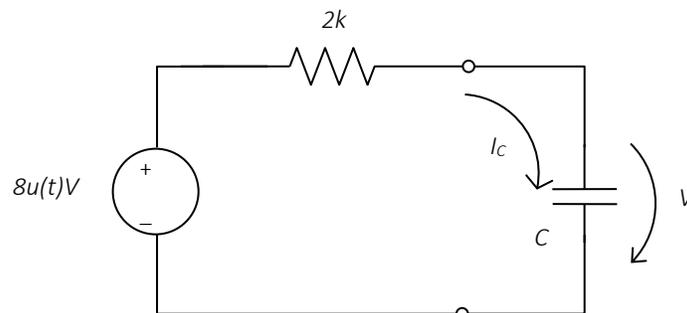
Ejercicio.

En el circuito mostrado, el interruptor ha estado abierto por mucho tiempo antes de $t=0$, así que el capacitor está descargado. Se quiere obtener el voltaje de respuesta al escalón resultante $V(t)$ y la corriente $I(t)$ cuando $C=50\mu\text{F}$. Determinar también los valores de voltaje y corriente cuando inicia el estado estacionario.



Solución:

Se obtiene el circuito equivalente de Thévenin.



Con el interruptor cerrado, los parámetros de Thévenin de la red son:

$$R_T = 3 \parallel 6 = 2k\Omega \quad V_{OC} = V_{SS} = \frac{6}{3+6} \cdot 12 = 8V$$

por lo tanto:

$$\tau = R_T C = (2k\Omega)(50\mu F) = 0.1s$$

por otro lado, se definió que $V_C(t) = V_{SS}(1 - e^{-(t-t_0)/\tau}) \quad t \geq t_0$, entonces:

$$V(t) = 8(1 - e^{-10t})V, \quad t \geq 0$$

y la corriente es:

$$I(t) = \frac{8V - V(t)}{2k\Omega} = 4e^{-10t} \text{ mA} \quad t \geq 0$$

El intervalo transitorio termina cuando $t = 5\tau = 0.5s$, entonces:

$$V(0.5) = 8(1 - e^{-5}) = 7.95V$$

$$I(0.5) = 4e^{-5} \text{ mA} = 2.7\mu A$$

Consideraciones adicionales

La constante de tiempo es el tiempo necesario para que un capacitor (condensador) se cargue a un 63.2% de la carga total (máximo voltaje), después de que una fuente de corriente directa se haya conectado a un circuito RC.

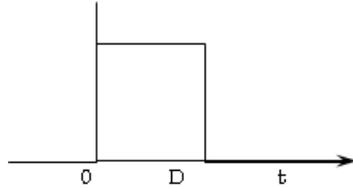
Cuando la fuente de voltaje se retira de un circuito RC y ha transcurrido una constante de tiempo, el voltaje en el capacitor ha pasado de un 100% hasta un 36.8 % (se ha perdido un 63.2% de su valor original).

No. de constantes de tiempo	% de carga o crecimiento	% de descarga o decrecimiento
1	63.2	36.8
2	86.5	13.5
3	95.0	5.0
4	98.2	1.8
5	99.3	0.7

Respuesta al impulso

Esta ocurre cuando un circuito no tiene energía inicial almacenada y la excitación es un impulso rectangular. Este impulso inicia en el instante $t=0$ y termina en el instante $t=D$, donde D es la duración del impulso.

El impulso comienza igual que un escalón, así que la respuesta inicial es idéntica a la del escalón:



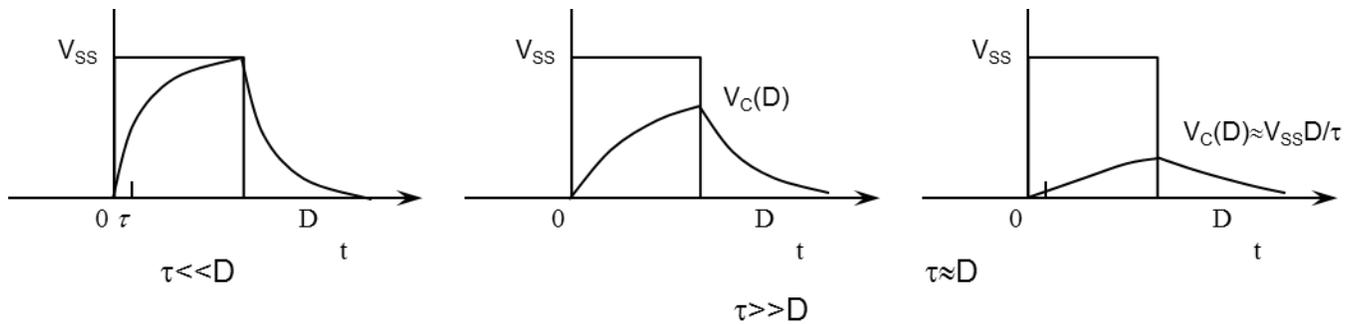
$$V_C(t) = V_{SS} \left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}} \right) \quad 0 < t \leq D$$

$V_C(t)$ denota el voltaje en el capacitor y V_{SS} es el valor de estado estacionario al que $V_C(t)$ se aproximaría si el impulso fuera infinito. Sin embargo, el impulso termina en el instante D , cuando $V_C(t)$ tiene el valor:

$$V_C(D) = V_{SS} \left(1 - e^{\frac{-D}{\tau}} \right)$$

Cuando termina el impulso, la respuesta será idéntica a la respuesta de entrada cero.

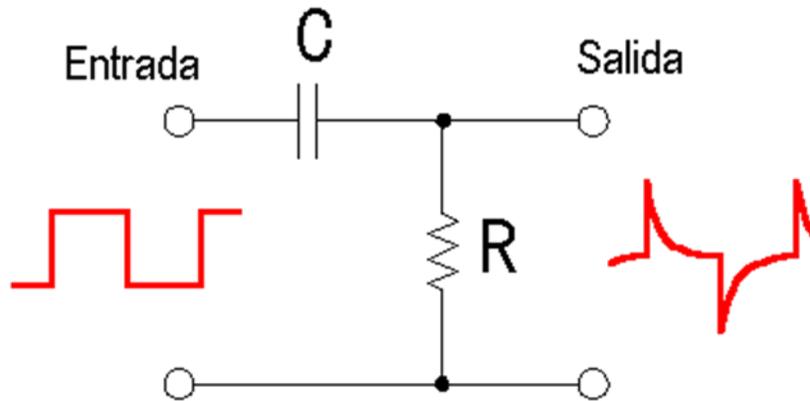
$$V_C(t) = V_C(D) e^{\frac{-(t-D)}{\tau}} \quad t > D$$



El diferenciador

Es un circuito RC que actúa como un filtro pasivo para bajas frecuencias, cuya frecuencia de corte se calcula según la formula empírica:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$

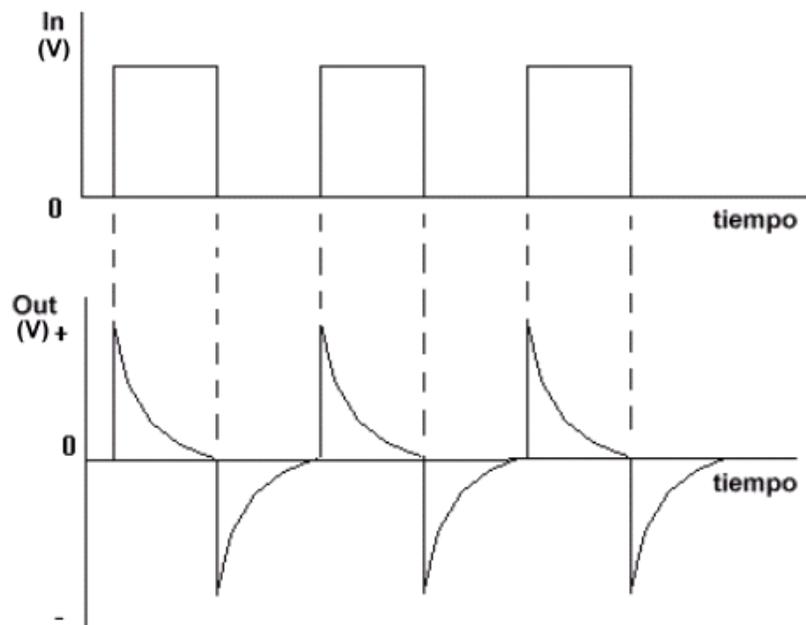


¿Qué ocurre cuando se aplica un tren de impulsos a la entrada de este circuito?

Cuando un pulso de tensión, se eleva rápidamente de cero al máximo, la corriente que carga el condensador C, se eleva a un valor máximo también. En la medida que se carga C, la corriente se cae exponencialmente a cero. Ya que esta corriente de carga pasa por la resistencia R, el voltaje a través de la R (que es el voltaje de salida) hace lo mismo.

Por consiguiente se consigue la forma mostrada, con el voltaje de salida que sube abruptamente al máximo y a continuación decae exponencialmente a cero. Cuando el pulso se cae a cero, se produce la descarga del condensador C. La corriente de descarga es alta en la salida y entonces se cae exponencialmente a cero como la descarga del condensador C.

Sin embargo, dado que la corriente de descarga, está en oposición a la dirección de la carga actual, el voltaje por R se invertirá, con lo que la forma de onda se muestra ahora por debajo de la línea cero. Para cada pulso, la forma de onda de salida se repite, mostrando la forma siguiente.

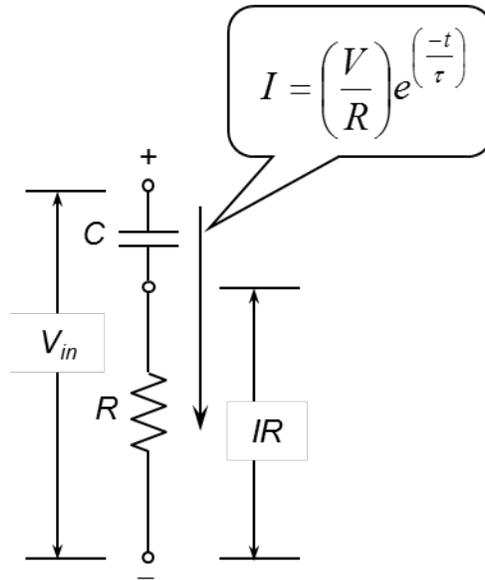


Viendo la figura anterior, se puede apreciar el efecto que ejerce el condensador C al cargarse y la posterior descarga sobre la resistencia R, motivo por el cual la señal de salida presenta los picos del gráfico. La Ley Ohm dice que, la corriente es proporcional al voltaje y recíprocamente, el voltaje es proporcional a la corriente.

El pulso de salida es proporcional a la variación del pulso de entrada con el tiempo t . El circuito actúa como una derivada; sin embargo, sólo diferenciará el pulso de entrada si la constante de tiempo es pequeña comparada con el ancho de la señal. En caso contrario el pulso pasa sin grandes variaciones.

La carga eléctrica empieza a almacenarse en el condensador cuando el voltaje se aplica a la entrada. La corriente eléctrica que fluye a través del condensador y la resistencia se calcula por la siguiente fórmula:

$$I = \left(\frac{V}{R}\right)e^{\left(\frac{-t}{\tau}\right)}$$



El cambio de tensión que aparece en la resistencia se deduce de la fórmula siguiente.

$$IR = Ve^{\left(\frac{-t}{\tau}\right)}$$

Considérese la salida en el resistor a baja frecuencia, esto es:

$$\omega \ll \frac{1}{RC}$$

donde ω es la frecuencia de la señal de entrada.

Esto significa que el capacitor tiene tiempo de cargarse a un voltaje aproximadamente igual al de entrada. De lo anterior se tiene que:

$$R \ll \frac{1}{\omega C},$$

Cuando se aplica una señal alterna al circuito, la impedancia del capacitor queda definida como:

$$Z_C = 1 / j\omega C = 0 + j(-1 / \omega C)$$

Y la reactancia capacitiva viene a ser:

$$X_C = \text{Im}[Z_C] = -1 / \omega C$$

Por tanto, la corriente en el capacitor del circuito está definida como:

$$I \approx \frac{V_{in}}{1/j\omega C}$$

$$V_{in} \approx \frac{I}{j\omega C} \approx V_C$$

Ahora bien,

$$V_R = IR = C \frac{dV_C}{dt} R$$

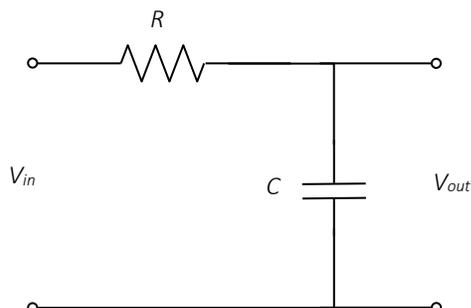
$$V_R \approx RC \frac{dV_{in}}{dt}$$

Lo cual es un diferenciador a través del resistor.

Este tipo de circuitos son más conocidos como filtro RC pasivo pasa altas que se utiliza para filtrar las frecuencias superiores al valor especificado por la fórmula anterior. Desde otra perspectiva este circuito, separa la corriente continua entre circuitos ya que el condensador interrumpe el paso de la corriente continua, dejando pasar sólo el pulso correspondiente al flanco de entrada y el de salida.

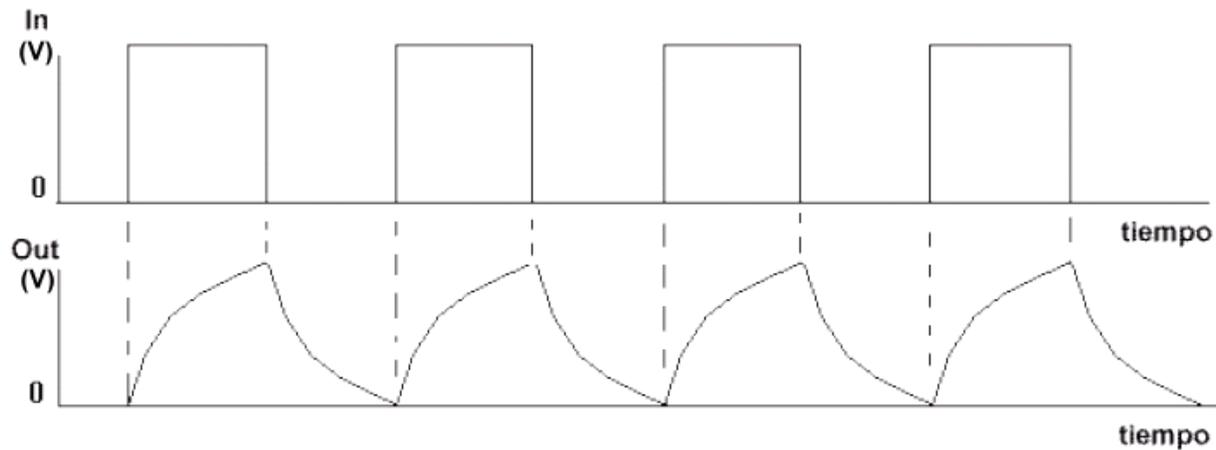
El integrador

El integrador mas simple consta de una resistencia R y un condensador C, en este caso se trata de un filtro pasivo pasa bajas, como se muestra en la imagen siguiente.



¿Que ocurre al aplicar un tren de impulsos?

Cuando llega un pulso de entrada el voltaje en el resistor se eleva rápidamente, cargando al capacitor C exponencialmente a través de R, lo cual deforma el pulso de entrada como se muestra en la forma de onda inferior. Cuando el pulso de entrada se cae rápidamente a cero, el condensador C se descarga exponencialmente a cero a través de la resistencia R. El proceso se repite para cada pulso de entrada que, dará la forma de onda de salida mostrada.



Si se considera la salida en el capacitor para alta frecuencia, esto es:

$$\omega \gg \frac{1}{RC}$$

esto significa que el capacitor no tendrá tiempo suficiente para cargarse a un nivel muy alto, por lo que su voltaje será pequeño. Así, el voltaje de entrada es aproximadamente igual al del resistor. Para ver esto, considérese la expresión para corriente:

$$I = \frac{V_{in}}{R + 1/j\omega C}$$

pero la condición de frecuencia especificada significa que:

$$\omega C \gg \frac{1}{R}$$

así que:

$$I \approx \frac{V_{in}}{R}$$

Ahora bien,

$$V_C = \frac{1}{C} \int_0^t I dt$$

por lo tanto,

$$V_C \approx \frac{1}{RC} \int_0^t V_{in} dt$$

Lo cual es una función de integración en el capacitor.

EJERCICIOS RESUELTOS
RELACIONADOS CON TEORÍA
BÁSICA PARA ANÁLISIS DE
CIRCUITOS ELÉCTRICOS Y
ANÁLISIS TRANSITORIO

EJEMPLO 2.1 (13)

Un resistor de 4Ω tiene una corriente $i = 2.5 \text{ sen } 500 \pi t$ (A). Determinése el voltaje instantáneo, la potencia instantánea y la energía de un ciclo.

$$vR = Ri = 10 \text{ sen } 500 \pi t \quad (V)$$

$$p = Ri^2 = 25 \text{ sen}^2 500 \pi t \quad (W)$$

$$w = \int_0^t p dt = 25 \left(\frac{t}{2} - \frac{\text{sen } 1000 \pi t}{2000 \pi} \right) \quad (J)$$

Las gráficas de i , p y w en la figura 2.10 ilustran que p es siempre positiva. De ello se concluye que la energía aumenta todo el tiempo y que ésta es la energía absorbida por el resistor.

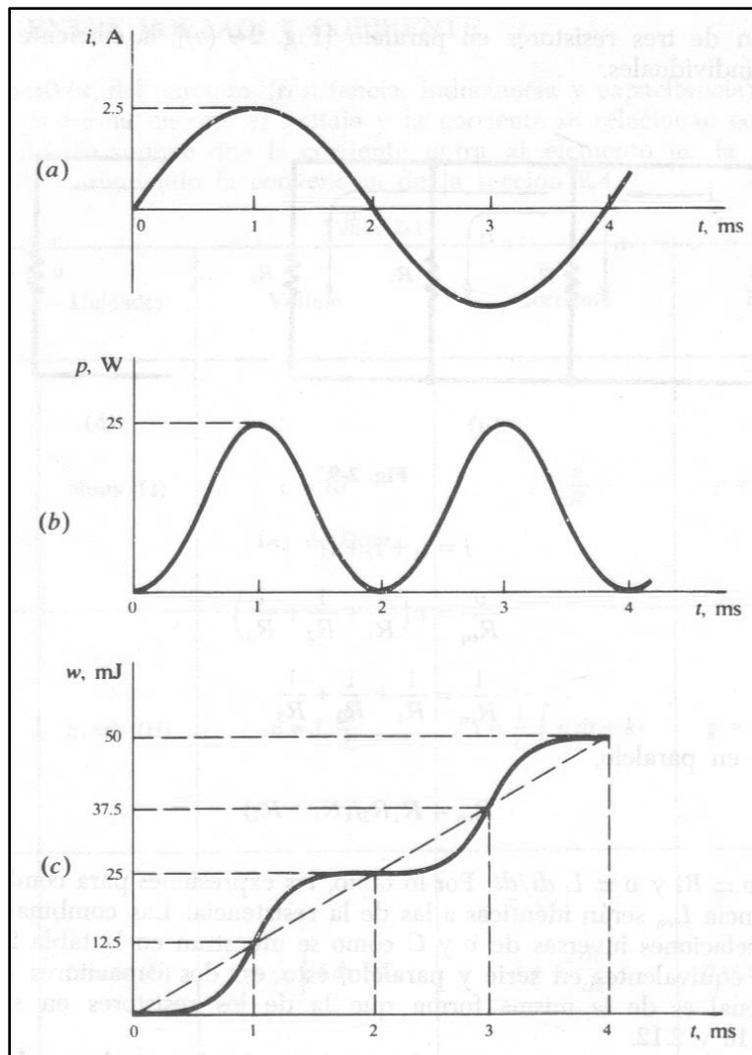


Figura 2-10

EJEMPLO 2.2 (14)

En el intervalo $0 \leq t \leq (\pi/50)$, una inductancia de 30 mH tiene una corriente $i = 10 \sin 50t$ (A). En cualquier otro momento la corriente es cero. Obténgase el voltaje, la potencia y la energía para la inductancia.

$$vL = L \frac{di}{dt} = 15 \cos 50t \quad (V) \quad p = vLi = 75 \sin 100t \quad (W) \quad w = \int_0^t p \, dt + w(0)$$

Si $w(0) = 0$,

$$w = 0.75 (1 - \cos 100t) \quad (J)$$

Como se muestra en la figura 2-11, de la corriente dada resulta una energía máxima almacenada de 1.50 J a $t = (\pi/100)$ s. Durante los siguientes $(\pi/100)$ s esta energía vuelve a la fuente, y la energía almacenada es cero otra vez cuando $t = (\pi/50)$ s.

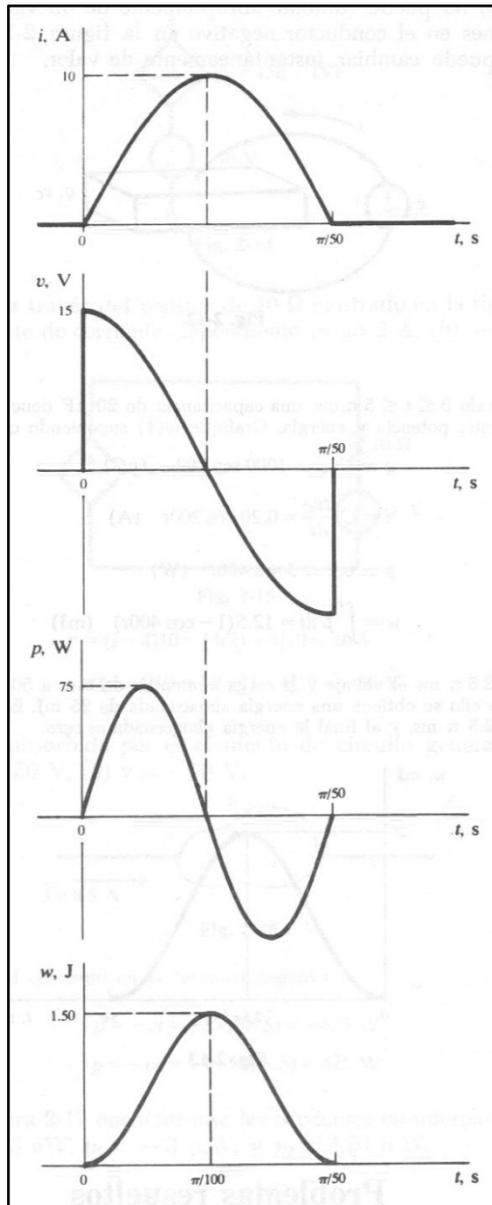


Figura 2-11

EJEMPLO 2.3 (16)

En el intervalo $0 \leq t \leq 5\pi$ ms, una capacitancia de $20 \mu\text{F}$ tiene un voltaje $v_c = 50 \text{ sen } 200t$ (V). Encuéntrese la carga, corriente, potencia y energía. Grafique $w(t)$ suponiendo que $w(0) = 0$.

$$q = Cvc = 1000 \text{ sen } 200t \quad (\mu\text{C})$$

$$i = C \frac{dvc}{dt} = 0.20 \text{ cos } 200t \quad (\text{A})$$

$$p = vci = 5 \text{ sen } 400t \quad (\text{W})$$

$$w = \int_0^t p dt = 12.5 (1 - \text{cos } 400t) \quad (\text{mJ})$$

En el intervalo $0 \leq t \leq 2.5\pi$ ms el voltaje y la carga aumentan de cero a 50 V y 1000 μC , respectivamente. La figura 2-13 muestra que con ello se obtiene una energía almacenada de 25 mJ. Esta energía se devuelve a la fuente en el siguiente intervalo de 2.5π ms, y al final la energía almacenada es cero.

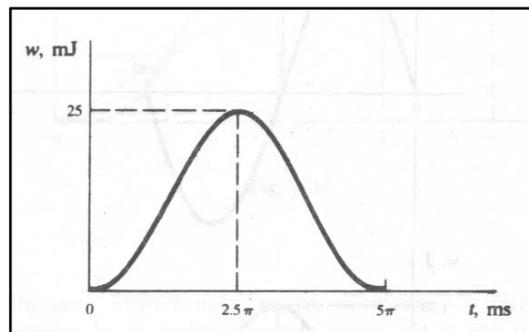


Figura 2-13

PROBLEMA 2.6 (18)

- (a) Obténgase la resistencia equivalente en el circuito mostrado en la figura 2-19 (a). (b) Con un voltaje constante aplicado a las terminales ab, ¿cuál es el resistor que absorbe más potencia?

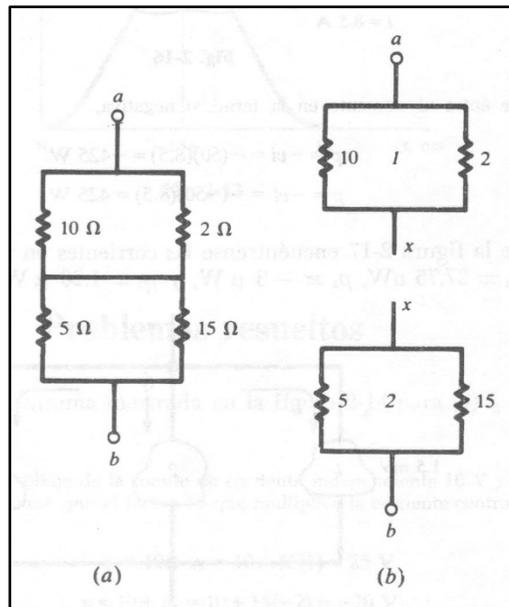


Figura 2-19

- a) Descompóngase el circuito en subcircuitos en serie 1 y 2, como se muestra en la figura 2-19 (b). Entonces,

$$R_{eq1} = \frac{2(10)}{12} = \frac{20}{12} \Omega$$

$$R_{eq2} = \frac{5(15)}{20} = \frac{45}{12} \Omega$$

$$R_{eq} = R_{eq1} + R_{eq2} = \frac{65}{12} \Omega$$

- b) Hay una diferencia única de voltaje a través del subcircuito 1, y una diferencia única de voltaje en el subcircuito 2. Por lo tanto,

$$\frac{P_{10}}{P_2} = \frac{2}{10} \quad y \quad \frac{P_5}{P_{15}} = \frac{15}{5}$$

Por lo que la máxima potencia debe ser la mayor de P_2 y P_5 . Pero como la corriente fluye a través de los dos circuitos y como $P = I^2 R_{eq}$.

$$\frac{P_{10} + P_2}{P_5 + P_{15}} = \frac{R_{eq1}}{R_{eq2}}$$

$$\frac{P_2 \left(\frac{P_{10}}{P_2} \right) + 1}{P_5 \left(1 + \left(\frac{P_{15}}{P_5} \right) \right)} = \frac{20}{45}$$

$$\frac{P_2}{P_5} \frac{\left(\frac{2}{10}\right) + 1}{1 + \left(\frac{5}{15}\right)} = \frac{20}{45}$$

$$\frac{P_2}{P_5} = \frac{40}{81}$$

El resistor de 5 Ω absorbe la mayor potencia

PROBLEMA 2.7 (19)

Encuéntrese la corriente I suministrada por la fuente de 50 V que se indica en la figura 2-20 (a)

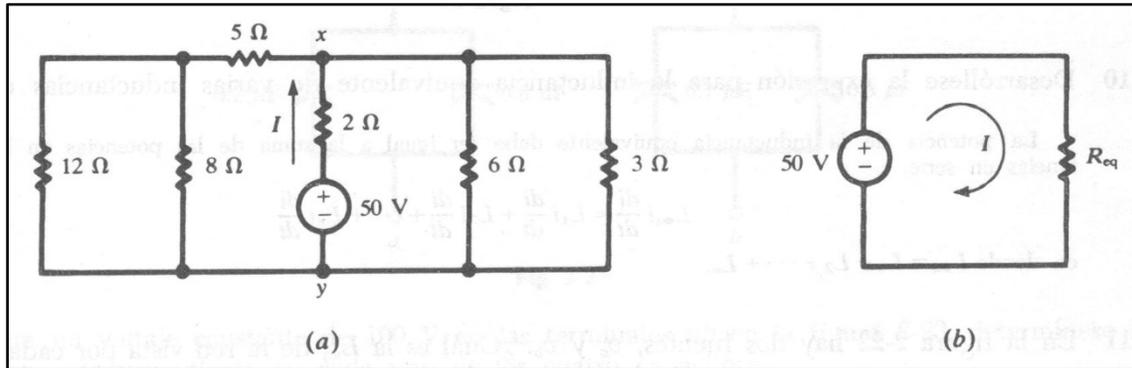


Figura 2-20

La red de resistores se reduce primero a un equivalente único, R_{eq} [Fig. 2-20 (b)]. Para ilustrar los pasos necesarios pueden hacerse esquemas a medida que procede la reducción.

La resistencia a la izquierda de la rama xy es

$$R_{eq1} = 5 + \frac{8(12)}{20} = 9.80 \Omega$$

Y a la derecha $R_{eq2} = 6(3) / 9 = 2 \Omega$. Estas dos partes están en paralelo una con otra, y en serie con la resistencia de 2 Ω . Entonces

$$R_{eq} = 2 + \frac{9.8(2)}{11.80} = 3.66 \Omega$$

$$y I = 50 / 3.66 = 13.7 \text{ A}$$

PROBLEMA 2.11 (20)

En la figura 2-22 hay dos fuentes, v_a y v_b . ¿Cuál es la L_{eq} de la red vista por cada fuente?

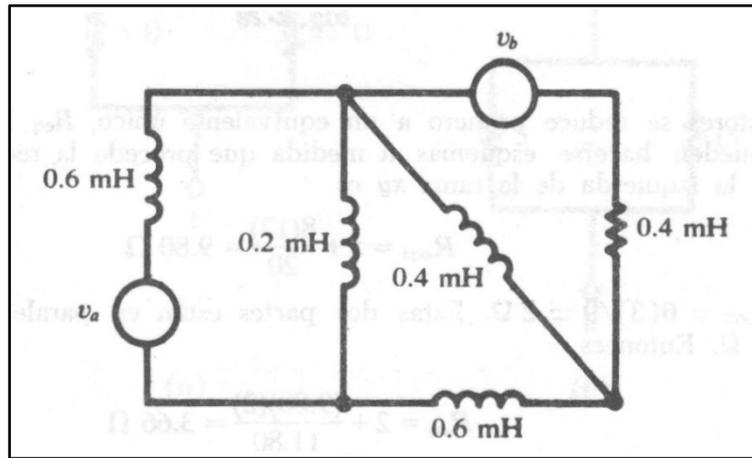


Figura 2-22

Para encontrar L_{eq} a partir de la fuente v_a , se remueve v_b y se reemplaza por un cortocircuito. Entonces

$$L_{eqa} = 0.6 + \frac{\left[\frac{(0.4)(0.4)}{0.8} + 0.6 \right] (0.2)}{\left[\frac{(0.4)(0.4)}{0.8} + 0.6 \right] + 0.2} = 0.760 \text{ mH}$$

En forma similar, $L_{eqb} = 0.661 \text{ mH}$

PROBLEMA 2.13 (21)

Determinése la capacitancia equivalente de las cuatro capacitancias mostradas en la figura 2-23.

$$C_{eq} = \frac{(0.2 + 0.8)(0.7 + 0.3)}{(0.2 + 0.8) + (0.7 + 0.3)} = 0.5 \mu F$$

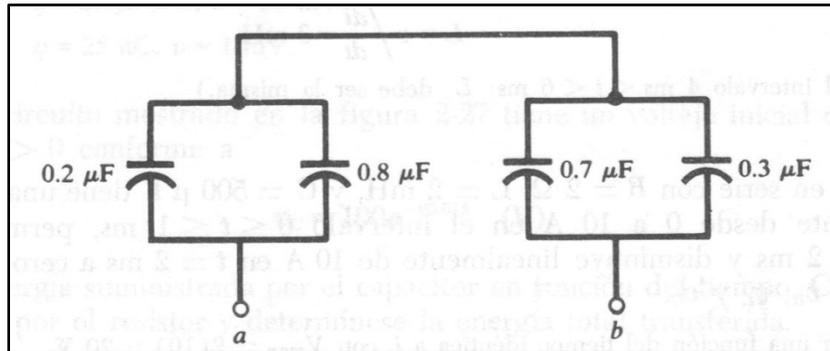


Figura 2-23

PROBLEMA 2.18 (23)

El capacitor del circuito mostrado en la figura 2-27 tiene un voltaje inicial de 100 V el cual disminuye para $t > 0$ conforme a

$$v_c = 100e^{-t/0.015} \text{ (V)}$$

Encuéntrese la energía suministrada por el capacitor en función del tiempo. Compárese con la energía absorbida por el resistor y determínese la energía total transferida.

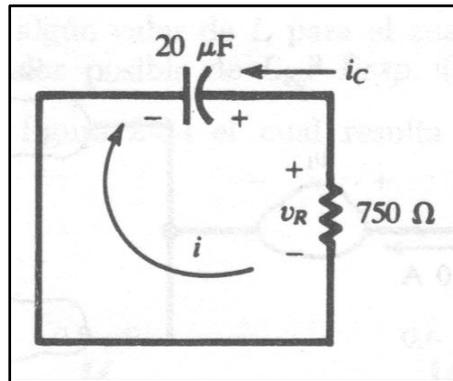


Figura 2.27

La corriente i_c entra al capacitor por la terminal + tanto que la corriente i , en el sentido de las manecillas del reloj, es de signo opuesto. Se tiene:

$$i_c = C \frac{dv_c}{dt}$$

Y así la energía absorbida por el capacitor (o sea la energía almacenada en su campo eléctrico) es

$$w_c = \int v_c i_c dt = \int C v_c \frac{dv_c}{dt} dt = C \int d\left(\frac{v_c^2}{2}\right) = \frac{C v_c^2}{2}$$

Donde la corriente de la integración es cero porque w_c debe anularse, cuando v_c se anula (en $t = \infty$). La energía suministrada por el capacitor está dada entonces por

$$w'_c = w_c(0) - w_c = \frac{C}{2} [v_c^2(0) - v_c^2] = 0.10 (1 - e^{-\frac{t}{0.0075}}) \text{ (J)}$$

La potencia absorbida por el resistor es [$p_r = v_r i = v_c(-i_c)$]; por lo tanto, la energía absorbida es

$$w_r = - \int_0^t v_c i_c dt = w_c(0) - w_c(t) = w'_c$$

Lo que está de acuerdo con la conservación de la energía.

La cantidad total de energía transferida es

$$w'_c(\infty) = w_c(0) = 0.10 \text{ J}$$

Esta es la cantidad de energía disipada como calor en el resistor

EJEMPLO 3.3 (29)

Obtégase la potencia total suministrada por la fuente de 60 V y la potencia absorbida en cada resistor en la red de la figura 3-6.

$$R_{ab} = 7 + 5 = 12 \Omega$$

$$R_{cd} = (12)(6)/12 + 6 = 4 \Omega$$

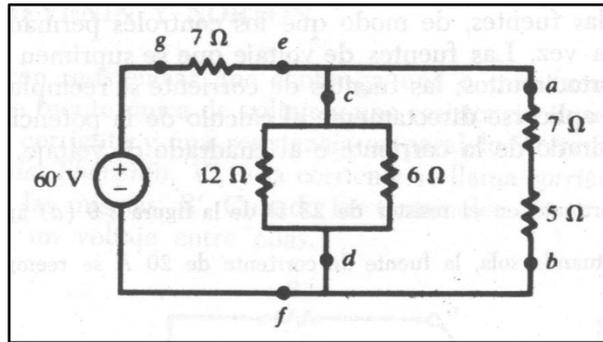


Figura 3-6

Estas dos equivalencias están en paralelo (Fig. 3-7), lo que da

$$R_{ef} = (4)(12)/4 + 12 = 3 \Omega$$

Entonces este equivalente de 3 Ω está en serie con la resistencia de 7 Ω (Fig. 3-8), de modo que para el circuito entero,

$$R_{eq} = 7 + 3 = 10 \Omega$$

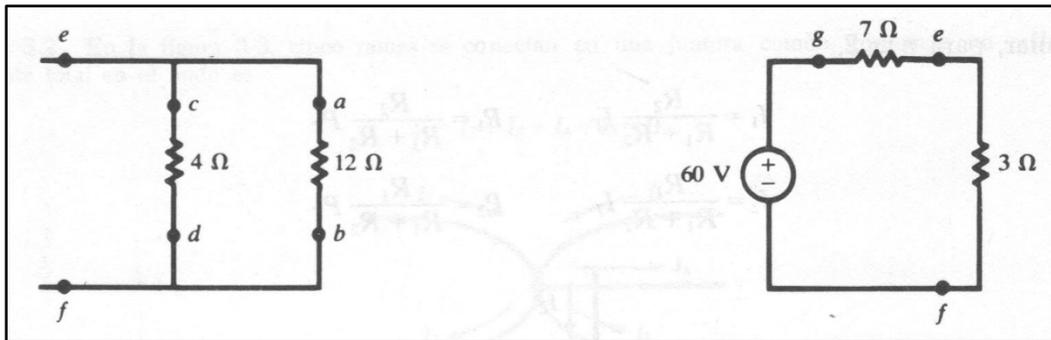


Figura 3-7

Figura 3-8

La potencia total absorbida, igual a la potencia total suministrada por la fuente, puede calcularse ahora como

$$P_T = V^2/R_{eq} = (60)^2/10 = 360 \text{ W}$$

Esta potencia se divide entre R_{ge} y R_{ef} como sigue:

$$P_{ge} = P_{7\Omega} = \frac{7}{7+3}(360) = 252 \text{ W} \quad P_{ef} = \frac{3}{7+3}(360) = 108 \text{ W}$$

La potencia P_{ef} se divide aún más entre R_{cd} y R_{ab} , así:

$$P_{cd} = \frac{12}{4 + 12}(108) = 81 \text{ W} \quad P_{ab} = \frac{4}{4 + 12}(108) = 27 \text{ W}$$

Finalmente, esas potencias se dividen entre las resistencias individuales como sigue:

$$P_{12\Omega} = \frac{6}{12 + 6}(81) = 27 \text{ W} \quad P_{7\Omega} = \frac{7}{7 + 5}(27) = 15.75 \text{ W}$$

$$P_{6\Omega} = \frac{12}{12 + 6}(81) = 54 \text{ W} \quad P_{5\Omega} = \frac{5}{7 + 5}(27) = 11.25 \text{ W}$$

EJEMPLO 3.4 (30)

Calcúlese la corriente en el resistor de 23 Ω de la figura 3-9 (a) aplicando el principio de superposición.

Con la fuente de 200 V actuando sola, la fuente de corriente de 20 A se reemplaza con un circuito abierto, figura 3-9 (b).

$$R_{eq} = 47 + \frac{(27)(4 + 23)}{54} = 60.5 \Omega$$

$$I_T = \frac{200}{60.5} = 3.31 A$$

$$I'_{23\Omega} = \frac{27}{54}(3.31) = 1.65 A$$

Cuando la fuente de 20 A actúa sola, la fuente de 200 V se reemplaza por un cortocircuito, figura 3-9 (c). La resistencia equivalente a la izquierda de la fuente es

$$R_{eq} = 4 + \frac{(27)(47)}{74} = 21.15 \Omega$$

Entonces

$$I''_{23\Omega} = \frac{21.15}{21.15 + 23} (20) = 9.58 A$$

La corriente total en el resistor de 23 Ω es:

$$I_{23\Omega} = I'_{23\Omega} + I''_{23\Omega} = 11.23 A$$

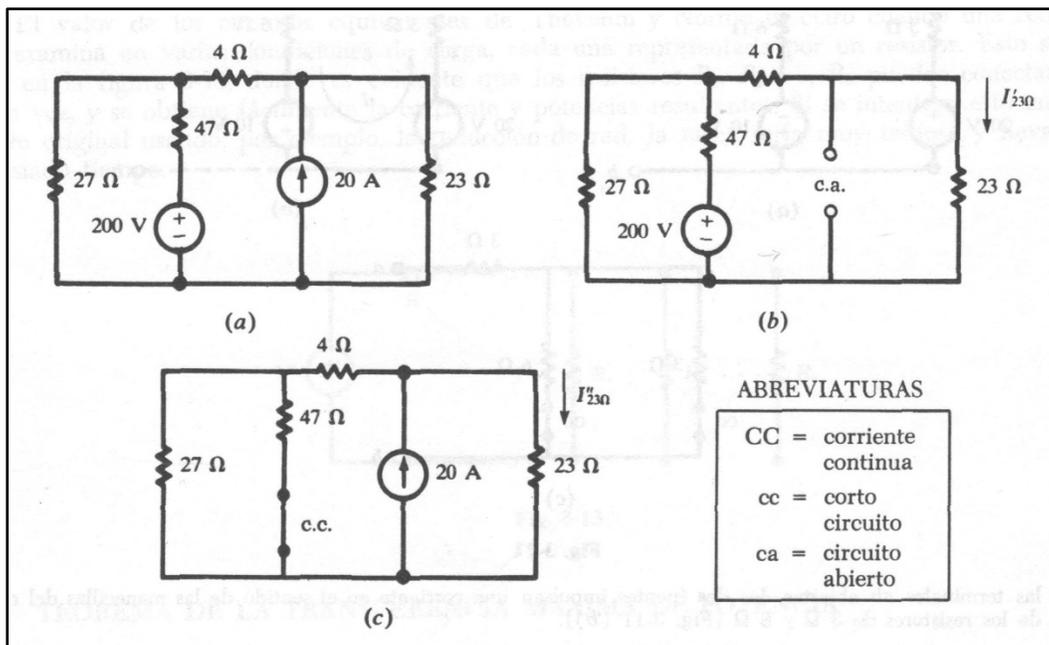


Figura 3-9

EJEMPLO 3.5 (32)

Obtégase los circuitos equivalentes de Thévenin y Norton para la red que se muestra en la figura 3-11 (a)

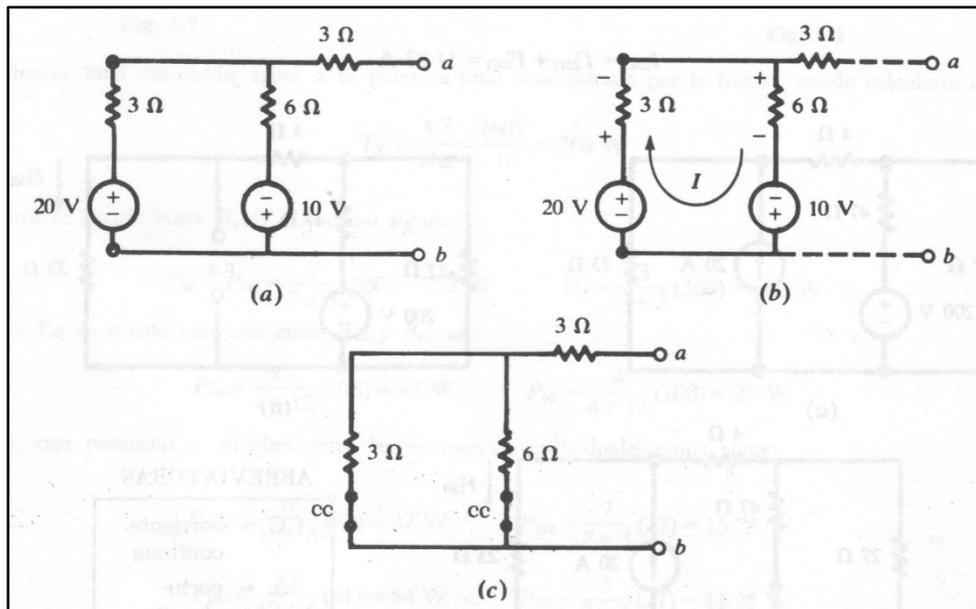


Figura 3-11

Con las terminales ab abiertas, las dos fuentes impulsan una corriente en el sentido de las manecillas del reloj a través de los resistores de $3\ \Omega$ y $6\ \Omega$ [Fig. 3-11 (b)].

$$I = \frac{20 + 10}{3 + 6} = \frac{30}{9} A$$

Como no pasa corriente a través del resistor superior derecho de $3\ \Omega$, el voltaje de Thévenin puede tomarse de cualquier rama activa:

$$V_{ab} = V' = 20 - \left(\frac{30}{9}\right)(3) = 10 V$$

o

$$V_{ab} = V' = \left(\frac{30}{9}\right)6 - 10 = 10 V$$

La resistencia R' puede obtenerse poniendo en cortocircuito las fuentes de voltaje [Fig. 3-11 (c)] y encontrando la resistencia equivalente de esta red en las terminales ab :

$$R' = 3 + \frac{(3)(6)}{9} = 5\ \Omega$$

Cuando un cortocircuito se aplica a las terminales, la corriente I_{cc} resulta de las dos fuentes. Suponiendo que a través del cortocircuito corre de a a b , por superposición se tiene:

$$I_{cc} = I' = \left(\frac{6}{6+3}\right) \left[\frac{20}{3 + \frac{(3)(6)}{9}}\right] - \left(\frac{3}{3+3}\right) \left[\frac{10}{6 + \frac{(3)(3)}{6}}\right] = 2 A$$

La figura 3-12 muestra los dos circuitos equivalentes. En el caso presente. V' , R' e I' se obtuvieron independientemente. Ya que estas magnitudes están relacionadas por la ley de Ohm, cualquiera de dos puede usarse para obtener la tercera.

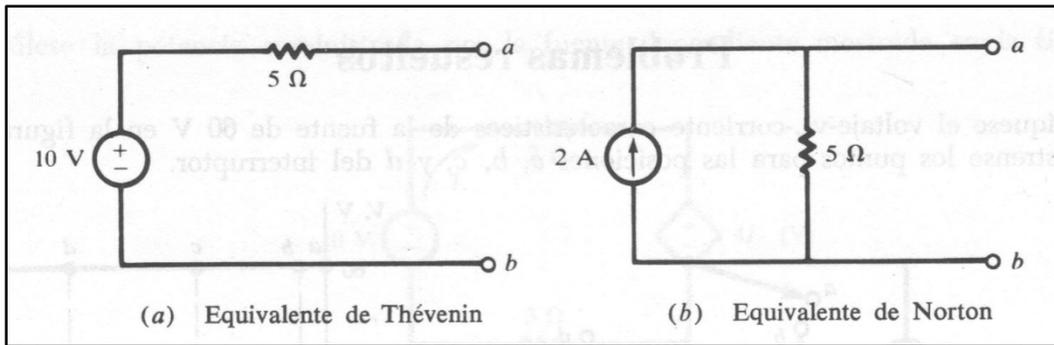


Figura 3-12

El valor de los circuitos equivalentes de Thévenin y Norton es claro cuando una red activa se examina en varias condiciones de carga, cada una representada por un resistor. Esto se aprecia en la figura 3-13, donde es evidente que los resistores R_1, R_2, \dots, R_n pueden conectarse uno a la vez, y se obtiene fácilmente la corriente y potencias resultantes. Si se intentara esto en el circuito original usando, por ejemplo, la reducción de la red, la tarea sería muy tediosa y llevaría demasiado tiempo.

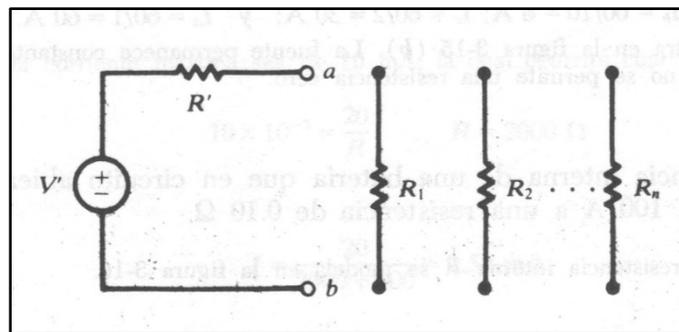


Figura 3-13

PROBLEMA 3.2 (34)

Calcúlese la resistencia interna de una batería que en un circuito abierto tiene un voltaje de 12.0 V y suministra 100 A a una resistencia de 0.10 Ω.

La batería con su resistencia interna R se modela en la figura 3-16

$$I = 100 = \frac{12}{R + 0.10}$$

De lo cual $R = 0.02 \Omega$

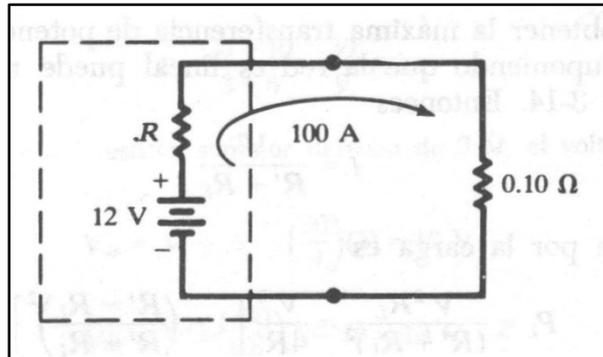


Figura 3-16

PROBLEMA 3.4 (35)

Calcúlese la potencia suministrada por la fuente dependiente mostrada en la figura 3-17.

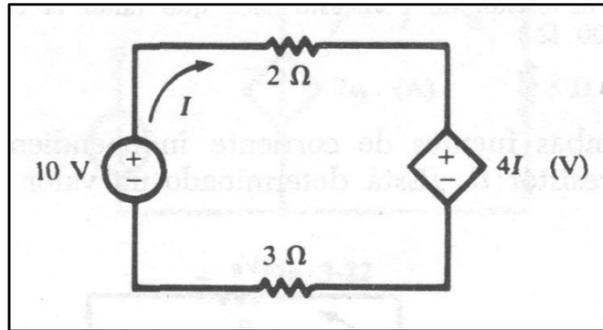


Figura 3-17

Usando la ley de Kirchhoff del voltaje, $10 = 2I + 4I + 3I$, o $I = 1.11$ A. La corriente entra en la terminal positiva. Así, la potencia absorbida es una $1.11 \times (1.11) = 4.93$ W y la potencia suministrada es -4.93 W

PROBLEMA 3.8 (36)

En el circuito mostrado en la figura 3-21, encuéntrese la potencia absorbida por la batería de 5 V.

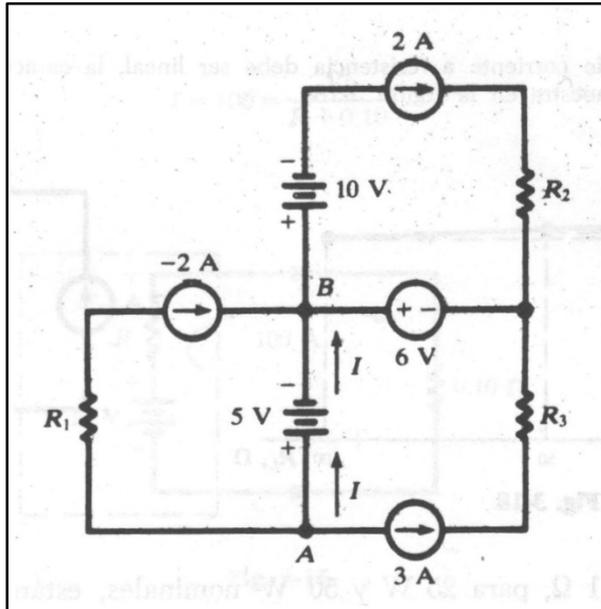


Figura 3-21

La corriente I que entra a la batería de 5 V en la terminal + puede encontrarse usando la LKC ya sea en el nodo A o en el B. En A,

$$3 + I + (-2) = 0 \quad I = -1 \text{ A}$$

Entonces la potencia absorbida es $P_{5V} = (-1)(5) = -5 \text{ W}$; la batería de 5 V suministra o entrega 5 W al circuito

PROBLEMA 3.9 (36)

Consúltese la figura 3-22. Calcúlese la energía disipada en el resistor de 5Ω en el intervalo $0 < t < 5$ ms, si $v_g = 5000t$ (V).

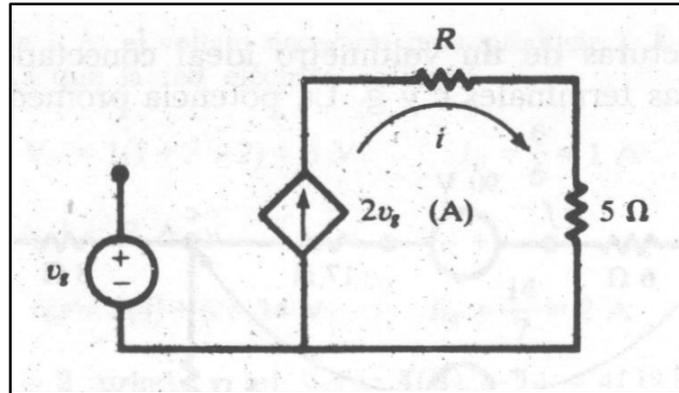


Figura 3-22

$$i = 2v_g = 10^4 t \text{ (A)}$$

$$p = i^2 5 = 5 \times 10^8 t^2 \text{ (W)}$$

$$W = \int_0^{5 \times 10^{-3}} 5 \times 10^8 t^2 dt = (5 \times 10^8) \left[\frac{t^3}{3} \right] (\text{desde } 0 \text{ a } 5 \times 10^{-3}) = 20.8 \text{ J}$$

PROBLEMA 3.12 (38)

Determinense las lecturas de un voltímetro ideal conectado en la figura 3-24 a: a) las terminales a y b, b) a las terminales c y g. La potencia promedio en el resistor de 5 Ω es 20 W.

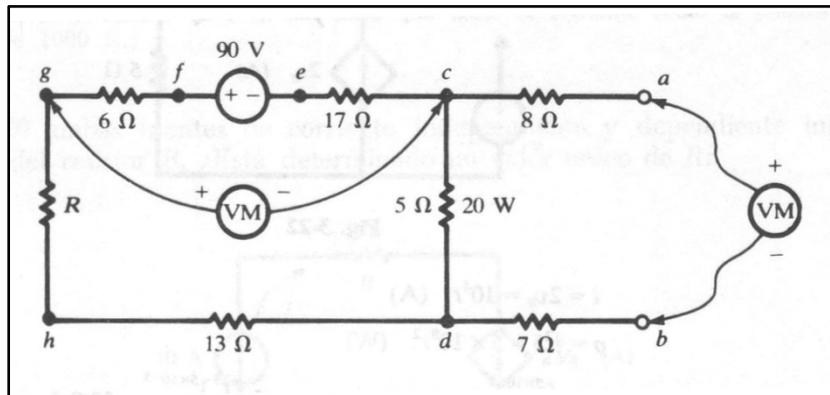


Figura 3-24

$$P = I^2(5) \quad I = \sqrt{\frac{20}{5}} = \pm 2 \text{ A}$$

La dirección de I a través del resistor de 5 Ω se determina observando que la polaridad de la fuente de 90 V requiere que la corriente pase de d a c . Por esto d es positiva respecto a c y $V_{dc} = (2)(5) = 10 \text{ V}$.

Un voltímetro ideal indica el voltaje sin consumir corriente alguna. Puede considerarse que tiene una resistencia infinita.

a) La aplicación de la LKV a la trayectoria cerrada $acdba$ nos da

$$V_{ac} + V_{cd} + V_{db} + V_{ba} = 0$$

$$0 - 10 + 0 - VM = 0$$

$$VM = -10 \text{ V}$$

Si el medidor es de tipo digital, indicará -10 V . Una galvanómetro de bobina móvil tenderá a irse esacala abajo, con la manecilla deteniéndose en el tope. Si se invierten las terminales, indicará 10 V . (Y con su terminal $+$ al punto b , se sabe que b es 10 V positiva respecto a a).

b) La aplicación de la LKV a la trayectoria $cefgc$ da

$$V_{ce} + V_{ef} + V_{fg} + V_{gc} = 0$$

$$2(17) - 90 + 2(6) + VM = 0$$

$$VM = 44 \text{ V}$$

En esta conexión el medidor lee 44 V positivos, lo cual indica que el punto g tiene 44 volts arriba del punto c .

PROBLEMA 3.13 (38)

Para el circuito de escalera mostrado en la figura 3-25, encuentrese la fuente de voltaje V_s la cual da por resultado una corriente de 7.5 mA en el resistor de 3 Ω

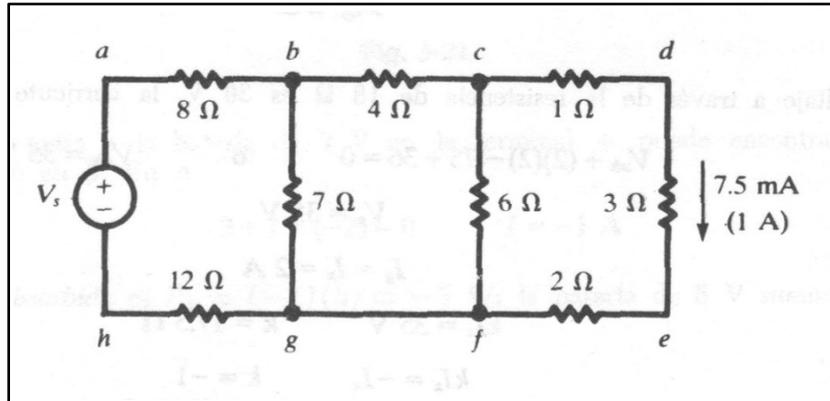


Figura 3-25

Se supondrá una corriente de 1 A: el voltaje necesario para producir 1 A está en la misma razón a 1 A como V_s es a 7.5 mA, debido a que la red eléctrica es lineal.

$$V_{cf} = 1(1+3+2) = 6 \text{ V} \quad I_{cf} = 6/6 = 1 \text{ A}$$

Entonces, por la LKC, $I_{bc} = 1 + 1 = 2 \text{ A}$, y

$$v_{bg} = 2(4) + 6 = 14 \text{ V} \quad I_{bg} = 14/7 = 2 \text{ A}$$

Otra vez, por la LKC, $I_{ab} = 2 + 2 = 4 \text{ A}$; y así $V_{ah} = 4(8) + 14 + 4(12) = 94 \text{ V}$. Ahora bien, el último paso

$$\frac{V_{ah}}{1 \text{ A}} = \frac{V_s}{7.5 \text{ mA}} \quad \text{donde} \quad V_s = 0.705 \text{ V}$$

PROBLEMA 3.14 (39)

Determinese la corriente I para el circuito mostrado en la figura 3-26.

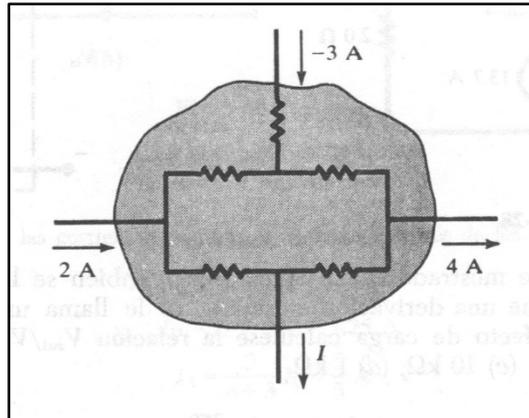


Figura 3-26

Sin los valores de los resistores, no es posible calcular las corrientes de la rama, aún así, la red eléctrica dentro del área sombreada puede verse como un nodo único, en la cual a LKC da

$$2 - 3 - I - 4 = 0 \quad \text{o} \quad I = -5 \text{ A}$$

PROBLEMA 3.15 (39)

En el problema 2.7 se encontró que una fuente de 50 V suministra 13.7 A a la red mostrada en la figura 3-27. Obténganse las corrientes en todas las ramas de la red.

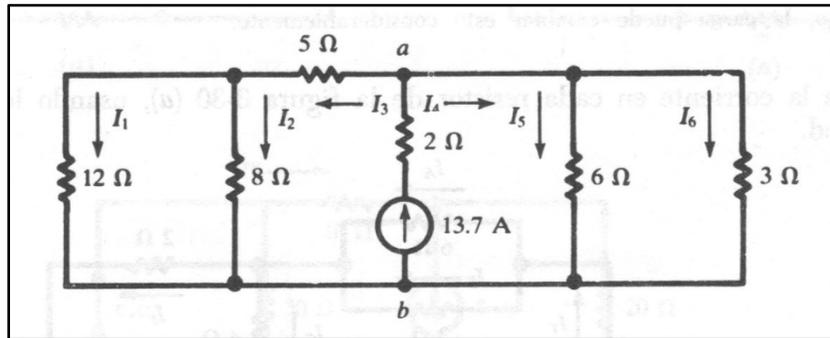


Figura 3-27

Las resistencias equivalentes a la izquierda y derecha de la rama ab se calculan como se indica:

$$R_{eq}^{(izq)} = 5 + \frac{(12)(8)}{20} = 9.80 \Omega \quad R_{eq}^{(der)} = \frac{(6)(3)}{9} = 2.00 \Omega$$

Con referencia a la red reducida, figura 3-28,

$$I_3 = \frac{(20)}{11.8}(13.7) = 2.32 A$$

$$I_4 = \frac{(9.8)}{11.8}(13.7) = 11.38 A$$

La siguiente división de estas corrientes se obtiene refiriéndose a la red original

$$I_1 = \frac{(8)}{20}(2.32) = 0.93 A \quad I_2 = \frac{(12)}{20}(2.32) = 1.39 A$$

$$I_5 = \frac{(3)}{9}(11.38) = 3.79 A \quad I_6 = \frac{(6)}{9}(11.38) = 7.59 A$$

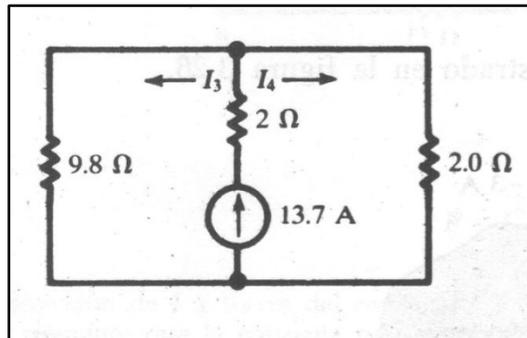


Figura 3-28

PROBLEMA 3.17 (40)

Obtégase la corriente en cada resistor de la figura 3-30 (a), usando los métodos de reducción de red.

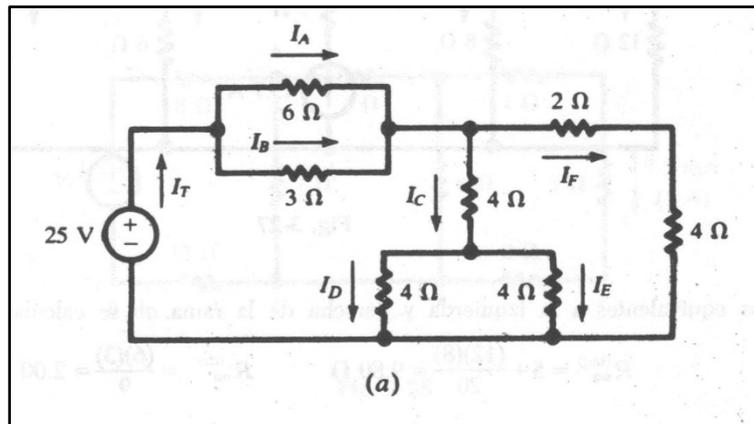


Figura 3-30 (a)

Como primer paso, las combinaciones de dos resistores en paralelo se convierten en sus equivalentes.

Para los resistores de $6\ \Omega$ y $3\ \Omega$, $R_{eq} = (6)(3) / (6 + 3) = 2\ \Omega$. Para los dos resistores de $4\ \Omega$, $R_{eq} = 2\ \Omega$. El circuito se vuelve a dibujar con resistores en serie agregados [Figura 3-30 (b)]. Ahora los dos resistores de $6\ \Omega$ en paralelo tienen la resistencia equivalente $R_{eq} = 3\ \Omega$, y ésta se halla en serie con la resistencia equivalente de $2\ \Omega$. Por lo tanto, $R_T = 5\ \Omega$, como se muestra en la figura 3-30 (c). La corriente total que resulta es:

$$I_T = 25/5 = 5\ \text{A}$$

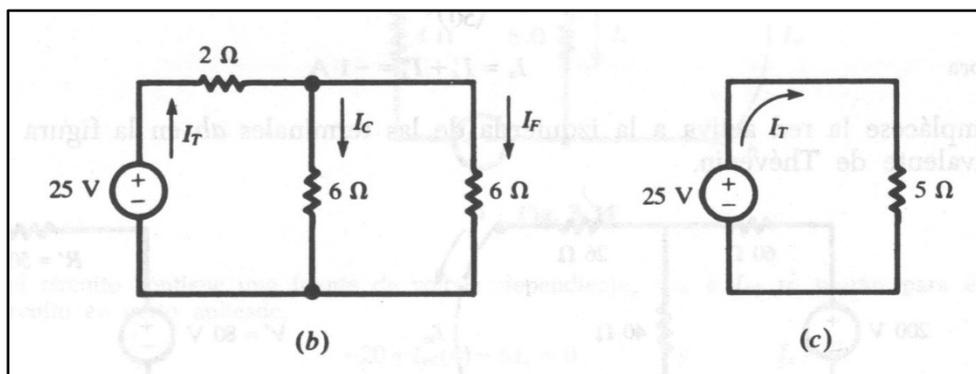


Figura 3-30 (b), (c)

PROBLEMA 3.18 (41)

Obtégase la corriente I_x en el resistor de $10\ \Omega$ en la figura 3-30 (a), usando la superposición

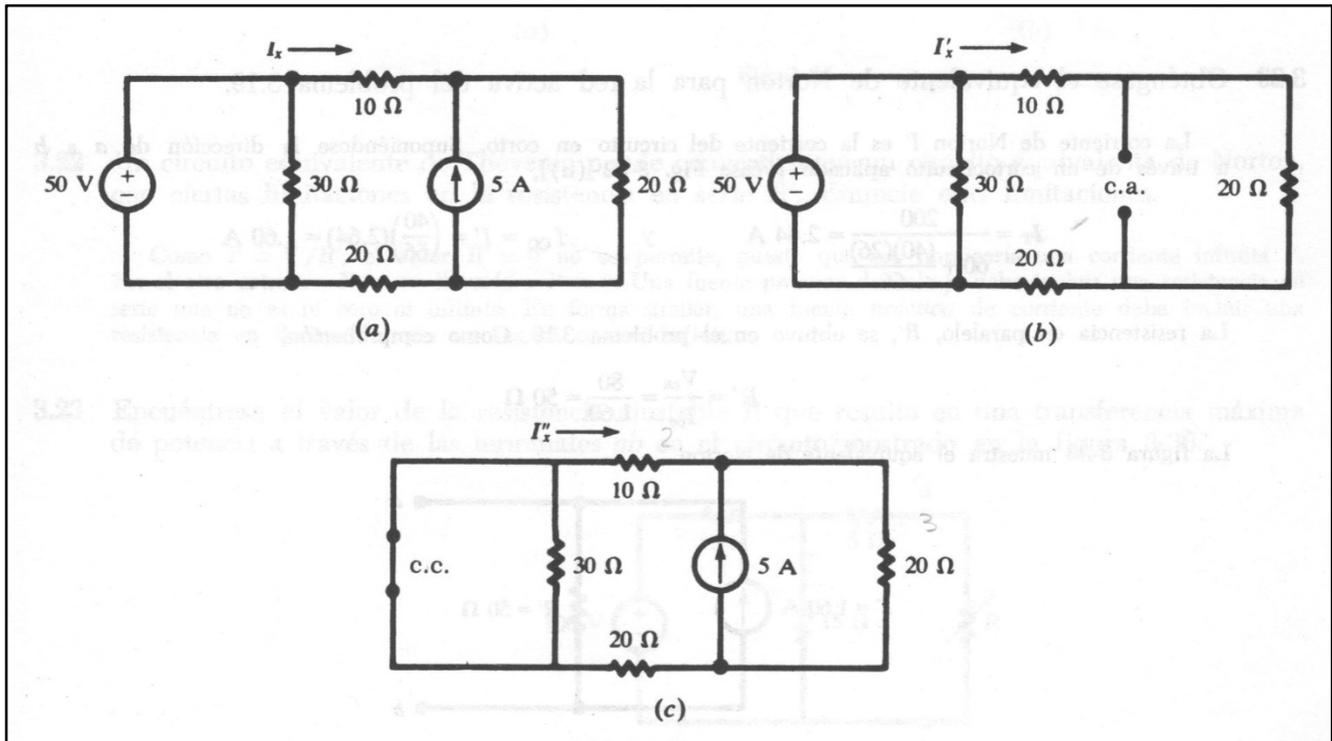


Figura 3-31

Para permitir que la fuente de 50 V actúe sola, la fuente de corriente de 5 A se reemplaza por un circuito abierto [Figura 3-31 (b)]. Entonces

$$I'_x = \frac{50}{10 + 20 + 20} = 1\ A$$

A continuación la fuente de voltaje es removida y reemplazada por un cortocircuito [Figura 3-31 (c)]

$$I''_x = \frac{20}{50}(-5) = -2\ A$$

Ahora

$$I_x = I'_x + I''_x = -1\ A$$

PROBLEMA 3.19 (42)

Reemplácese la red activa a la izquierda de las terminales ab en la figura 3-32 (a) por un equivalente de Thévenin.

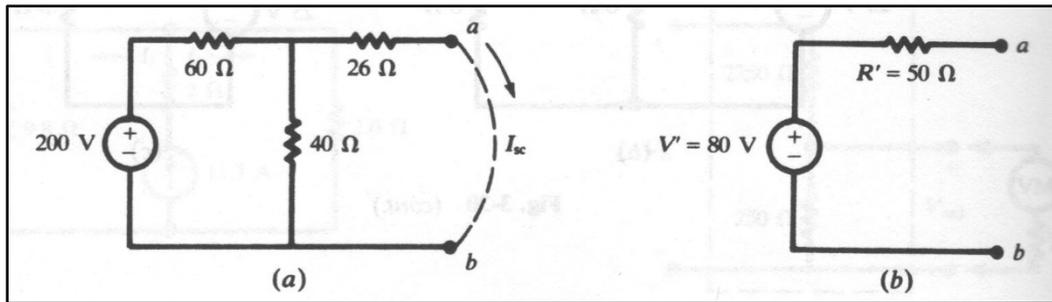


Figura 3-32

El voltaje en circuito abierto V_{ab} es el voltaje a través del resistor de 40Ω

$$V_{ab} = \left(\frac{40}{60 + 40} \right) (200) = 80 \text{ V}$$

La resistencia R' puede encontrarse observando el circuito desde ab con la fuente de voltaje en corto

$$R' = 26 \left(\frac{(40)(60)}{100} \right) = 50 \Omega$$

Véase la figura 3-32 (b) para el equivalente de Thévenin

PROBLEMA 3.20 (42)

Obtégase el equivalente de Norton para la red activa del problema 3.19

La corriente de Norton I' es la corriente del circuito en corto. Suponiéndose la dirección de a a b a través de un cortocircuito aplicado [véase Fig. 3-32 (a)].

$$I_T = \frac{200}{60 + \frac{(40)(26)}{66}} = 2.64 \text{ A} \quad y \quad I_{cc} = I' = \left(\frac{60}{40}\right)(2.64) = 1.60 \text{ A}$$

La resistencia en paralelo, R' , se obtuvo en el problema 3.19. Como comprobación,

$$R' = \frac{V_{ca}}{I_{cc}} = \frac{80}{1.60} = 50 \Omega$$

La figura 3-33 muestra el equivalente de Norton.

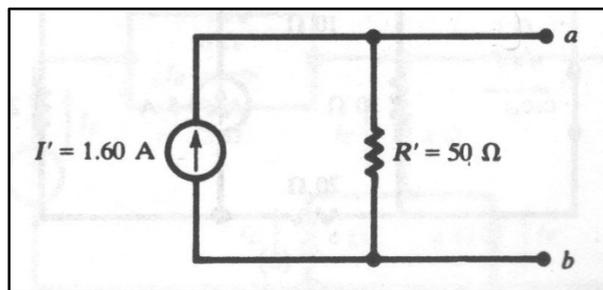


Figura 3-33

PROBLEMA 3.21 (43)

Obtégase un equivalente de Thévenin para la red eléctrica activa mostrada en la figura 3-34

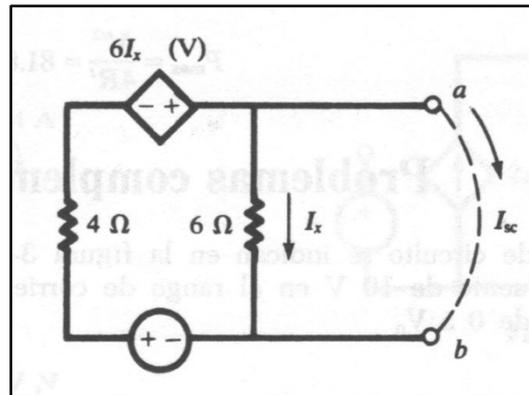


Figura 3-34

Como el circuito contiene una fuente de voltaje dependiente, V_{ca} e I_{cc} se usarán para encontrar R . Con un circuito en corto aplicado.

$$-20 + I_{cc}(4) - 6I_x = 0 \quad \text{y} \quad I_x = 0$$

De donde $I_{cc} = I' = 5$ A. Con el circuito abierto

$$-20 + 4I_x - 6I_x + 6I_x = 0 \quad \text{o} \quad I_x = 5$$

Por lo tanto, $V' = 5(6) = 30$ V y $R' = 30/5 = 6 \Omega$

Véase figura 3-35 (a) y (b) para ambos circuitos equivalentes de Thévenin y Norton

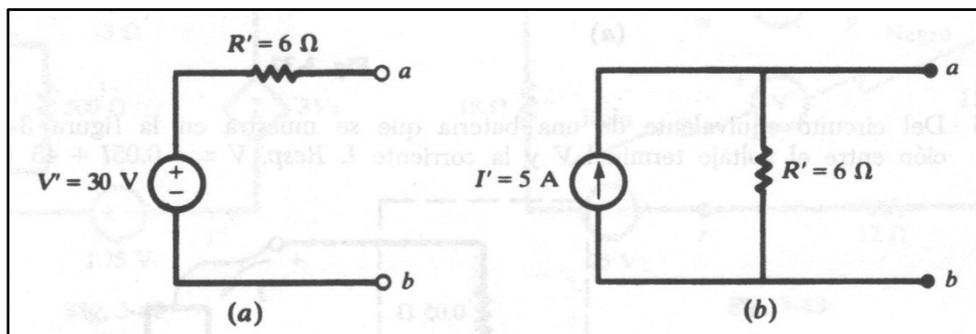


Figura 3-35

PROBLEMA 3.23 (43)

Encuéntrese el valor de la resistencia ajustable R que resulta en una transferencia máxima de potencia a través de las terminales ab en el circuito mostrado en la figura 3-36.

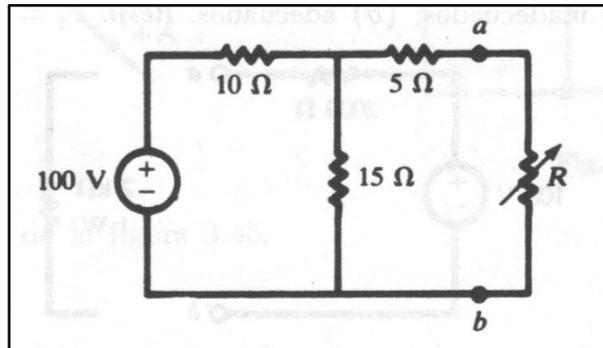


Figura 3-36

Primero se obtiene el equivalente de Thévenin con $V' = 60 \text{ V}$ y $R' = 11 \Omega$. De acuerdo con la sección 3-7, la transferencia máxima ocurre para $R = R' = 11 \Omega$, con

$$P_{max} = V'^2/4R' = 81.82 \text{ W}$$

Capítulo 1.

Considerando el siguiente teorema:

- Teorema de Tellegen: La suma de las potencias absorbidas por todos los elementos en un circuito eléctrico es cero.

Ejemplo:

Calculate the power absorbed by each element in the network of Fig. 1.18. Also verify that Tellegen's theorem is satisfied by this network. **EXAMPLE 1.6**

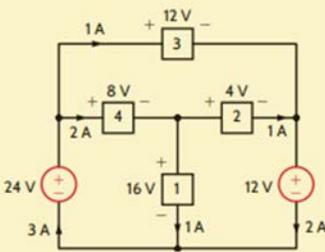


Figure 1.18
Circuit used in Example 1.6.

Let's calculate the power absorbed by each element using the sign convention for power. **SOLUTION**

$$P_1 = (16)(1) = 16 \text{ W}$$

$$P_2 = (4)(1) = 4 \text{ W}$$

$$P_3 = (12)(1) = 12 \text{ W}$$

$$P_4 = (8)(2) = 16 \text{ W}$$

$$P_{12\text{V}} = (12)(2) = 24 \text{ W}$$

$$P_{24\text{V}} = (24)(-3) = -72 \text{ W}$$

Note that to calculate the power absorbed by the 24-V source, the current of 3 A flowing up through the source was changed to a current -3 A flowing down through the 24-V source.

Let's sum up the power absorbed by all elements: $16 + 4 + 12 + 16 + 24 - 72 = 0$

This sum is zero, which verifies that Tellegen's theorem is satisfied.

Ejercicio:

1.45 Calculate the power absorbed by each element in the circuit in Fig. P1.45. Also, verify that Tellegen's theorem is satisfied by this circuit.

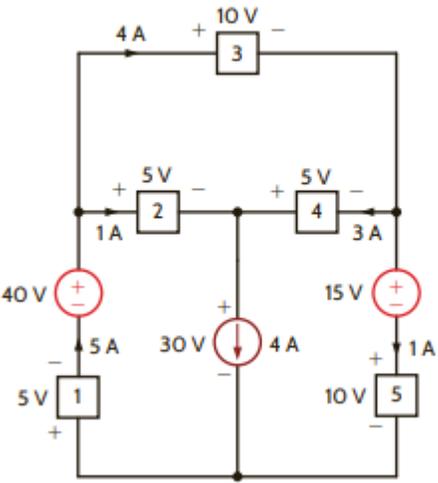


Figure P1.45

LEARNING ASSESSMENTS

E2.4 Given the networks in Fig. E2.3, find (a) I_1 in Fig. E2.4a and (b) I_T in Fig. E2.4b.

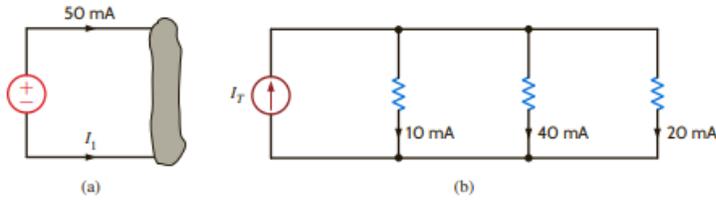


Figure E2.4

ANSWER:

- (a) $I_1 = -50 \text{ mA}$;
- (b) $I_T = 70 \text{ mA}$.

E2.5 Find (a) I_1 in the network in Fig. E2.5a and (b) I_1 and I_2 in the circuit in Fig. E2.5b.

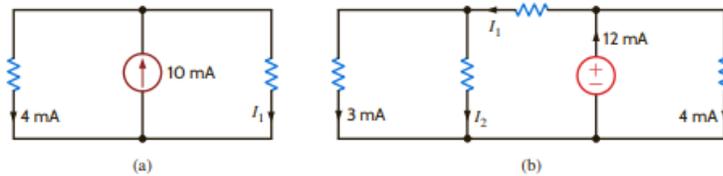
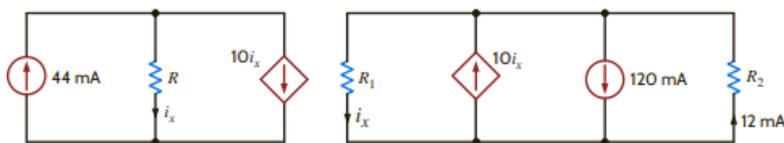


Figure E2.5

ANSWER:

- (a) $I_1 = 6 \text{ mA}$;
- (b) $I_1 = 8 \text{ mA}$ and $I_2 = 5 \text{ mA}$.

E2.6 Find the current i_x in the circuits in Fig. E2.6.



(corresponden a divisor de corriente en un circuito resistivo)

ANSWER:

- (a) $i_x = 4 \text{ mA}$;
- (b) $i_x = 12 \text{ mA}$.

LEARNING ASSESSMENTS

E2.10 Find I and V_{bd} in the circuit in Fig. E2.10.

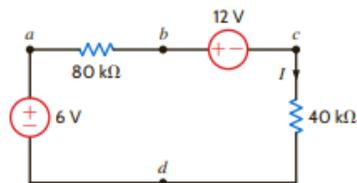


Figure E2.10

ANSWER:

- $I = -0.05 \text{ mA}$;
- $V_{bd} = 10 \text{ V}$.

E2.11 In the network in Fig. E2.11, if V_{ad} is 3 V, find V_S .

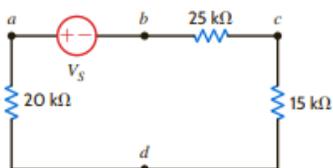


Figure E2.11

ANSWER:

- $V_S = 9 \text{ V}$.

(corresponden a división de voltaje en un circuito resistivo)

LEARNING ASSESSMENT

E2.14 Find the equivalent resistance at the terminals A - B in the network in Fig. E2.14.

ANSWER:
 $R_{AB} = 22 \text{ k}\Omega$.

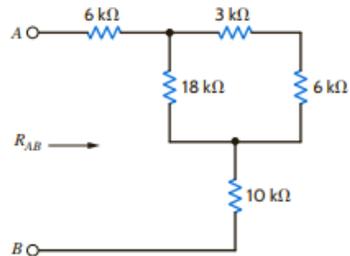


Figure E2.14

LEARNING ASSESSMENTS

E2.15 Find the equivalent resistance at the terminals A - B in the circuit in Fig. E2.15.

ANSWER:
 $R_{AB} = 3 \text{ k}\Omega$.

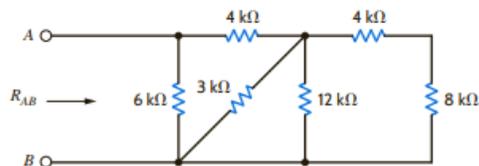


Figure E2.15

52 CHAPTER 2 • RESISTIVE CIRCUITS

E2.16 Find R_{AB} in Fig. E2.16.

ANSWER:
 $R_{AB} = 12 \text{ k}\Omega$.

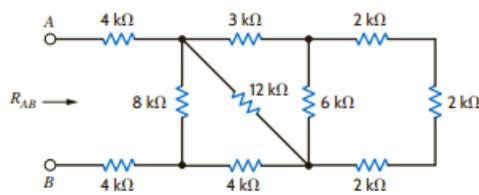


Figure E2.16

(corresponden a combinaciones serie/paralelo)

E2.22 Find V_o , V_1 , and V_2 in Fig. E2.22.

ANSWER:

$V_o = 3.33 \text{ V}$,
 $V_1 = -4 \text{ V}$, and $V_2 = 4 \text{ V}$.

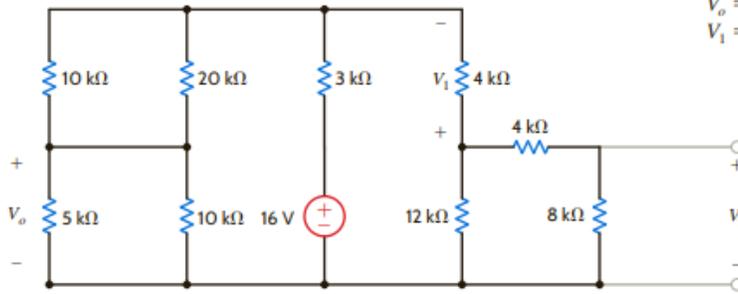


Figure E2.22

2.56 Find I_o in the network in Fig. P2.56.

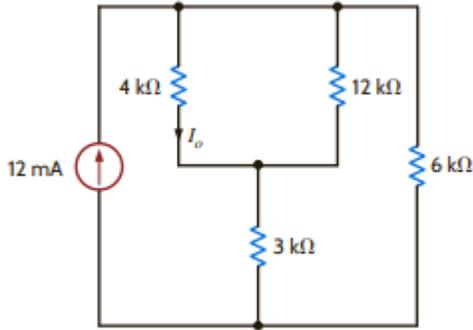


Figure P2.56

2.62 Find R_{AB} in the network in Fig. P2.62.

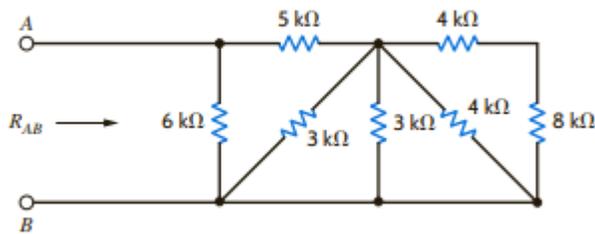


Figure P2.62

2.66 Find the equivalent resistance R_{eq} in the network in Fig. P2.66.

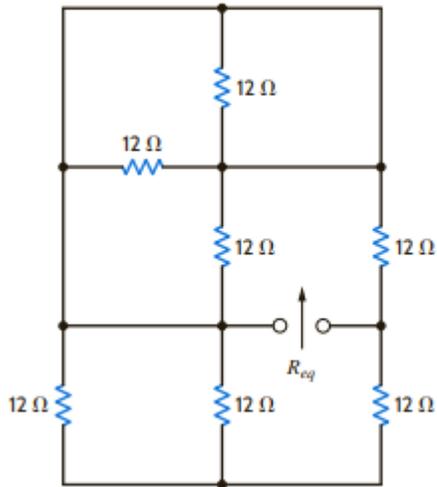


Figure P2.66

2.77 Determine I_o in the circuit in Fig. P2.77.

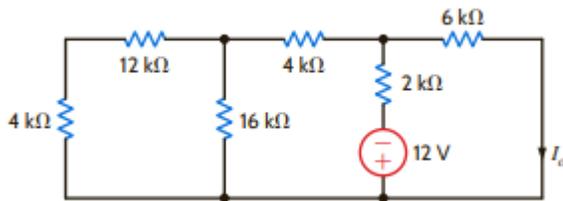


Figure P2.77

2.92 Find the value of I_A in the network in Fig. P2.92.

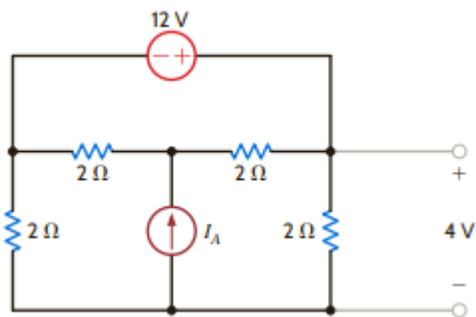


Figure P2.92

2FE-4 Find the equivalent resistance of the circuit in Fig. 2PFE-4 at the terminals A-B.

- a. $4\text{ k}\Omega$ c. $8\text{ k}\Omega$
 b. $12\text{ k}\Omega$ d. $20\text{ k}\Omega$

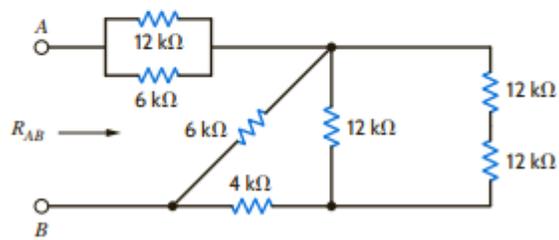


Figure 2PFE-4

2FE-7 What is the current I_o in the circuit in Fig. 2PFE-7?

- a. 0.84 mA c. 2.75 mA
 b. -1.25 mA d. -0.22 mA

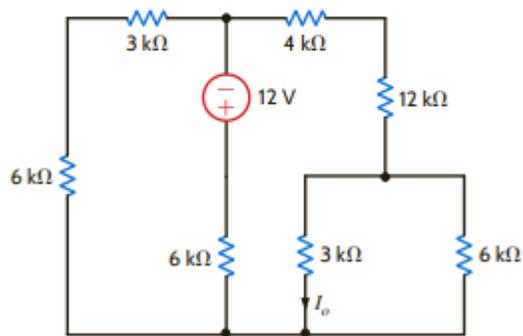


Figure 2PFE-7

LEARNING ASSESSMENTS

E3.1 Write the node equations for the circuit in Fig. E3.1.

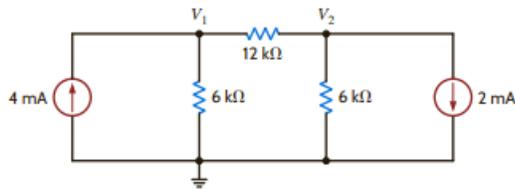


Figure E3.1

ANSWER:

$$\frac{1}{4k}V_1 - \frac{1}{12k}V_2 = 4 \times 10^{-3},$$

$$\frac{-1}{12k}V_1 + \frac{1}{4k}V_2 = -2 \times 10^{-3}.$$

E3.2 Find all the node voltages in the network in Fig. E3.2 using MATLAB.

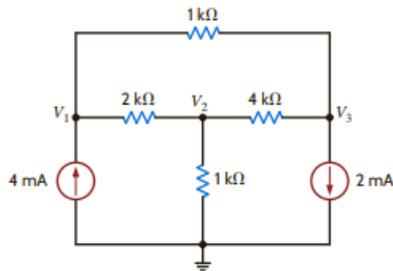


Figure E3.2

ANSWER:

$$V_1 = 5.4286 \text{ V},$$

$$V_2 = 2.000 \text{ V},$$

$$V_3 = 3.1429 \text{ V}.$$

E3.3 Use nodal analysis to find V_o in Fig. E3.3.

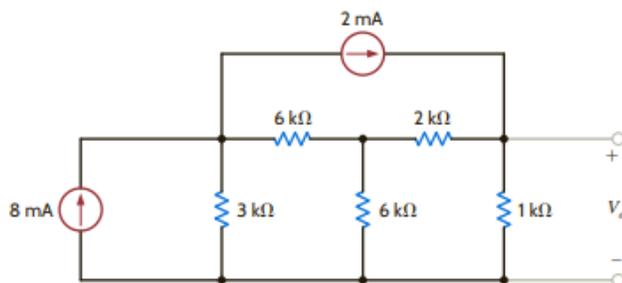


Figure E3.3

ANSWER:

$$V_o = 2.79 \text{ V}.$$

LEARNING ASSESSMENTS

E3.7 Use nodal analysis to find the current I_o in the network in Fig. E3.7.

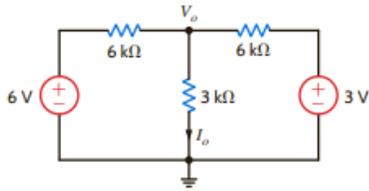


Figure E3.7

ANSWER:

$$I_o = \frac{3}{4} \text{ mA.}$$

E3.8 Find V_o in Fig. E3.8 using nodal analysis.

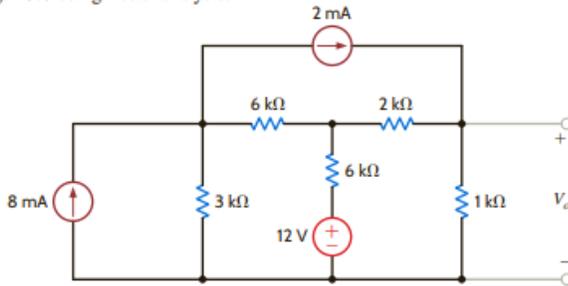


Figure E3.8

ANSWER:

$$V_o = 3.89 \text{ V.}$$

LEARNING ASSESSMENTS

E3.13 Use mesh equations to find V_o in the circuit in Fig. E3.13.

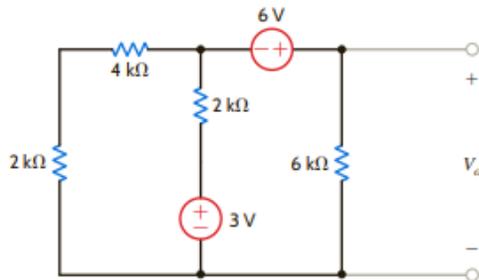


Figure E3.13

ANSWER:

$$V_o = \frac{33}{5} \text{ V.}$$

E3.14 Find V_o in Fig. E3.14 using mesh analysis.

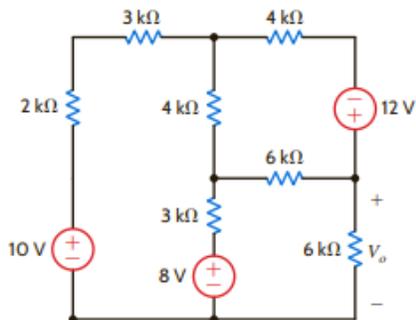


Figure E3.14

ANSWER:

$$V_o = 8.96 \text{ V.}$$

E3.17 Find V_o in Fig. E3.17 using loop analysis.

ANSWER:
 $V_o = 9.71 \text{ V}$.

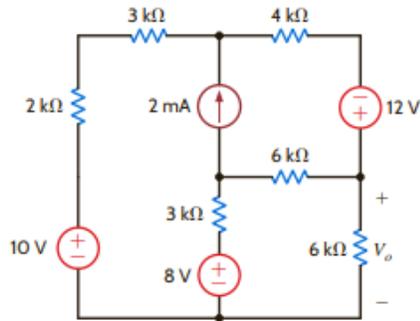


Figure E3.17

3.1 Use nodal analysis to find V_1 in the circuit in Fig. P3.1.

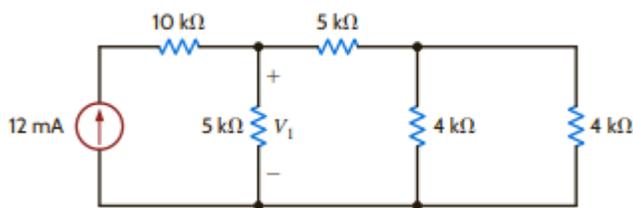


Figure P3.1

3.7 Use nodal analysis to find both V_1 and V_o in the circuit in Fig P3.7.

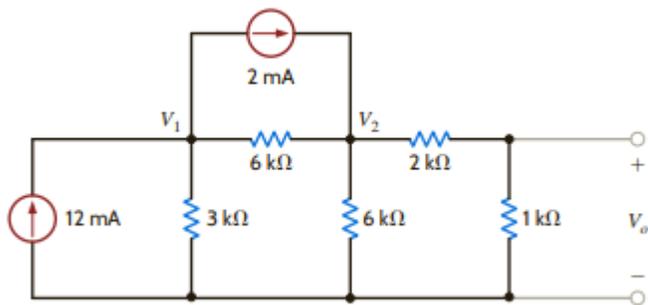


Figure P3.7

3.74 Find V_o in Fig. P3.74 using mesh analysis.

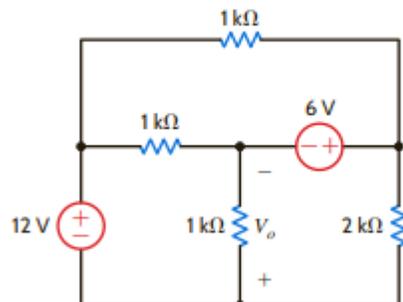


Figure P3.74

3.82 Use loop analysis to find V_o in the circuit in Fig. P3.82.

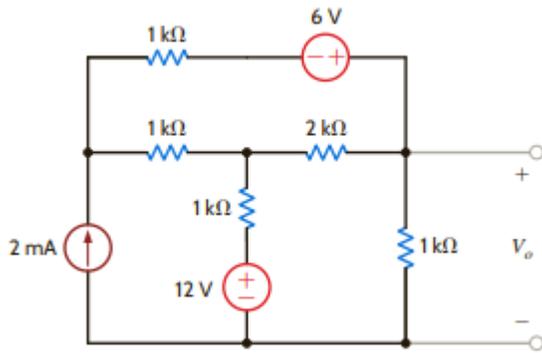


Figure P3.82

3FE-1 Find V_o in the circuit in Fig. 3PFE-1.

- a. 3.33 V
- b. 8.25 V
- c. 9.33 V
- d. 2.25 V

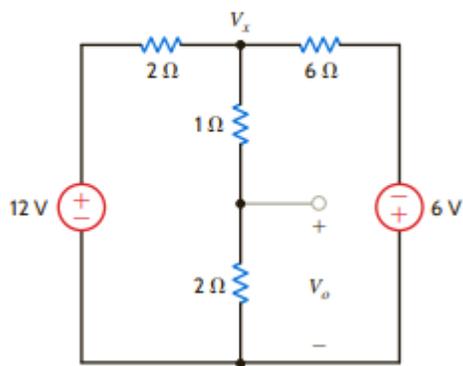


Figure 3PFE-1

3FE-5 What is the voltage V_1 in the circuit in Fig. 3PFE-5?

- a. -7 V
- b. 5 V
- c. -2 V
- d. 4 V

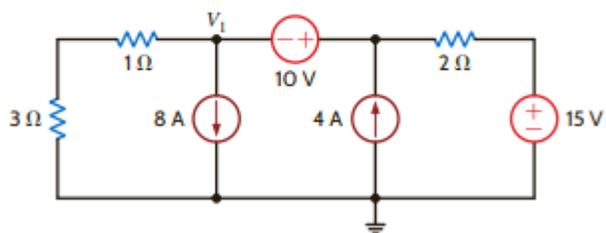


Figure 3PFE-5

LEARNING ASSESSMENTS

E5.3 Compute V_o in the circuit in Fig. E5.3 using superposition.

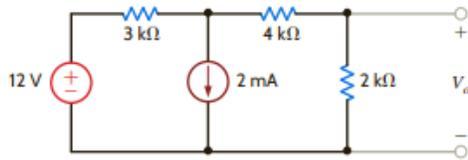


Figure E5.3

ANSWER:

$$V_o = \frac{4}{3} \text{ V.}$$

E5.4 Find V_o in Fig. E5.4 using superposition.

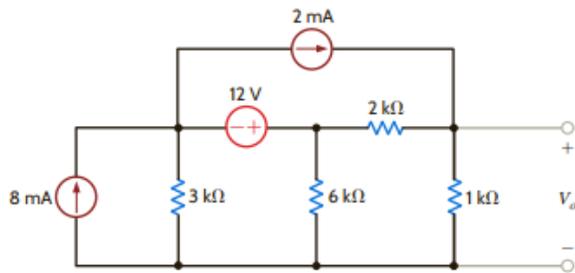


Figure E5.4

ANSWER:

$$V_o = 5.6 \text{ V.}$$

E5.5 Find I_o in Fig. E5.5 using superposition.

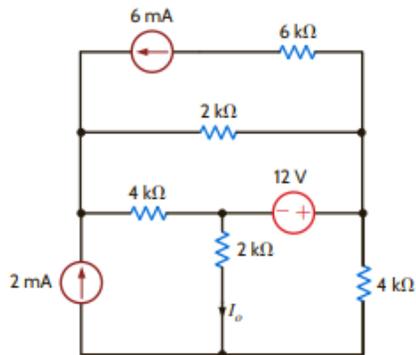


Figure E5.5

ANSWER:

$$I_o = -2/3 \text{ mA.}$$

LEARNING ASSESSMENTS

E5.6 Use Thévenin's theorem to find V_o in the network in Fig. E5.6.

ANSWER:

$$V_o = -3 \text{ V.}$$

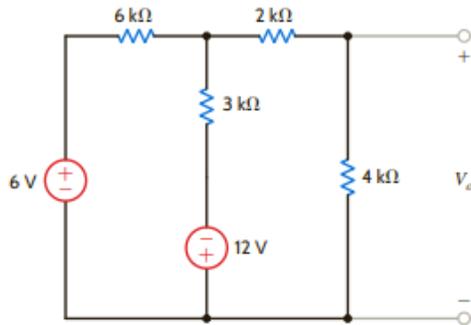


Figure E5.6

E5.8 Find V_o in Fig. E5.8 using Thévenin's theorem.

ANSWER:

$$V_o = 3.88 \text{ V.}$$

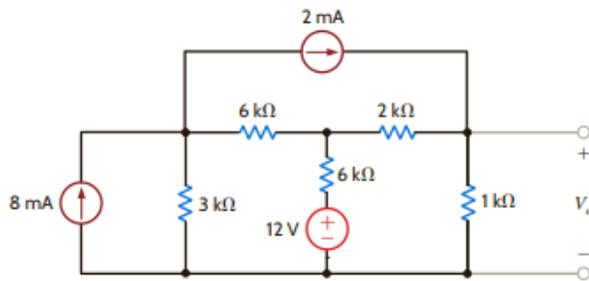


Figure E5.8

E5.9 Find I_o in Fig. E5.9 using Norton's theorem.

ANSWER:

$$I_o = -0.857 \text{ mA.}$$

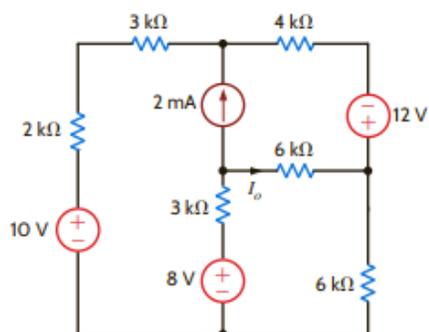


Figure E5.9

E5.15 Find the I_o in Fig. E5.15 using source transformations.

ANSWER:

$$I_o = -1.94 \text{ mA.}$$

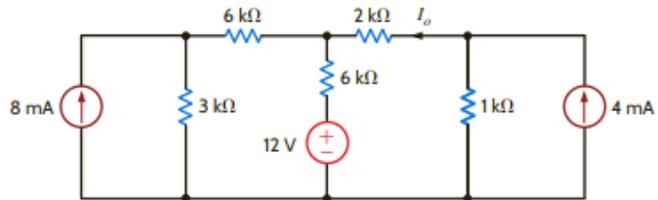


Figure E5.15

LEARNING ASSESSMENTS

E5.16 Given the circuit in Fig. E5.16, find R_L for maximum power transfer and the maximum power transferred.

ANSWER:

$$R_L = 6 \text{ k}\Omega;$$

$$P_L = \frac{2}{3} \text{ mW.}$$

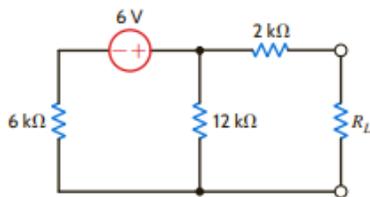


Figure E5.16

E5.17 Find R_L for maximum transfer and the maximum power transferred to R_L in Fig. E5.17.

ANSWER:

$$14/9 \text{ k}\Omega;$$

$$2/7 \text{ mW.}$$

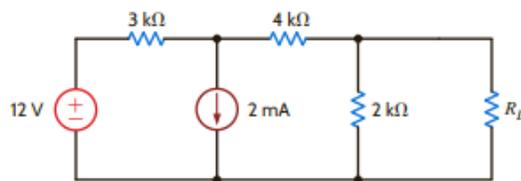


Figure E5.17

5.8 Find V_o in the network in Fig. P5.8 using superposition.

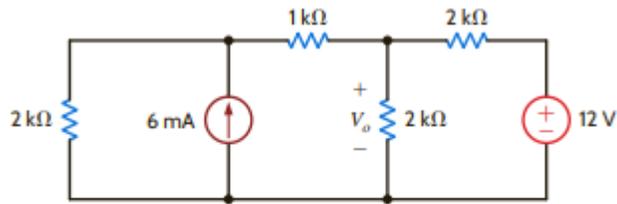


Figure P5.8

5.9 Find V_o in the network in Fig. P5.9 using superposition.

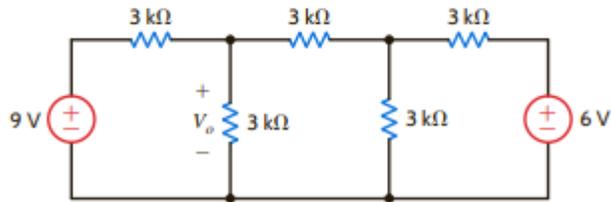


Figure P5.9

5.26 Use Thévenin's theorem to find I_o in the network in Fig. P5.26.

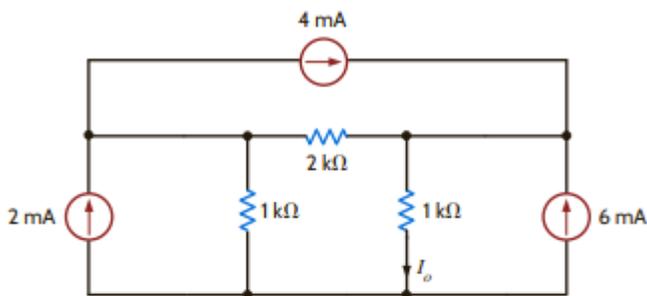


Figure P5.26

5.27 Use Thévenin's theorem to find V_o in the network in Fig. P5.27.

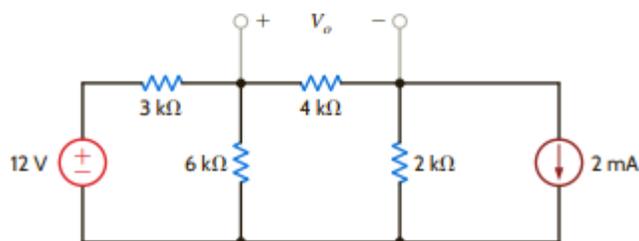


Figure P5.27

5.51 Use Norton's theorem to find I_o in the circuit in Fig. P5.51.

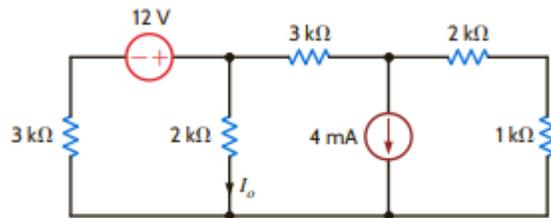


Figure P5.51

5.52 Find I_o in the network in Fig. P5.52 using Norton's theorem.

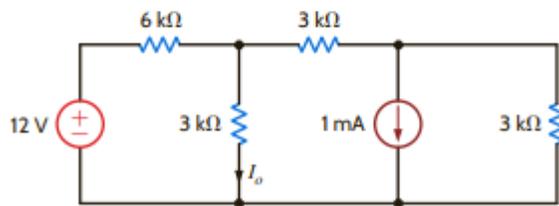


Figure P5.52

5.95 Find I_o in the circuit in Fig. P5.95 using source transformation.

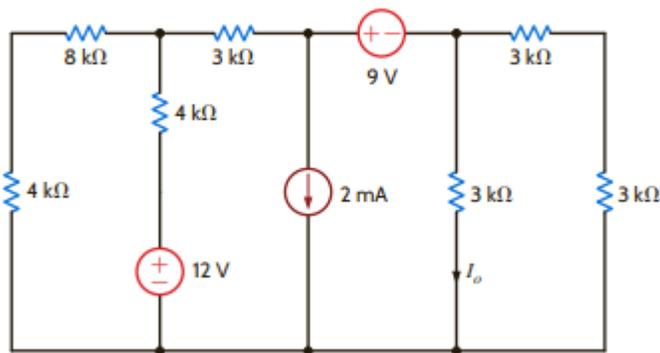


Figure P5.95

5.91 Find I_o in the network in Fig. P5.91 using source transformation.

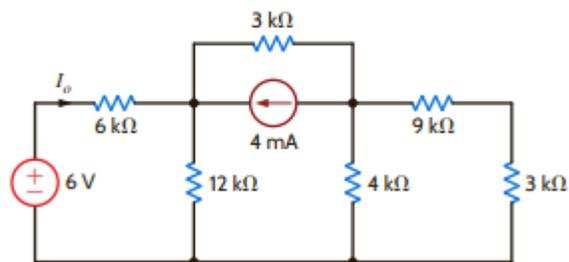


Figure P5.91

5.113 In the network in Fig. P5.113, find R_L for maximum power transfer and the maximum power transferred to this load.

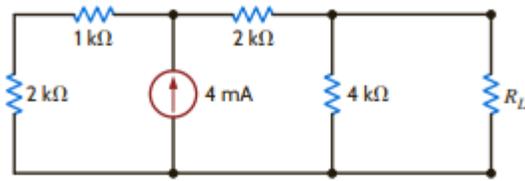


Figure P5.113

5.114 Find R_L for maximum power transfer and the maximum power that can be transferred to the load in Fig. P5.114.

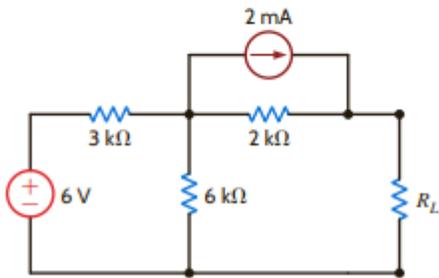


Figure P5.114

5PFE-1 Determine the maximum power that can be delivered to the load R_L in the network in Fig. 5PFE-1.

- a. 2 mW c. 4 mW
- b. 10 mW d. 8 mW

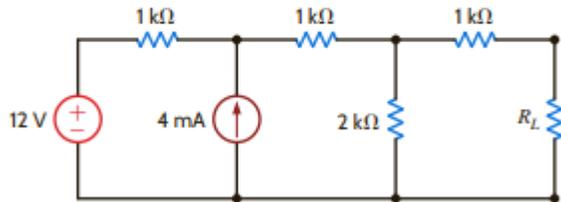


Figure 5PFE-1

5PFE-4 What is the current I in Fig. 5PFE-4?

- a. 8 A c. 0 A
- b. -4 A d. 4 A

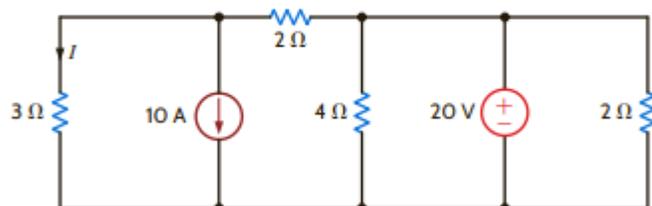


Figure 5PFE-4

5PFE-5 What is the open-circuit voltage V_{oc} at terminals a and b of the circuit in Fig. 5PFE-5?

- a. 8 V c. 4 V
b. 12 V d. 10 V

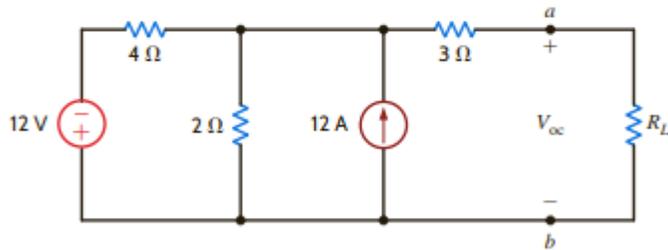


Figure 5PFE-5

7.- Circuitos con transientes de primer orden

LEARNING ASSESSMENTS

E7.1 Find $v_C(t)$ for $t > 0$ in the circuit shown in Fig. E7.1.

ANSWER:
 $v_C(t) = 8e^{-t/0.6}$ V.

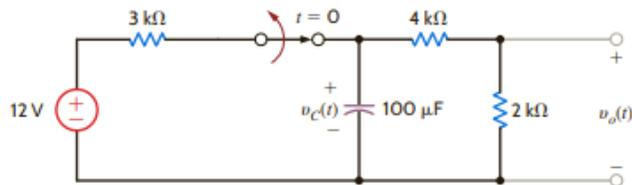


Figure E7.1

E7.2 Use the differential equation approach to find $v_o(t)$ for $t > 0$ in Fig. E7.2. Plot the response.

ANSWER:
 $v_o(t) = 12 - 5e^{-t/0.015}$ V.

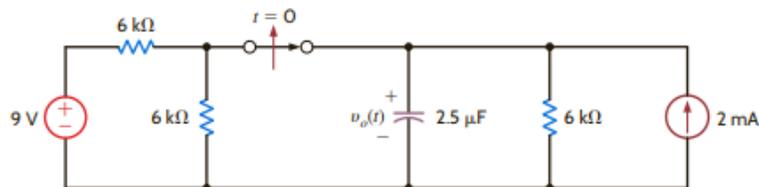


Figure E7.2

E7.3 In the circuit shown in Fig. E7.3, the switch opens at $t = 0$. Find $i_1(t)$ for $t > 0$.

ANSWER:
 $i_1(t) = 1e^{-3t}$ A.

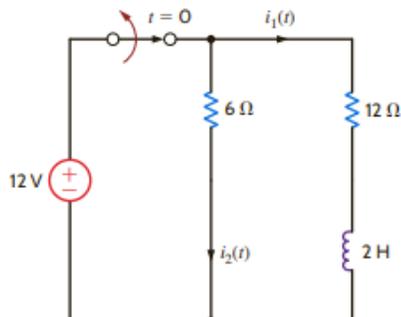


Figure E7.3

E7.5 Consider the network in Fig. E7.5. The switch opens at $t = 0$. Find $v_o(t)$ for $t > 0$.

ANSWER:

$$v_o(t) = \frac{24}{5} + \frac{1}{5}e^{-(5/8)t} \text{ V.}$$

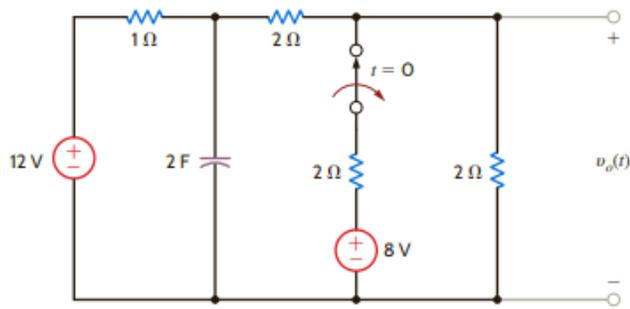


Figure E7.5

7.2 Use the differential equation approach to find $i_o(t)$ for $t > 0$ in the network in Fig. P7.2.

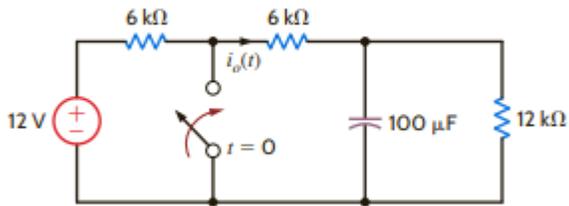


Figure P7.2

7.12 In the network in Fig. P7.12, find $i_o(t)$ for $t > 0$ using the differential equation approach.

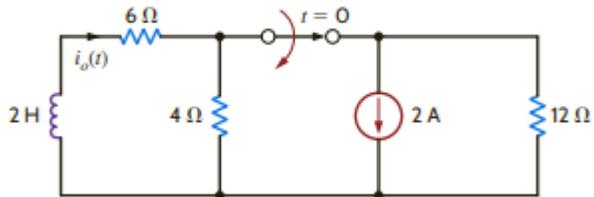


Figure P7.12

E8.8 Find the current $i(t)$ in the network in Fig. E8.8.

ANSWER:

$$i(t) = 3.88 \cos(377t - 39.2^\circ) \text{ A.}$$

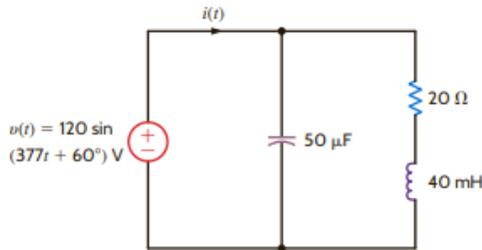


Figure E8.8

E8.10 Compute the impedance Z_T in the network in Fig. E8.10.

ANSWER:

$$Z_T = 3.38 + j1.08 \ \Omega.$$

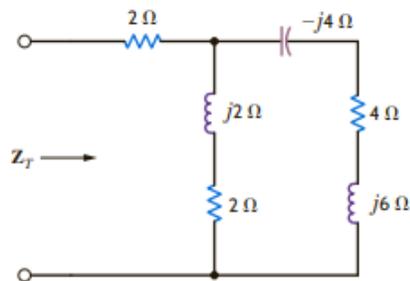


Figure E8.10

E8.17 Use nodal analysis to find V_o in the network in Fig. E8.17.

ANSWER:

$$V_o = 2.12 \angle 75^\circ \text{ V.}$$

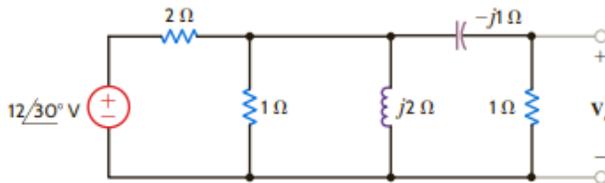


Figure E8.17

E8.18 Find I_1 in Fig. E8.18 using nodal analysis.

ANSWER:

$$I_1 = 0.7781 \angle -161.9^\circ \text{ A.}$$

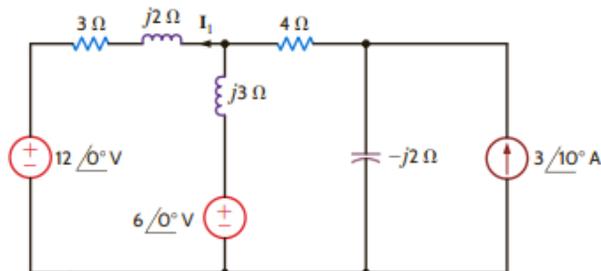


Figure E8.18

8.11 Find Z in the network in Fig. P8.11.

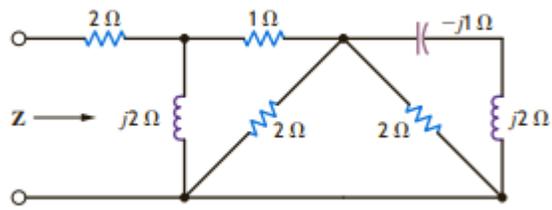


Figure P8.11

Figure 8PFE-4

8PFE-5 What is the current I_o in the circuit in Fig. 8PFE-5?

- a. $6.32 \angle 30.31^\circ$ A c. $1.48 \angle 32.92^\circ$ A
 b. $2.75 \angle 21.43^\circ$ A d. $5.23 \angle 40.15^\circ$ A

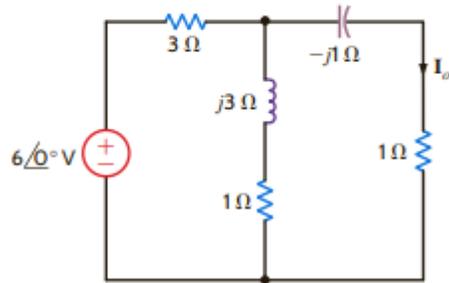


Figure 8PFE-5

8.16 Find the equivalent impedance for the circuit in Fig. P8.16.

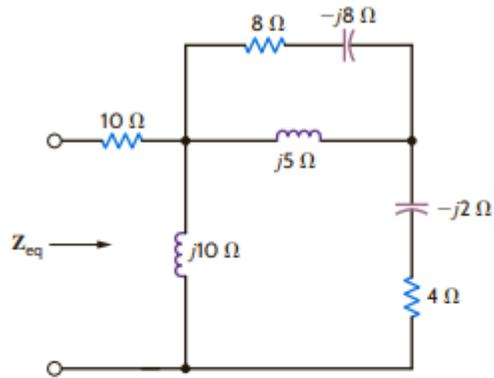


Figure P8.16

8.17 Find the frequency-domain impedance, Z , shown in Fig. P8.17.

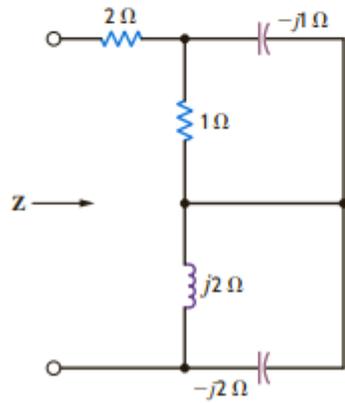


Figure P8.17

Capítulo 12.- Comportamiento de Redes en Frecuencia Variable

E12.3 Determine the voltage transfer function $V_o(s)/V_i(s)$ as a function of s in Fig. E12.3.

ANSWER:

$$\frac{s}{R_1 C_2 \left[s^2 + \frac{C_1 R_2 + C_2 R_2 + C_1 R_1}{R_1 R_2 C_1 C_2} s + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} \right]}$$

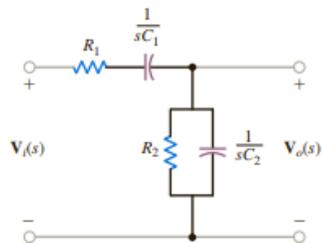


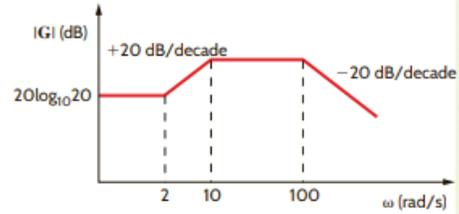
Figure E12.3

E12.4 Sketch the magnitude characteristic of the Bode plot, labeling all critical slopes and points for the function

$$G(j\omega) = \frac{10^4(j\omega + 2)}{(j\omega + 10)(j\omega + 100)}$$

Figure E12.4

ANSWER:

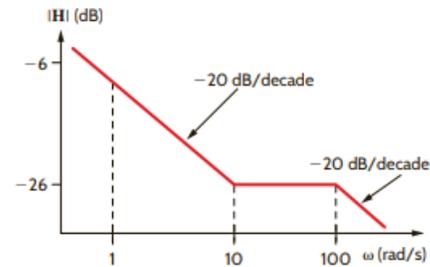


E12.5 Sketch the magnitude characteristic of the Bode plot for the transfer function

$$H(j\omega) = \frac{5(j\omega + 10)}{j\omega(j\omega + 100)}$$

Figure E12.5

ANSWER:



E12.21 Given the filter network shown in Fig. E12.21, sketch the magnitude characteristic of the Bode plot for $G_v(j\omega)$.

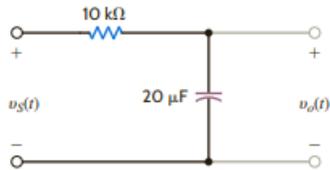
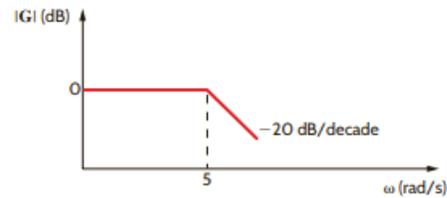


Figure E12.21

ANSWER:



E12.22 Given the filter network in Fig. E12.22, sketch the magnitude characteristic of the Bode plot for $G_v(j\omega)$.

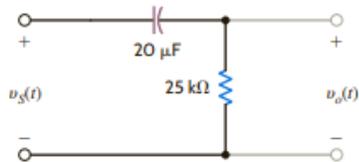
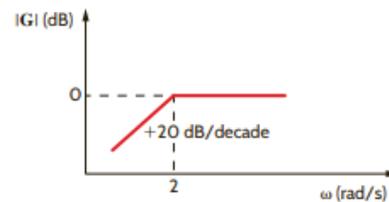


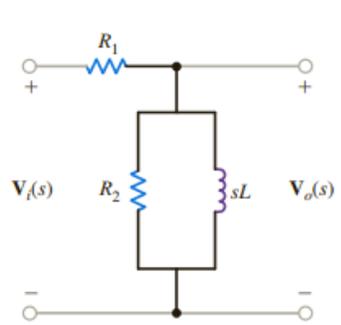
Figure E12.22

ANSWER:



E12.24 Determine what type of filter the network shown in Fig. E12.24 represents by determining the voltage transfer function.

ANSWER:



$$\frac{s\left(\frac{L}{R_1}\right)}{s\left[\frac{(R_1 + R_2)L}{R_1 R_2}\right]} + 1; \text{ This is a high-pass filter.}$$

Figure E12.24

12.3 Determine the voltage transfer function $V_o(s)/V_i(s)$ as a function of s for the network shown in Fig. P12.3.

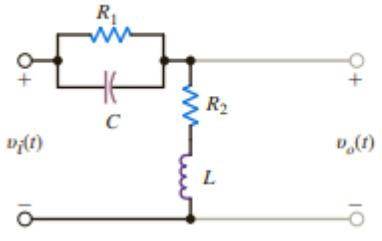


Figure P12.3

12.4 Find the transfer impedance $V_o(s)/I_s(s)$ for the network shown in Fig. P12.4.

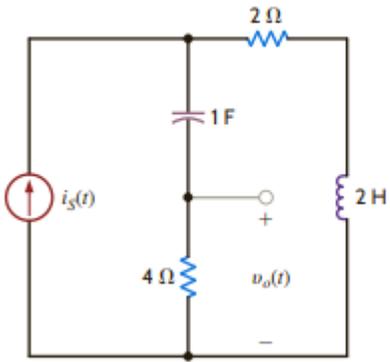


Figure P12.4

12.74 Given the network in Fig. P12.74, sketch the magnitude characteristic of the transfer function

$$G_v(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$$

Identify the type of filter.

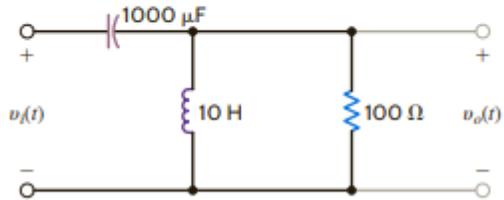


Figure P12.74

12PFE-3 Given the low-pass filter circuit shown in Fig. 12PFE-3, find the frequency in Hz at which the output is down 3 dB from the dc, or very low frequency, output.

- a. 26 Hz
- b. 60 Hz
- c. 47 Hz
- d. 32 Hz

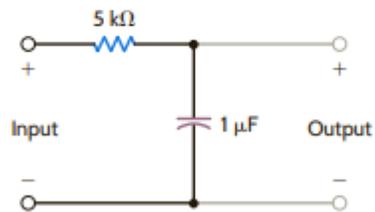


Figure 12PFE-3

Referencia Bibliográfica:

- (1) Basic Engineering Circuit Analysis 11th Edition. J. David Irwing , R. Mark Nelms, Wiley

AMPLIFICADORES OPERACIONALES

Amplificadores Operacionales

El Término Amplificador Operacional (OpAmp) se refiere a un amplificador que realiza operaciones matemáticas. Históricamente, los primeros amplificadores operacionales se utilizaron en computadoras analógicas, en las que realizaban sumas, restas, multiplicaciones, etc.

Una breve historia...

Los primeros OpAmps se inventaron durante la 2a Guerra Mundial...

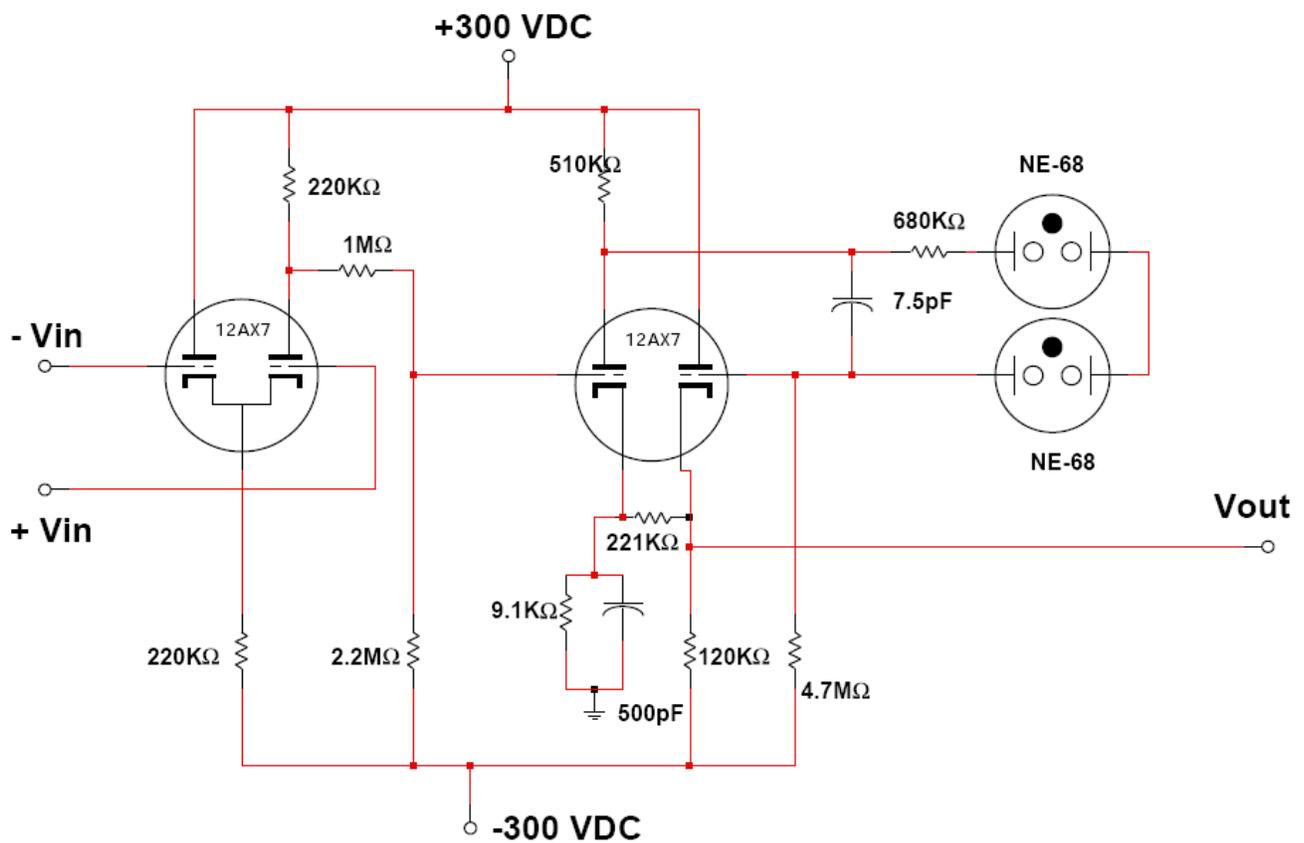
El Dr. C. A. Lovell de los Bell Telephone Laboratories introdujo el OpAmp...

Independientemente, George A. Philbrick introdujo un amplificador operacional de un solo bulbo en 1948, el K2-W.

¡Así que los OpAmps no son algo nuevo!

El popular OpAmp monolítico 741 fue diseñado por Dave Fullagar en 1967....

El Primer Amplificador Operacional "real", el K2-W



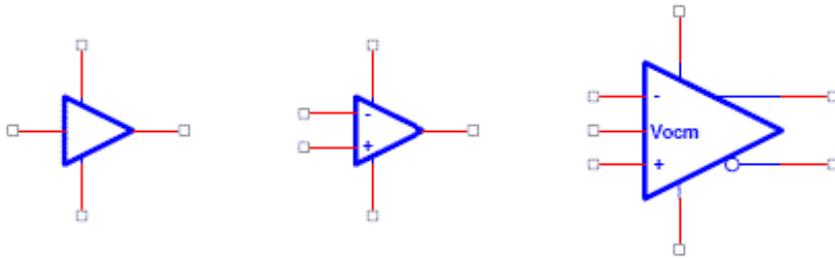


Características del bulbo operacional K2-W:

- Fue inventado por Julie Loebe y George Philbrick al inicio de los 50's
- Fue el primer Opamp producido en masa
- Su costo aproximado (en los 50's) era \$22.00 USD
- La tabla muestra una comparación con el 741 y el LT1037

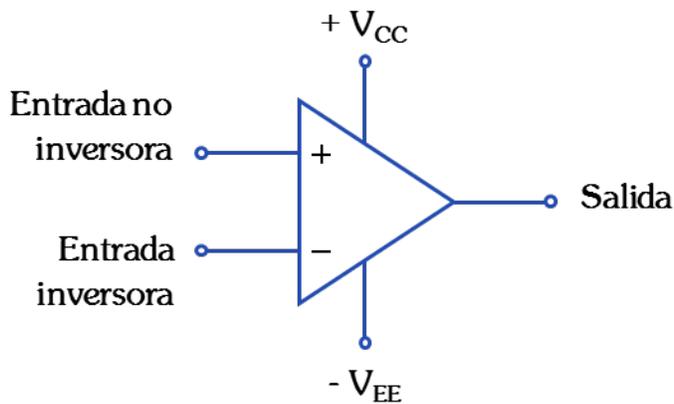
Parameters	K2-W OpAmp	741 OpAmp	LT1037 OpAmp
Power Supplies	+/- 300 VDC, 6.3 VAC (filaments)	+/- 15V	+/- 15V
Open-Loop Gain	1.5×10^4	5×10^4	30×10^6
Vout Swing	+/- 50V	+/- 12V	+/- 13.5 V
Iout	+/- 1 mA	25 mA	25 mA
Idrain	5 mA (no load)	1.7 mA	2.7 mA
RL(min)	50 K Ω	none (SC protect)	none (SC protect)
Slew Rate	+/- 12 V/ μ Sec	+/- 0.5 V/ μ S	15 V/ μ S

Representación esquemática

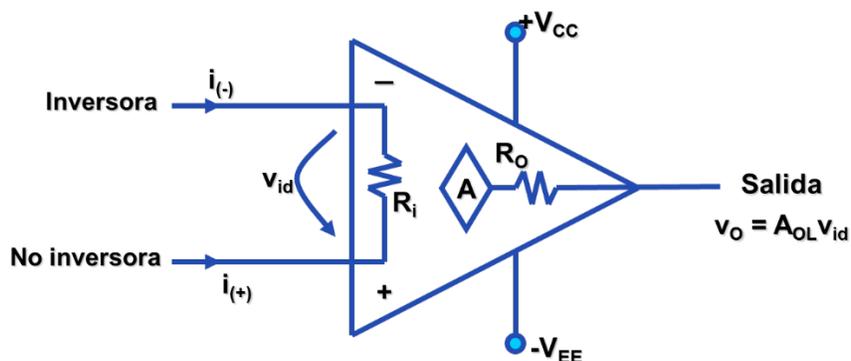


Algunos de los símbolos empleados para describir Opamps. En ocasiones, también pueden incluir terminales de ajuste de offset, habilitación, umbral de voltaje de salida y otras funciones especializadas.

- El primer símbolo es un opamp reforzador (buffer)
- El segundo es un opamp de entrada diferencial y una sola salida; es el más común.
- El tercero es un opamp con entradas y salidas diferenciales.



Configuración interna



- $i_{(-)}$, $i_{(+)}$: Corrientes hacia el amplificador en las terminales inversora y no inversora, respectivamente
- v_{id} : Voltaje de entrada en las terminales inversora y no inversora
- $+V_{CC}$, $-V_{EE}$: Voltajes de alimentación de DC, comúnmente $+15V$ y $-15V$
- R_i : Resistencia de entrada, idealmente infinita
- A : Ganancia del amplificador. Idealmente muy alta, del orden de $1 \times 10^{10} \Omega$
- R_o : Resistencia de salida, idealmente cero
- v_o : Voltaje de salida; $v_o = A_{OL} v_{id}$ donde A_{OL} es la ganancia de voltaje en lazo abierto

El Opamp ideal

Ganancia (A): Se asume que es infinita. Siempre es posible controlarla con elementos externos

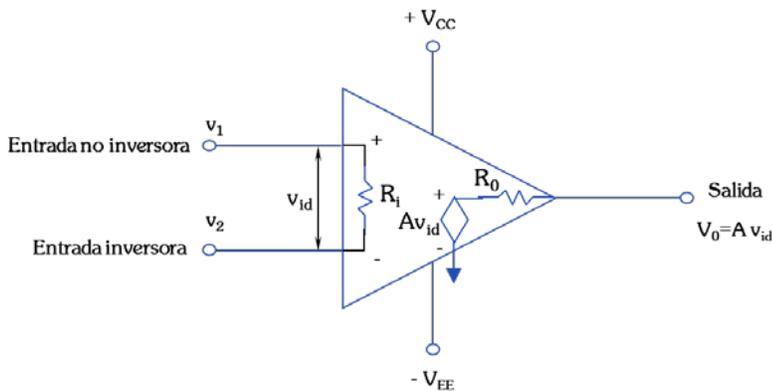
Impedancia de entrada (R_i): Se asume que es infinita.

Impedancia de salida (R_o): Se considera igual a cero.

Respuesta en el Tiempo: La salida debe ocurrir al mismo tiempo que ocurre un cambio en las entradas, así que se considera cero. El corrimiento de fase será 180°. La respuesta en frecuencia será plana y el ancho de banda infinito (no hay dependencia de la frecuencia).

Offset: La salida del amplificador debe ser cero cuando la diferencia de potencial entre sus entradas inversora y no inversora sea cero.

Relación de rechazo en modo común (CMRR=A_d/A_{cm}): Se asume con un valor infinito.



El circuito equivalente es útil para analizar los principios de operación básicos de los opamps y observar los efectos de los arreglos con retroalimentación.

Para el circuito mostrado:

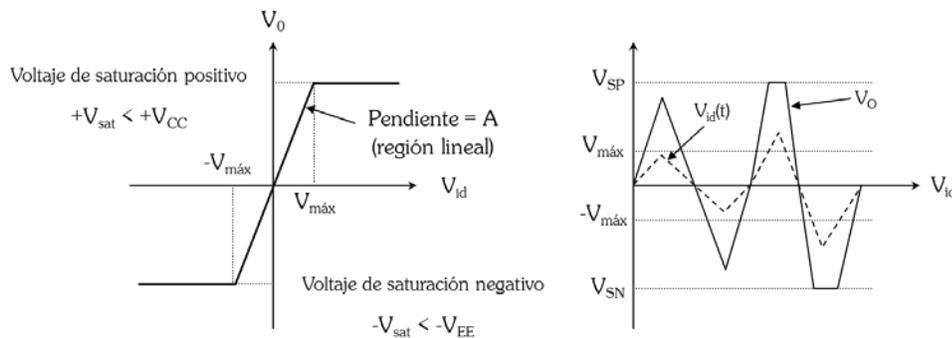
$$V_o = A v_{id} = A(v_1 - v_2)$$

donde: A = Ganancia de voltaje de gran señal

v_{id} = Voltaje de entrada diferencial

v_1, v_2 = voltajes en las terminales no inversora e inversora, respectivamente con respecto a la tierra.

Curva de transferencia de voltaje ideal



El voltaje de offset es igual a cero. La curva no está a escala, pues sería casi vertical, debido a la ganancia infinita de A.

Configuración en lazo abierto

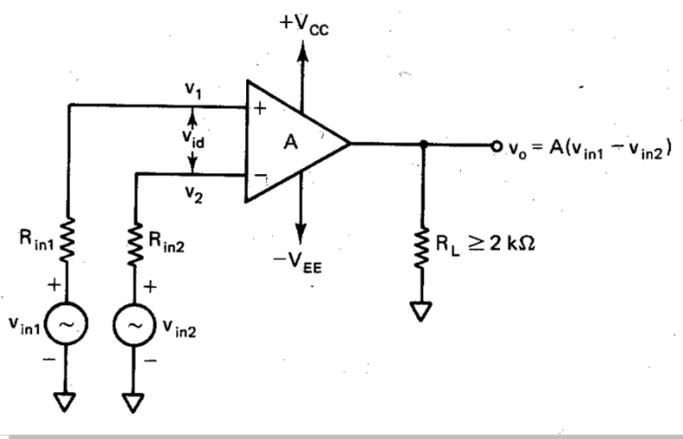
En esta configuración no existe ninguna conexión directa o a través de otra red entre la salida y las terminales de entrada.

En esta configuración, el opamp simplemente funciona como un amplificador de alta ganancia.

Existen tres configuraciones básicas en lazo abierto:

1. El amplificador diferencial
2. El amplificador inversor
3. El amplificador no inversor

El amplificador diferencial

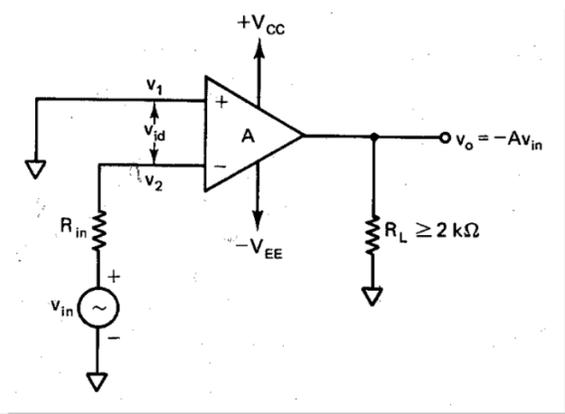


Este dispositivo amplifica señales de entrada tanto de DC como de AC. Las resistencias de las fuentes R_{in1} y R_{in2} normalmente son despreciables comparadas con la resistencia de entrada R_i . Así, se puede asumir que las caídas de voltaje en esos resistores es cero; y, por lo tanto, $v_1 = v_{in1}$ y $v_2 = v_{in2}$, con lo que se obtiene:

$$v_o = A(v_{in1} - v_{in2})$$

La polaridad del voltaje de salida depende de la polaridad del voltaje diferencial en la entrada. En estas configuraciones, la ganancia A comúnmente se refiere como la *ganancia de lazo abierto*.

El amplificador inversor

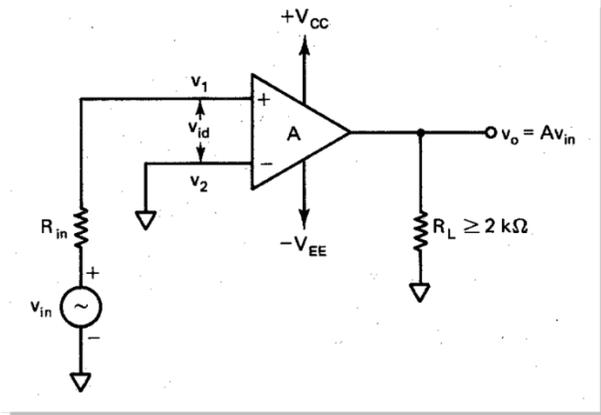


En esta configuración, sólo se aplica una entrada a la terminal inversora del opamp; la otra terminal se aterriza.

Puesto que $v_1=0$ y $v_2=v_{in}$ entonces: $v_o = -Av_{in}$

El signo negativo indica que la salida está desfasada 180° con respecto a la entrada, o simplemente, que es de polaridad opuesta.

El amplificador no inversor



En esta configuración, sólo se aplica un voltaje de entrada a la terminal no inversora del opamp; la otra terminal se aterriza.

Puesto que $v_1=v_{in}$ y $v_2=0$, entonces: $v_o = Av_{in}$

Esto significa que el voltaje de salida es mayor que el de entrada por un factor A, y está en fase con la señal de entrada.

Características de las configuraciones de lazo abierto

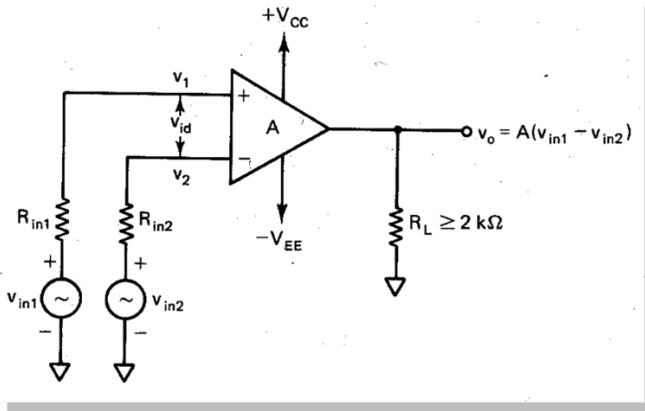
- En las tres configuraciones, cualquier señal de entrada (diferencial o sencilla) que sea ligeramente mayor que cero, produce un nivel de saturación en la salida.
- Así, cuando se opera en lazo abierto, la salida de un opamp sólo cambia entre los valores positivo o negativo de saturación.
- Por esta razón, no se emplean estas configuraciones en aplicaciones lineales.

Ejemplo

Determinar el voltaje de salida en cada uno de los siguientes casos:

- $v_{in1}=5 \mu\text{VDC}$, $v_{in2}= -7 \mu\text{VDC}$
- $v_{in1}=10 \text{ mV rms}$, $v_{in2}= 20 \text{ mV rms}$

el opamp es un 741 con las siguientes especificaciones: $A=200000$, $R_i=2\text{M}\Omega$, $R_o=75\Omega$, $V_{cc}= 15\text{V}$, $V_{EE}= -15\text{V}$ y un rango de voltaje de salida $= \pm 14\text{V}$.



Solución

Determinar el voltaje de salida en cada uno de los siguientes casos:

- a) Por la ecuación del diferencial en lazo abierto:
 $v_o = 200000 [(5)(10^{-6}) - (-7)(10^{-6})] = 2.4V$

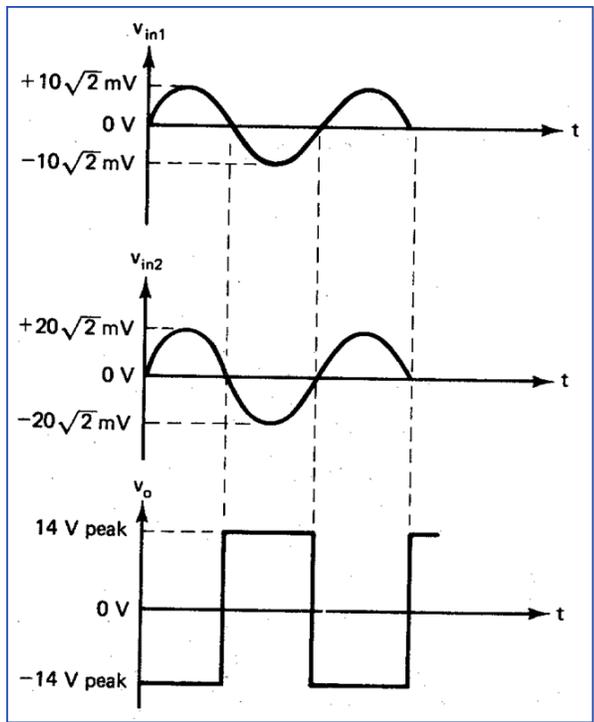
La salida será 2.4V considerando que el voltaje de offset es igual a cero.

- b) La ecuación es válida para señales de AC y DC, con la única restricción que las señales de AC tengan la misma frecuencia:

$$v_o = 200000 [(10)(10^{-3}) - (20)(10^{-3})] = -2000V_{rms}$$

El valor de salida teórico (-2000 Vrms) se verá recortado, puesto que el operacional se satura a $\pm 14V$, como se muestra. Esta forma no senoidal es inaceptable en aplicaciones de amplificación.

La solución a este problema es emplear un lazo de retroalimentación como se verá más adelante



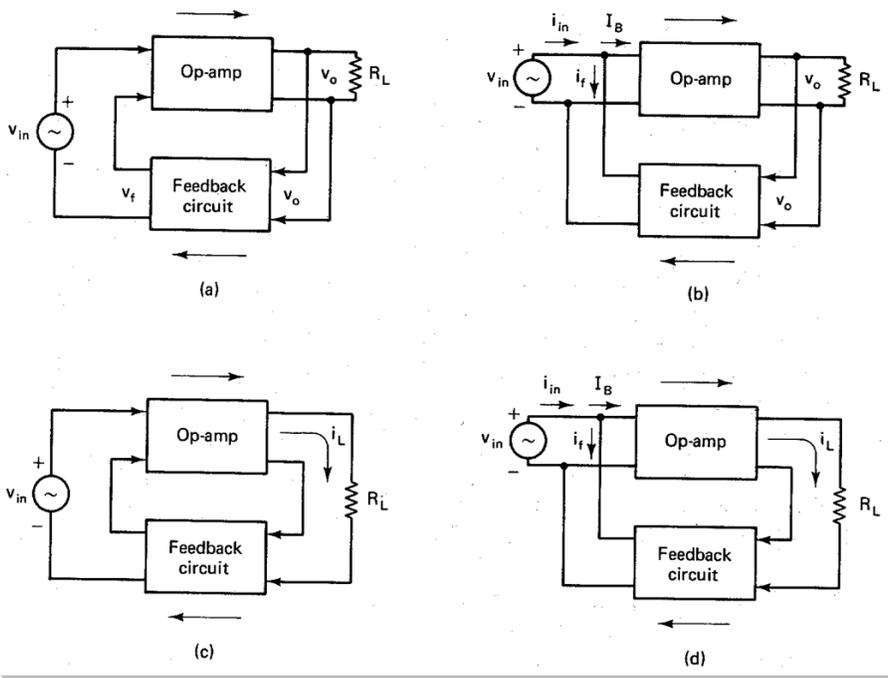
Configuraciones con retroalimentación

Un amplificador retroalimentado se puede representar con dos bloques, uno para el opamp y otro para el circuito de retroalimentación. Hay cuatro formas en que se pueden conectar estos bloques y se clasifican de acuerdo a lo que se retroalimenta (voltaje o corriente) y la forma en que lo hace (serie o paralelo).

Estas posibles configuraciones son las siguientes:

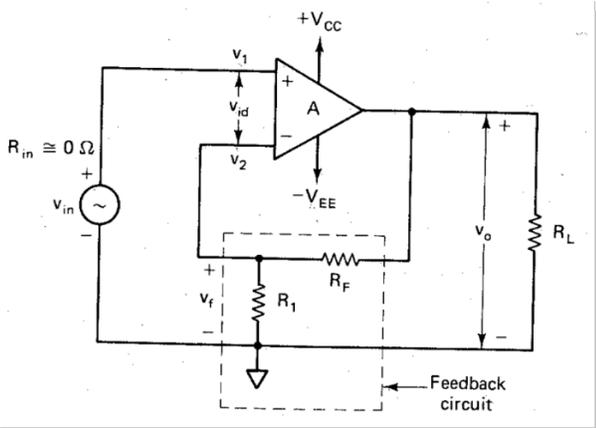
1. Retroalimentación de voltaje en serie
2. Retroalimentación de voltaje en paralelo
3. Retroalimentación de corriente en serie
4. Retroalimentación de corriente en paralelo

El amplificador retroalimentado



A veces es referido como amplificador de *lazo cerrado*. Esencialmente consta de dos partes: un opamp y un circuito de retroalimentación que puede tener elementos pasivos, activos o ambos, dependiendo de la aplicación.

El amplificador retroalimentado con voltaje en serie



Ganancias del circuito:

Ganancia de voltaje en lazo abierto:

$$A = v_O / v_{id}$$

Ganancia de voltaje en lazo cerrado:

$$A_F = v_O / v_{in}$$

Ganancia del circuito de retroalimentación:

$$B = v_F / v_O$$

Retroalimentación negativa y ganancia en lazo cerrado

Empleando ecuaciones de Kirchhoff: $v_{id} = v_{in} - v_f$ (*)

La ganancia de lazo cerrado es: $A_F = v_O / v_{in}$

También se tiene que: $v_O = A v_{id} = A(v_1 - v_2)$

De la figura se tiene que: $v_1 = v_{in}$

$$v_2 = v_f = \frac{R_1 v_O}{R_1 + R_F} \text{ puesto que } R_i \square R_1$$

Por lo tanto,

$$v_O = A \left(v_{in} - \frac{R_1 v_O}{R_1 + R_F} \right) \rightarrow v_O = \frac{A(R_1 + R_F)v_{in}}{R_1 + R_F + AR_1}$$

Así, se obtiene:

$$A_F = \frac{v_O}{v_{in}} = \frac{A(R_1 + R_F)}{R_1 + R_F + AR_1} \quad (\text{valor exacto})$$

Normalmente A es muy grande (típicamente 10^5 , así que: $AR_1 \gg (R_1 + R_F)$ y $(R_1 + R_F + AR_1) \cong AR_1$)

Por lo que:

$$A_F = \frac{v_O}{v_{in}} = 1 + \frac{R_F}{R_1} \quad (\text{ideal})$$

(*) Un opamp siempre amplifica la diferencia del voltaje de entrada v_{id} . El signo negativo implica que el voltaje de retroalimentación siempre se opone al voltaje de entrada (o está desfasado 180° con respecto al voltaje de entrada); por ello se dice que la retroalimentación es negativa.

Otro resultado interesante se puede obtener considerando la ganancia del circuito de retroalimentación (B), la cual se definió anteriormente:

$$B = \frac{v_f}{v_o}$$

$$= \frac{R_1}{R_1 + R_F}$$

De donde se observa que:

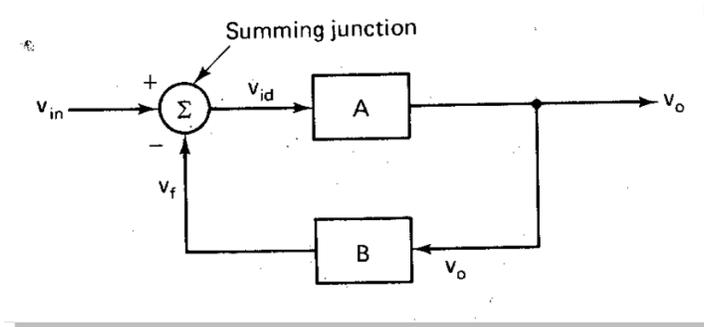
$$A_F = \frac{1}{B} \quad (\text{ideal})$$

Lo cual significa que la ganancia del circuito de retroalimentación es el recíproco de la ganancia de lazo cerrado. En otras palabras, para valores dados de R_1 y R_F , los valores de A_F y B son fijos. Además, esta ecuación puede resultar más sencilla de recordar.

Finalmente, la ganancia de voltaje de lazo cerrado A_F se puede expresar en términos de la ganancia de lazo abierto y la del circuito de retroalimentación como sigue, reorganizando la ecuación exacta de A_F :

$$A_F = \frac{A \left(\frac{R_1 + R_F}{R_1 + R_F} \right)}{\frac{R_1 + R_F}{R_1 + R_F} + \frac{AR_1}{R_1 + R_F}} \rightarrow A_F = \frac{A}{1 + AB}$$

Esta ecuación se puede representar en un diagrama de bloques estándar para sistemas con retroalimentación en donde se indica la relación entre las distintas variables del sistema



Voltaje de entrada diferencial idealmente cero

La ecuación de ganancia se puede reescribir como:

$$v_{id} = \frac{v_o}{A}$$

Puesto que A es muy grande (idealmente infinita):

$$v_{id} \cong 0$$

o bien,

$$v_1 \cong v_2$$

Esto nos dice que el voltaje en la entrada no inversora es aproximadamente igual al de la entrada inversora de un opamp si su ganancia A es muy grande.

Empleando este concepto se puede obtener la ganancia de lazo cerrado como sigue:

$$v_1 = v_{in}, v_2 = v_f =$$

$$\frac{R_1 v_O}{R_1 + R_F}$$

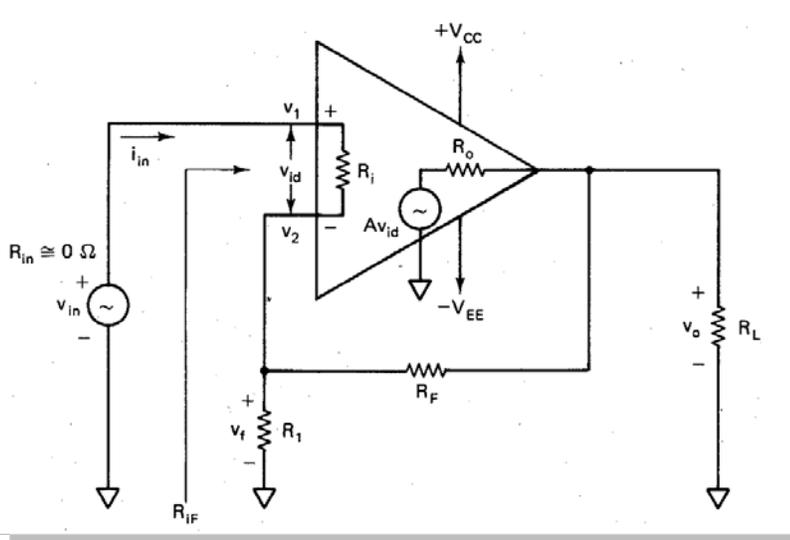
considerando $v_1 \cong v_2$:

$$v_{in} = \frac{R_1 v_O}{R_1 + R_F}$$

De donde:

$$A_F = \frac{v_O}{v_{in}} = 1 + \frac{R_F}{R_1}$$

Resistencia de entrada con retroalimentación



En este circuito R_i es la resistencia de entrada (de lazo abierto) del opamp y R_{iF} es la resistencia de entrada del amplificador retroalimentado, definida como:

$$R_{iF} = \frac{v_{in}}{i_{in}} = \frac{v_{in}}{v_{id} / R_i}$$

Sin embargo, como ya se había visto previamente:

$$v_{id} = \frac{v_O}{A}$$

$$A_F = \frac{v_O}{v_{in}} \rightarrow v_O = \frac{A}{1 + AB} v_{in}$$

Por lo tanto:

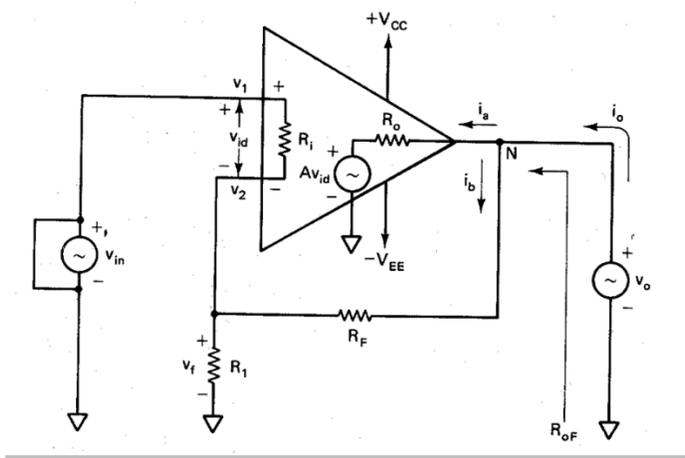
$$R_{iF} = R_i \frac{v_{in}}{v_O / A}$$

$$= AR_i \frac{v_{in}}{Av_{in} / (1 + AB)}$$

$$= R_i (1 + AB)$$

Esto significa que la resistencia de entrada del opamp retroalimentado es $(1+AB)$ la del opamp sin retroalimentación.

Resistencia de salida con retroalimentación



Esta resistencia se puede obtener mediante el teorema de Thévenin para fuentes *dependientes*. Específicamente, para encontrar R_{oF} , se pasiva la fuente independiente v_{in} , se aplica un voltaje externo v_o y se calcula la corriente resultante i_o .

En resumen, la resistencia de salida con retroalimentación R_{OF} , se define como:

$$R_{OF} = \frac{v_o}{i_o}$$

La ley de Kirchhoff de corriente en el nodo N nos da lo siguiente:

$$i_o = i_a + i_b$$

Puesto que $R_F + R_1 \parallel |R_i| \gg R_o$, entonces: $i_o \cong i_a$

La corriente i_o se puede encontrar mediante la ecuación de Kirchhoff de voltaje para la salida:

$$v_o - R_o i_o - A v_{id} = 0$$

$$i_o = \frac{v_o - A v_{id}}{R_o}$$

Sin embargo,

$$\begin{aligned} v_{id} &= v_1 - v_2 \\ &= 0 - v_f \\ &= -\frac{R_1 v_o}{R_1 + R_F} = -B v_o \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$i_o = \frac{v_o - AB v_o}{R_o} \Rightarrow R_{OF} = \frac{v_o}{(v_o + AB v_o) / R_o} = \frac{R_o}{1 + AB}$$

Esto implica que la resistencia R_o del opamp retroalimentado es mucho más pequeña que la resistencia de salida sin retroalimentación.

Ancho de banda con retroalimentación

Los fabricantes generalmente especifican el producto de la ganancia–ancho de banda, o muestran la curva de ganancia en lazo abierto vs. Frecuencia para el opamp. En la figura se muestra la curva del 741.

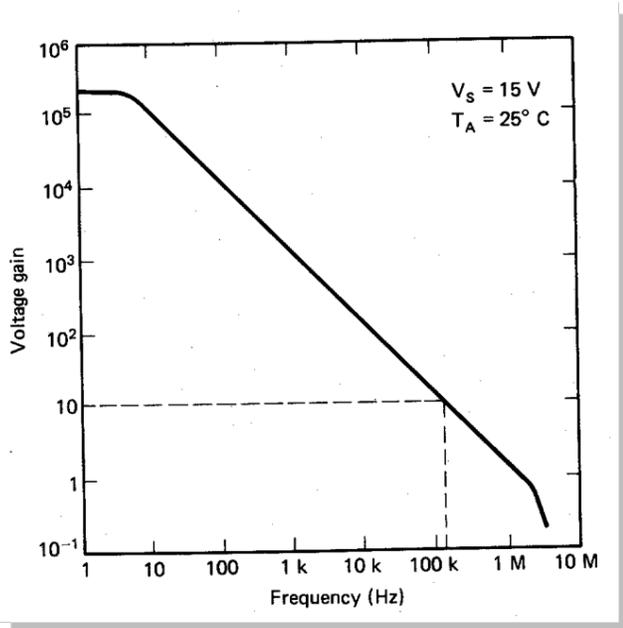
La frecuencia para la cual la ganancia es igual a 1, se conoce como el ancho de banda de ganancia unitaria, y es la máxima frecuencia a la cual pueden operar los opamps.

El producto de la ganancia–ancho de banda es constante. Si se emplea retroalimentación negativa, la ganancia disminuye a $A/(1+AB)$. Por lo que:

$$f_f = f_o(1+AB)$$

o bien:

$$f_F = \frac{\text{ancho de banda unitario}}{\text{ganancia en lazo cerrado}} = \frac{UBW}{A_F}$$



Voltaje de offset de salida total con retroalimentación

En un opamp, cuando la entrada es cero, se esperaría que la salida también sea cero. Sin embargo, debido al efecto de offset del voltaje y corriente de entrada, la salida es significativamente mayor como resultado, en gran medida, de la muy alta ganancia en lazo abierto. Este voltaje de salida enriquecido se llama voltaje de offset de salida total (V_{OOT}).

En un opamp con lazo abierto, el V_{OOT} es igual al voltaje positivo o negativo de saturación.

En un amplificador retroalimentado, el V_{OOT} es $1/(1+AB)$ veces el voltaje en lazo abierto:

$$V_{OOT} = \frac{\pm V_{sat}}{1 + AB}$$

Entre mayor sea el de $(1+AB)$, menor será el efecto del ruido y de las variaciones en las fuentes de alimentación, así como los cambios del voltaje de salida debidos a la temperatura en un amplificador no inversor.

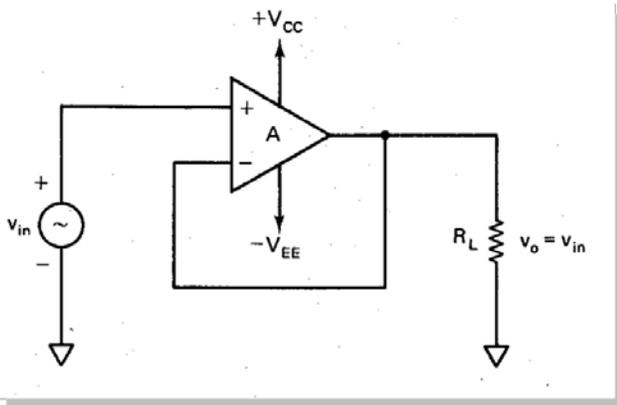
De hecho, el amplificador no inversor exhibe las características de un *amplificador de voltaje perfecto*: Tiene una muy alta resistencia de entrada, muy baja resistencia de salida, ganancia de voltaje estable, ancho de banda grande y muy poco (idealmente cero) voltaje de offset de salida.

Seguidor de voltaje

La mínima ganancia que puede tener un amplificador no inversor con retroalimentación es 1. Cuando el amplificador se configura para operar con ganancia unitaria, se le denomina un *seguidor de voltaje*, puesto que el voltaje de salida es igual en magnitud y fase al de entrada.

El seguidor de voltaje se obtiene a partir del amplificador no inversor abriendo R_1 y cortocircuitando R_F .

Como se observa, todo el voltaje de salida se retroalimenta a la terminal inversora, por lo que la ganancia de retroalimentación del circuito es 1 ($B=A_F=1$).



Puesto que este es un caso especial del amplificador no inversor, todas las fórmulas desarrolladas para éste último son aplicables, excepto la de ganancia del circuito de retroalimentación ($B=1$).

Las fórmulas aplicables son:

$$A_F = 1$$

$$R_{iF} = AR_i$$

$$R_{oF} = \frac{R_o}{A}$$

$$f_F = Af_o$$

$$V_{OOT} = \frac{\pm V_{sat}}{A}, \text{ (puesto que } (1+A) \cong A$$

El seguidor de voltaje también es llamado un *buffer no inversor*, pues si se coloca entre dos redes, remueve la carga de la primera red.

Ejemplo.

El opamp 741C, que tiene los siguientes parámetros, se conecta como amplificador no inversor, con $R_1=1K\Omega$ y $R_F=10K\Omega$:

$$A = 200,000$$

$$R_i = 2 \text{ M}\Omega$$

$$R_o = 75 \Omega$$

$$f_o \cong 5 \text{ Hz}$$

$$\text{supply voltages} = \pm 15 \text{ V}$$

$$\text{output voltage swing} = \pm 13 \text{ V}$$

Calcule los valores de A_F , R_{iF} , R_{oF} , f_F y V_{oot} .

Solución.

Primero se calcula B. Entonces, los parámetros de lazo cerrado A_F , R_{iF} , R_{oF} , f_F y V_{oot} se pueden obtener con las ecuaciones desarrolladas previamente:

$$B = \frac{R_1}{R_1 + R_F} = \frac{1 \text{ k}\Omega}{1 \text{ k}\Omega + 10 \text{ k}\Omega} = \frac{1}{11}$$

$$1 + AB = 1 + \frac{200,000}{11} = 18,182.8$$

$$A_F = \frac{200,000}{18,182.8} = 10.99$$

$$R_{iF} = 2 \text{ M}\Omega(18,182.8) = 36.4 \text{ G}\Omega$$

$$R_{oF} = \frac{75\Omega}{18,182.8} = 4.12 \text{ m}\Omega$$

$$f_F = (5 \text{ Hz})(18,182.8) = 90.9 \text{ kHz}$$

$$V_{oot} = \frac{\pm 13 \text{ V}}{18,182.8} = \pm 0.715 \text{ mV}$$

Note que el signo (\pm) indica que V_{oot} puede ser de cualquier polaridad.

La ganancia de voltaje se calculó empleando la ecuación exacta. Empleando la ecuación ideal daría 11, lo cual da un error muy pequeño (0.09%) y puede ser ignorado. Así, la ecuación ideal puede usarse en forma práctica, siempre que $A \gg A_F$.

Ejemplo.

Repetir el ejemplo anterior para el seguidor de voltaje.

Solución:

Para el seguidor de voltaje, $B=1$, por lo tanto, $1+AB \cong 200,000$. Los parámetros de lazo cerrado se calculan con las ecuaciones definidas para el seguidor:

$$A_F = 1$$

$$R_{iF} = 2 \text{ M}\Omega(200,000) = 400 \text{ G}\Omega$$

$$R_{oF} = \frac{75\Omega}{200,000} = 0.375 \text{ m}\Omega$$

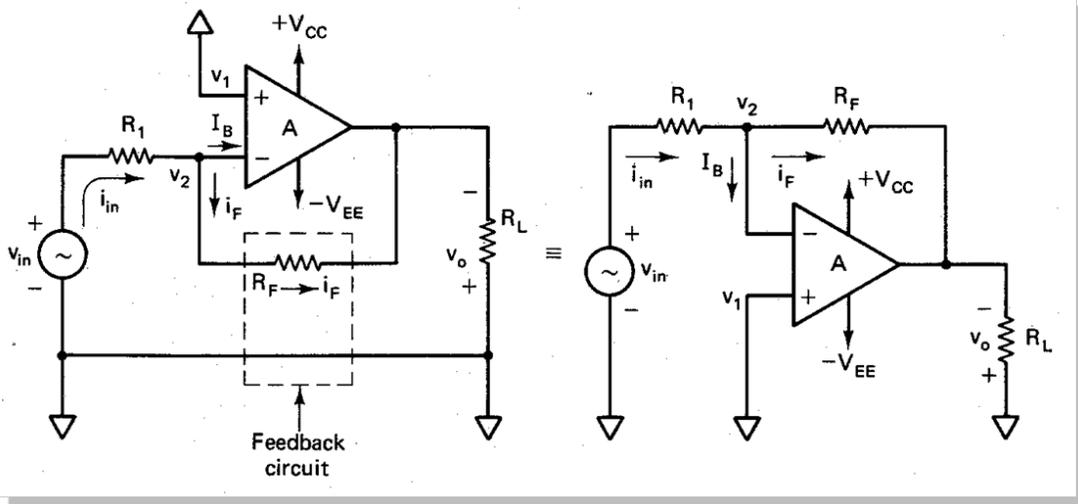
$$f_F = (5 \text{ Hz})(200,000) = 1 \text{ MHz}$$

$$V_{oot} = \frac{\pm 13 \text{ V}}{200,000} = \pm 65 \mu\text{V}$$

Se observa que las resistencias de entrada y salida se aproximan más a valores ideales, y el ancho de banda es igual al valor máximo de frecuencia de operación del opamp. Adicionalmente, puesto que $(1+AB)=A$, se obtiene el valor más pequeño posible de V_{OOT} .

El amplificador retroalimentado con voltaje en paralelo

En este caso, el voltaje de entrada se aplica a la terminal inversora, así como la señal de salida a través de R_F . Este arreglo trabaja con retroalimentación negativa, pues cualquier incremento en la señal de salida resulta en una señal de retroalimentación hacia la entrada inversora, causando un decremento en la señal de salida.



Ganancia de voltaje en lazo cerrado

En este caso, la entrada no inversora está aterrizada, y el circuito de retroalimentación es sólo un resistor R_F , sin embargo, un resistor extra R_1 se conecta en serie con la fuente de señal v_{in} .

La ganancia de voltaje de lazo cerrado A_F se puede obtener escribiendo la ecuación de Kirchhoff de corriente en el nodo v_2 :

Puesto que R_i es muy grande, la corriente de entrada I_B es muy pequeña. Por ejemplo, $R_i=2M\Omega$ e $I_B=0.5\mu A$ para el 741C. Por lo que:

$$i_{in} \cong i_F$$

Esto es:

$$\frac{v_{in} - v_2}{R_1} = \frac{v_2 - v_O}{R_F} \quad (a)$$

sin embargo, de la ecuación de lazo abierto:

$$v_1 - v_2 = \frac{v_O}{A}$$

puesto que $v_1=0$,

$$v_2 = -\frac{v_O}{A}$$

Sustituyendo en (a) y reorganizando, se obtiene:

$$\frac{v_{in} + v_O / A}{R_1} = \frac{-(v_O / A) - v_O}{R_F}$$

$$A_F = \frac{v_O}{v_{in}} = -\frac{AR_F}{R_1 + R_F + AR_1} \quad (\text{exacta})$$

El signo negativo indica que las señales de entrada y salida están desfasadas 180° (o tienen polaridades opuestas). De hecho, debido a esta inversión de la fase, esta configuración se denomina comúnmente *amplificador inversor* con retroalimentación.

Puesto que la ganancia interna A es muy alta (idealmente infinita), $AR_1 \gg R_1 + R_F$, y la ganancia se puede describir como:

$$A_F = \frac{v_O}{v_{in}} = -\frac{R_F}{R_1} \quad (\text{ideal})$$

Esta ecuación muestra que la ganancia de un amplificador inversor se ajusta mediante la relación de la resistencia de retroalimentación R_F a la resistencia de entrada R_1 . De hecho, esta relación se puede ajustar a cualquier valor, incluso menor a 1. Por ello, esta configuración encuentra una mayor cantidad de aplicaciones que la del amplificador no inversor.

Se puede describir la ecuación exacta para facilitar el análisis y poder comparar las configuraciones del amplificador inversor y el no inversor.

Dividiendo el numerador y denominador por R_F :

$$A_F = -\frac{A}{1 + (R_1 / R_F)(1 + A)}$$

Puesto que A es muy grande, $1+A \cong A$, con lo que se obtiene:

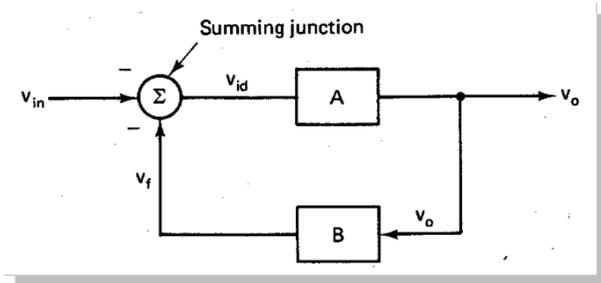
$$A_F = -\frac{A}{1 + A(R_1 / R_F)}$$

Comparando esto con la ecuación correspondiente del amplificador no inversor, se puede igualar $B=R_1/R_F$.

Así, la magnitud de la ganancia de lazo cerrado ideal es:

$$|A_F| = \frac{1}{B} = \frac{R_F}{R_1}$$

Esto permite representar al amplificador inversor retroalimentado con el diagrama a bloques mostrado.



Terminal inversora conectada a tierra virtual

En esta configuración la entrada no inversora está aterrizada y la señal de entrada se aplica a la inversora a través de R_F . Sin embargo, como ya se mencionó, la diferencia de voltaje de entrada es idealmente cero; esto es, $v_2 \cong v_1$, con lo que v_2 estará aproximadamente al potencial de tierra, por lo que se dice que es una *tierra virtual*.

Este concepto es muy útil en el análisis de circuitos inversores de lazo cerrado.

Por ejemplo, la ganancia ideal de lazo cerrado se puede obtener empleando el concepto de tierra virtual como sigue:

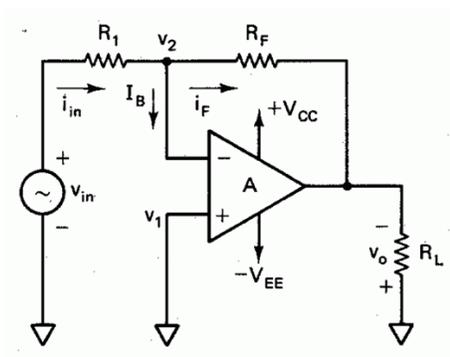
En el circuito del amplificador retroalimentado con voltaje en paralelo: $i_{in} \cong i_F$.

Esto es:
$$\frac{v_{in} - v_2}{R_1} = \frac{v_2 - v_O}{R_F}$$

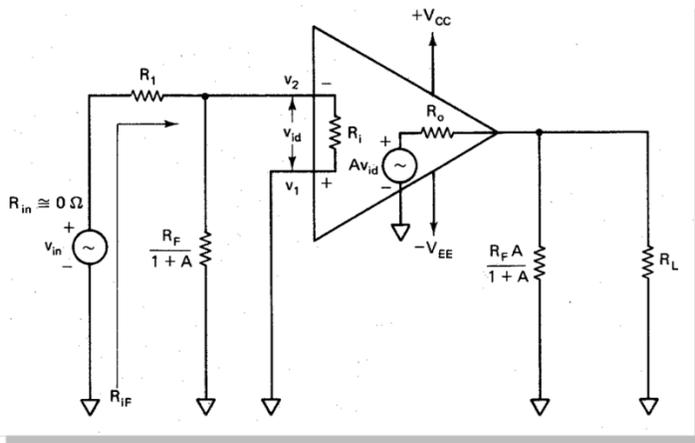
Sin embargo, $v_1 = v_2 = 0$

Por lo que:
$$\frac{v_{in}}{R_1} = -\frac{v_O}{R_F}$$

o bien:
$$A_F = \frac{v_O}{v_{in}} = -\frac{R_F}{R_1}$$



Resistencia de entrada con retroalimentación



El modo más sencillo para encontrar la resistencia de entrada, es encontrar el equivalente de Miller para el resistor de retroalimentación R_F , esto es, dividir el resistor R_F en sus dos componentes de Miller, como se muestra en la figura, con $A = -v_o/v_2$. Entonces, la resistencia de entrada con retroalimentación R_{iF} será:

$$R_{iF} = R_1 + \frac{R_F}{1+A} \parallel (R_i) \quad (\text{exacto})$$

Puesto que R_i y A son muy grandes: $\frac{R_F}{1+A} \parallel (R_i) \cong 0$

Entonces: $R_{iF} = R_1$ (ideal)

Resistencia de salida con retroalimentación

La resistencia de salida del amplificador inversor se puede obtener usando el equivalente de Thévenin para R_{oF} , como se muestra en la figura. Nótese que el circuito equivalente de Thévenin es exactamente el mismo que para el amplificador no inversor, puesto que las conexiones de salida son las mismas en ambos circuitos.

Lo anterior significa que la ecuación de la resistencia de salida es igual para ambos casos; así, R_{oF} está definida como:

$$R_{oF} = \frac{R_o}{1+AB}$$

Sin embargo, en el amplificador inversor:

$$B = R_1/R_F.$$

Ancho de banda con retroalimentación

Como se mencionó anteriormente, el producto ganancia-ancho de banda de un opamp es constante. Asimismo, la ganancia del amplificador retroalimentado es siempre menor que la de lazo abierto. Por lo tanto, el ancho de banda del amplificador con retroalimentación f_f debe ser mayor que sin retroalimentación. Entonces, la ecuación del ancho de banda del amplificador inversor es la siguiente:

$$f_F = f_O(1 + AB)$$

o, equivalentemente,
$$f_F = \frac{\text{ancho de banda de ganancia unitaria}}{\text{ganancia de lazo cerrado}}$$

donde $B = R_1 / R_F$. Así, la ecuación para el ancho de banda es la misma para el amplificador inversor y el no inversor retroalimentados, excepto el valor de B.

Voltaje de offset de salida total con retroalimentación

Como ya se ha mencionado, la ganancia de un amplificador retroalimentado es siempre menor que sin retroalimentación; por ello, el voltaje de offset de salida con retroalimentación V_{OOT} debe ser siempre menor que sin retroalimentación.

Específicamente:

$$\text{Voltaje de offset de salida total con retroalimentación} = \frac{\text{Voltaje de offset de salida total con retroalimentación}}{1 + AB}$$

Esto es,

Nótese nuevamente que la ecuación de V_{OOT} para el amplificador inversor es la misma que para el no inversor, excepto el valor de B.

Finalmente, hay dos casos especiales del amplificador inversor retroalimentado: El convertidor de corriente a voltaje y el inversor.

Convertidor de corriente a voltaje

Considerando la ecuación de ganancia de voltaje ideal del amplificador inversor, se tiene que:

$$A_F = \frac{v_O}{v_{in}} = -\frac{R_F}{R_1}$$

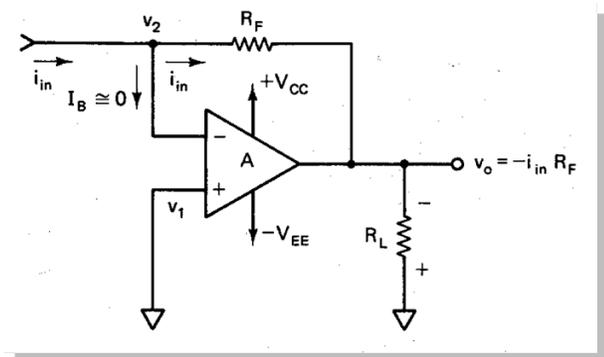
$$v_O = -\left(\frac{v_{in}}{R_1}\right)R_F$$

Sin embargo, puesto que $v_1=0$ y $v_1 = v_2$,

$$\frac{v_{in}}{R_1} = i_{in}$$

$$\therefore v_O = -i_{in}R_F$$

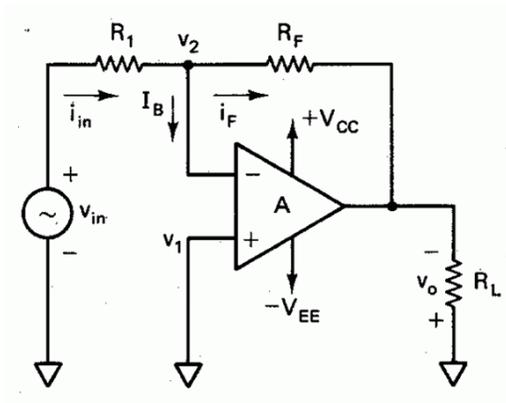
Esto significa que si se reemplaza v_{in} y R_1 por una fuente de corriente, como se muestra, el voltaje de salida resulta proporcional a la corriente de entrada i_{in} .



Inversor

Si se requiere una señal de igual amplitud pero opuesta en fase a la señal de entrada, se puede emplear el inversor. El amplificador inversor de la figura trabajará como inversor si $R_1=R_F$.

Puesto que el inversor es un caso especial del amplificador inversor, todas las ecuaciones desarrolladas para este último son aplicables en este caso. Las ecuaciones pueden aplicarse sustituyendo $(1+AB)$ por A , puesto que $B=1$.



Ejemplo.

El opamp 741C, con los parámetros del ejemplo previo, se conecta como amplificador inversor, con $R_1=470\Omega$ y $R_F=4.7K\Omega$. Calcule los valores de A_F , R_{iF} , R_{oF} , f_F y V_{oot} .

Solución.

Nuevamente, primero se calcula B:

$$B = \frac{R_1}{R_F} = \frac{470}{4.7K\Omega} = \frac{1}{10}$$

Entonces, $1+AB \cong 20000$, y con esto se pueden calcular los parámetros de lazo cerrado como sigue:

$$A_F = -\frac{200,000}{20,000} = -10$$

$$R_{iF} = 470 \Omega + \left(\frac{4700 \Omega}{200000} \parallel 2 \text{ M}\Omega \right) = 470 \Omega$$

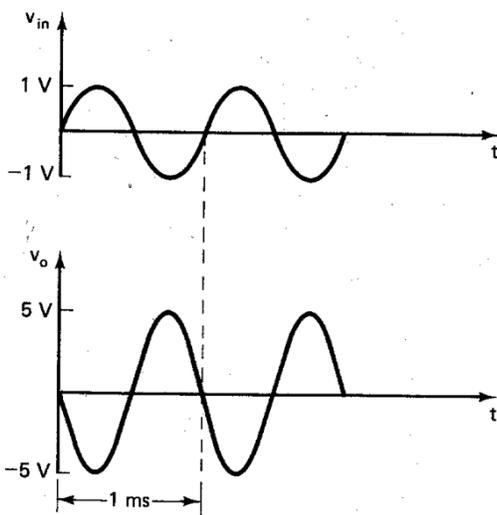
$$R_{oF} = \frac{75 \Omega}{20,000} = 3.75 \text{ m}\Omega$$

$$f_F = (5 \text{ Hz})(20,000) = 100 \text{ kHz}$$

$$V_{oot} = \frac{\pm 13 \text{ V}}{20,000} = \pm 650 \mu\text{V}$$

Ejemplo.

Para el amplificador inversor del ejemplo previo, determine el valor del voltaje de salida si la entrada es una onda senoidal de 1Vpp de 1KHz. También dibuje las formas de onda. Asuma que $V_{oot} = 0$.



Solución.

Usando el valor de la ganancia calculado en el ejemplo anterior, el voltaje de salida es:

$$v_o = -(10)(1) = -10\text{Vpp}$$

Las formas de onda de entrada y salida se muestran en la figura.

Resumen de resultados obtenidos para el amplificador inversor y no inversor

Las configuraciones con retroalimentación de corriente en serie y retroalimentación de corriente en paralelo tienen poco uso en la práctica, así que no se desarrollarán en el curso.

Sin embargo, como ejercicio, se puede realizar el mismo procedimiento para ellas de la misma forma que para las dos configuraciones ya analizadas.

Parameter	Noninverting amplifier	Inverting amplifier
1. Voltage gain	$A_F = \frac{A(R_1 + R_F)}{R_1 + R_F + AR_1} \quad (\text{exact})$ $= \frac{A}{1 + AB}$ $= 1 + \frac{R_F}{R_1} \quad (\text{ideal})$	$A_F = \frac{-AR_F}{R_1 + R_F + AR_1} \quad (\text{exact})$ $= \frac{-A}{1 + AB}$ $= -\frac{R_F}{R_1} \quad (\text{ideal})$
2. Gain of the feedback circuit	$B = \frac{R_1}{R_1 + R_F}$	$B = \frac{R_1}{R_F}$
3. Input resistance	$R_{iF} = R_i(1 + AB)$	$R_{iF} = R_1 + \left(\frac{R_F}{1 + A} \parallel R_i \right)$
4. Output resistance	$R_{oF} = \frac{R_o}{1 + AB}$	$R_{oF} = \frac{R_o}{1 + AB}$
5. Bandwidth	$f_F = f_o(1 + AB)$ $= \frac{UBW}{A_F}$	$f_F = f_o(1 + AB)$ $= \frac{UBW}{A_F}$
6. Total output offset voltage	$V_{ooT} = \frac{\pm V_{sat}}{1 + AB}$	$V_{ooT} = \frac{\pm V_{sat}}{1 + AB}$

Amplificadores diferenciales

Ahora se estudiarán las configuraciones del amplificador diferencial de lazo cerrado. Específicamente, se evaluarán tres arreglos con retroalimentación negativa. Estos se clasificarán de acuerdo con el número de opamps que utilizan:

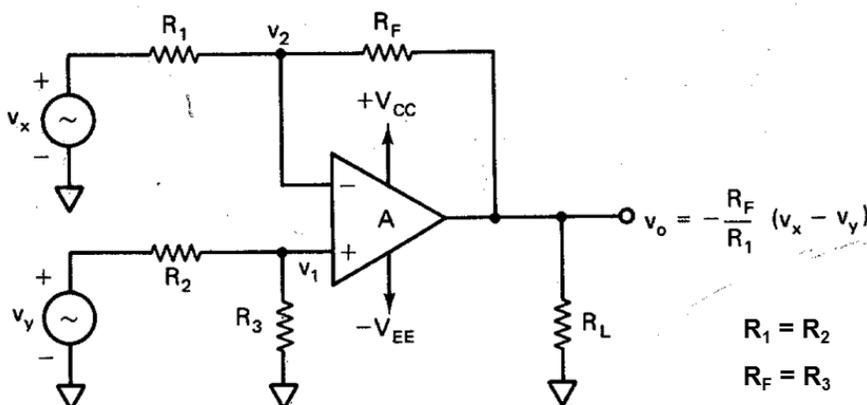
1. Amplificador diferencial con un opamp
2. Amplificador diferencial con dos opamps
3. Amplificador diferencial con tres opamps

Generalmente, los amplificadores diferenciales se emplean en instrumentación y en aplicaciones industriales para amplificar diferencias entre dos señales de entrada, tales como las salidas de un circuito de puente de Wheatstone. Estas configuraciones presentan mejores características que los circuitos sencillos como el amplificador inversor y el no inversor.

El análisis que se hará de estos circuitos será deducir las ecuaciones para la ganancia de voltaje y para la resistencia de entrada.

Amplificador diferencial con un opamp

De la figura se observa que el circuito mostrado es una combinación de los amplificadores inversor y no inversor; esto es, cuando v_x se hace cero, el circuito es un amplificador no inversor, en tanto que si v_y se hace cero, el circuito será un amplificador inversor.



De lo anterior, si $v_Y = 0$, la salida debida únicamente a v_X será:

$$v_{OX} = -\frac{R_F(v_X)}{R_1}$$

Similarmente, si $v_X = 0$, se tiene que:

$$v_1 = \frac{R_3(v_Y)}{R_2 + R_3}$$

y la salida debida a v_Y será:

$$v_{OY} = \left(1 + \frac{R_F}{R_1}\right) v_1 = \frac{R_3}{R_2 + R_3} \left(\frac{R_1 + R_F}{R_1}\right) v_Y$$

Puesto que $R_1 = R_2$, y $R_F = R_3$,

$$v_{OY} = \frac{R_F(v_Y)}{R_1}$$

Tomando las ecuaciones de v_X y v_Y , se obtiene el voltaje de salida de la red:

$$v_O = v_{OX} + v_{OY}$$

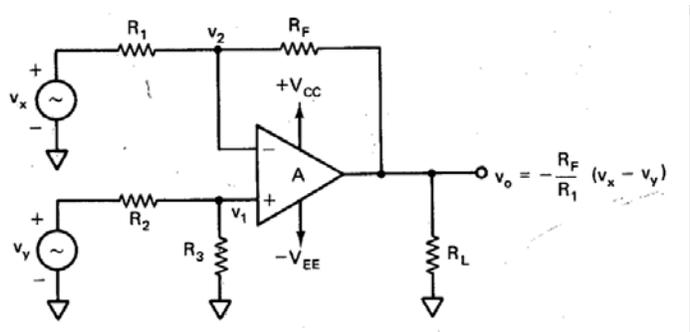
$$v_O = -\frac{R_F}{R_1}(v_X - v_Y) = -\frac{R_F(v_{XY})}{R_1}$$

Y la ganancia de voltaje será:

$$A_D = \frac{v_O}{v_{XY}} = -\frac{R_F}{R_1}$$

Note que la ganancia del amplificador diferencial es la misma que la del amplificador inversor.

Resistencia de entrada

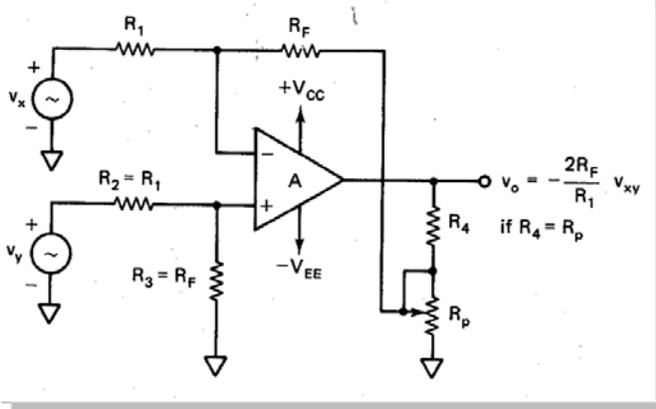


Considerando v_x y $v_y = 0$, el voltaje de salida será cero. Esto significa que $V_{OOT} = 0$. considerando además que $R_1 = R_2$ y $R_F = R_3$, la resistencia de entrada entre cada una de las terminales de entrada v_x o v_y es:

$$R_{ff} = R_1 + R_F$$

Ganancia variable

Si se requiere tener ganancia variable en un amplificador diferencial de un opamp, se puede emplear una configuración como la mostrada. en este circuito, $R_1 = R_2$, $R_F = R_3$ y el potenciómetro $R_P = R_4$. Por lo tanto, dependiendo del valor que tome R_P , la ganancia podrá variar de desde el valor de la ganancia de lazo cerrado $-2R_F/R_1$, hasta la ganancia de lazo abierto A.



Ejemplo.

Usando un opamp 741C con $R_1 = R_2 = 1K\Omega$ y $R_F = R_3 = 10K\Omega$, se construye un amplificador diferencial como el de la figura.

$$A = 200,000$$

$$R_i = 2 M\Omega$$

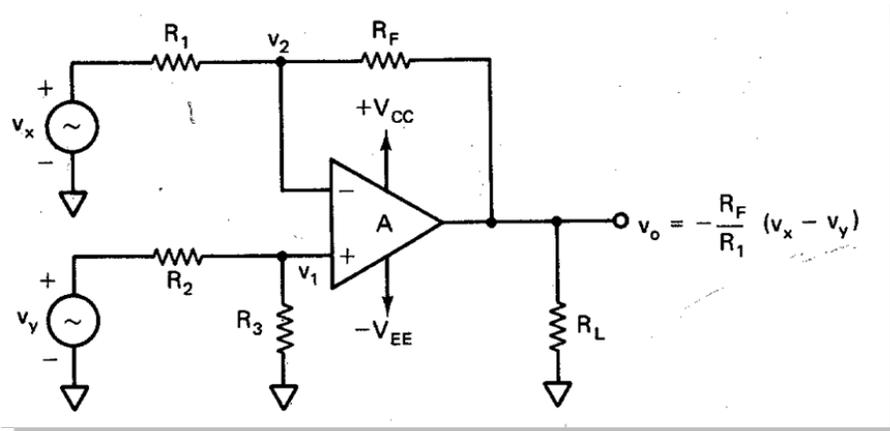
$$R_o = 75 \Omega$$

$$f_o \cong 5 \text{ Hz}$$

$$\text{supply voltages} = \pm 15 \text{ V}$$

$$\text{output voltage swing} = \pm 13 \text{ V}$$

- ¿Cuál es la ganancia y la resistencia de entrada del amplificador?
- Calcular el voltaje de salida v_o si se aplican fuentes senoidales $v_x = 2.7V_{pp}$ y $v_y = 3V_{pp}$ de 100Hz.



Solución.

a) Se sustituyen los valores correspondientes en las ecuaciones para calcular A_D , R_{iF} :

$$A_D = -\frac{10k\Omega}{1k\Omega} = -10$$

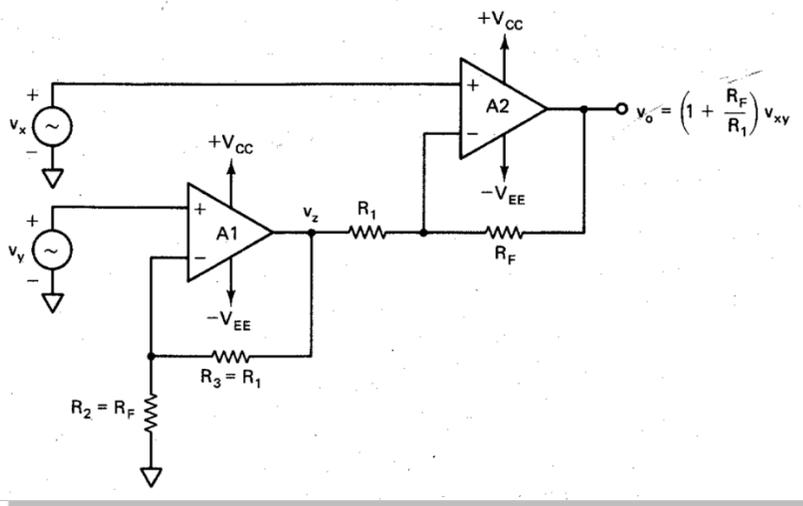
$$R_{iF} = 1k\Omega + 10k\Omega = 11k\Omega$$

b) Reordenando la ecuación de ganancia de voltaje se tiene que:

$$v_O = -A_D v_{XY}$$

$$= -(10)(2.7 - 3) = 3V_{pp}, \text{ señal senoidal a } 100\text{Hz}$$

Amplificador diferencial con dos opamps



La expresión de la ganancia del amplificador diferencial de un opamp es la misma que la del amplificador inversor. Se puede incrementar la ganancia y la resistencia de entrada R_{iF} si se utilizan dos opamps, como se muestra en la figura.

Ganancia de voltaje

Observando el circuito, se puede identificar que está compuesto por dos etapas: un amplificador no inversor y un amplificador diferencial con ganancia diferente para cada entrada. Obteniendo la ganancia para cada etapa, se puede obtener la ganancia global del circuito.

El voltaje de salida v_Z de la primera etapa es:

$$v_Z = \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right) v_Y$$

Aplicando el teorema de superposición a la segunda etapa, se calcula el voltaje de salida:

$$v_O = -\frac{R_F(v_Z)}{R_1} \left(1 + \frac{R_F}{R_1} \right) v_X$$

Sustituyendo el valor de v_Z de la primera ecuación:

$$v_O = -\frac{R_F}{R_1} \left(1 + \frac{R_3}{R_2} \right) v_Y + \left(1 + \frac{R_F}{R_1} \right) v_X$$

Puesto que $R_3 = R_1$ y $R_F = R_2$:

$$v_O = \left(1 + \frac{R_F}{R_1} \right) (v_X - v_Y)$$

Por lo tanto,

$$A_D = \frac{v_O}{v_{XY}} = 1 + \frac{R_F}{R_1}, \quad \text{con } v_{XY} = v_X - v_Y$$

Resistencia de entrada

La resistencia de entrada R_{iF} del amplificador diferencial es la resistencia determinada viendo hacia alguna de las terminales no inversoras con la otra aterrizada. Sin embargo, la primera etapa (A_1) es un amplificador no inversor, por lo que su resistencia de entrada es:

$$R_{iF1} = R_i(1 + AB)$$

donde R_i = resistencia de entrada de lazo abierto del opamp, $B=R_2/(R_2+R_3)$

Similarmente, con $v_Y = 0$, la segunda etapa (A_2) también es la de un amplificador no inversor cuya resistencia de entrada es:

$$R_{iF2} = R_i(1 + AB)$$

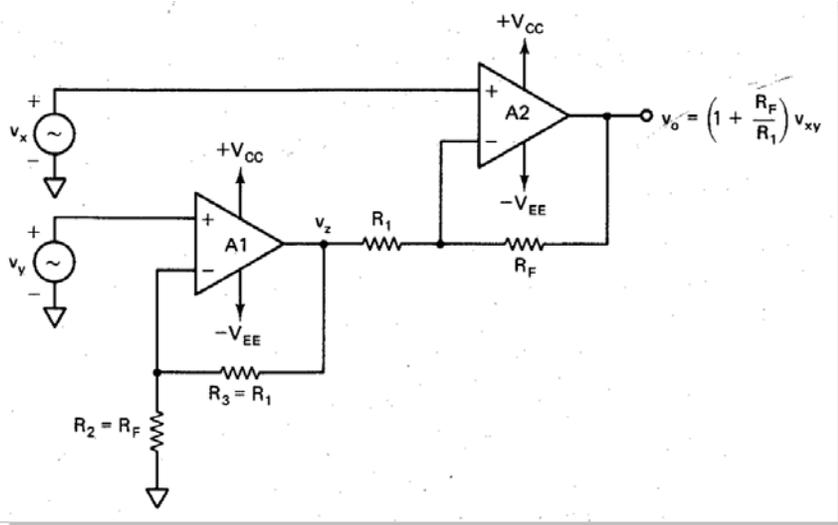
donde R_i = resistencia de entrada de lazo abierto del opamp, $B=R_1/(R_1+R_F)$

Sin embargo, puesto que $R_3 = R_1$ y $R_F = R_2$, $R_{iF1} \neq R_{iF2}$. Esto es una desventaja de este amplificador, pero si se hace una selección adecuada de componentes, R_{iF1} y R_{iF2} se pueden hacer mucho mayores que las resistencias de las fuentes de entrada.

Ejemplo.

Se dan las siguientes especificaciones para el amplificador de la figura: $R_1 = R_3 = 680\Omega$, $R_F = R_2 = 6.8K\Omega$, señales senoidales a 1kHz $v_X = -1.5V_{pp}$ y $v_Y = -2V_{pp}$.

- Empleando un 741C, calcular la ganancia y la resistencia de entrada del amplificador
- Calcular el voltaje de salida v_O considerando $V_{OOT} = 0$.



Solución.

- a) Se sustituyen los valores correspondientes en las ecuaciones para calcular A_D , R_{iF} :

$$A_D = 1 + \frac{6.8k\Omega}{680\Omega} = 11$$

$$R_{iF1} = (2M\Omega) \left(1 + \frac{(2)(10^5)(6.8k\Omega)}{6.8k\Omega + 680\Omega} \right) = 364G\Omega$$

$$R_{iF2} = (2M\Omega) \left(1 + \frac{(2)(10^5)(680\Omega)}{6.8k\Omega + 680\Omega} \right) = 36.4G\Omega$$

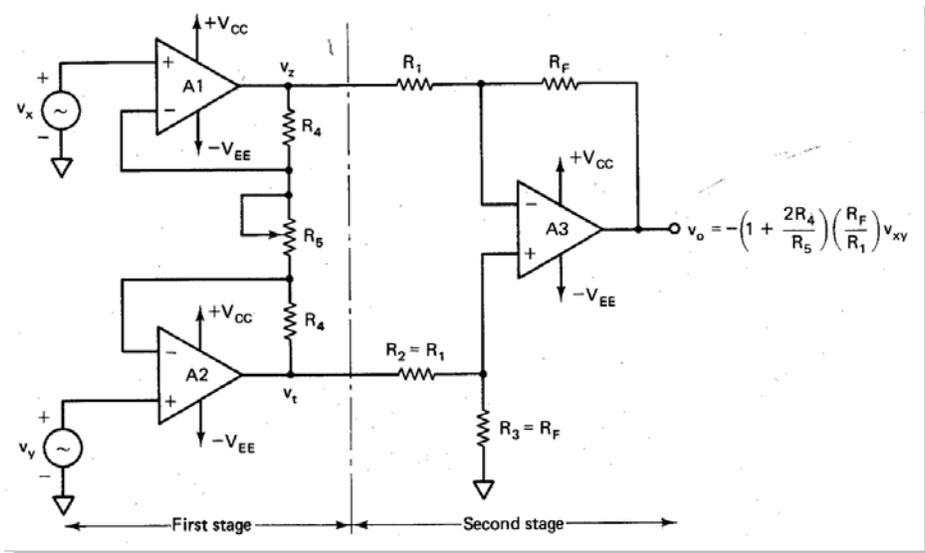
- b) Reordenando la ecuación de ganancia de voltaje se tiene que:

$$v_o = \left(1 + \frac{R_F}{R_1} \right) v_{XY}$$

$$= (11)(-1.5 + 2) = 5.5V_{pp}, \text{ señal senoidal a 1kHz}$$

Amplificador diferencial con tres opamps

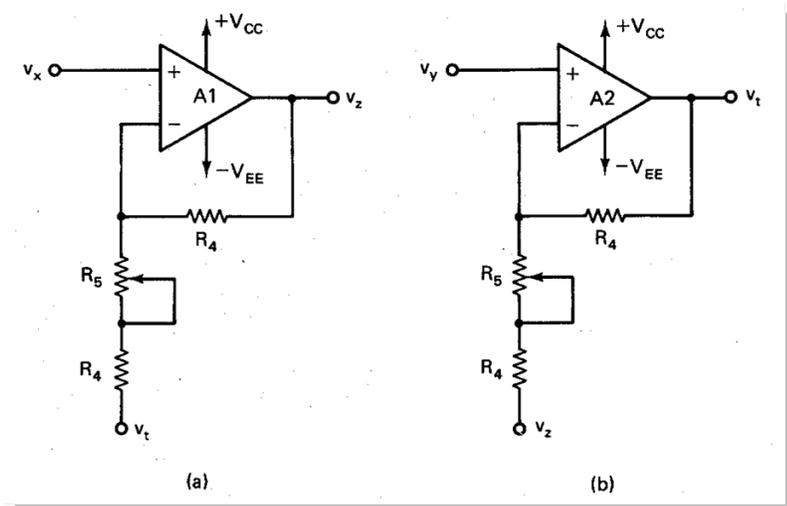
Las ventajas de los dos amplificadores diferenciales analizado se pueden combinar en un solo amplificador diferencial con ganancia de voltaje variable y muy alta resistencia de entrada. Sin embargo, para lograr ésto, se deben emplear 3 opamps como se muestra en la figura.



Ganancia de voltaje

El amplificador de tres opamps consiste en dos etapas, la primera compuesta por los opamps A1 y A2, y la otra por A3. De esta forma, para encontrar la ganancia de voltaje global, se debe determinar la ganancia de voltaje de cada etapa.

La primera etapa se puede ver como dos amplificadores diferenciales separados, como se muestra en la figura.



Los voltajes de salida de estos amplificadores diferenciales se pueden encontrar aplicando el teorema de superposición:

Para la figura (a):

$$v_z = \left(\frac{2R_4 + R_5}{R_4 + R_5} \right) v_x - \left(\frac{R_4}{R_4 + R_5} \right) v_t$$

Para la figura (b):

$$v_t = \left(\frac{2R_4 + R_5}{R_4 + R_5} \right) v_Y - \left(\frac{R_4}{R_4 + R_5} \right) v_Z$$

Sin embargo, el voltaje de salida de la primera etapa es:

$$v_{Zt} = v_Z - v_t$$

por lo que:

$$\begin{aligned} v_{Zt} &= \frac{2R_4 + R_5}{R_4 + R_5} (v_X - v_Y) + \frac{R_4}{R_4 + R_5} (v_Z - v_t) \\ &= \frac{2R_4 + R_5}{R_4 + R_5} v_{XY} + \frac{R_4}{R_4 + R_5} v_{Zt} \end{aligned}$$

Simplificando y reorganizando términos, la ganancia de voltaje de la primera etapa es:

$$\frac{v_{Zt}}{v_{XY}} = \frac{2R_4 + R_5}{R_5}$$

Usando la ecuación de ganancia obtenida para el amplificador diferencial de un opamp en la segunda etapa (A_3), se tiene que:

$$\frac{v_O}{v_{Zt}} = -\frac{R_F}{R_1}$$

Así, la ganancia de voltaje global se obtiene con los resultados previos como sigue:

$$A_D = \frac{v_{Zt}}{v_{XY}} \cdot \frac{v_O}{v_{Zt}} = -\left(\frac{2R_4 + R_5}{R_5} \right) \frac{R_F}{R_1}$$

o bien:

$$A_D = \frac{v_O}{v_{XY}} = -\left(1 + \frac{2R_4}{R_5} \right) \frac{R_F}{R_1}$$

Hay que recordar que la ganancia se puede cambiar variando el potenciómetro R_5 . Sin embargo, R_5 nunca debe valer cero o infinito ¿por qué?

Resistencia de entrada

La resistencia de entrada R_{iF} del amplificador diferencial de tres opamps es la misma que la de la primera etapa, esto es, la resistencia determinada en los puntos v_x y v_y viendo hacia el circuito con la otra terminal aterrizada.

Por ejemplo, en el amplificador separado A_1 , cuando $v_t = 0$, esto es, cuando v_y se aterriza, el circuito es un amplificador no inversor.

Aplicando el concepto desarrollado para el no inversor, la resistencia de entrada determinada en el punto v_x es:

$$R_{iF} = R_i \left(1 + A \frac{R_4 + R_5}{2R_4 + R_5} \right)$$

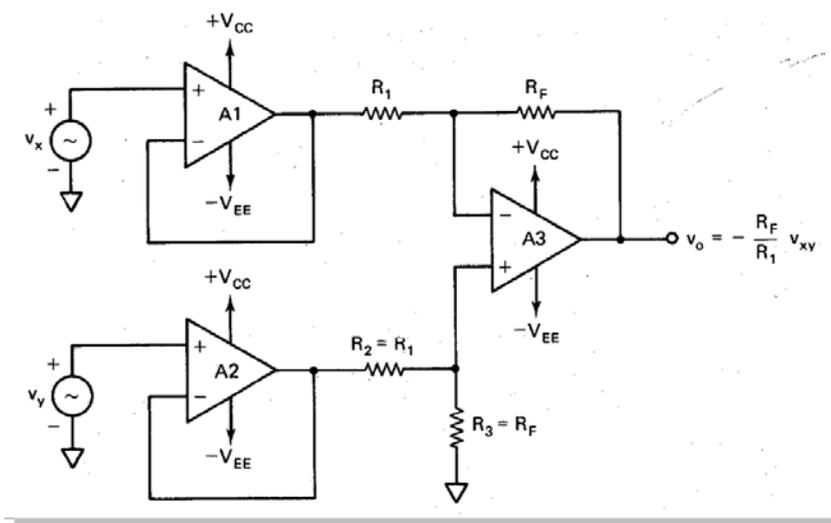
Similarmente, la resistencia de entrada en el punto v_y será la misma que en la ecuación previa.

Una modificación que se le puede hacer al amplificador diferencial de tres opamps es reemplazar la primera etapa por seguidores de voltaje, como se muestra en la figura. La principal ventaja de esta configuración es que tiene la resistencia de entrada más alta de los tres diseños, y está dada por:

$$R_{iF} = R_i (1+A)$$

Sin embargo, la ganancia de voltaje es igual a la del amplificador diferencial con un opamp:

$$A_D = \frac{v_O}{v_{XY}} = -\frac{R_F}{R_1}$$



Resistencia de salida y ancho de banda de los amplificadores diferenciales

Las configuraciones de lazo cerrado (amplificador no inversor, inversor y diferencial) emplean retroalimentación negativa y usan el mismo tipo de conexiones de salida. Por lo tanto, la resistencia de salida de las tres configuraciones debe ser igual. En otras palabras, la resistencia de salida del amplificador diferencial debe ser la misma que la del amplificador inversor o no inversor, excepto que $B = 1/A_D$. Esto es:

$$R_{OF} = \frac{R_o}{1 + A/A_D}$$

donde: A_D = ganancia de lazo cerrado del amplificador diferencial
 R_o = resistencia de salida del opamp
 A = ganancia de voltaje de gran señal del opamp

Recuerde que A_D es diferente para cada configuración diferencial.

Como en el caso de los amplificadores inversor y no inversor, el ancho de banda del amplificador diferencial también depende de la ganancia de lazo cerrado, y está dada por:

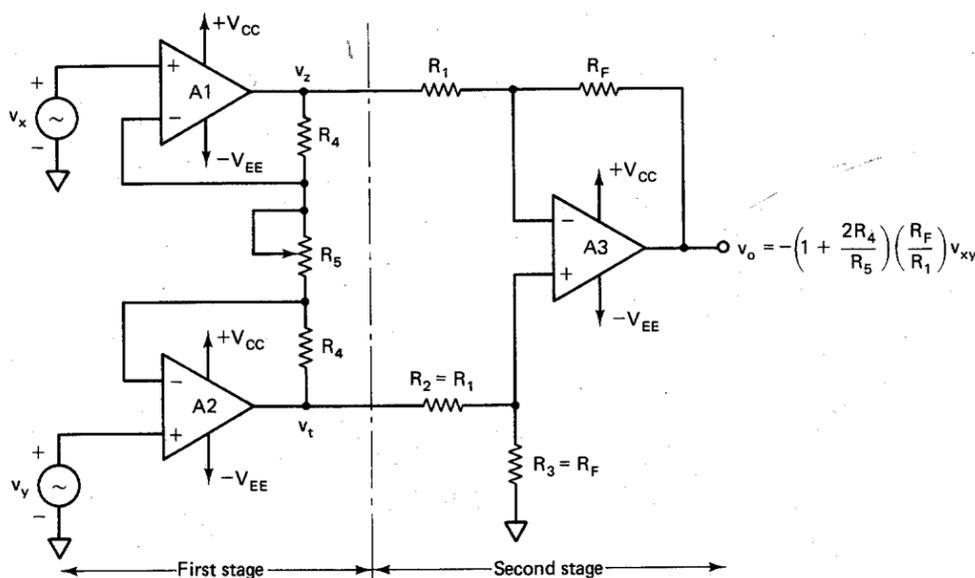
$$f_F = \frac{\text{ancho de banda unitario}}{\text{ganancia en lazo cerrado}} = \frac{UBW}{A_D} = f_o \left(1 + \frac{A}{A_D} \right)$$

Por ejemplo, la resistencia de salida y el ancho de banda del amplificador diferencial de un opamp será:

$$R_{OF} = \frac{R_o}{1 + AR_1/R_F} \quad \text{y} \quad f_F = f_o \left(1 + \frac{AR_1}{R_F} \right)$$

Ejemplo.

Para el amplificador de la figura se tienen las siguientes especificaciones: $R_4 = 3.9\text{K}\Omega$, $R_5 = 5\text{K}\Omega$, $R_1 = R_2 = 1\text{K}\Omega$ y $R_F = R_3 = 4.7\text{K}\Omega$. Se emplea el opamp 741C alimentado con $\pm 15\text{V}$. Si R_5 se ajusta a $3\text{K}\Omega$, calcular: (a) la ganancia de voltaje; (b) la resistencia de entrada; (c) la resistencia de salida; (d) el ancho de banda.



$$A = 200,000$$

$$R_i = 2 \text{ M}\Omega$$

$$R_o = 75 \Omega$$

$$f_o \cong 5 \text{ Hz}$$

$$\text{supply voltages} = \pm 15 \text{ V}$$

$$\text{output voltage swing} = \pm 13 \text{ V}$$

Solución.

- a) Se sustituyen los valores dados en la ecuación para calcular A_D :

$$A_D = -\left(1 + \frac{(2)(3.9k\Omega)}{3k\Omega}\right)\left(\frac{4.7k\Omega}{1k\Omega}\right) = -16.92$$

- b) Usando la ecuación determinada para la resistencia de entrada:

$$R_{iF} = (200000) \left(1 + \frac{(200000)(3.9k\Omega + 3k\Omega)}{(2)(3.9k\Omega) + 3k\Omega}\right) = 256G\Omega$$

- c) La resistencia de salida se calcula como sigue:

$$R_{oF} = \frac{75\Omega}{1 + 200000/16.92} = 6.3m\Omega$$

- d) El ancho de banda es el siguiente:

$$f_F = 5 \left(1 + \frac{200000}{16.92}\right) = 59.12kHz$$

CIRCUITOS DE CORRIENTE
ALTERNA, PROCESAMIENTO
ANALÓGICO DE SEÑALES Y
AMPLIFICACIÓN DE VOLTAJE

CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA

Los capacitores e inductores tienen la capacidad de absorber energía eléctrica de una fuente, almacenarla temporalmente y luego devolverla a un circuito, además presentan efectos de memoria eléctrica ya que la energía almacenada con anterioridad contribuye al valor actual de un voltaje o corriente. Estas variaciones en el tiempo de corrientes o voltajes definen el comportamiento de un circuito almacenador de energía como *dinámico*.

Como las relaciones voltaje-corriente de los capacitores e inductores están definidas por ecuaciones diferenciales, es necesario utilizarlas para describir la respuesta dinámica de estos circuitos y después calcular las soluciones particulares con excitaciones senoidales. La solución es la suma de la respuesta natural y la respuesta forzada.

CAPACITOR

Elemento pasivo que consta de dos superficies metálicas o placas separadas por un dieléctrico, y almacena energía en un campo eléctrico producido por una carga desplazada entre las placas. Como la carga desplazada q es proporcional al voltaje instantáneo v a través del capacitor, se puede relacionar con la capacitancia C que es la constante de proporcionalidad.

Por lo tanto, la relación corriente-voltaje del capacitor se deduce al derivar:

$$q = C v$$

Como $i = dq/dt$ entonces la corriente de desplazamiento i es:

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

La relación voltaje-corriente del capacitor se deduce al integrar:

$$q(t) = q(t_0) + \int_{t_0}^t i(x) dx \quad t > t_0$$

Como $v(t) = q(t)/C$, se obtiene el voltaje instantáneo $v(t)$ cuando $t > t_0$ en función del voltaje inicial $v(t_0)$ y su respectiva corriente en la siguiente ecuación:

$$v(t) = v(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(x) dx \quad t > t_0$$

INDUCTOR

Elemento pasivo de dos terminales compuesto de una bobina de alambre devanado alrededor de un núcleo, en donde la bobina tiene N vueltas aisladas una de otra y del núcleo. Este dispositivo almacena energía en un campo magnético producido por una corriente que circula por la bobina de alambre.

La inductancia (L) es una medida de la oposición a un cambio de corriente de un inductor, y se define como la relación entre el flujo magnético (Φ) y la corriente (i) que circula por la bobina y el número de vueltas (N) del devanado:

$$L = \frac{\Phi N}{i}$$

Suponiendo que la corriente que circula por el inductor varía con el tiempo y por lo tanto el flujo Φ , la ley de Faraday expresa que el flujo variable con el tiempo induce un voltaje en la bobina dado por:

$$v = N \frac{d\Phi}{dt}$$

Como:

$$\Phi = \frac{L}{N} i$$

Si L y N son constantes, entonces:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{L}{N} \frac{di}{dt}$$

Por lo tanto, el voltaje inducido es:

$$v = L \frac{di}{dt}$$

Este voltaje aparece entre las terminales de la bobina y tiende a oponerse a la corriente que entra a ella.

La relación corriente-voltaje para un inductor es:

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(x) dx \quad t > t_0$$

ESTADO ESTACIONARIO DE CA Y FASORES

Un circuito de CA es un circuito lineal estable que opera con excitación y una parte importante de su análisis es determinar la respuesta de estado estacionario forzada por una excitación senoidal después que la respuesta natural del circuito desaparece. Esta respuesta forzada es otra senoide a la misma frecuencia de la fuente y sólo difiere en amplitud y fase.

Senoides y fasores

Una senoide tiene la forma general:

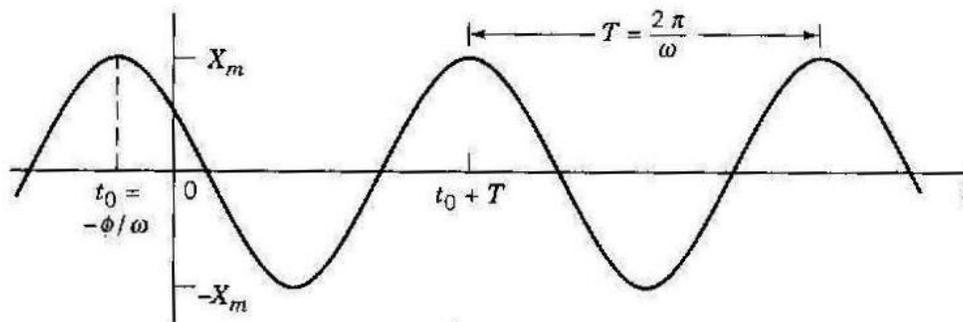
$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi)$$

donde:

X_m es la amplitud

ω es la frecuencia en radianes

ϕ es la fase

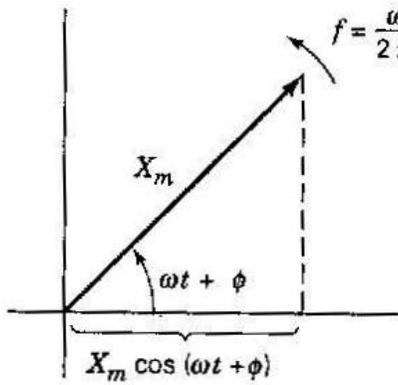


Onda senoidal $X_m \cos(\omega t + \phi)$

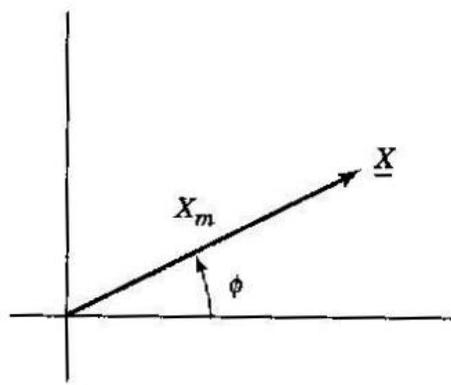
El periodo de repetición es: $T = 2\pi/\omega$ y la frecuencia medida en Hz es: $f = 1/T = \omega/2\pi$

Cualquier senoide se puede visualizar como la proyección horizontal de un fasor rotatorio, en el cual una línea dirigida de longitud X_m forma el ángulo total instantáneo $(\omega t + \phi)$ con respecto al eje horizontal, y conforme pasa el tiempo la línea gira en sentido contrario a las manecillas del reloj con respecto al origen a una velocidad f y su proyección horizontal define los valores de $x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi)$.

En el instante $t = 0$ del fasor rotatorio, se puede representar el fasor no rotatorio por medio del fasor $\underline{X} = X_m \angle \phi$, que representa una línea dirigida de longitud X_m y ángulo ϕ medido en sentido contrario a las manecillas del reloj con respecto al eje horizontal.



Fasor rotatorio



Fasor $\underline{X} = X_m \angle \phi$

Números complejos

Los fasores como cantidades bidimensionales se pueden representar como números complejos por medio de dos coordenadas: la horizontal y la vertical que se conocen como la parte real y la parte imaginaria respectivamente.

Para identificar la coordenada vertical se utiliza la unidad imaginaria $j = \sqrt{-1}$. Algunas relaciones útiles para la unidad imaginaria son:

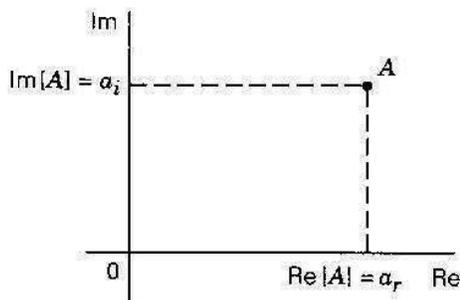
$$j = 1 \angle 90^\circ \quad \frac{1}{j} = 1 \angle -90^\circ = -j \quad j^2 = 1 \angle 180^\circ = -1$$

La unidad imaginaria permite expresar cualquier punto A como un número complejo en la forma:

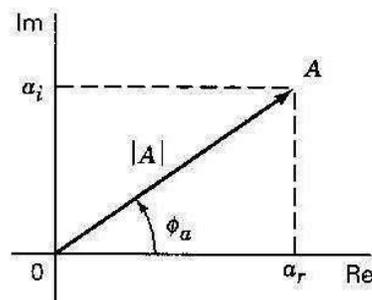
$$A = \text{Re}[A] + j \text{Im}[A] = a_r + j a_i$$

También cualquier punto se puede expresar en coordenadas polares:

$$A = |A| \angle \phi_a$$



Plano complejo con $A = a_r + j a_i$



Coordenadas polares para $A = |A| \angle \phi_a$

Para convertir de forma rectangular a polar, se tiene que:

$$a_r = |A| \cos \phi_a \quad a_i = |A| \text{sen } \phi_a$$

Por lo tanto:

$$|A| = \sqrt{a_r^2 + a_i^2} \quad \phi_a = \tan^{-1} \left(\frac{a_i}{a_r} \right)$$

Para la suma y resta:

$$A \pm B = (a_r + j a_i) \pm (b_r + j b_i) = (a_r \pm b_r) + j (a_i \pm b_i)$$

Para la multiplicación, como $j^2 = -1$:

$$A B = (a_r + j a_i) (b_r + j b_i) = (a_r b_r - a_i b_i) + j (a_r b_i + a_i b_r)$$

Para el conjugado complejo, si:

$$A = a_r + j a_i = |A| \angle \phi_a$$

Entonces su conjugado complejo es:

$$A^* = a_r - j a_i = |A| \angle -\phi_a$$

La multiplicación de $A A^* = a_r^2 + a_i^2 = |A|^2$

Para utilizar este conjugado en la división:

$$\frac{B}{A} = \frac{B A^*}{A A^*} = \frac{(b_r + j b_i) (a_r - j a_i)}{|A|^2} = \frac{(a_r b_r + a_i b_i)}{a_r^2 + a_i^2} + j \frac{(b_r a_i + b_i a_r)}{a_r^2 + a_i^2}$$

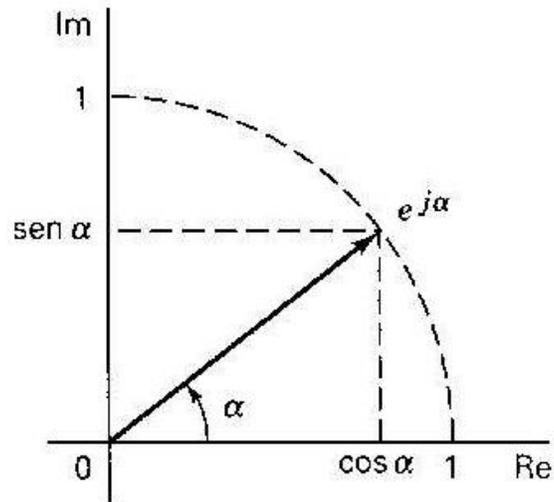
Las coordenadas rectangulares y polares de una cantidad compleja están relacionadas por la fórmula de Euler:

$$e^{\pm j\alpha} = \cos \alpha \pm j \sin \alpha$$

Por lo que, la cantidad $e^{j\alpha}$ es un número complejo con:

$$\operatorname{Re}[e^{j\alpha}] = \cos \alpha$$

$$\operatorname{Im}[e^{j\alpha}] = \sin \alpha$$



Fórmula de Euler en el plano complejo

Por lo tanto, cualquier cantidad compleja de magnitud $|A|$ y ángulo ϕ_a se puede escribir como:

$$A = |A| e^{j\phi_a}$$

Para la multiplicación y división de números complejos en forma exponencial:

$$A B = |A| e^{j\phi_a} |B| e^{j\phi_b} = |A| |B| e^{j(\phi_a + \phi_b)} = |A| |B| \angle \phi_a + \phi_b$$

$$\frac{A}{B} = \frac{|A| e^{j\phi_a}}{|B| e^{j\phi_b}} = \frac{|A|}{|B|} e^{j(\phi_a - \phi_b)} = \frac{|A|}{|B|} \angle \phi_a - \phi_b$$

IMPEDANCIA Y ADMITANCIA DE ELEMENTOS

En condiciones de estado estable de CA, tanto el voltaje a través de un elemento de un circuito así como su corriente son senoides a la misma frecuencia, por lo que estas senoides se expresan en general como:

$$v(t) = V_m \cos (wt + \phi_v) = \text{Re} [\underline{V} e^{j\omega t}]$$

$$i(t) = I_m \cos (wt + \phi_i) = \text{Re} [\underline{I} e^{j\omega t}]$$

Donde los fasores asociados son:

$$\underline{V} = V_m \angle \phi_v \quad \underline{I} = I_m \angle \phi_i$$

Calculando las relaciones entre los fasores \underline{V} e \underline{I} en términos de la impedancia para resistores, inductores y capacitores.

Resistores

Un resistor se describe mediante la ecuación $v = R i$, por lo que sustituyendo $v(t)$ e $i(t)$ en forma exponencial se tiene:

$$\text{Re} [\underline{V} e^{j\omega t}] = \text{Re} [R \underline{I} e^{j\omega t}]$$

Entonces la ecuación fasorial es:

$$\underline{V} = R \underline{I}$$

En forma polar se obtiene:

$$V_m \angle \phi_v = R I_m \angle \phi_i$$

Entonces:

$$V_m = R I_m \quad \phi_v = \phi_i$$

Por lo tanto, las amplitudes difieren por el factor R , pero los ángulos de fase de \underline{V} e \underline{I} son iguales.

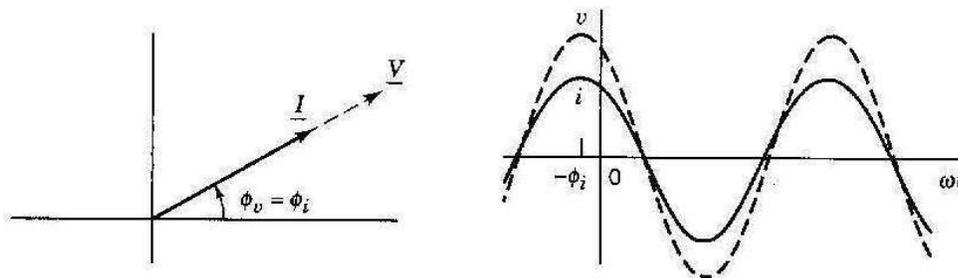


Diagrama de fasor y formas de onda de un resistor

Inductores

La ecuación fasorial para un inductor se deriva de la ecuación del elemento $v = L di/dt$, expresando i en función de \underline{I} la derivada es:

$$\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} \operatorname{Re} [\underline{I} e^{j\omega t}] = \operatorname{Re} \left[\underline{I} \frac{de^{j\omega t}}{dt} \right] = \operatorname{Re} [\underline{I} j\omega e^{j\omega t}]$$

Por lo tanto:

$$\operatorname{Re} [\underline{V} e^{j\omega t}] = \operatorname{Re} [j\omega L \underline{I} e^{j\omega t}]$$

$$\underline{V} = j\omega L \underline{I}$$

Como:

$$j\omega L \underline{I} = \omega L \angle 90^\circ \times I_m \angle \phi_i = \omega L I_m \angle \phi_i + 90^\circ$$

$$V_m = \omega L I_m \quad \phi_v = \phi_i + 90^\circ$$

Se muestra que \underline{I} va retrasada 90° con respecto a \underline{V} .

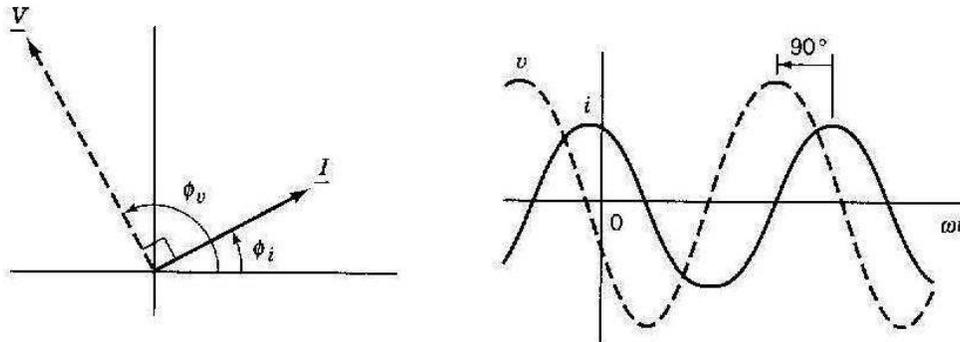


Diagrama de fasor y formas de onda de un inductor

Capacitores

La ecuación fasorial para un capacitor se deriva de la ecuación del elemento $i = C dv/dt$, por lo tanto, se tiene:

$$\underline{I} = j\omega C \underline{V}$$

Despejando \underline{V} :

$$\underline{V} = \frac{1}{j\omega C} \underline{I} = -\frac{j}{\omega C} \underline{I}$$

Entonces:

$$\underline{V} = \frac{I_m}{\omega C} \quad \phi_v = \phi_i - 90^\circ$$

Se muestra que \underline{I} va adelantada 90° con respecto de \underline{V}

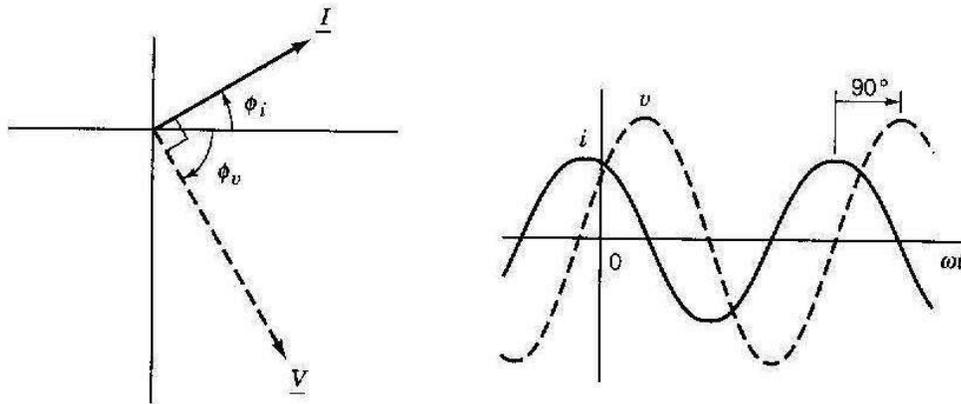


Diagrama de fasor y formas de onda de un capacitor

De las ecuaciones fasoriales anteriores para cada elemento se muestra que cada uno tiene la forma:

$$\underline{V} = Z \underline{I}$$

En donde la cantidad \underline{Z} se llama **Impedancia**, se mide en ohms (Ω) y se define sólo en combinación con los **fasores**.

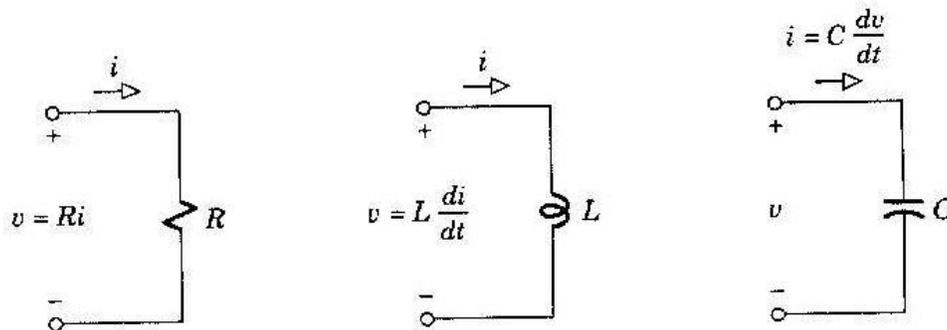
La impedancia de un elemento específico se identificará con el subíndice R, L o C , de la siguiente forma:

$$Z_R = R$$

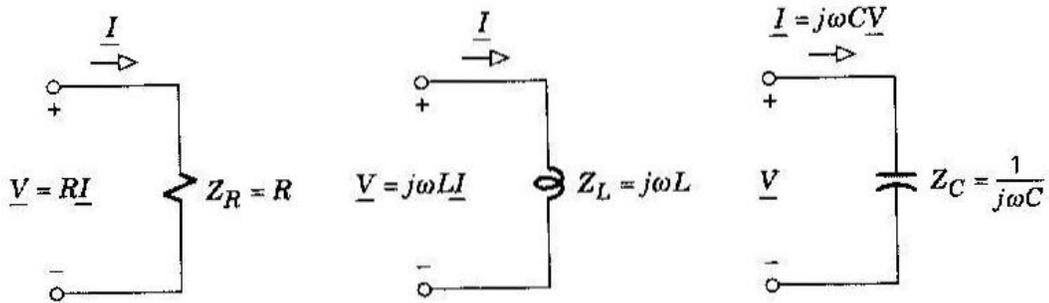
$$Z_L = j\omega L = \omega L \angle 90^\circ$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ$$

La **admitancia** se define como: $Y = 1/Z$ y se mide en siemens (S).



Elementos en el dominio del tiempo



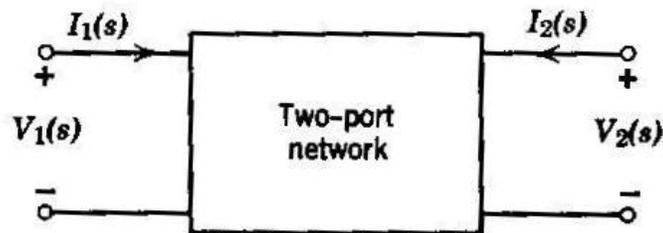
Elementos en el dominio de la frecuencia

FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

Se define como la relación de una variable de salida o respuesta $R(s)$ a una variable de entrada o excitación $E(s)$ de un sistema lineal expresada en términos de la variable de frecuencia compleja s , como $H(s)$.

$$H(s) = \frac{R(s)}{E(s)}$$

Estas variables son medidas en diferentes puertos de la red y pueden ser corrientes o voltajes, por lo que esta función puede tener diferentes nombres. Por ejemplo, considerando la red de dos puertos mostrada en la figura. Si la excitación es $I_1(s)$ y la respuesta es $V_2(s)$, $H(s)$ es una impedancia de transferencia $Z_{21}(s) = V_2(s)/I_1(s)$. También si $V_1(s)$ es la excitación y $V_2(s)$ es la respuesta, entonces tendremos una función de transferencia de relaciones de voltaje $H(s) = V_2(s)/V_1(s)$.



Red de dos puertos

Una función de red se puede escribir en forma factorizada de la siguiente forma:

$$H(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

donde:

- La constante K es un número real, positivo o negativo, llamado **factor de ganancia**.
- Las raíces del numerador polinomial se llaman **ceros**, y se denotan por z_1, z_2, \dots, z_m .
- Las raíces del denominador polinomial se llaman **polos**, y se denotan por p_1, p_2, \dots, p_n .
- Los polos y ceros son reales o se presentan en pares de conjugados complejos.
- El número de polos es igual al número de elementos almacenadores de energía independientes.

Procesamiento analógico de señales

Señales, información, interferencia y ruido

- **Señal:** magnitud física detectable cuya amplitud varía con el tiempo y lleva información.
- **Señal eléctrica:** *Voltaje o corriente que varía con el tiempo, obtenida de procesos por medio de sensores o transductores y sus acondicionadores.*
- **Información:** conocimiento obtenido mediante investigación.
- **Interferencia:** señal ajena al sistema considerado.
- **Ruido:** señal interna indeseable.

Instrumentación electrónica

Ciencia y tecnología de las medidas

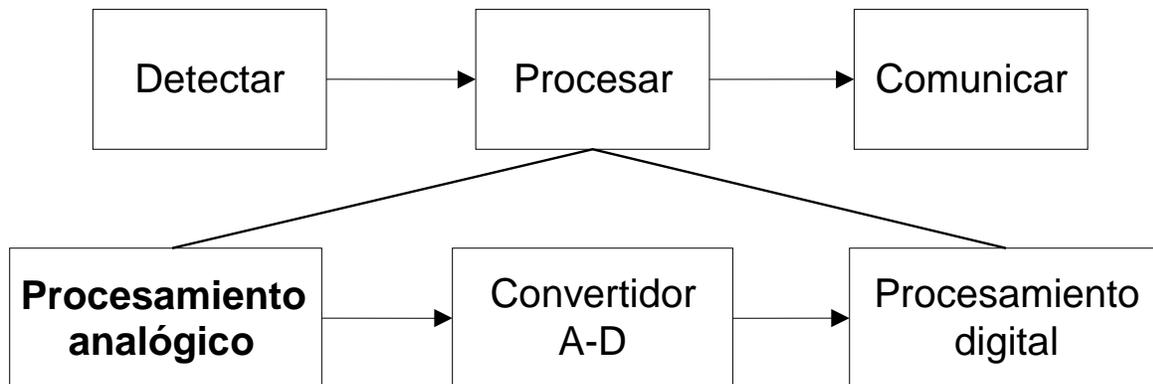
Toda magnitud física lleva información sobre el proceso o sistema que la origina.

Ciencia: algoritmos de medida

Tecnología: implementación de los algoritmos de medida (CI, circuito impreso, equipo...)

Instrumentación: imprescindible e interdisciplinaria.

Sistema de medida: Funciones



"El sistema es el instrumento": integración. (Ramon Pallàs Areny)

Introducción a los sistemas de medida

Sistema

Combinación de 2 o más elementos, subconjuntos y partes necesarias para realizar una o varias funciones.

En **sistemas de medida**, esta función es la asignación objetiva y empírica de un número a una propiedad o cualidad de un objeto o evento de tal forma que la describa. El resultado de la medida debe ser:

- Independiente del observador (*objetiva*)
- Basada en la experimentación (*empírica*)
- Correspondencia entre relaciones numéricas y las relaciones entre las propiedades descritas.

Objetivos de la medida:

- Vigilancia o seguimiento de procesos (*temperatura ambiente, monitorización clínica, contadores de gas y de agua, etc*)
- Control de un proceso (*termostato, control de nivel en un depósito, etc*)
- Ingeniería experimental (*estudio de distribución de temperaturas en una pieza irregular, fuerzas sobre un conductor simulado de un coche cuando éste choca contra un objeto, etc*)

Funciones de los sistemas de medida:

- Adquisición de la información (*sensor o transductor*)
- Procesamiento
- Presentación de resultados

Funciones pueden ser locales o remotas (*transmisión de información*)

Tipos de señales:

- Mecánicas
- Térmicas
- Magnéticas
- Eléctricas
- Ópticas
- Moleculares (químicas)

Transductor:

Dispositivo que convierte un tipo de energía en otro.

Sensor (Transductor de entrada):

Dispositivo que a partir de la energía del medio donde se mide, da una señal de salida transducible que es función de la variable medida.

Actuador (Transductor de salida):

Conversión de energía.

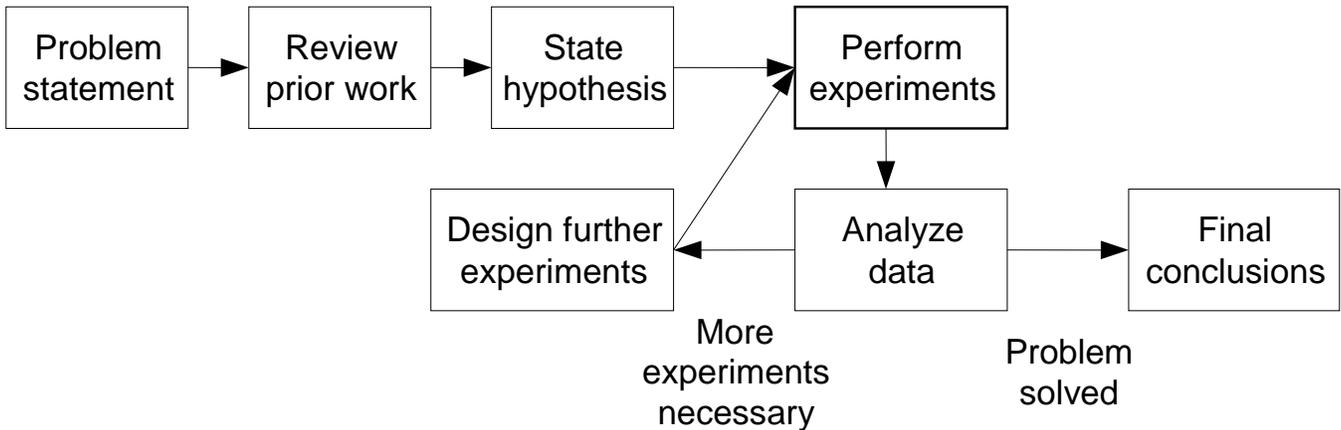
Sistemas de medida electrónicos (ventajas)

- Debido a estructura electrónica de la materia:

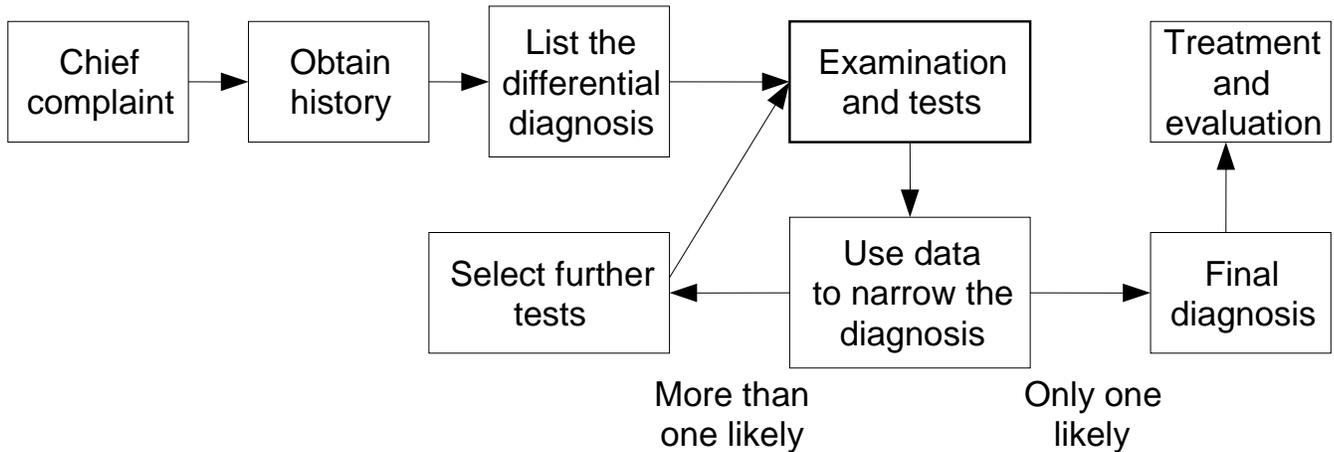
↑↓ parámetros no eléctricos de un material  ↑↓ parámetro eléctrico

- Amplificadores electrónicos (*ganancias de potencia 10 (10) a B.F.*)
- Gran variedad de circuitos integrados para acondicionar o modificar señales. Algunos transductores incorporan físicamente en un encapsulado como parte de estos recursos.
- Muchos recursos para presentar o registrar la información, manejo de datos numéricos, textos, gráficos y diagramas.
- Transmisión de señales eléctricas más versátil que señales mecánicas, hidráulicas o neumáticas (*aunque éstas pueden ser mas convenientes en presencia de radiaciones ionizantes o atmósferas explosivas*)

Necesidad de la Instrumentación



En el método científico, una hipótesis es probada por experimentos para determinar su validez. (J.G. Webster, Bioinstrumentation 2003)



El médico obtiene la historia, examina al paciente, realiza pruebas para determinar su diagnóstico y recomienda el tratamiento.

(J.G. Webster, Bioinstrumentation 2003)



Procesamiento analógico

- ❑ Adaptación de: amplitud, nivel, ancho de banda e impedancia de señales.
- ❑ Asegurar compatibilidad: entre señales unipolares, diferenciales o flotantes y amplificadores con diferentes etapas de entrada.
- ❑ Conversión entre dominios: $V \iff I$, $AC \iff DC$

- ❑ Desarrollo de operaciones: linealización, corrección de derivas, detección coherente, etc
- ❑ Multiplexado de canales: varias señales comparten un convertidor analógico-digital.
- ❑ Minimizar interferencia.
- ❑ Reducir ruido.

Características procesamiento analógico

- ❑ Rápido.
- ❑ Menos flexible.
- ❑ Más caro (componentes), no necesariamente más complejo.
- ❑ Inevitable en interfaz con sistema digital (filtrado antialiasing y amplificación)

Objetivos

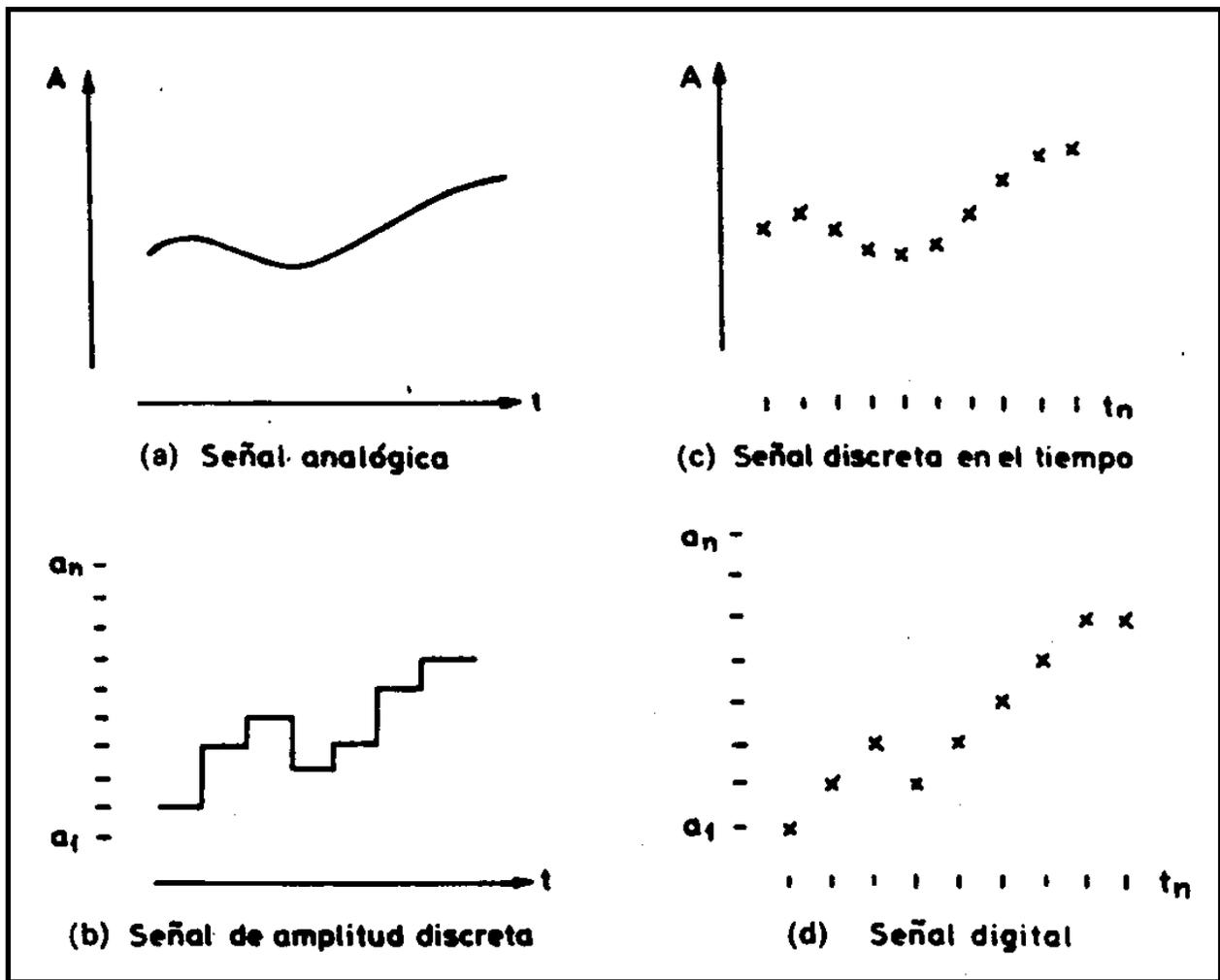
1. Análisis y diseño de circuitos analógicos para procesar señales con circuitos integrados de uso general.
2. Profundizar en el estudio de circuitos con entrada y salida diferencial, y en la estimación y reducción de errores.

Método de diseño

1. Clasificación de las señales a procesar.
2. Definición de las funciones deseadas.
3. Conversiones entre dominios.
4. Clasificación de errores.
5. Reducción de errores.

Clasificación de señales (amplitud)

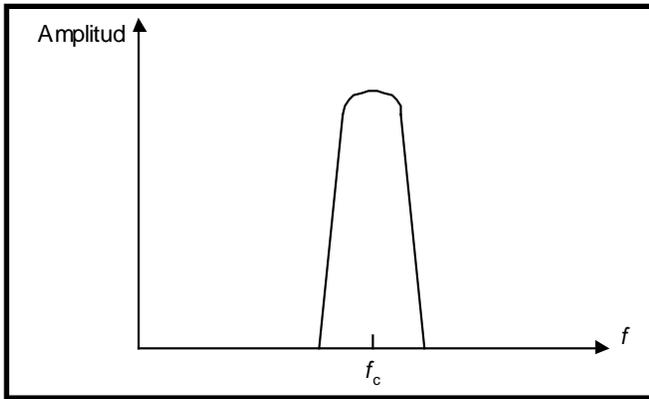
- ❑ Analógicas: amplitud de cualquier valor de un margen continuo.
 - Información en: amplitud, fase, frecuencia o duración.
 - El muestreo da una señal analógica discontinua.
- ❑ Digitales: amplitud de un conjunto de valores finito.
 - Señales binarias: dos valores (“uno” y “cero”).
 - Información codificada en conjuntos de unos y ceros (palabras).



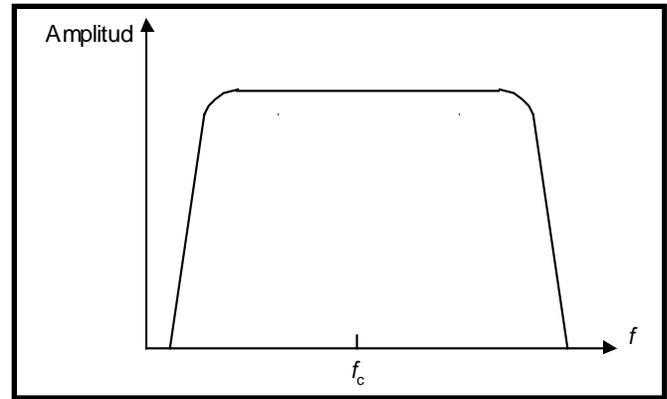
Tipos de señales. (Los intervalos de tiempo pueden ser iguales o no)

Clasificación de señales (evolución en el tiempo)

- Señales dc: cambios lentos. (banda estrecha)
- Señales ac: cambios rápidos.
- Transitorias
- Periódicas
- Banda estrecha: margen de frecuencia pequeño respecto a f_c .
- Banda ancha: margen de frecuencia grande respecto a f_c .



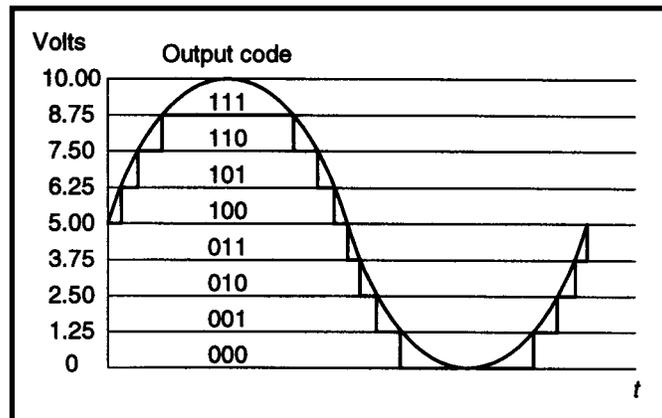
(a)



(b)

Espectro de frecuencia para señales de:
(a) banda estrecha y (b) banda ancha

Conversión analógico-digital (ADC) Cuantificación y codificación



Onda senoidal y su versión digital utilizando un código de 3 bits

Intervalo de cuantificación: $q = V_{ir} / 2^n$

donde: V_{ir} = margen de voltaje de entrada del ADC

n = número de bits de las palabras binarias de salida del ADC

2^n = número de códigos de salida

q = resolución analógica del ADC (1 LSB)

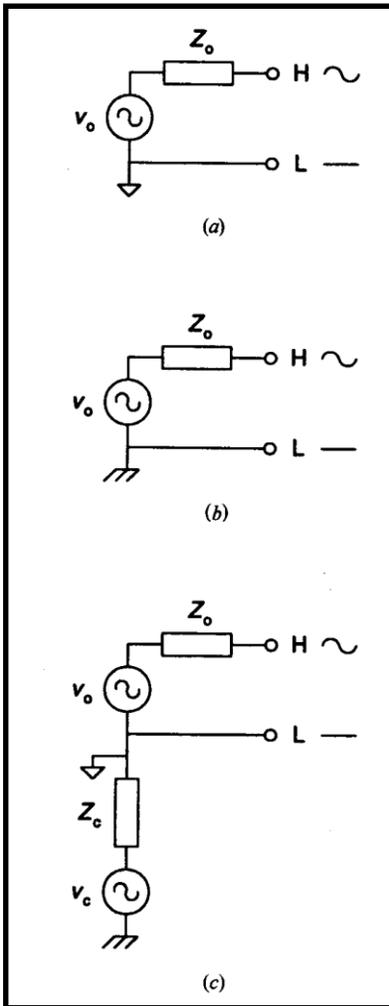
Ruido de cuantificación (error de cuantificación máximo): $\pm q/2$

Clasificación de señales analógicas (características eléctricas)

Señales de tensión: $V_S = V_{HIGH} - V_{LOW} = V_H - V_L$

- Asimétricas o diferenciales. ($V_L = \text{constante}$ o no)
- Flotantes, a masa o aisladas.
- Unipolares o bipolares.

Señales asimétricas

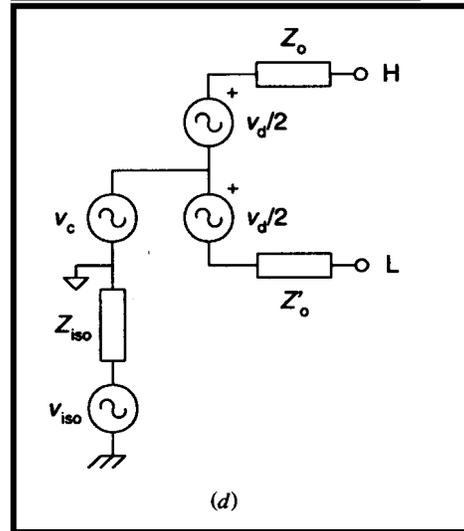
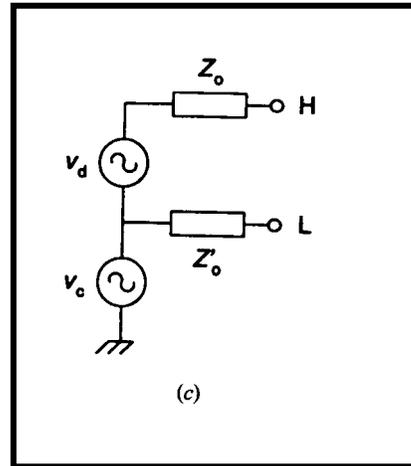
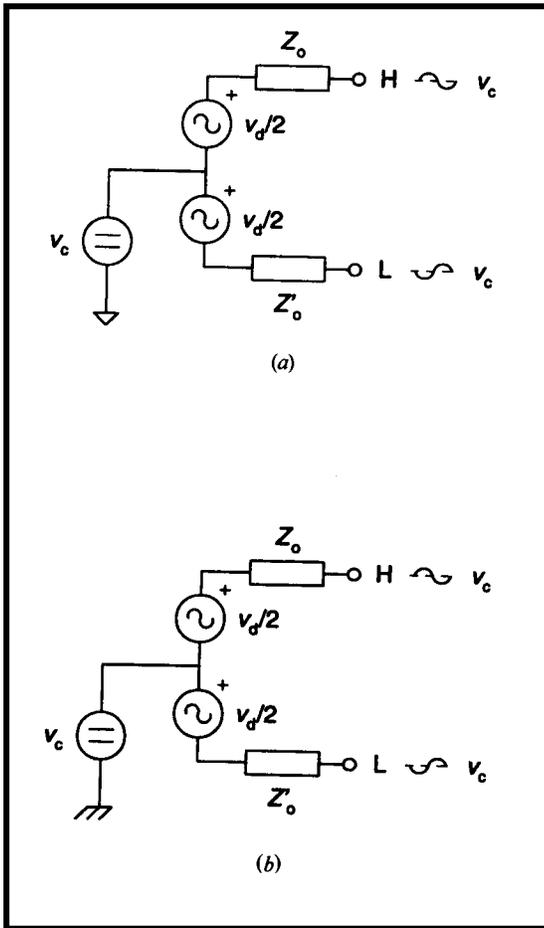


(a) Señal asimétrica flotante. (b) Señal asimétrica puesta a tierra.
 (c) Señal asimétrica con tensión en modo común.

Señales diferenciales

$$V_d = V_H - V_L$$

$$V_c = (V_H + V_L) / 2$$



Señales diferenciales. (a) Señal diferencial flotante. (b) Señal diferencial puesta a tierra con voltaje de modo común. (c) Señal pseudodiferencial para (b) cuando $V_d \ll V_c$. (d) Señal diferencial aislada.

Clasificación de señales analógicas (impedancia de salida)

- Baja impedancia.
(Ejemplo: galgas extensométricas de metal y termopares)

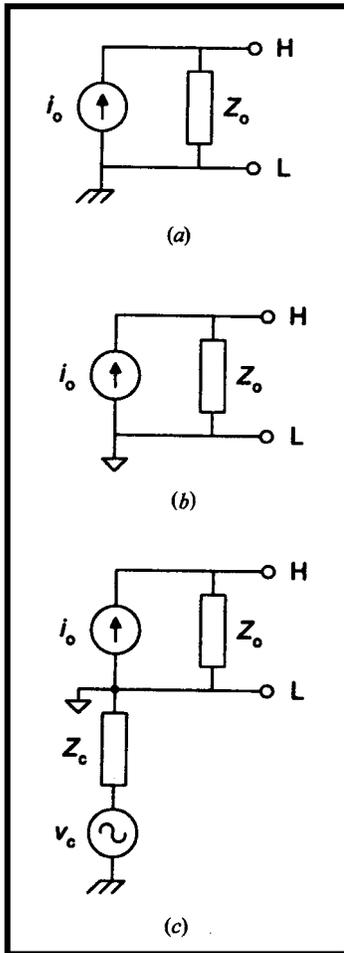
- Tensión.
- Corriente.

- Alta impedancia.

Usualmente se modelan como fuentes de corriente.

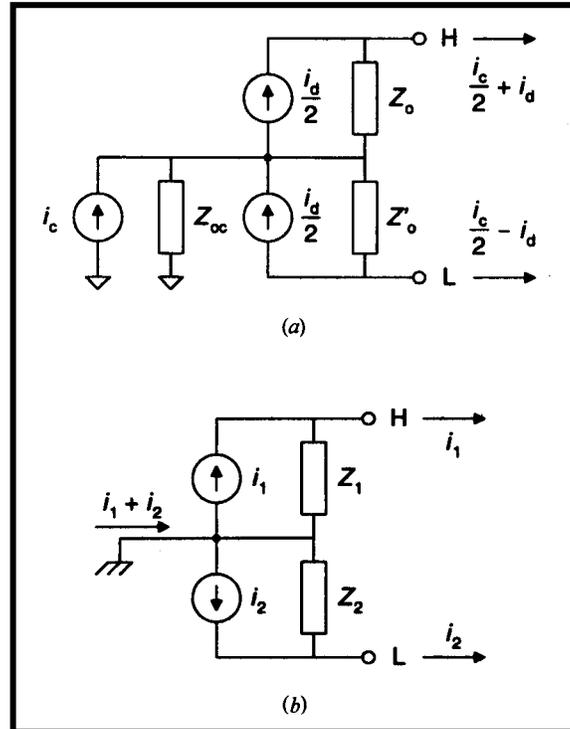
(Ejemplo: puentes de capacitores, fotodiodos y transductores piezoeléctricos)

- Tensión.
- Corriente.



Señales asimétricas de corriente

- (a) Señal de corriente aterrizada.
- (b) Señal de corriente flotante.
- (c) Señal de corriente flotante con voltaje de modo común.



(a) Señal diferencial de corriente

- (b) Señal de diferencia de corriente aterrizada.

Rango dinámico y relación señal a ruido

Objetivo sistema electrónico de medida:

Obtener una señal de salida correspondiente a una cantidad de entrada.

Margen o Rango de medida:

Diferencia entre las máximas y mínimas amplitudes de una cantidad.

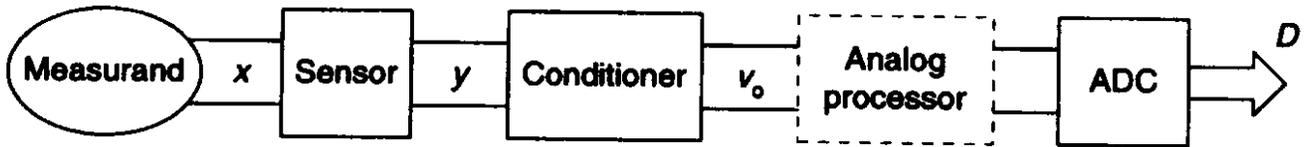
Resolución de la medida:

Mínima variación que se quiere detectar.

Margen de medida

Margen dinámico (DR) =

Resolución



Estructura general de un sistema que obtiene un código digital D a partir de un mensurando X.

Sensor:

Sensibilidad:

$$S = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}$$

Resolución:

Δy

limitada por su diseño mecánico,
ruido eléctrico, etc

Acondicionador y procesador analógico:

Descritos por su *característica de transferencia* que relaciona la señal de salida y su respectiva señal de entrada, cuya pendiente es la *ganancia*.

Cada circuito electrónico o subsistema acepta un margen específico de señales de entrada llamado *margen de entrada*, y es capaz de detectar una variación mínima de estas señales llamada *resolución*.

Ejemplos:

– *Amplitud de sus señales de salida limitada por los niveles del voltaje de alimentación.*

– *Velocidad del circuito limitada por capacitancia parásita.*

– *Fluctuaciones aleatorias de voltaje o interferencia, impiden la detección de incrementos pequeños de señal limitando la resolución.*

Convertidor analógico digital (ADC):

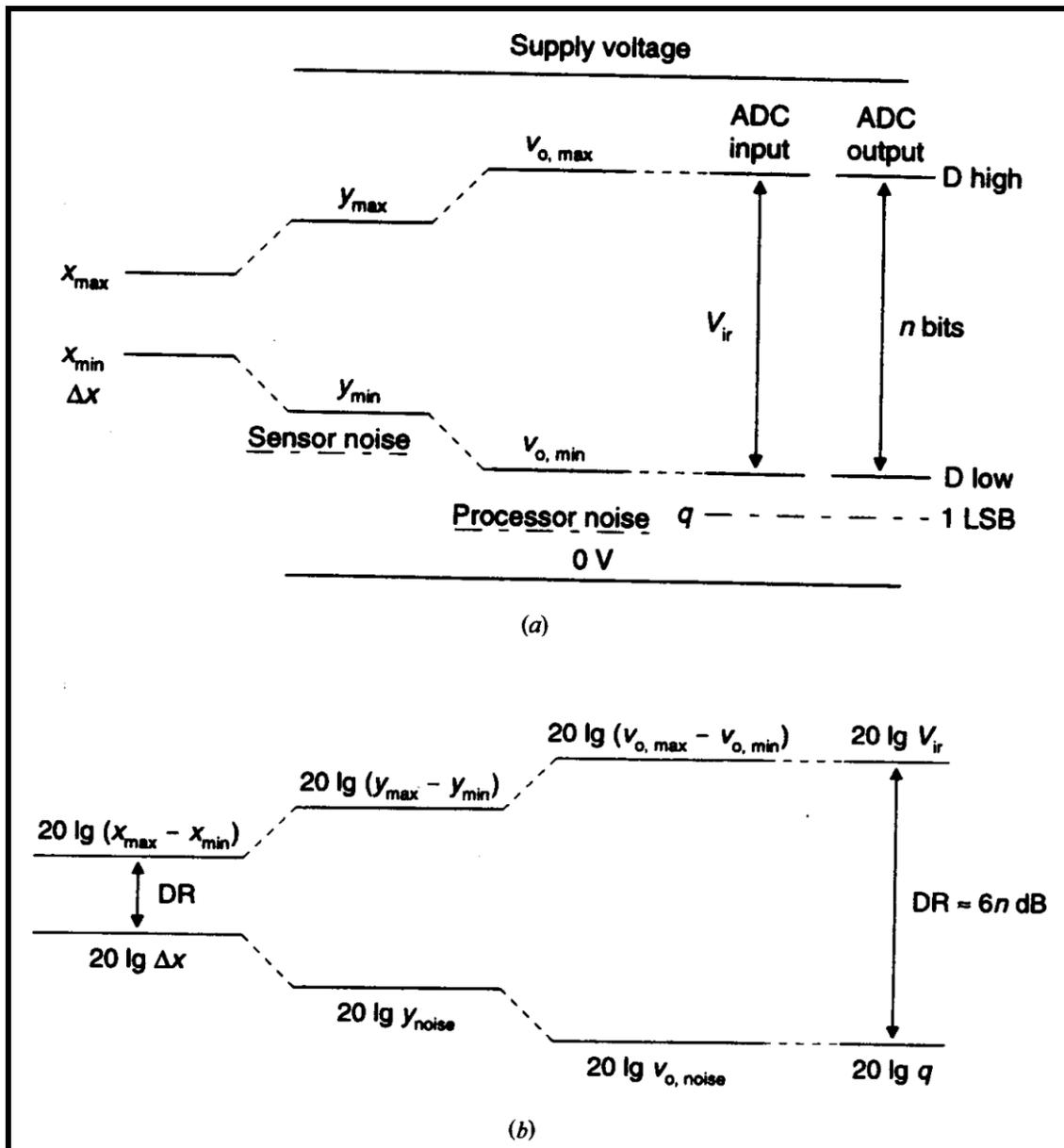
Tiene un **margen de voltaje de entrada V_{ir}** limitado y no detecta incrementos de voltaje más pequeños que su **intervalo de cuantificación q** , por lo tanto:

$DR = V_{ir} / q$ como $V_{ir} = (2^n - 1) q \approx 2^n q$, por lo tanto:

$DR = 2^n$

Lo que concuerda con el número de códigos de salida disponible (2^n) y la resolución de salida que es el bit menos significativo (LSB) = 1, por lo tanto:

$$DR = 2^n / 1 = 2^n$$



(a) Márgenes de medida y señal.
 (b) Margen dinámico para el sistema de medida anterior.

El margen de entrada y los niveles extremos de señal de cualquier etapa deben ser iguales o mayores que el margen de salida y los niveles extremos de señal para la etapa previa. El ruido del sensor limita la resolución.

Cualquier etapa debería tener un margen dinámico igual o mayor que aquella de la etapa previa.

DR para cualquier etapa debe ser calculado utilizando las mismas cantidades en el numerador y denominador. Los valores pueden ser pico, pico-pico o rms de voltaje, corriente o potencia (para señales aleatorias). El ruido limita la resolución y puede ser expresado en valores pico-pico o rms.

DR normalmente se expresa en dB, por lo que para un voltaje o corriente es:

$$DR = 20 \lg \frac{\text{Amplitud máxima} - \text{Amplitud mínima}}{\text{Resolución}}$$

Para un ADC: $DR = 20 \lg \frac{V_{ir}}{Q} = 20 \lg 2^n \approx 6 n \text{ dB}$

Un parámetro para describir señales aleatorias es su potencia, para estas señales, la relación señal a ruido (SNR) sustituye al margen dinámico. La SNR en dB es:

$$SNR \text{ (dB)} = 10 \lg \frac{\text{Potencia de la señal}}{\text{Potencia del ruido}}$$

Funciones en el procesamiento analógico de señales

Funciones lineales y no lineales:

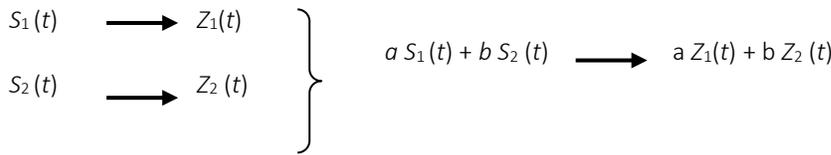
Cualquier operación desarrollada sobre una señal analógica puede ser descrita por un modelo matemático y puede ser lineal o no lineal. Una función se dice que es lineal si tiene las dos propiedades siguientes:

- Homogeneidad: $f(ax) = af(x)$ donde a es una constante.

La salida de un circuito lineal es proporcional a su entrada.

- Aditiva: $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

Se mantiene el principio de superposición:



- Invariante en el tiempo: $S(t) \longrightarrow Z(t)$ and $S(t-t_0) \longrightarrow Z(t-t_0)$

- Función lineal puede ser resultado de funciones no lineales sucesivas.

- Cualquier sistema lineal invariante en el tiempo, físicamente realizable y estable puede ser descrito por una transmitancia o función de transferencia $H(f)$.

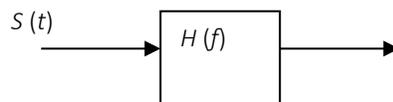


Fig. 10 Sistema lineal descrito por su función de transferencia.

$H(f)$: cantidad compleja especificada por:

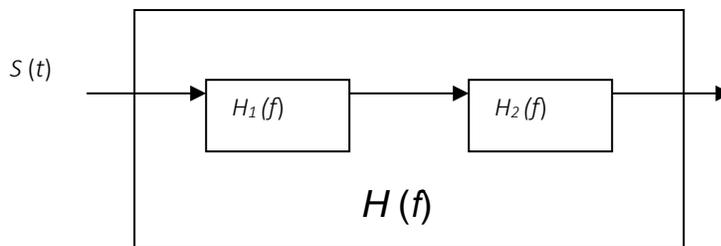
- Módulo (o valor absoluto).
- Fase (o argumento).

Si el sistema estaba en reposo (condición inicial cero), la transformada de Fourier de la señal de salida $P(f)$ es:

$$P(f) = H(f) S(f)$$

donde: $S(f)$ es la transformada de Fourier de la señal de entrada.

Por lo tanto, los sistemas lineales no modifican la frecuencia de senoides, pero pueden modificar su amplitud y fase.



Función de transferencia de sistemas lineales conectados en cascada.

En instrumentación:

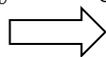
- No se acepta distorsión en la forma de la señal, pero es aceptable el retardo:

$$P(t) = k S(t - t_0)$$

$$P(f) = k e^{-j2\pi f t_0} S(f)$$

$$H(f) = k \angle -2\pi f t_0$$

Cambio de amplitud y retardo proporcional a la frecuencia (desfase lineal)



- Para señales de muy baja frecuencia, una función se considera lineal, cuando su característica de transferencia es una línea recta con pendiente constante.

- Características de transferencia no lineales son descritas por funciones matemáticas explícitas o gráficamente por una curva, cuya pendiente no es constante.

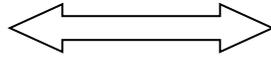
No linealidad es considerada una fuente de error en circuitos lineales.

Adaptación de impedancias

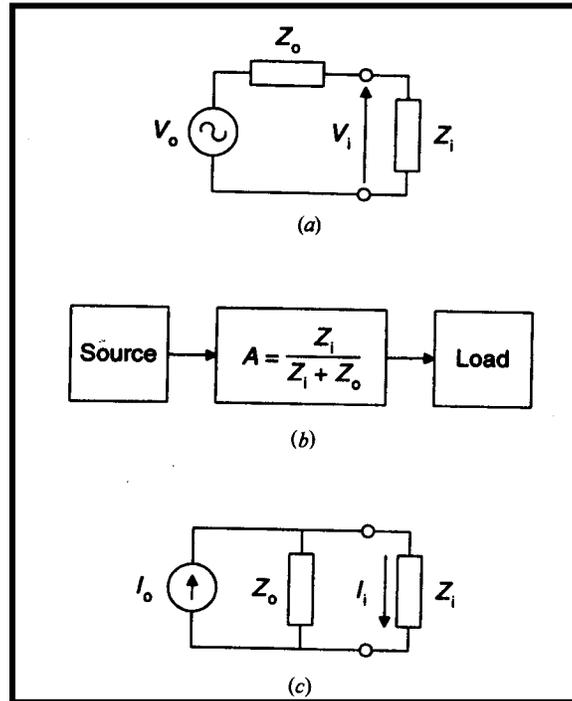
La descripción de un circuito lineal por su función de transferencia asume que el comportamiento del circuito no se altera cuando es conectado a otros circuitos.

Requisito:

Impedancia de entrada del
circuito receptor (carga)



Impedancia de salida
circuito fuente



(a) Señal de voltaje conectada a un receptor con impedancia de entrada Z_i . (b) Etapa de conexión añadida para tomar en cuenta la atenuación producida por impedancias no adaptadas. (c) Señal de corriente conectada a un receptor con impedancia de entrada Z_i .

$$V_i = V_o \frac{Z_i}{Z_i + Z_o} = A V_o$$

donde: $A = Z_i / (Z_i + Z_o)$ es la atenuación y es función de la frecuencia.

Condición deseada para
adaptación de impedancia:
(buffering)

$$V_i = V_o \longrightarrow Z_i \gg Z_o$$

Para señales de banda estrecha:

Z_i y Z_o son casi independientes de la frecuencia: $|Z_i| = k |Z_o|$ donde k es constante, por lo tanto:

$$\frac{|V_i|}{|Z_o|^2} = \frac{|V_o|}{(k^2 + 1)^{1/2}} = \frac{k}{(k^2 + 1)^{1/2}} |V_o| = A |V_o| \quad (|Z_i|^2 +$$

donde: A es una atenuación constante.

Si Z_o y V_o son función del mensurando x , el voltaje detectado es una función no lineal de x aún para señales de banda estrecha.

Para señales de banda ancha:

- Z_i disminuye para frecuencias altas debido a capacidad parásita.
- Z_o podría no ser constante.

Si el voltaje a procesar es diferencial, entonces las condiciones requeridas para adaptación de impedancias involucran impedancias de modo común y diferencial.

Cuando la señal de interés es una corriente, la condición para la adaptación de impedancias se deriva a través del análisis de la corriente a través de la impedancia de carga:

$$I_i = I_o \frac{Z_o}{Z_o + Z_i}$$

donde: $Z_i \ll Z_o$

Conversiones entre dominios

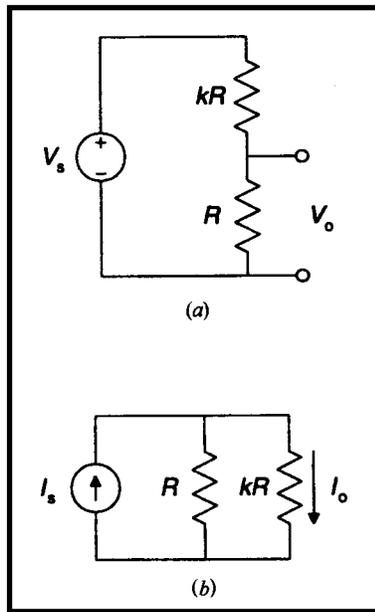
Un dominio de datos es una cantidad física que representa la información.

- *Dominios análogos:* Voltaje y corriente.
- *Dominios del tiempo (análogos):* Frecuencia, ancho de pulso y fase.
Manejo de voltajes y corrientes de dc y ac.

¿Porqué?

Debido a la naturaleza de las fuentes de señal y receptores, además de la conveniencia de algunas operaciones.

- Termopares, sensores de efecto Hall, transformadores diferenciales variables lineales (LVDT) y tacómetros de ac. (*salida de voltaje*)
- Fotodiodos, tubos fotomultiplicadores y sensores piezoeléctricos. (*salida de corriente*)
- Sensores resistivos (galgas extensométricas, detectores de temperatura resistivos (RTDs), termistores), se colocan en divisores de voltaje, puentes de Wheatstone con salidas de voltaje o corriente de dc o ac.
- Sensores reactivos (capacitivos e inductivos) proporcionan salidas de voltaje de ac.
- Receptores de señal requieren entradas específicas: la mayoría de ADC solamente aceptan voltajes de entrada de dc, un circuito de corriente para telemetría de 4 mA a 20 mA, requiere una corriente de dc.



$$V_o = \frac{V_s}{k + 1}$$

$$I_o = \frac{I_s}{k + 1}$$

(a) divisor de voltaje. (b) divisor de corriente.

Salida

Entrada	Voltaje	Corriente
Voltaje	Amplificador de voltaje	Amplificador de transconductancia
	Buffer de voltaje	Amplificador de transadmitancia
Corriente	Fuente de voltaje controlada por voltaje (VCCVS)	Fuente de corriente controlada por voltaje (VCCS)
	Amplificador Norton	Espejo de corriente
Corriente	Integrador de corriente	Transportador de corriente
	Amplificador de transimpedancia	Amplificador de corriente, bomba de corriente.
	Fuente de voltaje controlada por corriente (CCVS)	Fuente de corriente controlada por corriente (CCCS)

Terminología común para componentes y circuitos para amplificación de señal y conversión de dominios.

Filtrado

El filtrado analógico de señal discrimina señales basado en uno de sus parámetros: amplitud, frecuencia, fase o duración.

La mayoría de los filtros son lineales, y discriminan señales basados en su frecuencia. Son utilizados para:

- Adaptación de ancho de banda. (Muestreo de señal)
- Eliminación de interferencia.
- Reducción de ancho de banda. (Reducción de ruido)

Técnicas de filtrado no lineales para rechazo de ruido e interferencia:

- Amplitud.

– *Slew-rate.*

Linealización

La linealidad expresa hasta que punto es constante la sensibilidad del sistema, y una respuesta lineal es más conveniente debido a que para calcular la entrada correspondiente a una salida para un sistema lineal se requiere solamente restar la salida en cero y dividir por la sensibilidad.

En instrumentos lineales la no linealidad equivale a la inexactitud

– *Relaciones no lineales pueden ser debidas al principio de medición.*

– *El sensor podría ser no lineal.*

Termistores, magnetoresistores o termopares trabajando en un rango de temperatura amplio.

– *Un sensor lineal puede dar una salida no lineal cuando se coloca en un divisor de voltaje o puente de Wheatstone.*

Compensación de interferencias

Una interferencia que da lugar a una señal no deseada $u(t)$ sumada a la señal de interés $s(t)$ puede ser cancelada si el sistema se diseña para proporcionar dos señales de salida $s(t)$ y $-s(t)$, cada una con la interferencia sumada, por lo que la resta de ambas señales será:

$$d(t) = s(t) + u(t) - [-s(t) + u(t)] = 2s(t)$$

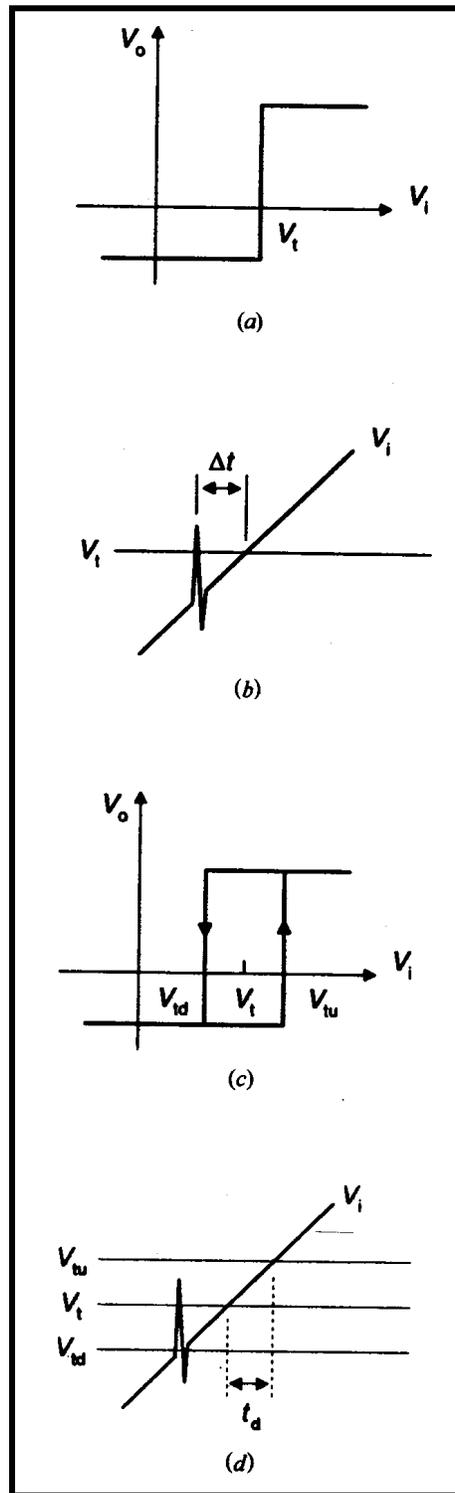
Esto muestra la ventaja implícita de las señales diferenciales:

Cualquier interferencia común a ambas terminales de la señal (voltajes o corrientes) serán canceladas en el extremo receptor.

De la misma manera, una interferencia que da lugar a una señal no deseada $u(t)$ multiplicando la señal de interés $s(t)$, se puede cancelar si el sistema se diseña para que el valor de $u(t)$ sea obtenido, de tal forma que dividiendo la señal contaminada entre la interferencia proporciona la señal deseada sin interferencia. (método aplicado en sensores resistivos colocados en divisores de voltaje o puentes de Wheatstone).

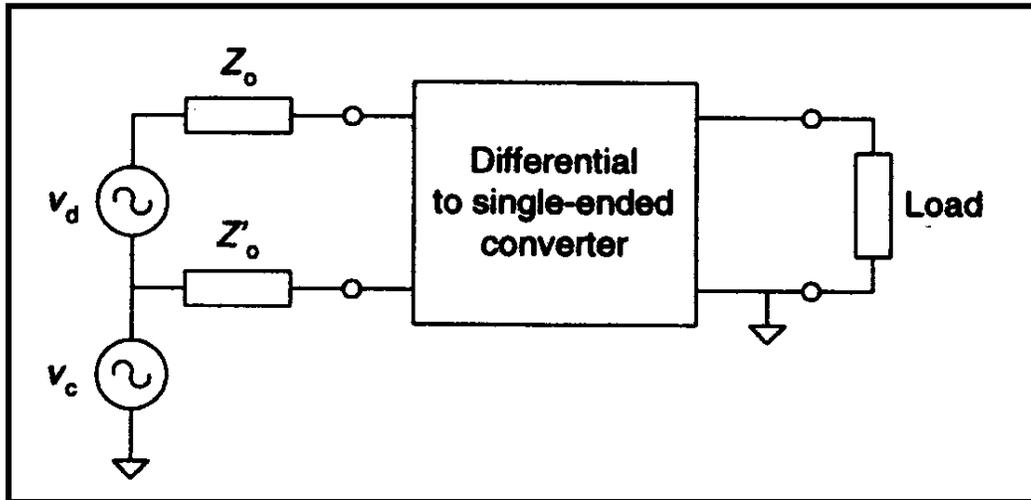
Comparación de niveles y detección de umbral

La comparación de niveles es una función no lineal que proporciona una señal binaria cuyo valor depende de cual de las dos señales es más grande. La detección de umbral también es una función no lineal que proporciona una salida binaria cuyo valor cambia cuando la señal de entrada alcanza un cierto nivel. (si el nivel de decisión es cero, el circuito es un detector de polaridad)



(a) Comparación de niveles. (b) Problemas de falsos disparos debido a ruido. (c) Histéresis en comparación de niveles en (d) reduce problemas de disparo debido a ruido.

Adaptación de terminales

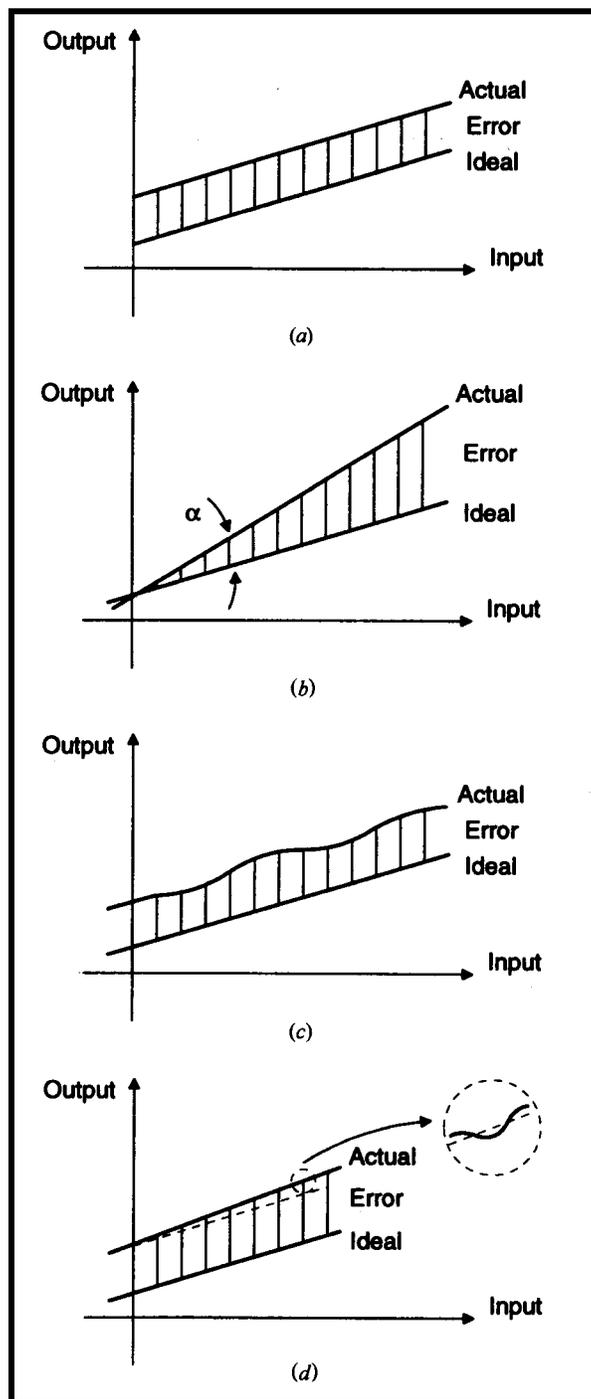


Adaptar una señal diferencial a un carga asimétrica aterrizada requiere un convertidor diferencial a asimétrico.

ERRORES

El criterio de rendimiento para el procesamiento analógico de señal se establece en base a los requerimientos de: *exactitud*, *resolución* y *ancho de banda*, además del *costo*.

- Absolutos y relativos.
- Aditivos (cero), multiplicativos (ganancia) y no linealidad.
- Sistemáticos y aleatorios. (naturaleza)
- Estáticos y dinámicos. (influencia sobre entradas lentas o rápidas)



(a) Error cero. (b) Error de ganancia para un sistema sin error cero. (c) Error de no linealidad. (d) Error total.

Errores dinámicos estacionarios (el error depende de la entrada al sistema)

Sistema pasa-bajos de primer orden: (Función de transferencia)

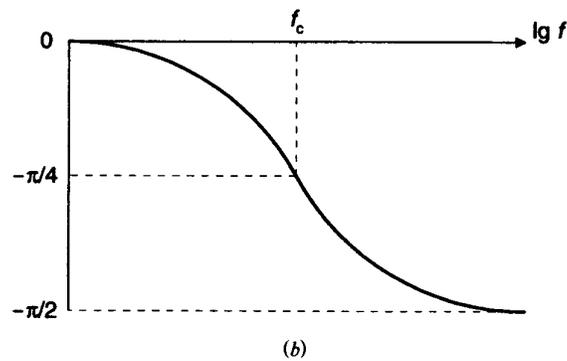
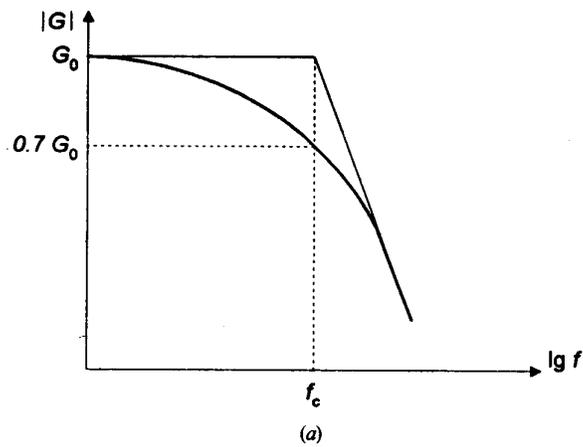
$$G(f) = G_0 \frac{f_c}{jf + f_c}$$

donde:

G_0 respuesta en baja frecuencia (ganancia en general)

f_c frecuencia corte: caracteriza su respuesta dinámica, $2\pi f_c = \frac{1}{\tau}$ Para un error dinámico cero: $G(f) =$

G_0



Respuesta de un circuito pasa-bajos de primer orden. (a) amplitud (b) fase.

El error de amplitud relativo será:

$$\varepsilon_{|G|} = \frac{|G| - |G_0|}{|G_0|}$$

donde: $|G_0| = G_0$ y:

$$|G| = \frac{G_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}}$$

Si el error de magnitud relativo máximo aceptado en frecuencias más bajas que f_ϵ es ϵ , entonces la frecuencia de corte debe ser suficientemente alta de tal manera

que:

$$1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_\epsilon}{f_c}\right)^2}} \leq \epsilon$$

por lo tanto:

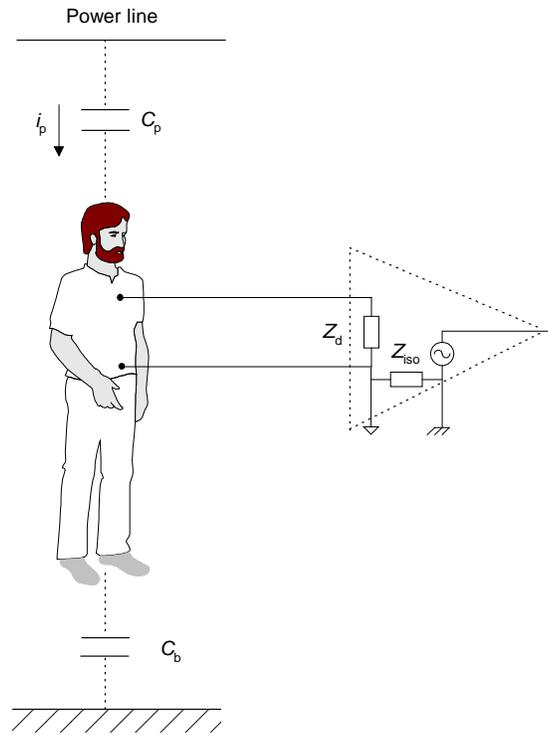
$$f_c \geq \frac{f_\epsilon (1 - \epsilon)}{\sqrt{2\epsilon - \epsilon^2}} \approx \frac{f_e}{\sqrt{2\epsilon}} \quad \text{siempre que: } \epsilon \ll 1$$

f_c para un sistema pasa-bajos de primer orden procesando una señal debe ser de 50 a 100 veces el componente de máxima frecuencia para que el error sea mínimo.

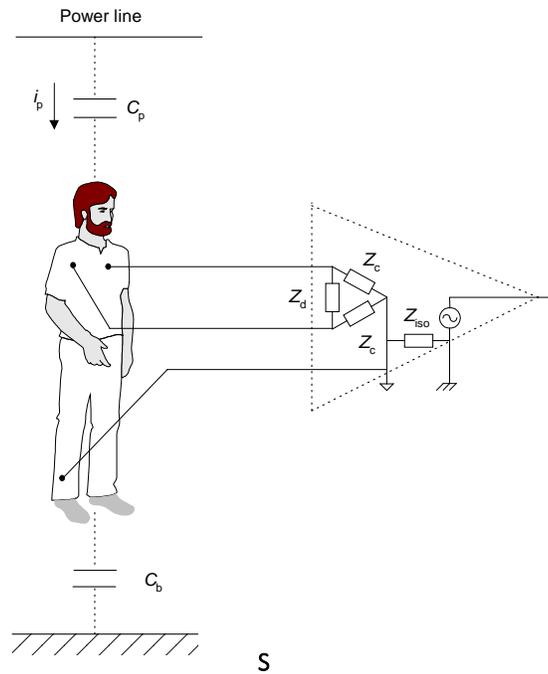
ϵ	f_c / f_ϵ	ϵ	f_c / f_ϵ
10^{-2}	7	10^{-4}	71
2^{-8}	11.3	2^{-14}	91
10^{-3}	22.4	2^{-16}	181
2^{-10}	22.6	2^{-18}	362
2^{-11}	32	2^{-20}	724
2^{-12}	45.5	2^{-22}	1448
2^{-13}	64		

Frecuencia de corte f_c para un sistema pasa-bajos de primer orden cuando el error de amplitud máxima aceptado para frecuencias debajo de f_ϵ es ϵ .

Amplificación de voltaje



Interferencia de red en amplificador asimétrico



S
Sistema de medida diferencial

Amplificador diferencial ideal



(a) Funciones de transferencia para un amplificador diferencial completo.

(b) Para un amplificador ideal éstas se reducen a dos.

$$\begin{aligned} v_{iD} &= v_{iH} - v_{iL} \\ v_{iC} &= \frac{v_{iH} + v_{iL}}{2} \\ v_{oH} &= v_{oC} + \frac{v_{oD}}{2} \\ v_{oL} &= v_{oC} - \frac{v_{oD}}{2} \end{aligned}$$

$$G_{DD} = \left. \frac{V_{oD}}{V_{iD}} \right|_{v_{iC}=0} \quad G_{CC} = \left. \frac{V_{oC}}{V_{iC}} \right|_{v_{iD}=0}$$

$$G_{CD} = \left. \frac{V_{oC}}{V_{iD}} \right|_{v_{iC}=0} \quad G_{DC} = \left. \frac{V_{oD}}{V_{iC}} \right|_{v_{iD}=0}$$

Aplicando principio de superposición, los voltajes de salida para el amplificador lineal serán:

$$V_{oD} = G_{DD}V_{iD} + G_{DC}V_{iC}$$

$$V_{oC} = G_{CD}V_{iD} + G_{CC}V_{iC}$$

$$\text{Ideal: } \begin{aligned} G_{DC} &= 0 \\ G_{CD} &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Factor de discriminación: } D = \frac{G_{DD}}{G_{CC}}$$

Amplificador diferencial real: factores de mérito

$$\text{CMRR} = C = \frac{G_{\text{DD}}}{G_{\text{DC}}}$$

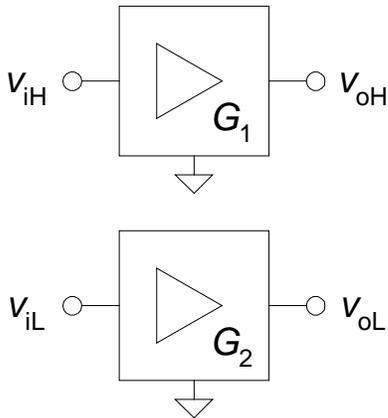
$$\text{Factor de exclusión : } E = \frac{G_{\text{CD}}}{G_{\text{DD}}}$$

$$V_{\text{oD}} = G_{\text{DD}} V_{\text{iD}} + G_{\text{DC}} V_{\text{iC}} = G_{\text{DD}} \left(V_{\text{iD}} + \frac{V_{\text{iC}}}{C} \right)$$

$$V_{\text{oC}} = G_{\text{CD}} V_{\text{iD}} + G_{\text{CC}} V_{\text{iC}} = G_{\text{CC}} (V_{\text{iC}} + V_{\text{iD}} ED)$$

Ejemplo: etapas no acopladas.

Amplificador diferencial completo formado por dos amplificadores asimétricos paralelos no acoplados con ganancias G_1 y G_2 .



$$D = \frac{G_{\text{DD}}}{G_{\text{CC}}} = 1$$

$$C = \frac{G_{\text{DD}}}{G_{\text{DC}}} = \frac{1}{2} \frac{G_1 + G_2}{G_1 - G_2}$$

$$E = \frac{G_{\text{CD}}}{G_{\text{DD}}} = \frac{(G_1 - G_2)/4}{(G_1 + G_2)/2} = \frac{1}{4C}$$

Bloques integrados para amplificación de voltaje

– Amplificador operacional retroalimentado en voltaje (VFA)

Amplificadores de voltaje con entrada diferencial y usualmente salida asimétrica ($G_{cd} = G_{cc} = 0$)

$$V_o = A_d V_d + A_c V_c$$

donde: $V_d = V_p - V_n$, $V_c = (V_p + V_n) / 2$
 $A_d = G_D = G_{DD}$, $A_c = G_C = G_{DC}$

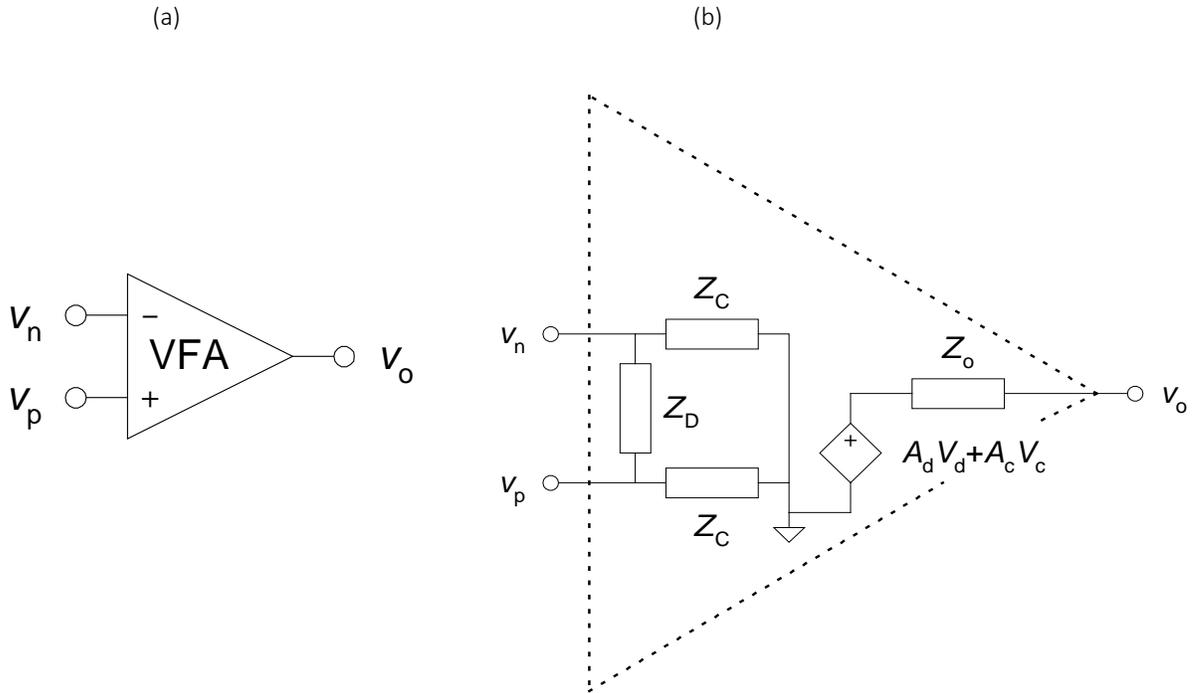


Fig. 2.1 Amplificador operacional retroalimentado en voltaje (VFA)
 (a) símbolo (b) circuito equivalente

Amp. Op. tienen una ganancia de voltaje diferencial de DC muy grande (10^5 a 10^7 para modelos de baja frecuencia), generalmente con un decremento de 20 dB/década a partir de una frecuencia f_a , aproximadamente desde 0.1 Hz (OPA77) hasta 200 kHz (OPA620).

$$A_d = A_{do} \frac{f_a}{jf + f_a} = \frac{f_T}{jf + f_a} = G_{DD}$$

donde: A_{do} – ganancia diferencial de DC.

$f_T = A_{do} f_a$, producto ganancia-ancho de banda (GBP) o ancho de banda unitario para el Amp. Op. ($|A_d(f_T)| = 1$)

$$|G_{DC}| = |G_{DD}| / |CMRR|$$

– Impedancias de entrada (dependen de la tecnología del IC):

- $1\text{ M}\Omega$ a $1\text{ P}\Omega$, mayores en modelos con entradas tipo FET y CMOS que para modelos con entradas BJT. En paralelo con estas resistencias se colocan capacidades de 2 pF a 10 pF .

– La resistencia de salida en general es menor de $100\ \Omega$.

– Voltajes de offset y corrientes de entrada con sus respectivos coeficientes de temperatura dependen de la tecnología del IC, los rangos normales son:

- V_{io} de 1 mV a $1\ \mu\text{V}$ con derivas tan bajas como $0.01\ \mu\text{V}/^\circ\text{C}$.
- I_b de 10 nA a 1 pA pero hay modelos con I_b de 10 fA .
- Amp. Op. con entradas BJT : corrientes de entrada mayores pero voltajes de offset y derivas menores.
- Amp. Op. con entradas FET : corrientes de entrada menores pero derivas mayores (I_b se duplica por cada incremento de $10\ ^\circ\text{C}$), y voltajes de offset y derivas mayores.
- Las corrientes de entrada y la impedancia también dependen del voltaje de modo común y las fuentes de alimentación. (efectos de segundo orden)
 - CMRR es muy alto en DC (80 dB a 130 dB) y disminuye a partir de frecuencias mayores de f_a .
- Este CMRR se aplica solamente para voltajes de modo común V_c ; bajos o medios, valores mayores de V_c implican un comportamiento no lineal que no puede describirse por una función de transferencia.

– PSRR es de 80 dB a 110 dB en DC y disminuye a partir de frecuencias que pueden ser diferentes para cada fuente de voltaje (Amp. Op. con V_{io} bajo deben tener CMRR y PSRR alto).

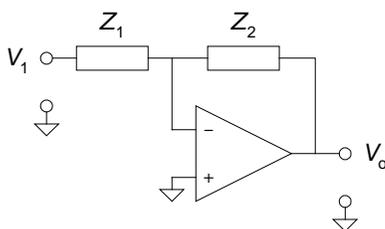
– Distorsión no lineal en Amp. Op. surge debido a:

- Limitaciones de slew rate. (Rangos a partir de $0.1\text{ V}/\mu\text{s}$ y mayores de $1000\text{ V}/\mu\text{s}$; en una onda senoidal el SR mayor se tiene en los cruces por cero, donde la pendiente es $2\pi f V_p$, por lo que se requiere tener $2\pi f V_p < \text{SR}$).
- Saturación de voltaje y corriente de salida. (Se presenta cuando el voltaje de salida es cercano a cualquiera de las fuentes de alimentación y cuando la corriente de salida excede una corriente especificada, que tiene un rango de 10 mA a 40 mA , dependiendo de los modelos. Amp. Op. CMOS y de bajo voltaje de alimentación tiene un rango de salida dinámico mayor que la de los Amp. Op. comunes.)
- La no-linealidad de la ganancia se corrige por retroalimentación.

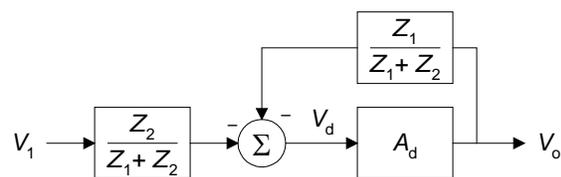
Propiedades de la retroalimentación negativa

Características de la ganancia de DC del Amp. Op.:

- Muy grande (un pequeño voltaje de entrada saturará su salida).
- Variable de unidad a unidad.
- Depende de las corrientes de alimentación.
- Es una función no lineal del voltaje de entrada.
- Coeficiente de temperatura grande.



(a)



(b)

Fig. 2.2 (a) Amplificador operacional con retroalimentación en voltaje;
(b) diagrama a bloques equivalente

Debido a la alta impedancia de entrada, la corriente de entrada al Amp. Op. es despreciable por lo tanto:

$$\frac{V_1 - V_d}{Z_1} = \frac{V_d - V_o}{Z_2}$$

Como $V_p = 0$ y V_d es muy pequeña debido a la alta ganancia del Amp. Op., entonces $V_c \approx 0$, entonces:

$$V_o = A_d V_d \qquad V_o = - \left(V_1 \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} + V_o \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \right) A_d$$

$$\beta = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \qquad \text{Factor de retroalimentación}$$

Resolviendo para V_o se tiene:

$$V_o = -V_1 \frac{Z_2/Z_1}{1 + 1/A_d \beta} \qquad \text{sí } A_d \beta \gg 1 \qquad V_o = -V_1 \frac{Z_2}{Z_1}$$

donde: $-\frac{Z_2}{Z_1}$ Ganancia de voltaje en lazo cerrado

$A_d \beta$ Ganancia de lazo; A_d Ganancia de lazo abierto

En altas frecuencias, $f \gg f_a$ entonces: $A_d \approx A_{d0} \frac{f_a}{jf}$

$$V_o = -V_1 \frac{Z_2/Z_1}{1 + j \frac{f}{A_{d0} f_a \beta}} = -V_1 \frac{Z_2/Z_1}{1 + j \frac{f}{f_G}}$$

donde: $f_G = A_{d0} f_a \beta = f_T \beta$

$$G(f) = \frac{G_0}{1 + j \frac{f}{f_G}}$$

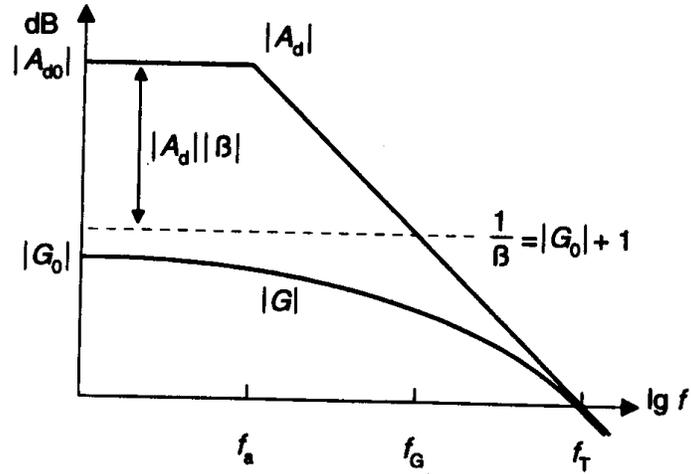


Fig. 2.3 Ganancia del circuito de la Fig. 2.2 cuando $Z_1=R_1$ y $Z_2=R_2$.

Amp. Op. con retroalimentación positiva y negativa

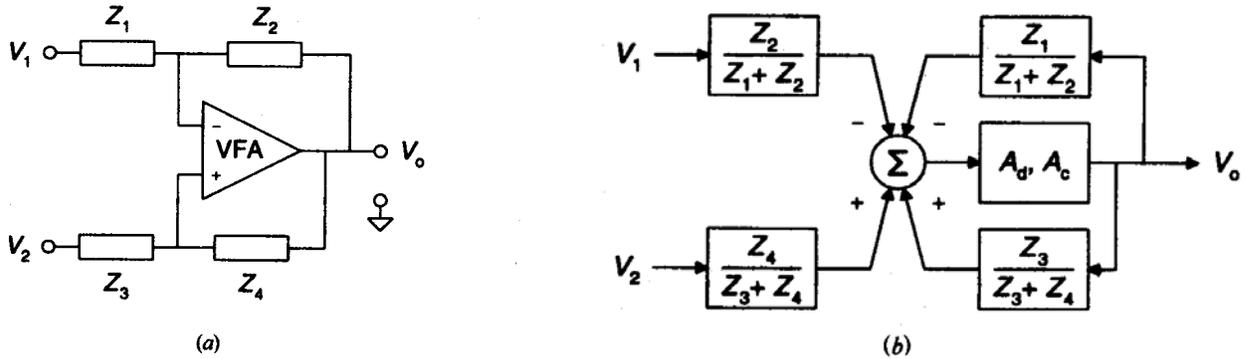


Fig. 2.4 (a) Retroalimentación positiva y negativa en un Amp. Op.
(b) diagrama a bloques equivalente.

En bajas frecuencias, $A_c \ll A_d$:

$$V_o = A_d \left[V_o \left(\frac{Z_3}{Z_3 + Z_4} - \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \right) - V_1 \left(\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \right) + V_2 \left(\frac{Z_4}{Z_3 + Z_4} \right) \right]$$

$$V_o = \frac{A_d \left(V_2 \frac{Z_4}{Z_3 + Z_4} - V_1 \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)}{1 + A_d \left(\frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} - \frac{Z_3}{Z_3 + Z_4} \right)}$$

Definiendo factores de retroalimentación positivo y negativo, factor neto de retroalimentación y las relaciones de alimentación:

$$\beta_n = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad \beta_p = \frac{Z_3}{Z_3 + Z_4} \quad \beta = \beta_n - \beta_p$$

$$\alpha_n = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad \alpha_p = \frac{Z_4}{Z_3 + Z_4}$$

$$V_o = \frac{(V_2 \alpha_p - V_1 \alpha_n) / \beta}{1 + \frac{1}{Ad\beta}}$$

Con $Ad\beta$ muy grande el funcionamiento del circuito será cercano al ideal, al igual que para el circuito que tiene retroalimentación negativa.

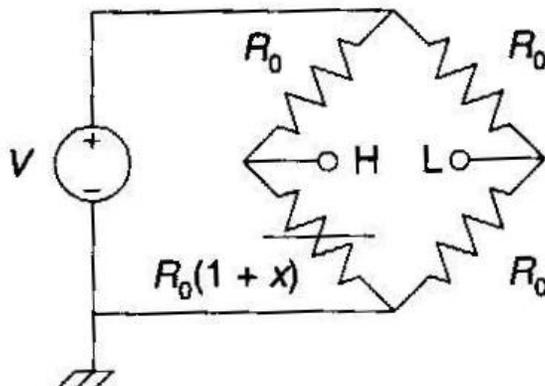
Si el factor neto de retroalimentación es negativo (más retroalimentación positiva que negativa) el circuito tenderá a saturarse o a oscilar. Para prevenirlo es necesario que $\beta > 0$ para todo el ancho de banda, por lo tanto:

$$\frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} > \frac{Z_3}{Z_3 + Z_4}$$

EJERCICIOS RESUELTOS
RELACIONADOS CON
PROCESAMIENTO ANALÓGICO DE
SEÑALES

Problema

Dibujar el circuito equivalente para la señal de salida del circuito puente de CD mostrado en la figura y clasifique el tipo de señal. La variable x es un cambio relativo del valor de la resistencia producido por una cantidad variable en el tiempo.



Calculando V_H y V_L :

$$V_H = V \frac{1+x}{2+x} \quad V_L = \frac{V}{2}$$

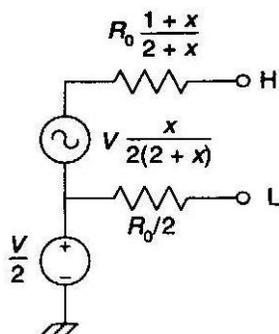
Los voltajes en modo diferencial y común son:

$$V_d = V_H - V_L = V \frac{x}{2(2+x)} \quad V_c = \frac{1}{2} (V_H + V_L) = \frac{V}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1+x}{2+x} \right) \approx \frac{V}{2}$$

Las resistencias de salida equivalentes para cada terminal son:

$$R_H = \frac{R_0(1+x)(R_0)}{R_0(1+x) + R_0} = R_0 \frac{(1+x)}{(2+x)} \quad R_L = \frac{R_0}{2}$$

Sustituyendo valores, el circuito equivalente es:



La señal de salida es pseudo-diferencial y desbalanceada.

Problema

Se desea medir una temperatura en el rango entre 0°C y 100°C con una resolución de 0.1°C mediante un sensor que tiene una sensibilidad de 1 mV/°C. El sensor está conectado a un amplificador y éste a un convertidor analógico digital (CAD) cuyo rango de entrada es de 0V a 10 V. ¿Cuántos bits debe tener el CAD? ¿Cuál debe ser la ganancia del amplificador? Si no se empleara el amplificador, ¿cuántos bits debería tener el CAD para lograr la misma resolución de 0.1°C?

Todos los elementos de la cadena de medida deben tener un rango dinámico (DR) igual o superior al de la temperatura que se quiere medir. Entonces el DR expresado en dB es:

$$DR = \frac{\text{Rango de medida}}{\text{Resolución}} = 20 \lg \frac{100^\circ\text{C} - 0^\circ\text{C}}{0.1^\circ\text{C}} = 60 \text{ dB}$$

Entonces el número de bits del CAD es:

$$6n = 60 \quad \text{y} \quad n = 10 \text{ b}$$

Este CAD de 10 b será suficiente siempre que se asegure que el rango de entrada (10 V, 0 V) corresponde a (100°C, 0°C), por lo tanto la ganancia del amplificador deberá ser:

$$G = \frac{10 \text{ V} - 0 \text{ V}}{100 \text{ mV} - 0 \text{ mV}} = 100$$

Si no se empleara el amplificador, para que el CAD mantuviera una resolución equivalente de 0.1°C, debería tener una resolución de 0.1 mV que es la correspondiente a la salida del sensor. Por lo tanto, como $DR = 2^n$, el número de bits del CAD deberá ser:

$$2^n = \frac{10 \text{ V}}{0.1 \text{ mV}}$$

Despejando n :

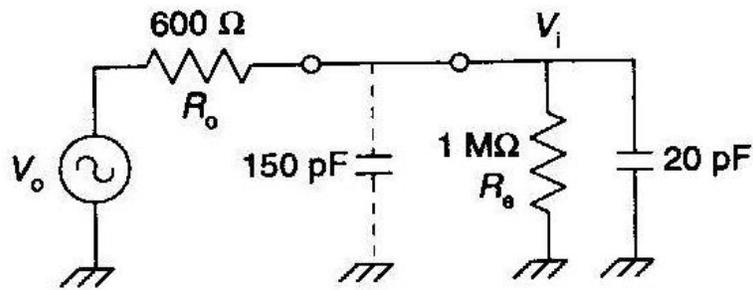
$$n = \frac{\lg (10 \text{ V}/0.1 \text{ mV})}{\lg 2} = 16.6 \text{ b}$$

Entonces el CAD debe tener 18 b que es el disponible comercialmente, ya que uno de 16 b es insuficiente.

Problema

Un generador de señal aterrizado con resistencia de salida de 600 Ω se conecta a un osciloscopio con impedancia de entrada de 1 MΩ en paralelo con 20 pF, utilizando 2 m de cable coaxial con capacitancia de 75 pF/m. ¿Si una atenuación de amplitud máxima de 0.1% en el voltaje es aceptada, cual es la frecuencia máxima correspondiente a este voltaje?

El circuito equivalente para la conexión del generador con el osciloscopio utilizando un cable coaxial es el siguiente.



El voltaje en la entrada del osciloscopio será:

$$V_i = V_o \frac{Z_e}{Z_e + R_o}$$

Donde Z_e es la impedancia equivalente de entrada del osciloscopio, dada por:

$$Z_e = \frac{R_e}{1 + j\omega R_e C_e}$$

Entonces la función de transferencia del circuito será:

$$\frac{|V_i|}{|V_o|} = \frac{R_e}{R_e + R_o} \frac{1}{\sqrt{1 + [(R_o || R_e) C_e 2\pi f]^2}} \geq 1 - 0.001 = 0.999$$

Sustituyendo valores en la ecuación anterior, se tiene que $f \leq 44\,206$ Hz.

Problema

La ganancia real de un amplificador es $G = 110$, mientras que la ganancia ideal o teórica es $G_i = 100$. Calcular los errores absoluto y relativo.

El error absoluto es:

$$e = G - G_i = 110 - 100 = 10$$

El error relativo:

$$\epsilon = \frac{e}{100} = \frac{10}{100} = 0.1 = 10\%$$

Las ganancias y el error absoluto expresadas en dB son:

$$G = 20 \lg 100 = 40 \text{ dB}$$

$$G_i = 20 \lg 110 = 40.8 \text{ dB}$$

$$e = 40.8 \text{ dB} - 40 \text{ dB} = 0.8 \text{ dB}$$

Problema

Un sistema pasa-bajos de primer orden tiene una ganancia de CD (G_0) de 1 y una atenuación de 20 dB en 60 Hz. Calcular su frecuencia de corte (f_c) y la máxima frecuencia de trabajo que tenga un error en la amplitud menor de 0.1%.

La función de transferencia para un sistema pasa-bajos de primer orden es:

$$\frac{|G|}{G_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}}$$

Sustituyendo valores y despejando f_c :

$$0.1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{60}{f_c}\right)^2}}$$

$$f_c = 6 \text{ Hz}$$

Como:

$$f_\varepsilon = f_c \sqrt{2 \varepsilon} = 6 \sqrt{2 (0.001)}$$

$$f_\varepsilon = 0.27 \text{ Hz}$$

Problema

Un amplificador operacional inversor se construye con un amplificador operacional OP07 con una $f_T = 0.6 \text{ MHz}$ (típica) y $f_T = 0.4 \text{ MHz}$ (mínima). Calcular la frecuencia en la cual la ganancia está 1% debajo de la ganancia de CD G_0 cuando $G_0 = -10$ y cuando $G_0 = -100$.

Para un sistema pasa-bajos de primer orden, para un error $\epsilon = 0.01$:

$$f_e \leq \frac{f_G}{7} = \frac{f_T}{7(|G_0 + 1|)}$$

donde:

f_e = máxima frecuencia para un porcentaje de error

f_G = frecuencia de esquina – 3 dB o crítica

ϵ = error

Sustituyendo valores en la ecuación anterior para cada caso:

Cuando $G_0 = -10$, para f_T típica: $f_e \leq 7800 \text{ Hz}$, para f_T mínima: $f_e \leq 5200 \text{ Hz}$.

Cuando $G_0 = -100$, para f_T típica: $f_e \leq 850 \text{ Hz}$, para f_T mínima: $f_e \leq 566 \text{ Hz}$.

Como se muestra un incremento en la ganancia de 10 reduce el ancho de banda por más de 9.