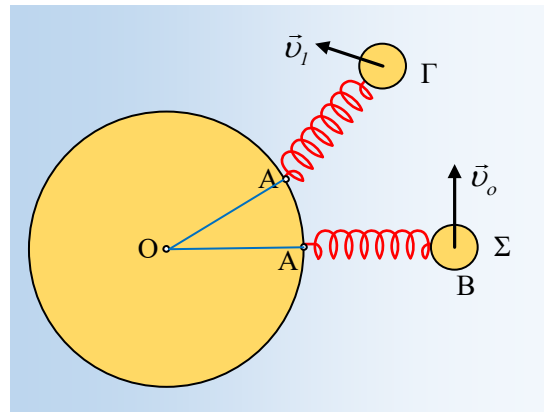


## Η στροφορμή σε ένα σύστημα

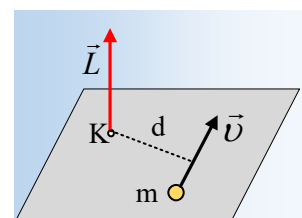
Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί ένας ομογενής δίσκος μάζας  $M=8\text{kg}$  και ακτίνας  $R=1\text{m}$ , ο οποίος μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές, γύρω από κατακόρυφο άξονα ο οποίος περνά από το κέντρο του  $O$ . Σε ένα σημείο  $A$ , στο άκρο μιας ακτίνας του δίσκου δένουμε ένα ιδανικό ελατήριο, στο άλλο άκρο του οποίου έχουμε δέσει ένα σώμα  $\Sigma$ , μάζας  $m=2\text{kg}$ , το οποίο θεωρούμε υλικό σημείο, το οποίο επίσης ηρεμεί, στη θέση  $B$ . Το ελατήριο έχει σταθερά  $k=200\text{N/m}$  και φυσικό μήκος  $l_0=1\text{m}$  και ο άξονάς του βρίσκεται στην προέκταση της ακτίνας  $(OA)$ .



Σε μια στιγμή  $t_0=0$ , δίνουμε ένα κτύπημα στο σώμα  $\Sigma$ , με αποτέλεσμα να αποκτήσει οριζόντια αρχική ταχύτητα μέτρου  $v_0=4\text{m/s}$ , κάθετη στην απόσταση  $(OB)$ , όπως στο σχήμα (σε κάτωψη).

- i) Να υπολογιστεί η αρχική στροφορμή του σώματος  $\Sigma$  ως προς τον άξονα περιστροφής του δίσκου στο  $O$ .
- ii) Μετά από λίγο, τη στιγμή  $t_1$  το σώμα  $\Sigma$  φτάνει στη θέση  $\Gamma$ , όπου ξανά το ελατήριο έχει το φυσικό μήκος του. Τη στιγμή αυτή ο δίσκος στρέφεται αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού με γωνιακή ταχύτητα  $\omega_1=1,5\text{rad/s}$ .
  - α) Να υπολογιστεί ξανά η στροφορμή του σώματος  $\Sigma$  ως προς τον άξονα στο κέντρο  $O$ , τη στιγμή αυτή.
  - β) Να βρεθεί η απόσταση  $d$  του  $O$  από τον φορέα της ταχύτητας  $v_1$  του σώματος  $\Sigma$
  - γ) Να υπολογιστεί το έργο της δύναμης του ελατηρίου που ασκήθηκε στο δίσκο από  $t_0$  έως τη στιγμή  $t_1$ .
- iii) Σε μια επόμενη στιγμή  $t_2$  το σώμα  $\Sigma$  φτάνει σε μια νέα θέση  $\Delta$ , με ταχύτητα μέτρου  $v_2=1,5\text{m/s}$ , ενώ το μήκος του ελατηρίου είναι  $1,1\text{m}$ . Για την στιγμή αυτή να υπολογιστούν:
  - α) Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του δίσκου, δεδομένου ότι έχει την ίδια κατεύθυνση με πριν.
  - β) Η στροφορμή του σώματος  $\Sigma$  ως προς τον άξονα περιστροφής στο  $O$ .

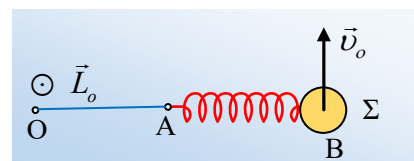
Δίνεται ότι ένα υλικό σημείο το οποίο κινείται με ταχύτητα  $v$ , παρουσιάζει ως προς ένα τυχαίο σημείο  $K$ , στροφορμή μέτρου  $L=mv \cdot d$ , όπου  $d$  η απόσταση του σημείου  $K$  από τον φορέα της δύναμης, με κατεύθυνση όπως στο σχήμα και η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του  $I= \frac{1}{2} MR^2$ .



### Απάντηση:

- i) Το υλικό σημείο  $\Sigma$ , έχει στροφορμή, κάθετη στο οριζόντιο επίπεδο (κατακόρυφη), με φορά προς τα πάνω, στο κέντρο  $O$  του δίσκου με μέτρο:

$$L_o = mv_0 d = mv_0(R+l_0) = 2 \cdot 4 \cdot 2 \text{kgm}^2/\text{s} = 16 \text{kgm}^2/\text{s}$$



- ii) Το κινούμενο σώμα  $\Sigma$  αρχίζει να μεταβάλλει το μήκος του ελατηρίου, το οποίο με τη σειρά του ασκεί

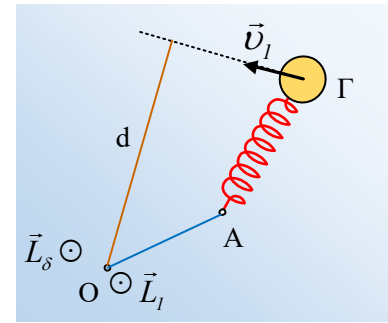
δύναμη στο δίσκο, με αποτέλεσμα να αρχίσει να περιστρέφεται γύρω από τον κατακόρυφο άξονα, ο οποίος περνά από το κέντρο του Ο. Αλλά η αλληλεπίδραση αυτή είναι εσωτερική για το σύστημα δίσκος-ελατήριο-σώμα Σ, με αποτέλεσμα η στροφορμή του να παραμένει σταθερή.

α) Εφαρμόζοντας την διατήρηση της στροφορμής για το σύστημα, μεταξύ των στιγμών  $t_0$  και  $t_1$  παίρνουμε:

$$\vec{L}_{o\lambda,0} = \vec{L}_{o\lambda,1} \rightarrow L_o = I_s \omega_1 + L_1 \rightarrow$$

$$L_1 = L_o - \frac{1}{2} M R^2 \omega_1 \rightarrow$$

$$L_1 = 16 \text{ kgm}^2 / \text{s} - \frac{1}{2} 8 \cdot 1^2 \cdot 1,5 \text{ kgm}^2 / \text{s} = 10 \text{ kgm}^2 / \text{s}$$



β) Στο σύστημά μας η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή, αφού μόνο το ελατήριο παράγει έργο πάνω στα σώματα, ενώ η δύναμη του ελατηρίου είναι συντηρητική. Έτσι από ΑΔΜΕ παίρνουμε:

$$K_o + U_{ελ,0} = K_s + K_l + U_{ελ,1} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m v_o^2 + 0 = \frac{1}{2} I_s \omega_1^2 + \frac{1}{2} m v_l^2 + 0 \rightarrow$$

$$m v_o^2 = \frac{1}{2} M R^2 \omega_1^2 + m v_l^2 \rightarrow$$

$$v_l = \sqrt{v_o^2 - \frac{M R^2 \omega_1^2}{2m}} = \sqrt{4^2 - \frac{8 \cdot 1^2 \cdot 1,5^2}{2 \cdot 2}} \text{ m/s} = \sqrt{11,5} \text{ m/s} \approx 3,4 \text{ m/s}$$

Αλλά τότε για τη στροφορμή του υλικού σημείου Σ ως προς το Ο, έχουμε:

$$L_1 = m v_l d \rightarrow d = \frac{L_1}{m v_l} = \frac{10}{2 \cdot 3,4} \text{ m} = 1,47 \text{ m}$$

γ) Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το ελατήριο και τη στιγμή  $t_0$  και τη στιγμή  $t_1$  έχει το φυσικό μήκος του, οπότε έχει μηδενική δυναμική ενέργεια. Αυτό θα μπορούσε να οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι το έργο της δύναμης του ελατηρίου είναι μηδενικό, πράγμα που είναι ΛΑΘΟΣ! Μπορεί αρχικά και τελικά η δύναμη να είναι μηδενική, αλλά στο ενδιάμεσο το ελατήριο επιμηκύνθηκε, άσκησε δυνάμεις σε σώμα Σ και δίσκο, μετέφερε ενέργεια από το ένα σώμα στο άλλο! Έτσι για να υπολογίσουμε το έργο που παράγει η δύναμη του ελατηρίου πάνω στο δίσκο, δεν έχουμε παρά να πάρουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για το δίσκο:

$$K_1 - K_0 = W_{F_{ελ}} \rightarrow$$

$$W_{F_{ελ}} = \frac{1}{2} I_s \omega_1^2 - 0 = \frac{1}{4} M R^2 \omega_1^2 = \frac{1}{4} 8 \cdot 1^2 \cdot 1,5^2 \text{ J} = 4,5 \text{ J}$$

iii) Έστω ότι τη στιγμή  $t_2$  το σώμα βρίσκεται στη θέση του παρακάτω σχήματος, έχοντας ταχύτητα μέτρου  $v_2$ , ενώ ο δίσκος στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα  $\omega_2$ .

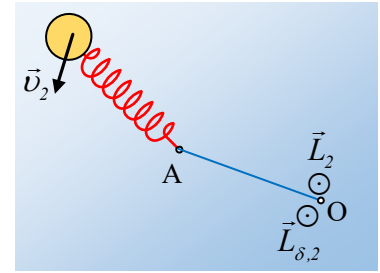
α) Εφαρμόζουμε την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας μεταξύ των χρονικών στιγμών  $t_0$  και  $t_2$ ,

παίρνοντας:

$$K_o + U_{ελ,ο} = K_{δ,2} + K_2 + U_{ελ,2} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m v_o^2 + 0 = \frac{1}{2} I_\delta \omega_2^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 + \frac{1}{2} k (\Delta \ell)^2 \rightarrow$$

$$m v_o^2 = \frac{1}{2} M R^2 \omega_2^2 + m v_2^2 + k (\Delta \ell)^2 \rightarrow$$



Λύνοντας ως προς  $\omega_2$  βρίσκουμε:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2m(v_o^2 - v_2^2) - 2k(\Delta \ell)^2}{MR^2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2(4^2 - 1,5^2) - 2 \cdot 200 \cdot 0,1^2}{8 \cdot 1^2}} \text{ rad / s} \approx 2,5 \text{ rad / s}$$

β) Εφαρμόζοντας ξανά την διατήρηση της στροφορμής για το σύστημα, μεταξύ των στιγμών  $t_o$  και  $t_2$  παίρνουμε:

$$\vec{L}_{o\lambda,o} = \vec{L}_{o\lambda,2} \rightarrow L_o = I_\delta \omega_2 + L_2 \rightarrow$$

$$L_2 = L_o - \frac{1}{2} M R^2 \omega_2 \rightarrow$$

$$L_2 = 16 \text{ kgm}^2 / \text{s} - \frac{1}{2} 8 \cdot 1^2 \cdot 2,5 \text{ kgm}^2 / \text{s} = 6 \text{ kgm}^2 / \text{s}$$

[dmargaris@gmail.com](mailto:dmargaris@gmail.com)