Analízis vizsgadolgozat minta

(Ez egy korábbi tanév vizsgadolgozata. Az idei évben is hasonló stílusú, de részleteiben eltérő vizsgadolgozatok lesznek.)

A feladatok megoldásakor minden lépést indokolni kell. Csak indokolt válaszokra, részválaszokra adunk pontot.

Minden feladatot külön lapra kell írni.

1. feladat

(a) Írja le a végtelen sor konvergenciájának a definícióját! (3 pont)

(b) Melyik állítás igaz?

(b1) Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. (3 pont)

(b2) Ha $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens. (3 pont)

(b3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ konvergens. (3 pont)

(b4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$ konvergens. (3 pont)

(c) Mondja ki a végtelen sorokra vonatkozó Cauchy-kritériumot! (2 pont)

2. feladat

(a) Melyik állítás igaz?

(a1) Egy konvergens sorozat minden részsorozata konvergens. (2 pont)

(a2) Egy divergens sorozat minden részsorozata divergens. (2 pont)

(a3) Egy monoton sorozat minden részsorozatának van határértéke. (2 pont)

(a4) Ha egy sorozat nem korlátos, akkor egyetlen részsorozata sem korlátos. (2 pont)

(b) Mondja ki a Bolzano-Weierstrass tételt! (1 pont)

(c) Tudjuk, hogy a_{2n} és a_{2n+1} konvergens. Következik-e ebből, hogy a_n konvergens? (3 pont)

(d) Van-e az $a_n = \{\frac{3n^2+\sqrt{n}}{n-\frac{1}{n}}\}$ sorozatnak konvergens részsorozata? ($\{x\}$ az x szám törtrészét jelöli, $\{x\} = x - [x]$.) (3 pont)

3. feladat

Hány olyan különböző 7-jegyű számot írhatunk fel, amiben csak az 1-es, 2-es, 3-as vagy a 8-as számjegyek szerepelnek? Ezek közül hány számban szerepel a 8-as? (10 pont)

4. feladat

(a) Bizonyítsa be, hogy felülről korlátos, nem üres valós számhalmaznak van legkisebb felső korlátja! (9 pont)

(b) Bizonyítsa be, hogy van olyan valós szám, amelynek a négyzete 2. (9 pont)