PRACTICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Ejercicio 1. Complete:

- Defina ecuación diferencial
- Dé un ejemplo
- Dada una ecuación diferencial de primer orden y primer grado definida implícitamente por g(x,y,y')=0, exprese en forma analítica la solución de la misma.
- Dada una ecuación diferencial de primer orden y primer grado definida explícitamente por y'=f(x,y), exprese en forma analítica la solución de la misma.
- ¿Qué representa geométricamente la solución general de una ecuación diferencial de primer orden y primer grado?
- Si a la ecuación mencionada en el punto anterior se le asigna una condición inicial, la solución obtenida se denomina _____________ y geométricamente representa ___________________

Ejercicio 2. Complete el siguiente cuadro

Ecuación Diferencial	**Variable Independiente**	**Variable Dependiente**	**Tipo (*)**	**Grado**	**Orden**
$y'' + 5y' + 2y = e^{-3t}$					
			Ordinaria	4	3
$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$					
$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^5} = \frac{d^2y}{dx^2}$					
	t	x	Ordinaria		
$y''^2 - 8\,x\,y'^4 = sen(x)$					

Tipo (*) La Ecuación Diferencial puede ser de dos tipos: Ordinaria o Parcial.

Ejercicio 3. Compruebe que la función dada es solución de la ecuación diferencial. Clasifique las soluciones en general y particular.

a. $y(x)=C\,e^{-x^3}$, $y'+3x^2y=0$

b. $y=3x^2$, $x\,y'=2y$

c. $y=C_1\cos(2x)+C_2\,\mathrm{sen}(2x)$, $y''+4y=0$

d. $y=\dfrac{\mathrm{sen}(x)}{x}$, $xy'+y=\cos(x)$

e. $y=\ln(C+e^x)$, $y'=e^{x-y}$

Ejercicio 4. Dados los siguientes enunciados, plantee el modelo matemático mediante una ecuación diferencial.

a. Encuentre la ecuación de la familia de curvas $y = f(x)$ tal que su pendiente, en cualquier punto, sea la suma de la mitad de la ordenada y el doble de la abscisa del punto.

b. La tasa de cambio con respecto al tiempo de la velocidad ***v*** de un bote costero de motor es proporcional al cuadrado de ***v***.

c. La ecuación diferencial cuya solución es la familia de circunferencias de radio fijo ***r*** cuyo centro está en el eje *x*. Grafique.

d. Para cierta sustancia química la velocidad de cambio de presión de vapor (P) respecto a la temperatura (T), es proporcional a la presión de vapor e inversamente proporcional al cuadrado de la temperatura.

e. Usar la segunda ley de Newton para encontrar la ecuación diferencial de la velocidad en un instante cualquiera de un cuerpo de masa m que va cayendo (tal como un hombre que desciende en paracaídas) y encuentra una resistencia del aire proporcional a su velocidad instantánea v(t).

f. La razón o velocidad con que cambia la temperatura de un cuerpo, con respecto al tiempo, es proporcional a la diferencia de temperaturas entre dicho cuerpo y el medio ambiente.

g. Un capital financiero colocado en un plazo fijo, aumentará proporcionalmente de acuerdo al interés pactado previamente con el banco. No considerar inflación.

Ejercicio 5. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales de variables separables:

a) $\dfrac{dy}{dx}+y^2\,sen\,x=0$, b) $\dfrac{dy}{dx}=y\,e^{x}$, $y(0)=2\,e$.

Ejercicio 6. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales lineales. Identifique solución general y solución particular según corresponda.

a) $x\,y' - y = x$; y(1) = 7. b) $y' - \frac{3}{x^2}\,y = \frac{1}{x^2}$

Ejercicio 7. Clasifique y resuelva las siguientes EDO. Identifique solución general y particular según corresponda.

a) $y\;dx + x\;dy = 0$ grafique la solución particular que pasa por el punto $(1{,}1)$.

b) $\theta\;d\theta + re^{-\theta}\;dr = 0$, $\theta(0) = 1$

c) $y' + y^2\,\mathrm{sen}\,x = 0$

d) $y' - 3y = e^{2t}$

e) $(x+1)\,y' = 4y$, $y(0) = 1$

f) $\frac{dy}{dx} = e^{3x+2y}$

g) $\frac{dv}{dt} + \cos 2t = 0;\quad v(\frac{\pi}{4}) = \frac{3}{2}$

h) $y' + 4xy = x$, $y(0) = -2$

i) $y'\,tg\,x = y \qquad y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$

j) $\frac{dy}{dt} - 2y = 1$, $y(0) = \frac{5}{2}$ resolver de dos formas distintas

k) $y^2\,(1-x)\,dx + x(1-y)\,dy = 0$

l) $y^3 dx + 3xy^2 dy = 0$

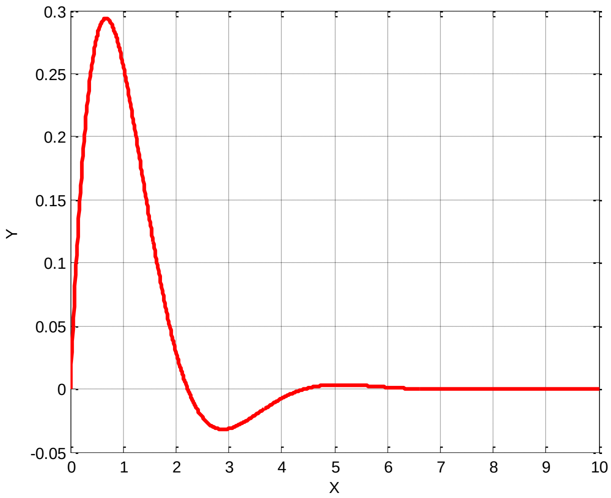
m) 2(cos 2x – y sen 2x) dx = cos 2x dy

Si Ud. usa software, controle las soluciones obtenidas en cada caso y grafique las mismas.

Ejercicio 8. Determine ***las trayectorias ortogonales*** a las familias de curvas dadas. Graficar.

a) $3x^2 + y^2 = k$ b) $y = k\,e^{-x}$ c) $x\,y = k$ d) $y^2 = kx$

Ejercicio 9. Comprobar que $y = \frac{e^{-x}}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}\,x)$ es solución de la ecuación diferencial $y'' + 2y' + 1.5y = 0$. b) ¿Cuál es la expresión de la solución general? c) A partir del gráfico encuentre la solución particular.



Ejercicio 10. Encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales homogéneas. En caso de tener condiciones iniciales, determinar la solución particular. Indique en cada ecuación las variables independientes y dependientes.

1. $y'+2y=0, \qquad y(0)=-1$

2. $y''-5y'+6y=0$

3. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 8\dfrac{dy}{dx} + 16y = 0$

4. $\left(D^3-2D^2\right)z=0$, $\quad z(0)=1,\ z'(0)=z''(0)=0$

5. $y''-4y'+13y=0, y(0)=0,\ \ y'(0)=1$

Si Ud. usa software, controle las soluciones obtenidas en cada caso y grafique las mismas. Analice gráficamente qué ocurre con la solución cuando $x \to \infty$.

Ejercicio 11. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales por el método de los coeficientes indeterminados e indique las soluciones general y particular según sea el caso.

1. $y'-3y=-x^2, \qquad y(0)=1$
2. $y''+y'-2y=2x^2-3x$
3. $y'+2y=e^{-2x}, \qquad y(0)=0$
4. $y''+4y'=-2x, \qquad y(0)=0,\ \ y'(0)=0$
5. $y''-2y'+y=3e^x$
6. $y''+2y'+2y=5e^{3x}, y(0)=0,\ \ y'(0)=0$

7. $y''+4y=3\cos(2x)$, $\quad y(0)=1,\ y'(\pi)=1$
8. $(D^2+1)y=3\text{sen }2x$
9. $\left(D^2+2D+1\right)\ y=5\,e^{-x}$
10. $y'''+y''-6y'=3e^{-2x}-x$, $\quad y(0)=y'(0)=y''(0)=0$

Ejercicio 12. Escribir la solución general de la ecuación lineal homogénea cuya ecuación característica tiene las siguientes raíces. Indique de que orden es la ecuación

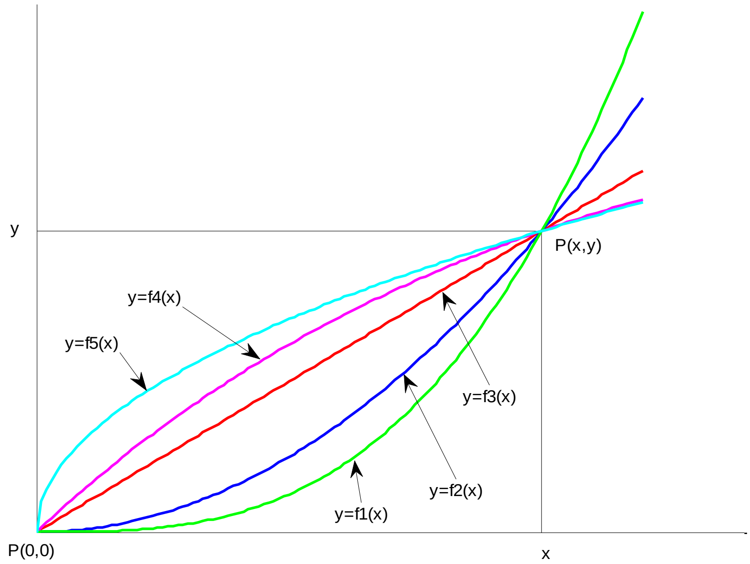
a) –3, 3 b) 2, 2, 7 c) $\pm 3i$, 0 d) 3, 3, 3, 0, 0, -2 e) 1, 1, 2, $1\pm 3i$

Ejercicio 13. Siendo la solución general dada en el **Ejercicio 12** y utilizando el método de los coeficientes indeterminados, indicar la solución particular para las diferentes expresiones de Q(x).

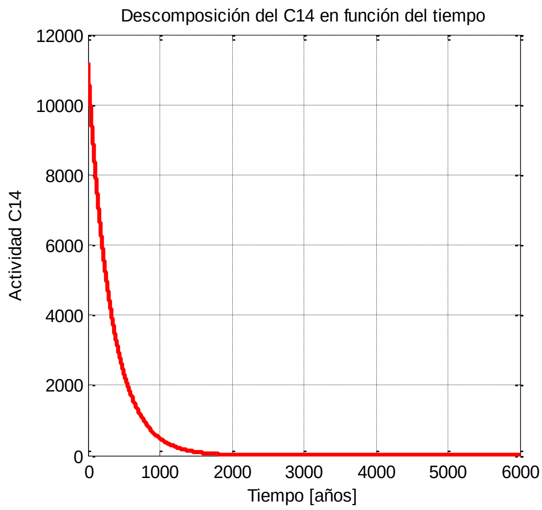
$Q(x)=x^2-3$ a) , c) y d)	$Q(x)=e^{2x}$ b) y d)
$Q(x)=\text{sen}(3x)$ c) , d), e)	$Q(x)=e^{x}\cos(3x)$ d) y e)

Ejercicio 14. Aplicaciones.

1. Encuentre la ecuación de la familia de curvas $y = f(x)$ tal que su pendiente, en cualquier punto, sea la suma del duplo de la ordenada y cinco veces la abscisa. Encontrar la curva que pasa por el (0,0).
2. Obtenga la ecuación de la familia de curvas para la cual la normal en un punto cualquiera ***(x,y)*** pasa por (1,1).
3. Una curva y=f(x) pasa por el origen en el plano XY, al primer cuadrante. El área bajo la curva de P(0,0) a P(x,y) es un tercio del área del rectángulo que tiene esos puntos como vértices opuestos. Encuentre la ecuación de dicha curva.



4. Se sabe que una población de bacterias aumenta con una rapidez proporcional al número de bacterias que hay en un instante cualquiera. En un análisis de una botella de leche se han encontrado 500 bacterias un día después de haber sido embotelladas, si al segundo día el número de organismos es de 8000. ¿Cuál es el número de organismos en el momento de embotellar la leche?
5. Cuando se produce cierto alimento, se estima en N la cantidad de organismos presentes en un paquete. Al cabo de 60 días el número N ha aumentado a 1000 N, sin embargo el número 200 N es considerado como límite saludable. A los cuántos días después de elaborado el paquete vence el producto.
6. Se ha encontrado que un hueso fosilizado contiene 1/10000 de la actividad original de C_{14}. Determinar la edad del fósil, sabiendo que el tiempo de vida media del C_{14} es de 5600 años. Además se sabe cuando han transcurrido 5000 años, la actividad del C_{14} es de 1/500.



7. Una batería de 12 Volt se conecta a un circuito simple en serie en el cual la inductancia es ½ Henry y la resistencia 10 Ohm. Determine la corriente (I) si la corriente inicial es cero. Grafique la solución obtenida.

Ejercicio 15. Resolver los siguientes problemas de valores iniciales

a) $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x + 4y \end{cases}$ con $x(0) = -1, y(0) = 0$

b) $\begin{cases} x' = x + y - 2 \\ y' = 4x + y - 5 \end{cases}$ con $x(0) = 1, y(0) = 1$

c) $\begin{cases} x' - 3x + 2y = 0 \\ 4x - y' - y = cos(t) \end{cases}$

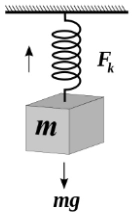
con $x(0) = y(0) = 0$

d) $\begin{cases} (D-1)x + 2y = t \\ Dx + D^2 y = 1 \end{cases}$

con $x(0) = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = -1$

Ejercicio 16: Reduzca las siguientes ecuaciones diferenciales de orden "n" a "n" ecuaciones diferenciales de orden 1:

a) Sistema Masa – Resorte vertical:



b) 3y'''+5y''+y'+7y=0

Anexo Para Trabajar Con Maple

Se muestran aquí algunos ejemplos con las sentencias básicas para trabajar Ecuaciones Diferenciales con Maple

Ejemplo1: Clasificar, resolver y graficar algunas soluciones particulares (para C=-3,-2, -1,10,0.5,4) y la que verifica y(0)=6 de la ecuación diferencial $(x+2)y' = 4y$

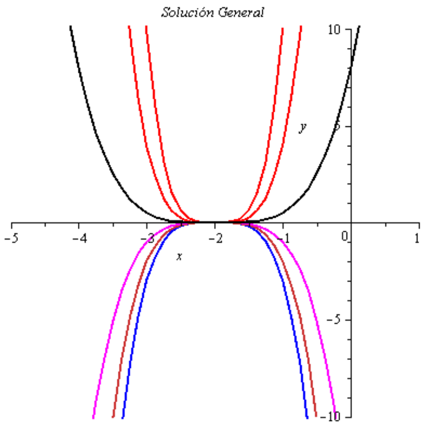
```
>eq1:=(x+2)*diff(y(x),x)=4*y(x); #Introduce la ecuación diferencial
```

$$eq1 := (x+2)\left(\frac{\partial}{\partial x} y(x)\right) = 4\, y(x)$$

```
>T:=dsolve(eq1,y(x));#Determina la solución general
```

$$T := y(x) = \_C1\ (x+2)^4$$

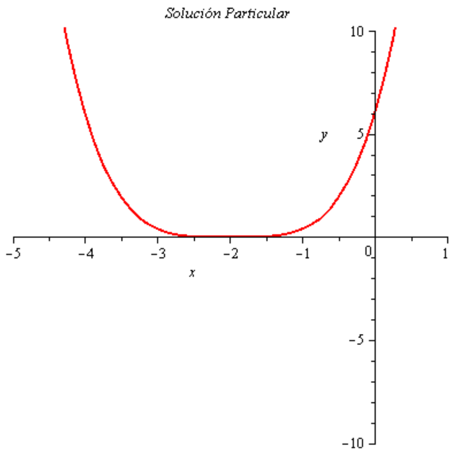
```
>plot([seq(rhs(T),_C1=[-3,-2,-1,4,10,0.5])],x=-5..1,y=-6..6); #Soluciones particulares para valores de _C1 dados
```




```
>T1:=dsolve({eq1,y(0)=6},y(x));# solución particular para y(0)=6
```

$$T1 := y(x) = \frac{3}{8}(x+2)^4$$

```
>plot(rhs(T1),x=-5..1,y=-6..10); gráfica de la solución particular
```




```
>with(DEtools): #Paquete de la librería de Maple necesario para clasificar EDO

>odeadvisor(eq1); #Sentencia que permite clasificar una EDO
```

$$[\_separable]$$

Ejemplo 2: Clasificar, resolver y graficar algunas soluciones particulares (para C=-3,-2, -1,10,0.5,4) y la que verifica y(0)=6 de la ecuación diferencial $x\,y' - 2y = x$

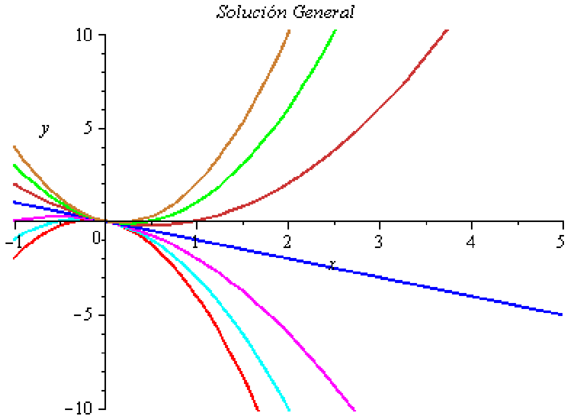
```
>eq2:=x*diff(y(x),x)-2*y(x)=x;# Introduce la ecuación diferencial
```

$$eq2 := x\left(\frac{\partial}{\partial x}y(x)\right) - 2\,y(x) = x$$

```
>T2:=dsolve(eq2,y(x));# Determina la solución general
```

$$T2 := y(x) = -x + x^2\,\_C1$$

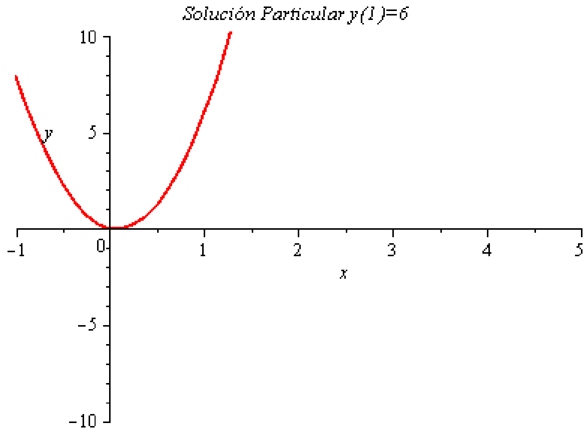
```
>plot([seq(rhs(T2),_C1=-3..3)],x=-1..5,y=-10..10,color=[red, cyan, magenta,
blue,orange,green,gold]); # Soluciones particulares para valores de _C1 dados
```




```
>T2:=dsolve({eq2,y(1)=6},y(x));#Solución particular para y(1)=6

>plot(rhs(T2),x=-1..5,y=-10..10);#Gráfica de la solución particular
```

$$T2 := y(x) = -x + 7\,x^2$$




```
>T4:=dsolve({eq2,y(-2)=-4},y(x)); # Solución particular para y(-2)=-4

>plot(rhs(T4),x=-2..1,y=-2..0.5);# Gráfica de la solución particular
```

$$T4 := y(x) = -x - \frac{3}{2}\,x^2$$

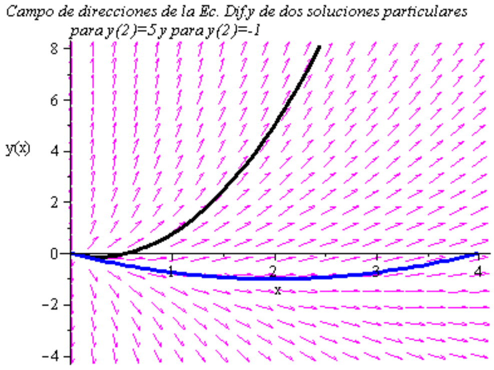
Grafica de soluciones

Dada una ecuación diferencial de primer orden y primer grado $y' = F(x, y(x))$; una solucióny=f(x), función diferenciable y continua en un intervalo de existencia I,en cada punto (x, y(x)). se puede determinar la recta tangente en el punto.
La gráfica de las rectas tangentes, en forma de segmentos pequeños, en cada punto, es el campo de direcciones o pendientes de la EDO. Este campo indica visualmente la apariencia o forma de la familia de soluciones.

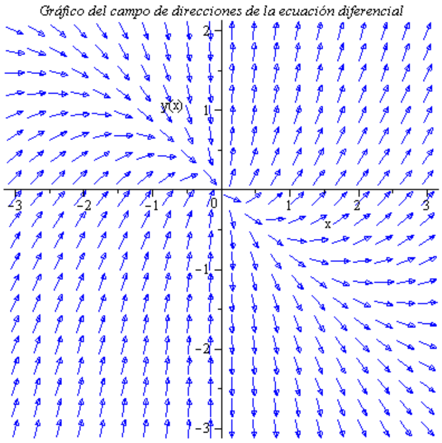
Ejemplo:

```
>DEplot(x*D(y)(x)-2*y(x)=x,y(x),x=0.01..4,  [[y(2)=5],[y(2)=-1]],
```

```
y=-4..8,stepsize=0.05,colour=magenta,linecolor=[gold,blue]);#Gráfico del campo de direcciones de la ecuación diferencial y de dos soluciones particulares para y(2)=5 y para y(2)=-1
```




```
>dfieldplot(x*D(y)(x)-2*y(x)=x, y(x), x=-3..3, y=-3..2, color=x*y);# Gráfico del campo de direcciones de la ecuación diferencial
```




```
>with(DEtools):
>odeadvisor(eq2); clasifica la ecuación diferencial
```

$$[\_linear]$$

Ejemplo 3: Resolver y graficar alguna solución particular de la ecuación diferencial $y''-2y'+50y=0$

```
>eq:=diff(y(x), x$2)+2*diff(y(x),x)+50*y(x)=0; introducción de la ecuación diferencial
```

$$eq := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{y}(x)\right)+2\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{y}(x)\right)+50\,\mathrm{y}(x)=0$$

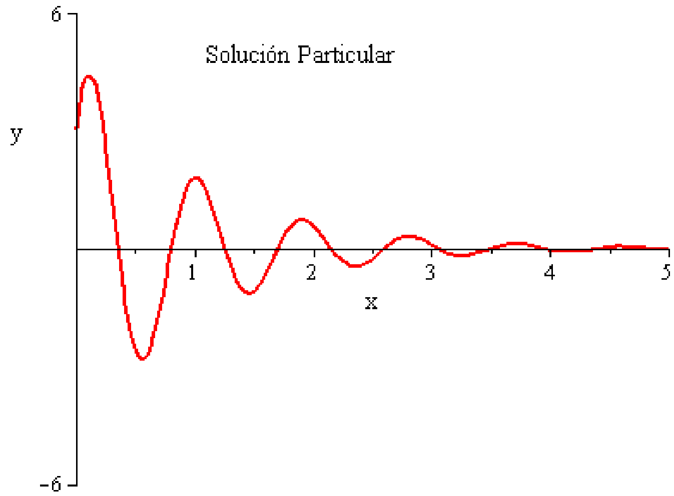
```
>T:=dsolve(eq,y(x)); solución general
```

$$T := \mathrm{y}(x)=\_C1\,\mathbf{e}^{(-x)}\sin(7\,x)+\_C2\,\mathbf{e}^{(-x)}\cos(7\,x)$$

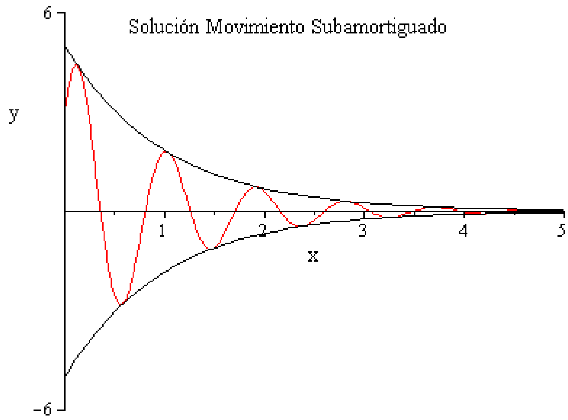
```
>subs(_C1=4, _C2=3, T); solución particular
```

$$\mathrm{y}(x)=4\,\mathbf{e}^{(-x)}\sin(7\,x)+3\,\mathbf{e}^{(-x)}\cos(7\,x)$$

```
>plot(4*exp(-x)*sin(7*x)+3*exp(-x)*cos(7*x),x=0..5,y=-6..6,ytickmarks=2);
#GráficaSolución
```



En problemas de mecánica esta solución correspondería a un problema subamortiguado, puesto que la solución es amortiguada por el factor e^{-x} lo cual hace que la solución tienda a cero cuando $x \to \infty$.



Ejemplo 4: Resolver y graficar la solución particular del problema de valores iniciales $\begin{cases} x' = -x \\ y' = x - y \end{cases}$

con $x(0) = 1, y(0) = 1$

```
>sys:={D(x)(t)=x(t)-y(t), D(y)(t)=2*x(t)+4*y(t)}; introduce el sistema de ecuaciones diferenciales
```

$$sys := \{ D(x)(t) = x(t) - y(t), D(y)(t) = 2\,x(t) + 4\,y(t) \}$$

```
>dsolve(sys, {x(t),y(t)}); resuelve el sistema (solución general)
```

$$\{ y(t) = \_C1\, \mathbf{e}^{(3\,t)} + \_C2\, \mathbf{e}^{(2\,t)}, x(t) = -\frac{1}{2}\_C1\, \mathbf{e}^{(3\,t)} - \_C2\, \mathbf{e}^{(2\,t)} \}$$

```
>ini:={x(0)=-1,y(0)=0}; introduce condiciones iniciales
```

$$ini := \{ x(0) = -1, y(0) = 0 \}$$

```
>Sol:=dsolve(sysunionini, {x(t),y(t)}); calcula la solución particular
```

$$Sol := \{ y(t) = 2\, \mathbf{e}^{(2\,t)} - 2\, \mathbf{e}^{(3\,t)}, x(t) = -2\, \mathbf{e}^{(2\,t)} + \mathbf{e}^{(3\,t)} \}$$

```
>plot([rhs(Sol[1]),rhs(Sol[2])],t=0..2,color=[magenta,blue],view=[0..2,-5..5]);gráfica de ambas soluciones del sistema
```