ਅਧਿਆਇ 2

ਸੰਬੰਧ ਅਤੇ ਫਲਨ

(Relations and Functions)

❖*Mathematics is the indispensable instrument of all physical research.* – *BERTHELOT* ❖

2.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਗਣਿਤ ਦਾ ਬਹੁਤ ਸਾਰਾ ਭਾਗ ਪਰਿਵਰਤਨਸ਼ੀਲ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਪਹਿਚਾਣਯੋਗ ਕੜੀਆਂ ਦੇ ਨਮੂਨੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਹੈ। ਸਾਡੀ ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਦੀ ਜ਼ਿੰਦਗੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸੰਬੰਧਾਂ ਨੂੰ ਚਿਤਰਣ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਨਮੂਨਿਆਂ ਬਾਰੇ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਭਰਾ ਅਤੇ ਭੈਣ, ਪਿਤਾ ਅਤੇ ਪੁੱਤਰ, ਅਧਿਆਪਕ ਅਤੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਆਦਿ। ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਵੀ ਸਾਨੂੰ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਸੰਬੰਧ ਮਿਲਦੇ ਹਨ, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸੰਖਿਆ m, ਸੰਖਿਆ n ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਹੈ, ਰੇਖਾ l ਰੇਖਾ m ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ, ਸਮੂਹ A ਸਮੂਹ B ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਸਾਰਿਆਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜੋ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਣਾਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ, ਬਾਰੇ ਸਿਖਾਂਗੇ ਅਤੇ ਫਿਰ ਇਹਨਾਂ ਜੋੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਆਉਣ ਵਾਲੀਆਂ ਦੋਵਾਂ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਸੰਬੰਧਾਂ ਬਾਰੇ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕਰਾਂਗੇ। ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਸੰਬੰਧਾਂ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਾਂਗੇ ਜੋ ਫਲਨ ਬਣਨ ਦੇ ਯੋਗ ਹਨ। ਫਲਨ ਦੀ ਧਾਰਨਾ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਇੱਕ ਵਸਤੂ ਤੋਂ ਦੂਸਰੀ ਵਸਤੂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਗਣਿਤ ਅਨੁਸਾਰ ਸੰਖੇਪ ਸੰਗਤ ਪੈਦਾ ਕਰਦਾ ਹੈ।

G. W. Leibnitz (1646–1716)

2.2 ਸਮੂਹਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨ (Cartesian Products of Sets)

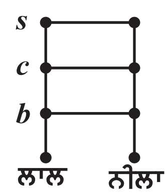
ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ A, ਦੋ ਰੰਗਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਅਤੇ B ਤਿੰਨ ਵਸਤੂਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ।

ਅਰਥਾਤ A = {ਲਾਲ, ਨੀਲਾ} ਅਤੇ B = {b, c, s},

ਇੱਥੇ b, c ਅਤੇ s ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਕਿਸੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਬੈਗ, ਕੋਟ ਅਤੇ ਕਮੀਜ਼ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਦੋਹਾਂ ਸਮੂਹਾਂ ਤੋਂ ਕਿੰਨੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਰੰਗੀਨ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਬਣਾਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ? ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਚਲਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ 6 ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਜੋੜੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ :

(ਲਾਲ, b), (ਲਾਲ, c), (ਲਾਲ, s), (ਨੀਲਾ, b), (ਨੀਲਾ, c), (ਨੀਲਾ, s)

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਨੂੰ 6 ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਜੋੜੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ (ਚਿੱਤਰ 2.1)



ਚਿੱਤਰ 2.1

ਆਓ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਤੋਂ ਯਾਦ ਕਰੀਏ ਕਿ ਇੱਕ ਕ੍ਰਮਬੱਧ (ordered) ਜੋੜਾ, ਤੱਤਾਂ ਦਾ ਉਹ ਜੋੜਾ ਹੈ ਜਿਹੜੇ ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ P ਅਤੇ Q ਵਿਚੋਂ ਜੋੜੇ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ, ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਛੋਟੀ ਬਰੈਕਟ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਖਾਸ ਤਰਤੀਬ ਵਿੱਚ ਇਕੱਠਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਭਾਵ (p,q), $p \in$ P ਅਤੇ $q \in$ Q। ਇਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 1 P ਅਤੇ Q ਦੋ ਸਮੂਹ ਜੋ ਖ਼ਾਲੀ ਨਹੀਂ ਦਿੱਤੇ ਹਨ, P ਅਤੇ Q ਦੀ ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਗੁਣਾ P × Q ਉਹਨਾਂ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਜੋੜਿਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲਾ ਤੱਤ P ਵਿੱਚੋਂ ਅਤੇ ਦੂਸਰਾ ਤੱਤ Q ਵਿੱਚੋਂ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਭਾਵ $P \times Q = \{ (p,q) : p \in P, q \in Q \}$

ਜੇਕਰ P ਅਤੇ Q ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਖਾਲੀ ਸਮੂਹ ਹੋਵੇਗਾ ਤਾਂ P × Q ਵੀ ਇੱਕ ਖਾਲੀ ਸਮੂਹ ਹੋਵੇਗਾ ਭਾਵ, $P \times Q = \phi$

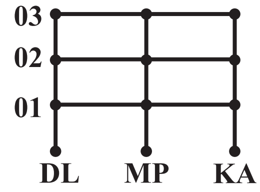
ਉਪਰੋਕਤ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟਾਂਤ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

A × B = {ਲਾਲ, b), (ਲਾਲ, c), (ਲਾਲ, s), (ਨੀਲਾ, b), (ਨੀਲਾ, c), (ਨੀਲਾ, s)}.

ਆਉ, ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸਮੂਹ ਲਉ :

A = {DL, MP, KA}, ਜਿੱਥੇ DL, MP, KA ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਦਿੱਲੀ, ਮੱਧ ਪ੍ਰਦੇਸ਼ ਅਤੇ ਕਰਨਾਟਕ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ B = {01,02, 03} ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਦਿੱਲੀ, ਮੱਧ ਪ੍ਰਦੇਸ਼ ਅਤੇ ਕਰਨਾਟਕ ਦੁਆਰਾ ਗੱਡੀਆਂ ਦੇ ਲਈ ਜਾਰੀ ਲਾਇਸੈਂਸ ਪਲੇਟ ਦੀ ਸੰਕੇਤਕ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਤਿੰਨ ਰਾਜ ਦਿੱਲੀ, ਮੱਧ ਪ੍ਰਦੇਸ਼ ਅਤੇ ਕਰਨਾਟਕ ਗੱਡੀਆਂ ਦੇ ਲਾਇਸੈਂਸ ਪਲੇਟ ਦੇ ਲਈ ਸੰਕੇਤ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਣਾ ਰਹੇ ਹੋਣ ਕਿ ਸੰਕੇਤ ਸਮੂਹ A ਦੇ ਤੱਤ ਨਾਲ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਸਮੂਹਾਂ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਜੋੜੇ ਕੀ ਹਨ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਜੋੜਿਆਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੰਖਿਆ ਕਿੰਨ੍ਹੀ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 2.2) ?

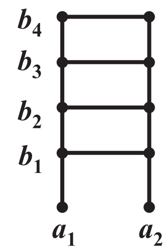


ਚਿੱਤਰ 2.2

ਉਪਲਬਧ ਜੋੜੇ (DL,01), (DL,02), (DL,03), (MP,01), (MP,02), (MP,03), (KA,01), (KA,02), (KA,03) ਹਨ। ਅਤੇ ਸਮੂਹ A ਅਤੇ ਸਮੂਹ B ਦੀ ਗੁਣਾ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ।

$A \times B$ = {(DL,01), (DL,02), (DL,03), (MP,01), (MP,02), (MP,03), (KA,01), (KA,02), (KA,03)}

ਇੱਥੇ ਇਹ ਅਸਾਨੀ ਨਾਲ ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਤੱਤ ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਗੁਣਨ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ 9 ਜੋੜੇ ਹਨ। ਕਿਉਂਕਿ ਸਮੂਹ A ਅਤੇ B ਦੋਹਾਂ ਵਿੱਚ 3 ਤੱਤ ਹਨ। ਇਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ 9 ਸੰਭਵ ਸੰਕੇਤ ਮਿਲਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਵੀ ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਤੱਤਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਬਣਾਉਣ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਵੀ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਸੰਕੇਤ (DL, 01) ਸੰਕੇਤ (01, DL) ਦੇ ਬਰਾਬਰ (ਜਾਂ ਵਰਗਾ) ਨਹੀਂ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 2.3

ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਸਪਸ਼ਟੀਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਮੂਹ A= $\{a_1, a_2\}$ ਅਤੇ

B = $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ (ਚਿੱਤਰ 2.3) ਇੱਥੇ

$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_1, b_4), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3), (a_2, b_4)\}$.

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ 8 ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਜੋੜੇ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ, ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੋਣ। ਇੱਥੇ ਇਹ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਬਿੰਦੂ (a_1, b_2) ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਬਿੰਦੂ (b_2, a_1) ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਤੋਂ ਅਲੱਗ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ

(i) ਦੋ ਕ੍ਰਮਿਤ ਜੋੜੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਸਿਰਫ਼ ਜੇਕਰ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਪਹਿਲੇ ਤੱਤ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਤੱਤ ਵੀ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ।

(ii) ਜੇਕਰ A ਦੇ ਵਿੱਚ p ਤੱਤ ਅਤੇ B ਦੇ ਵਿੱਚ q ਤੱਤ ਹੋਣ ਤਾਂ $A \times B$ ਵਿੱਚ pq ਤੱਤ ਹੋਣਗੇ। ਭਾਵ ਜੇਕਰ $n(A) = p$ ਅਤੇ $n(B) = q$, ਤਾਂ $n(A \times B) = pq$।

(iii) ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਜੋ ਨਾ ਖ਼ਾਲੀ ਸਮੂਹ ਹਨ ਅਤੇ A ਜਾਂ B ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਅਸੀਮਿਤ ਸਮੂਹ ਹੈ ਤਾਂ $A \times B$ ਵੀ ਅਸੀਮਿਤ ਹੋਵੇਗਾ।

(iv) $A \times A \times A = \{(a, b, c) : a, b, c \in A\}$, ਇੱਥੇ (a, b, c) ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਤਿੱਗੜੀ (triplet) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਜੇਕਰ $(x + 1, y – 2) = (3, 1)$, ਤਾਂ x ਅਤੇ y ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਜੋੜੇ ਬਰਾਬਰ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਤੱਤ ਵੀ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣਗੇ।

ਇਸ ਲਈ $x + 1 = 3$ ਅਤੇ $y – 2 = 1$

ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ $x = 2$ ਅਤੇ $y = 3$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਜੇਕਰ $P = \{a, b, c\}$ ਅਤੇ $Q = \{r\}$, ਹੋਵੇ ਤਾਂ $P \times Q$ ਅਤੇ $Q \times P$ ਸਮੂਹ ਬਣਾਉ। ਕੀ ਇਹ ਦੋਵੇਂ ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਗੁਣਾ ਬਰਾਬਰ ਹਨ ?

ਹੱਲ : ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਗੁਣਾ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੋਂ,

$P \times Q = \{(a, r), (b, r), (c, r)\}$ ਅਤੇ $Q \times P = \{(r, a), (r, b), (r, c)\}$

ਹੁਣ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਜੋੜਿਆਂ ਦੀ ਬਰਾਬਰੀ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੋਂ ਜੋੜਾ (a, r) ਜੋੜਾ (r, a) ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $P \times Q \neq Q \times P$

ਭਾਵੇਂ ਦੋਵੇਂ ਸਮੂਹਾਂ ਵਿੱਚ ਤੱਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਮੰਨ ਲਉ $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4\}$ ਅਤੇ $C = \{4,5,6\}$ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $A \times (B \cap C)$ (ii) $(A \times B) \cap (A \times C)$

(iii) $A \times (B \cup C)$ (iv) $(A \times B) \cup (A \times C)$

ਹੱਲ : (i) ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ ਦੀ ਕਾਟ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੋਂ $(B \cap C) = \{4\}$

ਇਸ ਲਈ $A \times (B \cap C) = \{(1,4), (2,4), (3,4)\}$

(ii) ਹੁਣ $(A \times B) = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4)\}$

ਅਤੇ $(A \times C) = \{(1,4), (1,5), (1,6), (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6)\}$

ਇਸ ਲਈ $(A \times B) \cap (A \times C) = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$

(iii) ਕਿਉਂਕਿ $(B \cup C) = \{3, 4, 5, 6\}$, ਇਸ ਲਈ

$A \times (B \cup C) = \{(1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\}$

(iv) ਭਾਗ (ii) ਵਿੱਚੋਂ ਸਮੂਹ $A \times B$ ਅਤੇ $A \times C$ ਨੂੰ ਵਰਤਦੇ ਹੋਏ, ਸਾਨੂੰ

$(A \times B) \cup (A \times C) = \{(1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\}$

ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਜੇਕਰ $P = \{1, 2\}$ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ $P \times P \times P$ ਸਮੂਹ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $P \times P \times P = \{(1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), (1,2,2), (2,1,1), (2,1,2), (2,2,1), (2,2,2)\}$

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਜੇਕਰ $\mathbf{R}$ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਗੁਣਾ ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ਅਤੇ $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉ।

ਹੱਲ : ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਗੁਣਾ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, ਸਮੂਹ $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbf{R}\}$ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸਦੀ ਵਰਤੋਂ ਦੋ-ਵਿਮਾਈ ਆਕਾਸ਼ (two dimensional space) ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ। $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ਸਮੂਹ $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbf{R}\}$ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸਦੀ ਵਰਤੋਂ ਤ੍ਰੈ-ਵਿਮਾਈ ਆਕਾਸ਼ (three dimensional space) ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਜੇਕਰ $A \times B = \{(p, q), (p, r), (m, q), (m, r)\}$, ਹੋਵੇ ਤਾਂ A ਅਤੇ B ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : A = ਪਹਿਲੇ ਤੱਤਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ = $\{p, m\}$

B = ਦੂਸਰੇ ਤੱਤਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ = $\{q, r\}$

ਅਭਿਆਸ 2.1

1. ਜੇਕਰ $\left(\frac{x}{3}+1, y-\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$, ਹੈ ਤਾਂ x ਅਤੇ y ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. ਜੇਕਰ ਸਮੂਹ A ਵਿੱਚ 3 ਤੱਤ ਅਤੇ ਸਮੂਹ $B = \{3, 4, 5\}$ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ $(A \times B)$ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਤੱਤ ਹੋਣਗੇ।
3. ਜੇਕਰ $G = \{7, 8\}$ ਅਤੇ $H = \{5, 4, 2\}$ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ $G \times H$ ਅਤੇ $H \times G$ ਪਤਾ ਕਰੋ।
4. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਦੱਸੋ ਕਿ ਕਿਹੜੇ ਸਹੀ ਹਨ ਅਤੇ ਕਿਹੜੇ ਗ਼ਲਤ ਜੇਕਰ ਕਥਨ ਗ਼ਲਤ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਦੀ ਜਗ੍ਹਾ ਤੇ ਸਹੀ ਕਥਨ ਲਿਖੋ :
   (i) ਜੇਕਰ $P = \{m, n\}$ ਅਤੇ $Q = \{n, m\}$, ਤਾਂ $P \times Q = \{(m, n), (n, m)\}$
   (ii) ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਦੋ ਸਮੂਹ ਹਨ ਅਤੇ ਖ਼ਾਲੀ ਨਹੀਂ ਹਨ ਤਾਂ $A \times B$ ਵੀ ਇੱਕ ਨਾ ਖ਼ਾਲੀ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਜੋੜਿਆਂ (x, y) ਜਿਸ ਵਿੱਚ $x \in A$ ਅਤੇ $y \in B$ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੋਵੇਗਾ।
   (iii) ਜੇਕਰ $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$, ਤਾਂ $A \times (B \cap \phi) = \phi$
5. ਜੇਕਰ $A = \{-1, 1\}$ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ $A \times A \times A$ ਪਤਾ ਕਰੋ।
6. ਜੇਕਰ $A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y)\}$ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ A ਅਤੇ B ਪਤਾ ਕਰੋ।

7. ਮੰਨ ਲਓ $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{5, 6\}$ ਅਤੇ $D = \{5, 6, 7, 8\}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

(i) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$. (ii) $A \times C$, $B \times D$ ਦਾ ਉਪਸਮੂਹ ਹੈ।

8. ਮੰਨ ਲਓ $A = \{1, 2\}$ ਅਤੇ $B = \{3, 4\}$ ਹੈ, ਤਾਂ $A \times B$ ਪਤਾ ਕਰੋ। $A \times B$ ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੋਣਗੇ ? ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਸੂਚੀ ਤਿਆਰ ਕਰੋ।

9. ਮੰਨ ਲਓ A ਅਤੇ B ਦੋ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਹਨ ਕਿ $n(A) = 3$ ਅਤੇ $n(B) = 2$ । ਜੇਕਰ $(x, 1), (y, 2), (z, 1)$ ਸਾਰੇ $A \times B$, ਵਿੱਚ ਹਨ ਤਾਂ A ਅਤੇ B ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿੱਥੇ x, y ਅਤੇ z ਤਿੰਨੇ ਹੀ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤੱਤ ਹਨ।

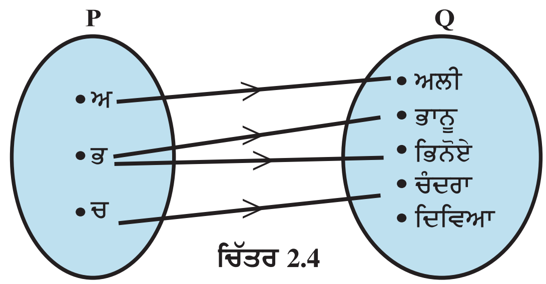
10. $A \times A$ ਦੀ ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਗੁਣਾ ਵਿੱਚ 9 ਤੱਤ ਹਨ, ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਦੋ $(-1, 0)$ ਅਤੇ $(0,1)$ ਪਤਾ ਹਨ। ਸਮੂਹ A ਅਤੇ $A \times A$ ਦੇ ਬਾਕੀ ਤੱਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

2.3 ਸੰਬੰਧ (Relations)

ਦੋ ਸਮੂਹ P = {ਅ, ਭ, ਚ} ਅਤੇ Q = {ਅਲੀ, ਭਾਨੂੰ, ਭਿਨੋਏ, ਚੰਦਰਾ, ਦਿਵਿਆ} ਲਉ। P ਅਤੇ Q ਦੀ ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਗੁਣਾ ਵਿੱਚ 15 ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਜੋੜੇ ਹੋਣਗੇ ਜਿੰਨਾਂ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸੂਚੀਬੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$P \times Q$ = {(ਅ, ਅਲੀ), (ਭ, ਭਾਨੂੰ), (ਭ, ਭਿਨੋਏ), ..., (ਚ, ਚੰਦਰਾ)}।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਹਰ ਇੱਕ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਜੋੜੇ (x, y) ਲਈ ਪਹਿਲੇ ਤੱਤ x ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਤੱਤ y ਦੇ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ R ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਕੇ $P \times Q$ ਦਾ ਇੱਕ ਉਪ ਸਮੂਹ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :



ਚਿੱਤਰ 2.4

R = {(x,y): x, ਨਾਮ y ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਅੱਖਰ ਹੈ, $x \in P$ ਅਤੇ $y \in Q$}।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ R= {(ਅ, ਅਲੀ), (ਭ, ਭਾਨੂੰ), (ਭ, ਭਿਨੋਏ), (ਚ, ਚੰਦਰਾ)}

ਸੰਬੰਧ R ਦਾ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਚਿਤਰਣ (ਜਿਸ ਨੂੰ ਤੀਰ ਚਿੱਤਰ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ) ਚਿੱਤਰ 2.4 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 2 ਕਿਸੇ ਨਾ-ਖਾਲੀ ਸਮੂਹ A ਦਾ, ਨਾ-ਖ਼ਾਲੀ ਸਮੂਹ B ਨਾਲ ਸੰਬੰਧ ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਗੁਣਾ $A \times B$ ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਉਪ ਸਮੂਹ $A \times B$ ਦੇ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਤੱਤਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਦੂਸਰਾ ਤੱਤ, ਪਹਿਲੇ ਤੱਤ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਬਿੰਬ (ਪਰਛਾਵਾਂ) ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 3 ਸਮੂਹ A ਤੋਂ ਸਮੂਹ B ਦੇ ਸੰਬੰਧ R ਦੇ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਸਾਰਿਆਂ ਪਹਿਲੇ ਤੱਤਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਸੰਬੰਧ R ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ (domain) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 4 ਸਮੂਹ A ਤੋਂ ਸਮੂਹ B ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਦੇ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਸਾਰਿਆਂ ਦੂਸਰਿਆਂ ਤੱਤਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਸੰਬੰਧ R ਦੀ ਵਿਸਥਾਰ (range) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਸਾਰੇ ਸਮੂਹ B ਨੂੰ ਸੰਬੰਧ R ਦੀ ਸਹਿਪ੍ਰਾਂਤ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਵਿਸਥਾਰ $\subseteq$ ਸਹਿਪ੍ਰਾਂਤ (codomain)।

ਟਿੱਪਣੀ

(i) ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ ਨੂੰ ਬੀਜ ਗਣਿਤਿਕ ਤੌਰ 'ਤੇ ਜਾਂ ਤਾਂ ਸਾਰਨੀ ਬੱਧ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਅਤੇ ਜਾਂ ਨਿਯਮਬੱਧ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

(ii) ਇੱਕ ਤੀਰ ਚਿੱਤਰ ਕਿਸੇ (arrow diagram) ਸੰਬੰਧ ਦਾ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਚਿਤਰਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

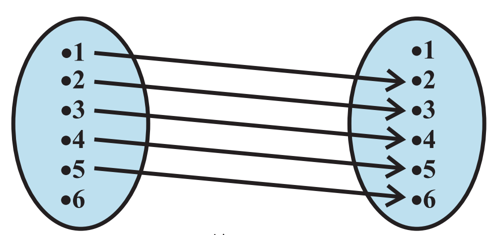
ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਮੰਨ ਲਓ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ਹੈ, ਤਾਂ A ਤੋਂ A ਤੱਕ ਦਾ ਇਕ ਸੰਬੰਧ $R = \{(x, y) : y = x + 1\}$ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰੋ।

(i) ਇਸ ਸੰਬੰਧ ਨੂੰ ਇੱਕ ਤੀਰ ਚਿੱਤਰ ਨਾਲ ਦਿਖਾਉ।

(ii) ਸੰਬੰਧ R ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ, ਸਹਿਪ੍ਰਾਂਤ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਲਿਖੋ।

ਹੱਲ : (i) ਸੰਬੰਧ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੋਂ

$R = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6)\}$



ਚਿੱਤਰ 2.5

ਇਸਦਾ ਤੀਰ ਚਿਤਰਣ, ਚਿੱਤਰ 2.5 ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ।

(ii) ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪ੍ਰਾਂਤ $=\{1, 2, 3, 4, 5,\}$

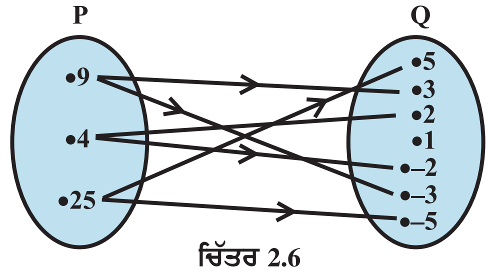
ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਿਸਥਾਰ $= \{2, 3, 4, 5, 6\}$ ਅਤੇ ਸਹਿਪ੍ਰਾਂਤ $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਚਿੱਤਰ 2.6, ਸਮੂਹ P ਅਤੇ Q ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਸੰਬੰਧ ਨੂੰ (i) ਸਮੂਹ ਨਿਰਮਾਣ ਰੂਪ (ii) ਰੋਸਟਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ। ਇਸਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਕੀ ਹੈ ?

ਹੱਲ : ਇਹ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਸੰਬੰਧ R "x, y ਦਾ ਵਰਗ ਹੈ।"

(i) ਸਮੂਹ ਨਿਰਮਾਣ ਰੂਪ ਵਿੱਚ R = {(x, y): x, y ਦਾ ਵਰਗ ਹੈ, $x \in$ P, $y \in$ **Q**}

(ii) ਰੋਸਟਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ R = {(9, 3), (9, –3), (4, 2), (4, –2), (25, 5), (25, –5)}



ਚਿੱਤਰ 2.6

ਸੰਬੰਧ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ ; {4, 9, 25} ਹੈ।

ਸੰਬੰਧ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ; {– 2, 2, –3, 3, –5, 5} ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਤੱਤ 1 ਦਾ ਸਮੂਹ P ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤੱਤ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਸਮੂਹ Q, ਸੰਬੰਧ ਦੀ ਸਹਿਪ੍ਰਾਂਤ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ ਕਿਸੇ ਸਮੂਹ A ਤੋਂ ਸਮੂਹ B ਦੇ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੰਖਿਆ A × B ਦੇ ਸੰਭਵ ਉਪ ਸਮੂਹਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜੇਕਰ n(A) = p ਅਤੇ n(B) = q ਤਾਂ n (A × B) = pq ਅਤੇ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੰਖਿਆ 2^{pq} ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 9 : ਮੰਨ ਲਓ A = {1, 2} ਅਤੇ B = {3, 4} A ਤੋਂ B ਤੱਕ ਦੇ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ A × B = {(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)}

ਕਿਉਂਕਿ n (A×B) = 4, ਇਸ ਲਈ A × B ਦੇ ਉਪ ਸਮੂਹ 2^4 ਹੋਣਗੇ। ਇਸ ਲਈ A ਤੋਂ B ਤੱਕ ਦੇ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 2^4 ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ A ਤੋਂ A ਤੱਕ ਦੇ ਸੰਬੰਧ R ਨੂੰ A ਦਾ ਸੰਬੰਧ ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਅਭਿਆਸ 2.2

1. ਮੰਨ ਲਓ A = {1, 2, 3,...,14} ਹੈ। A ਤੋਂ A ਤੱਕ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ R = {(x, y) : $3x - y = 0$, ਜਿੱਥੇ x, $y \in$ A}ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰੋ। ਇਸਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ, ਸਹਿਪ੍ਰਾਂਤ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਲਿਖੋ।

2. ਵਾਸਵਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ **N** ਤੇ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ R = {(x, y) : $y = x + 5$, x ਇੱਕ 4 ਤੋਂ ਘੱਟ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ x, $y \in$ **N**} ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰੋ। ਇਸਨੂੰ ਸਾਰਨੀਬੱਧ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ। ਇਸਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਵੀ ਲਿਖੋ।

3. A = {1, 2, 3, 5} ਅਤੇ B = {4, 6, 9}ਹੈ।A ਤੋਂ B ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ R ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰੋ ਕਿ R = {(x, y): x ਅਤੇ y ਦਾ ਅੰਤਰ ਟਾਂਕ ਹੈ, $x \in$ A ਅਤੇ $y \in$ B}, R ਨੂੰ ਸਾਰਨੀਬੱਧ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।

4. ਚਿੱਤਰ 2.7, ਸਮੂਹਾਂ P ਅਤੇ Q ਵਿਚਕਾਰ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਸੰਬੰਧ ਨੂੰ (i) ਸਮੂਹ ਨਿਰਮਾਣ ਰੂਪ (ii) ਰੋਸਟਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ। ਇਸਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਵੀ ਲਿਖੋ।

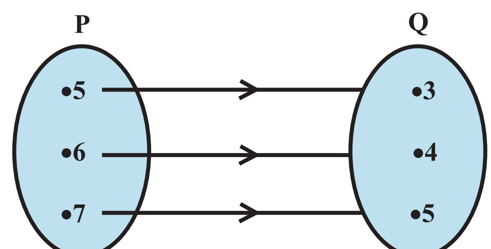
5. ਮੰਨ ਲਉ A = {1, 2, 3, 4, 6}।ਮੰਨ ਲਉ R, A ਤੇ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ ਹੈ ਜੋ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ।

R ={(a, b): a , $b \in$ A, b, a ਨਾਲ ਪੂਰਾ–ਪੂਰਾ ਭਾਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ}

(i) R ਨੂੰ ਰੋਸਟਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।

(ii) R ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਲਿਖੋ।

(iii) R ਦੀ ਵਿਸਥਾਰ ਲਿਖੋ।



ਚਿੱਤਰ 2.7

6. ਸੰਬੰਧ R ਜੋ ਕਿ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ R = {(x, $x + 5$) : $x \in$ {0, 1, 2, 3, 4, 5}} ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

7. ਸੰਬੰਧ R = {(x, x^3) : x ਇੱਕ 10 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ} ਨੂੰ ਰੋਸਟਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।

8. ਮੰਨ ਲਓ A = {x, y, z} ਅਤੇ B = {1, 2} ਹੈ। A ਤੋਂ B ਤੱਕ ਦੇ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।

9. ਮੰਨ ਲਓ R, **Z** ਤੇ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ, R = {(a,b): a, $b \in$ **Z**, $a - b$ ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ}, R ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

2.4 ਫਲਨ (Functions)

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸੰਬੰਧਾਂ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਫਲਨ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਾਂਗੇ। ਇਹ ਗਣਿਤ ਦੀ ਇੱਕ ਬਹੁਤ ਹੀ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਧਾਰਨਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਫਲਨ ਨੂੰ ਇੱਕ ਨਿਯਮ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਤੱਤ ਤੋਂ ਨਵੇਂ ਤੱਤ ਉਤਪੰਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਫਲਨ ਨੂੰ ਸੂਚਿਤ ਕਰਨ ਲਈ ਸ਼ਬਦ ਪ੍ਰਤੀ ਚਿੱਤਰ (map) ਜਾਂ ਚਿਤਰਣ (mapping) ਆਦਿ ਵੀ ਵਰਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 5 ਸਮੂਹ A ਤੋਂ ਸਮੂਹ B ਤੱਕ ਦੇ ਸੰਬੰਧ f ਨੂੰ ਫਲਨ ਕਹਾਂਗੇ, ਜੇਕਰ ਸਮੂਹ A ਦੇ ਹਰ ਇੱਕ ਤੱਤ ਦਾ ਸਮੂਹ B ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਹੀ ਪ੍ਰਤੀਬਿੰਬ ਹੋਵੇ।

ਦੂਸਰੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਫਲਨ ਇੱਕ ਨਾ ਖਾਲੀ ਸਮੂਹ A ਤੋਂ ਦੂਸਰੇ ਨਾ ਖ਼ਾਲੀ ਸਮੂਹ B ਤੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਸੰਬੰਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ f ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ A ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ f ਦੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਜੋੜਿਆਂ ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਤੱਤ ਇੱਕੋ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ।

ਜੇਕਰ f, A ਤੋਂ B ਤੱਕ ਦਾ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ $(a, b) \in f$ ਤਾਂ $f(a) = b$, ਜਿੱਥੇ b ਨੂੰ f ਰਾਹੀਂ a ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਬਿੰਬ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ a ਨੂੰ f ਰਾਹੀਂ b ਦਾ ਪੂਰਵ ਪ੍ਰਤੀਬਿੰਬ (Pre image) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

A ਤੋਂ B ਤੱਕ ਦੇ ਫਲਨ f ਨੂੰ $f : A \to B$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਪਿਛਲੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਨੂੰ ਦੇਖਦੇ ਹੋਏ, ਅਸੀਂ ਅਸਾਨੀ ਨਾਲ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਉਦਾਹਰਣ 7 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਸੰਬੰਧ ਫਲਨ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਤੱਤ 6 ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਪ੍ਰਤੀਬਿੰਬ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ ਉਦਾਹਰਣ 8 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਸੰਬੰਧ, ਫਲਨ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਪ੍ਰਾਂਤ ਵਿਚਲੇ ਤੱਤਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਪ੍ਰਤੀਬਿੰਬ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ, ਉਦਾਹਰਣ 9 ਵਿਚਲਾ ਸੰਬੰਧ, ਫਲਨ ਨਹੀਂ ਹੈ (ਕਿਉਂ ?)। ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕੁੱਝ ਹੋਰ ਸੰਬੰਧਾਂ ਨੂੰ ਦੇਖਾਂਗੇ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੁਝ ਫਲਨ ਹਨ ਅਤੇ ਕੁਝ ਨਹੀਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 10 : ਮੰਨ ਲਉ **N** ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ। **N** ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ R ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ, $R = \{(x, y) : y = 2x, x, y \in \mathbf{N}\}$

R ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ, ਸਹਿਪ੍ਰਾਂਤ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਕੀ ਹੈ ? ਕੀ ਇਹ ਸੰਬੰਧ, ਫਲਨ ਹੈ ?

ਹੱਲ : R ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ **N** ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ, ਇਸਦੀ ਸਹਿ-ਪ੍ਰਾਂਤ ਵੀ **N** ਹੈ। ਵਿਸਥਾਰ (range) ਜਿਸਤ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ ਹਰ ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ n ਦਾ ਇੱਕ ਅਤੇ ਸਿਰਫ਼ ਇੱਕ ਹੀ ਪ੍ਰਤੀਬਿੰਬ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਸੰਬੰਧ, ਫਲਨ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 11 : ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹਰ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਅਤੇ ਹਰ ਇੱਕ ਵਿੱਚ ਕਾਰਣਾਂ ਸਹਿਤ ਦੱਸੋ ਕਿ ਇਹ ਫਲਨ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ ?

(i) $R = \{(2,1),(3,1), (4,2)\}$, (ii) $R = \{(2,2),(2,4),(3,3), (4,4)\}$

(iii) $R = \{(1,2),(2,3),(3,4), (4,5), (5,6), (6,7)\}$

ਹੱਲ : (i) ਕਿਉਂਕਿ R ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਦੇ ਹਰ ਇੱਕ ਤੱਤ 2, 3, 4 ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਬਿੰਬ ਸਿਰਫ਼ ਇੱਕ ਹੀ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਸੰਬੰਧ R ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ।

(ii) ਕਿਉਂਕਿ ਇੱਕ ਹੀ ਪਹਿਲੇ ਤੱਤ ਦੇ, ਦੋ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਪ੍ਰਤੀਬਿੰਬ 2 ਅਤੇ 4 ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਸੰਬੰਧ ਫਲਨ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(iii) ਕਿਉਂਕਿ ਹਰ ਇੱਕ ਤੱਤ ਦਾ ਸਿਰਫ਼ ਅਤੇ ਸਿਰਫ਼ ਇੱਕ ਹੀ ਪ੍ਰਤੀਬਿੰਬ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਸੰਬੰਧ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 6 ਇੱਕ ਫਲਨ ਜਿਸਦੀ ਵਿਸਥਾਰ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ **R** ਜਾਂ ਉਸਦਾ ਕੋਈ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਸ ਨੂੰ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲ ਫਲਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਇਸਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ **R** ਜਾਂ **R** ਦਾ ਕੋਈ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਸ ਨੂੰ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 12 : ਮੰਨ ਲਉ **N** ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ।
$f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $f(x) = 2x + 1$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲ ਫਲਨ (real valued function) ਹੈ। ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰੋ।

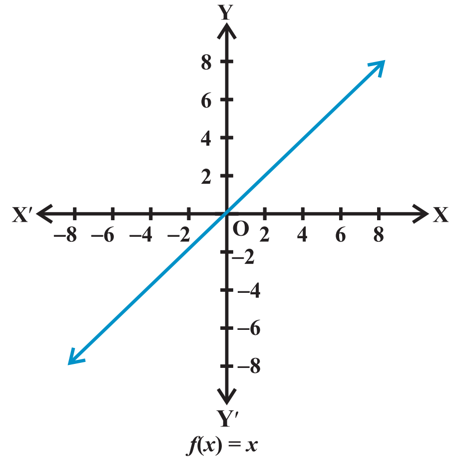
x	1	2	3	4	5	6	7
y	$f(1) = ...$	$f(2) = ...$	$f(3) = ...$	$f(4) = ...$	$f(5) = ...$	$f(6) = ...$	$f(7) = ...$

ਹੱਲ : ਪੂਰੀ ਸਾਰਣੀ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੋਵੇਗੀ :

x	1	2	3	4	5	6	7
y	$f(1) = 3$	$f(2) = 5$	$f(3) = 7$	$f(4) = 9$	$f(5) = 11$	$f(6) = 13$	$f(7) = 15$

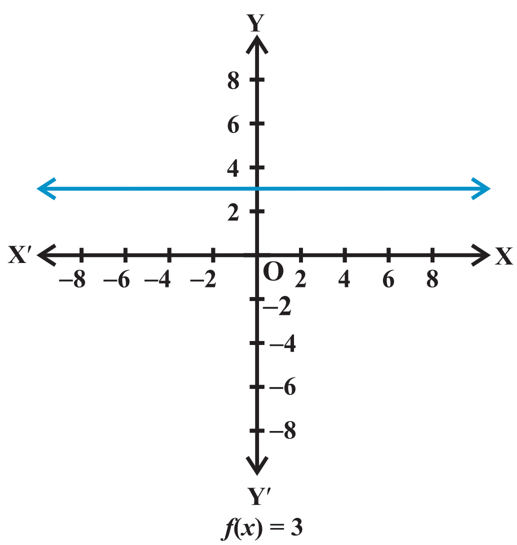
2.4.1 ਕੁਝ ਫਲਨ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਆਲੇਖ (Some functions and their graphs)

(i) **ਤਤਸਮਕ ਫਲਨ (Identity Function) :** ਮੰਨ ਲਉ **R** ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ। $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $y = f(x) = x$ ਹਰ ਇੱਕ $x \in \mathbf{R}$ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲ ਫਲਨ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲਨ ਨੂੰ ਤਤਸਮਕ ਫਲਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇੱਥੇ f ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ **R** ਹੈ। ਇਸਦਾ ਆਲੇਖ ਚਿੱਤਰ 2.8 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਇੱਕ ਸਿੱਧੀ (ਸਰਲ) ਰੇਖਾ ਹੈ। ਇਹ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 2.8

(ii) **ਅਚੱਲ ਜਾਂ ਸਥਿਰ ਫਲਨ (Constant function) :** $y = f(x) = c$, ਜਿੱਥੇ c ਇੱਕ ਅਚੱਲ ਹੈ ਅਤੇ ਹਰ ਇੱਕ $x \in \mathbf{R}$ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲ ਫਲਨ ਹੈ। ਇੱਥੇ f ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ **R** ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੀ ਵਿਸਥਾਰ $\{c\}$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 2.9

ਇਸਦਾ ਆਲੇਖ, x ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਹੋਵੇਗੀ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਜੇਕਰ $f(x) = 3$ ਹਰ ਇੱਕ $x \in \mathbf{R}$ ਲਈ ਤਾਂ ਇਸਦਾ ਆਲੇਖ ਚਿੱਤਰ 2.9 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਹੋਵੇਗੀ।

(iii) **ਬਹੁਪਦ ਫਲਨ (Polynomial function) :** ਫਲਨ $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਇੱਕ ਬਹੁਪਦੀ ਫਲਨ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ **R** ਦੇ ਹਰ ਇੱਕ x ਲਈ $y = f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_n x^n$, ਜਿੱਥੇ n ਇੱਕ ਅਰਿਣਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ $a_0, a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbf{R}$

$f(x) = x^3 - x^2 + 2$ ਅਤੇ $g(x) = x^4 + \sqrt{2}\, x$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ ਇੱਕ ਬਹੁਪਦੀ ਫਲਨ ਹਨ, ਜਦੋਂ ਕਿ $h(x) = x^{\frac{2}{3}} + 2x$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ ਬਹੁਪਦੀ ਫਲਨ ਨਹੀਂ ਹੈ। (ਕਿਉਂ ?)

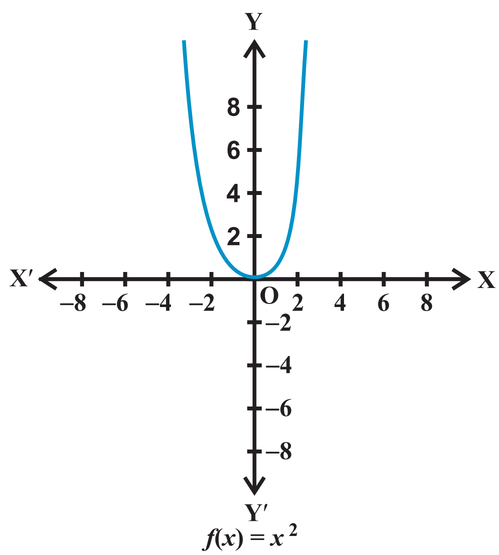
ਉਦਾਹਰਣ 13 : ਫਲਨ f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਨੂੰ $y = f(x) = x^2$, $x \in \mathbf{R}$ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰੋ। ਇਸਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਪੂਰੀ ਕਰੋ। ਇਸ ਫਲਨ ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਕੀ ਹੈ? f ਦਾ ਆਲੇਖ ਵੀ ਬਣਾਉ।

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = f(x) = x^2$									

ਹੱਲ : ਪੂਰੀ ਸਾਰਣੀ ਹੇਠਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = f(x) = x^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16

f ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ = $\{x : x \in \mathbf{R}\}$; f ਦੀ ਵਿਸਥਾਰ = $\{x^2 : x \in \mathbf{R}\}$ f ਦਾ ਆਲੇਖ, ਚਿੱਤਰ 2.10 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ।

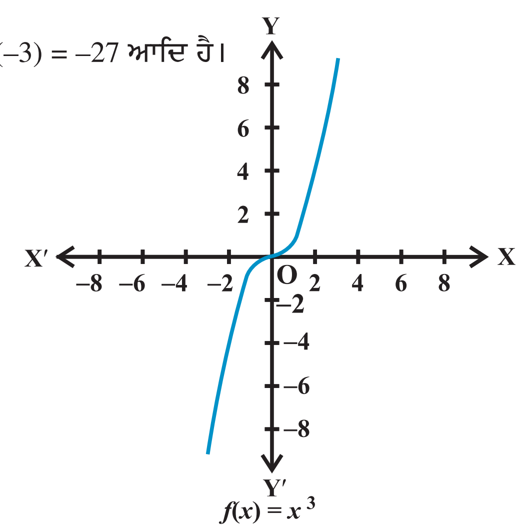


ਚਿੱਤਰ 2.10

ਉਦਾਹਰਣ 14 : $f(x) = x^3$, $x \in \mathbf{R}$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਬਣਾਉ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ

$f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(-1) = -1$, $f(2) = 8$, $f(-2) = -8$, $f(3) = 27$; $f(-3) = -27$ ਆਦਿ ਹੈ।
ਇਸ ਲਈ $f = \{(x, x^3): x \in \mathbf{R}\}$ ਦਾ ਆਲੇਖ
ਚਿੱਤਰ 2.11 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 2.11

(iv) **ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ (Rational functions):** $\frac{f(x)}{g(x)}$, ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲਨ ਜਿੱਥੇ $f(x)$ ਅਤੇ $g(x)$ ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਂਤ x ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਬਹੁਪਦੀ ਫਲਨ ਹਨ ਅਤੇ $g(x) \neq 0$

ਉਦਾਹਰਣ 15 : ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲ ਫਲਨ $f: \mathbf{R} - \{0\} \to \mathbf{R}$ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ $f(x) = \frac{1}{x}, x \in \mathbf{R} - \{0\}$ ਹੈ। ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਨੂੰ ਵਰਤਦੇ ਹੋਏ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਪੂਰੀ ਕਰੋ। ਇਸ ਫਲਨ ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਕੀ ਹੈ

x	–2	–1.5	–1	–0.5	0.25	0.5	1	1.5	2
$y = \frac{1}{x}$	...	...	...	...	...	...	...	...	...

ਹੱਲ : ਪੂਰੀ ਕੀਤੀ ਸਾਰਣੀ ਹੇਠਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ :

x	–2	–1.5	–1	–0.5	0.25	0.5	1	1.5	2
$y = \frac{1}{x}$	– 0.5	– 0.67	–1	– 2	4	2	1	0.67	0.5

ਇਸਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ, ਸਿਫ਼ਰ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੀ ਵਿਸਥਾਰ ਵੀ ਸਿਫ਼ਰ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਹਨ। f ਦਾ ਆਲੇਖ ਚਿੱਤਰ 2.12 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ :

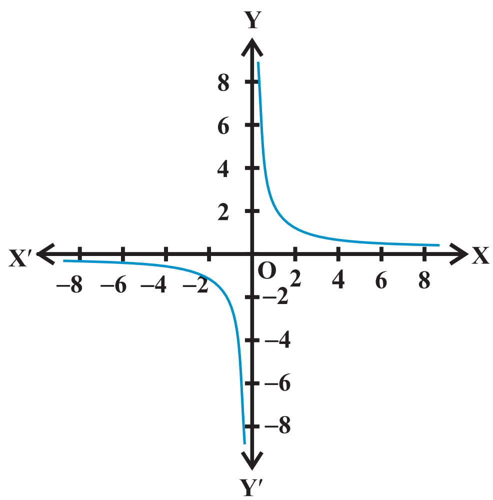


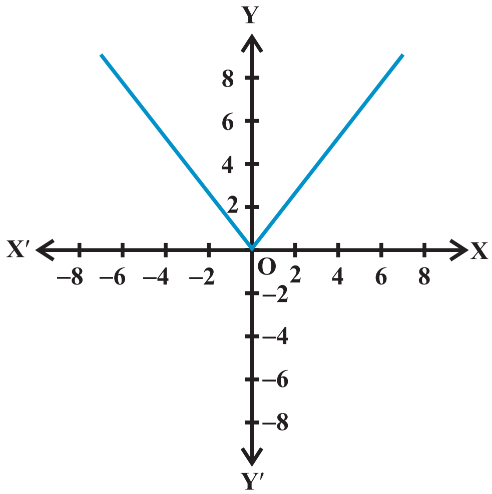
Fig 2.12 $f(x) = \frac{1}{x}$

ਚਿੱਤਰ 2.12

(v) **ਨਿਰਪੇਖ ਮਾਪਾਂਕ (The Modulus function):** ਫਲਨ f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, ਹਰ ਇੱਕ $x \in \mathbf{R}$ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ $f(x) = |x|$ ਨੂੰ ਨਿਰਪੇਖ ਮੁੱਲ ਫਲਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। x ਦਾ ਹਰ ਇੱਕ ਅਰਿਣਾਤਮਕ ਮੁੱਲ ਲਈ $f(x) = x$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਪਰ x ਦੇ ਰਿਣਾਤਮਕ ਮੁੱਲਾਂ ਲਈ $f(x)$, x ਦੇ ਮੁੱਲ ਦਾ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ

$$f(x) = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

ਨਿਰਪੇਖ ਮੁੱਲ ਫਲਨ ਦਾ ਆਲੇਖ ਚਿੱਤਰ 2.13 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।



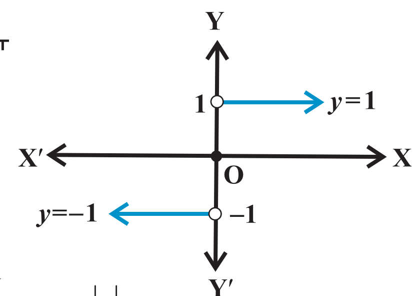
$f(x) = |x|$

ਚਿੱਤਰ 2.13

(vi) **ਸਿਗਨਮ ਫਲਨ (Signum function) :** ਫਲਨ f:**R**→**R**, ਜਿਸ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ ਜੇਕਰ } x > 0 \\ 0, \text{ ਜੇਕਰ } x = 0 \\ -1, \text{ ਜੇਕਰ } x < 0 \end{cases}$$

ਹੈ, ਨੂੰ ਸਿਗਨਮ ਫਲਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਸਿਗਨਮ ਫਲਨ ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ R ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਸਮੂਹ $\{-1, 0, 1\}$ ਹੈ। ਸਿਗਨਮ ਫਲਨ ਦਾ ਆਲੇਖ ਚਿੱਤਰ 2.14 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ।



$f(x) = \frac{|x|}{x}, x \neq 0$ ਅਤੇ $0, x = 0$ ਲਈ

ਚਿੱਤਰ 2.14

(vii) **ਅਧਿਕਤਮ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਫਲਨ (Greatest integer function) :** $f(x) = [x]$, $x \in$ **R** ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ f: **R** $\to$ **R**, x ਤੋਂ ਘੱਟ ਜਾਂ x ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਅਧਿਕਤਮ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਮੁੱਲ ਧਾਰਨ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਫ਼ਲਨ ਨੂੰ ਅਧਿਕਤਮ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਫਲਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

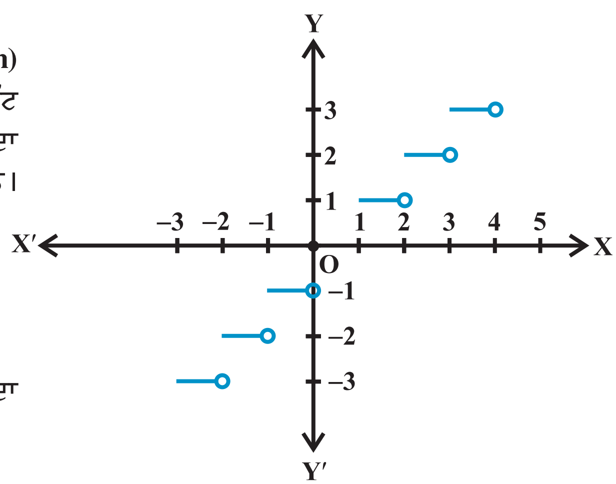
$[x]$ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

$[x] = -1$ ਜੇਕਰ $-1 \leq x < 0$

$[x] = 0$ ਜੇਕਰ $0 \leq x < 1$

$[x] = 1$ ਜੇਕਰ $1 \leq x < 2$

$[x] = 2$ ਜੇਕਰ $2 \leq x < 3$ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ, ਫਲਨ ਦਾ ਆਲੇਖ ਚਿੱਤਰ 2.15 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ।



$f(x) = [x]$

ਚਿੱਤਰ 2.15

2.4.2 ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਬੀਜ ਗਣਿਤ (Algebra of real functions): ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ, ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨ ਨੂੰ ਦੂਸਰੇ ਵਿੱਚੋਂ ਘਟਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਕਿਸੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਅਦਿਸ਼ (scalar) (ਇੱਥੇ ਅਦਿਸ਼ ਤੋਂ ਭਾਵ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਤੋਂ ਹੈ) ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਦੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨਾਂ ਨੂੰ ਗੁਣਾ ਕਰਨਾ ਅਤੇ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨ ਨੂੰ ਦੂਸਰੇ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨਾ, ਸਿੱਖਾਂਗੇ।

(i) **ਦੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ (Addition of two real functions) :** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f : X \to \mathbf{R}$ ਅਤੇ $g : X \to \mathbf{R}$ ਕੋਈ ਦੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨ ਹਨ, ਇੱਥੇ $X \subset \mathbf{R}$ ਤਾਂ ਅਸੀਂ $(f + g)$: $X \to \mathbf{R}$ ਨੂੰ ਸਾਰੀਆਂ $x \in X$ ਦੇ ਲਈ $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

(ii) **ਇਸ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨ ਨੂੰ ਦੂਸਰੇ ਵਿੱਚੋਂ ਘਟਾਉਣਾ (Subtraction of a real function from another) :** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f : X \to \mathbf{R}$ ਅਤੇ $g: X \to \mathbf{R}$ ਕੋਈ ਦੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨ ਹਨ ਜਿੱਥੇ $X \subset \mathbf{R}$। ਤਾਂ ਅਸੀਂ $(f - g) : X \to \mathbf{R}$ ਨੂੰ ਸਾਰੇ $x \in X$ ਦੇ ਲਈ $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

(iii) **ਇੱਕ ਅਦਿਸ਼ (Scalar) ਨਾਲ ਗੁਣਾ (Multiplication by a scalar) :** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f : X \to \mathbf{R}$ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲ ਫਲਨ ਹਨ ਅਤੇ α ਇੱਕ ਅਦਿਸ਼ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਅਦਿਸ਼ ਦਾ ਮਤਲਬ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤਾਂ ਗੁਣਨਫਲ αf, X ਤੋਂ R ਤੱਕ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ ਜੋ $(\alpha f)(x) = \alpha f(x), x \in X$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(iv) **ਦੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ (Multiplication of two real functions):** ਦੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨਾਂ $f : X \to \mathbf{R}$ ਅਤੇ $g : X \to \mathbf{R}$ ਤਾਂ ਗੁਣਨਫਲ (ਜਾਂ ਗੁਣਾ) ਇੱਕ ਫਲਨ $fg : X \to \mathbf{R}$ ਹੈ, ਜੋ ਸਾਰੇ $(fg)(x) = f(x)\, g(x), x \in X$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਇਸਨੂੰ ਬਿੰਦੂ ਅਨੁਸਾਰ ਗੁਣਾ (Pointwise multiplication) ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

(v) **ਦੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਭਾਗਫਲ (Quotient of two real functions) :** ਮੰਨ ਲਉ f ਅਤੇ g, $X \to \mathbf{R}$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਦੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨ ਹਨ, ਜਿੱਥੇ $X \subset \mathbf{R}$, f ਅਤੇ g ਦਾ ਭਾਗਫਲ ਜਿਸਨੂੰ $\frac{f}{g}$ ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ, ਇਕ ਫਲਨ ਹੈ ਜੋ ਸਾਰੇ $x \in X$ ਜਿੱਥੇ $g(x) \neq 0$ ਦੇ ਲਈ $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 16 : ਮੰਨ ਲਓ $f(x) = x^2$ ਅਤੇ $g(x) = 2x + 1$, ਦੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲ ਫਲਨ ਹਨ ਤਾਂ

$$(f + g)(x), (f - g)(x), (fg)(x), \left(\frac{f}{g}\right)(x) \text{ ਪਤਾ ਕਰੋ।}$$

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ

$$(f + g)(x) = x^2 + 2x + 1, \ (f - g)(x) = x^2 - 2x - 1,$$

$$(fg)(x) = x^2(2x + 1) = 2x^3 + x^2, \ \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{2x+1}, x \neq -\frac{1}{2}$$

ਉਦਾਹਰਣ 17 : ਮੰਨ ਲਓ $f(x) = \sqrt{x}$ ਅਤੇ $g(x) = x$ ਦੋ ਅਰਿਣਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ ਹਨ ਤਾਂ $(f + g)(x)$, $(f - g)(x)$, $(fg)(x)$ ਅਤੇ $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ

$$(f + g)(x) = \sqrt{x} + x, \ (f - g)(x) = \sqrt{x} - x,$$

$$(fg)\, x = \sqrt{x}(x) = x^{\frac{3}{2}} \text{ ਅਤੇ } \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x}}{x} = x^{-\frac{1}{2}}, x \neq 0$$

ਅਭਿਆਸ 2.3

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸੰਬੰਧਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੇ ਫਲਨ ਹਨ ? ਕਾਰਨ ਦੱਸੋ। ਜੇਕਰ ਇਹ ਫਲਨ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $\{(2,1), (5,1), (8,1), (11,1), (14,1), (17,1)\}$

(ii) $\{(2,1), (4,2), (6,3), (8,4), (10,5), (12,6), (14,7)\}$

(iii) $\{(1,3), (1,5), (2,5)\}$

2. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $f(x) = -|x|$ (ii) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

3. ਇੱਕ ਫਲਨ f ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ $f(x) = 2x - 5$, ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $f(0)$ (ii) $f(7)$ (iii) $f(-3)$

4. ਫਲਨ 't' ਜੋ ਸੈਲਸੀਅਸ ਤਾਪਮਾਨ ਦਾ ਫਾਰਨਹੀਟ ਤਾਪਮਾਨ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤਿ ਚਿਤਰਣ ਕਰਦਾ ਹੈ, $t(C) = \frac{9C}{5} + 32$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ, ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $t(0)$ (ii) $t(28)$ (iii) $t(-10)$ (iv) C ਦਾ ਮੁੱਲ ਜਦੋਂ $t(C) = 212$

5. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਵਿਸਥਾਰ ਪਤਾ ਕਰੋ :

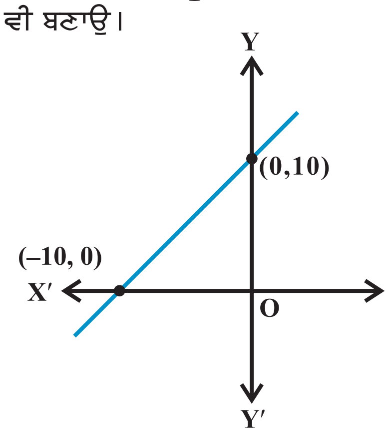
(i) $f(x) = 2 - 3x$, $x \in \mathbf{R}$, $x > 0$

(ii) $f(x) = x^2 + 2$, x ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ

(iii) $f(x) = x$, x ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ

ਉਦਾਹਰਣ 18 : ਮੰਨ ਲਓ **R** ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨ f: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ਨੂੰ $f(x) = x + 10$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰੋ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਆਲੇਖ ਵੀ ਬਣਾਉ।



$f(x) = x + 10$

ਚਿੱਤਰ 2.16

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $f(0) = 10, f(1) = 11, f(2) = 12, ..., f(10) = 20$, ਆਦਿ ਅਤੇ

$f(-1) = 9, f(-2) = 8, ..., f(-10) = 0$ ਆਦਿ

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ ਦੇ ਆਲੇਖ ਦਾ ਅਕਾਰ ਚਿੱਤਰ 2.16 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਰੂਪ ਅਨੁਸਾਰ ਹੋਵੇਗਾ।

ਟਿੱਪਣੀ ਫਲਨ f, $f(x) = mx + c$, $x \in \mathbf{R}$, ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਰੇਖੀ ਫਲਨ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜਿੱਥੇ m ਅਤੇ c ਅਚੱਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਉਪਰੋਕਤ ਫਲਨ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਫਲਨ ਦੀ ਉਦਾਹਰਣ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 19 : ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ R, **Q** ਤੋਂ **Q** ਵਿੱਚ $R = \{(a,b): a,b \in \mathbf{Q}$ ਅਤੇ $a - b \in \mathbf{Z}\}$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

(i) $(a,a) \in R$ ਸਾਰੇ $a \in \mathbf{Q}$ ਦੇ ਲਈ

(ii) $(a,b) \in R$ ਤੋਂ ਭਾਵ ਹੈ $(b, a) \in R$

(iii) $(a,b) \in R$ ਅਤੇ $(b,c) \in R$ ਤੋਂ ਭਾਵ ਹੈ $(a,c) \in R$

ਹੱਲ : (i) ਕਿਉਂਕਿ $a - a = 0 \in \mathbf{Z}$, ਇਸ ਤੋਂ ਸਿੱਟਾ ਨਿਕਲਦਾ ਹੈ ਕਿ $(a, a) \in R$ ਹੋਵੇਗਾ।

(ii) $(a,b) \in R$ ਤੋਂ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ $a - b \in \mathbf{Z}$, ਇਸ ਲਈ $b - a \in \mathbf{Z}$ ਹੋਵੇਗਾ, ਇਸ ਲਈ $(b, a) \in R$

(iii) (a, b) ਅਤੇ $(b, c) \in R$ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ $a - b \in \mathbf{Z}$, $b - c \in \mathbf{Z}$ ਹੁਣ

$a - c = (a - b) + (b - c) \in \mathbf{Z}$, ਇਸ ਲਈ $(a,c) \in R$

ਉਦਾਹਰਣ 20 : ਮੰਨ ਲਓ $f = \{(1,1), (2,3), (0, -1), (-1, -3)\}$, **Z** ਤੋਂ **Z** ਤੱਕ ਦਾ ਇੱਕ ਰੇਖਿਕ ਫਲਨ ਹੈ, ਤਾਂ $f(x)$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ f ਇੱਕ ਰੇਖਿਕ ਫਲ ਹੈ ਇਸ ਲਈ $f(x) = mx + c$ ਹੁਣ ਕਿਉਂਕਿ $(1, 1), (0, -1) \in R$,

$f(1) = m + c = 1$ ਅਤੇ $f(0) = c = -1$ ਇਸ ਤੋਂ $m = 2$ ਇਸ ਲਈ $f(x) = 2x - 1$

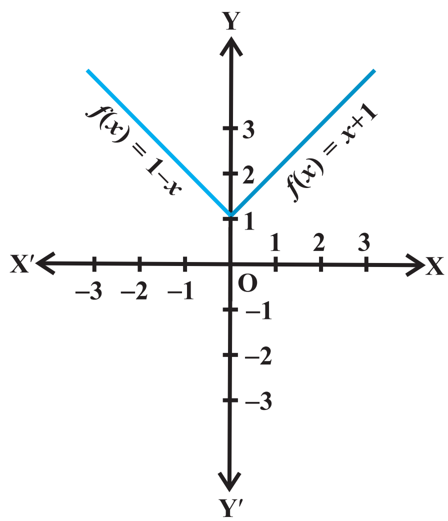
ਉਦਾਹਰਣ 21 : ਫਲਨ $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 5}{x^2 - 5x + 4}$ ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ $x^2 - 5x + 4 = (x - 4)(x - 1)$, ਫਲਨ f ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਸਿਰਫ਼ 4 ਅਤੇ 1 ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ f ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ $\mathbf{R} - \{1, 4\}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 22 : ਫਲਨ f,

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। $f(x)$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਖਿੱਚੋ।



ਚਿੱਤਰ 2.17

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $f(x) = 1 - x, x < 0$ ਇਸ ਤੋਂ

$f(-4) = 1 - (-4) = 5$

$f(-3) = 1 - (-3) = 4$

$f(-2) = 1 - (-2) = 3$

$f(-1) = 1 - (-1) = 2$ ਆਦਿ

ਅਤੇ $f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 4$

$f(4) = 5$ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ $f(x) = x + 1, x > 0$ ਲਈ

ਇਸ ਲਈ f ਦਾ ਆਲੇਖ ਚਿੱਤਰ 2.17 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਹੋਵੇਗਾ।

ਅਧਿਆਇ 2 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. ਸੰਬੰਧ f, $f(x) = \begin{cases} x^2, 0 \le x \le 3 \\ 3x, 3 \le x \le 10 \end{cases}$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ।

ਸੰਬੰਧ g, $g(x) = \begin{cases} x^2, 0 \le x \le 2 \\ 3x, 2 \le x \le 10 \end{cases}$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ।

ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ f ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ g ਫਲਨ ਨਹੀਂ ਹੈ।

2. ਜੇਕਰ $f(x) = x^2$, ਤਾਂ $\dfrac{f(1.1) - f(1)}{(1.1 - 1)}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

3. ਫਲਨ $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 8x + 12}$ ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

4. $f(x) = \sqrt{(x-1)}$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨ f ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

5. $f(x) = |x - 1|$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨ f ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

6. ਮੰਨ ਲਓ $f = \left\{\left(x, \dfrac{x^2}{1+x^2}\right) : x \in \mathbf{R}\right\}$ ਇੱਕ $\mathbf{R}$ ਤੋਂ $\mathbf{R}$ ਤੱਕ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ। f ਦੀ ਵਿਸਥਾਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

7. ਮੰਨ ਲਓ $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $f(x) = x + 1$ ਅਤੇ $g(x) = 2x - 3$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹਨ। $f + g$, $f - g$ ਅਤੇ $\dfrac{f}{g}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

8. ਮੰਨ ਲਓ $f = \{(1,1), (2,3), (0,-1), (-1,-3)\}$ $\mathbf{Z}$ ਤੋਂ $\mathbf{Z}$ ਤੱਕ $f(x) = ax + b$, ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ a, ਅਤੇ b ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। a ਅਤੇ b ਪਤਾ ਕਰੋ।

9. $R = \{(a, b) : a, b \in \mathbf{N}$ ਅਤੇ $a = b^2\}$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ $\mathbf{N}$ ਤੋਂ $\mathbf{N}$ ਤੱਕ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ R ਹੈ। ਕੀ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹਨ ?

(i) $(a,a) \in R$, ਸਾਰੇ $a \in \mathbf{N}$ ਲਈ (ii) $(a,b) \in R$, ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ $(b,a) \in R$

(iii) $(a,b) \in R$, $(b,c) \in R$ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ $(a,c) \in R$

ਹਰ ਇੱਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦਾ ਕਾਰਨ ਲਿਖੋ।

10. ਮੰਨ ਲਓ $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{1,5,9,11,15,16\}$ ਅਤੇ $f=\{(1,5), (2,9), (3,1), (4,5), (2,11)\}$

ਕੀ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਠੀਕ ਹਨ ?

(i) f ਇੱਕ A ਤੋਂ B ਤੱਕ ਦਾ ਸੰਬੰਧ ਹੈ (ii) f ਇੱਕ A ਤੋਂ B ਤੱਕ ਦਾ ਫਲਨ ਹੈ।

ਹਰ ਇੱਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਨੂੰ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕਰੋ।

11. ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ f, $f = \{(ab, a+b) : a, b \in \mathbf{Z}\}$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ ਦਾ ਇੱਕ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਕਿ f, $\mathbf{Z}$ ਤੋਂ $\mathbf{Z}$ ਤੱਕ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ ? ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਨੂੰ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕਰੋ।

12. ਮੰਨ ਲਓ $A = \{9,10,11,12,13\}$ ਅਤੇ $f : A \to \mathbf{N}$, $f(n) = n$ ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਅਭਾਜ ਭਾਜਕ ਹੈ। f ਦੀ ਵਿਸਥਾਰ (Range) ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸੰਬੰਧਾਂ ਅਤੇ ਫਲਨ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਦੀਆਂ ਮੁੱਖ ਗੱਲਾਂ ਹੇਠਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਹਨ।

- **ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਜੋੜਾ** : ਕਿਸੇ ਖ਼ਾਸ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਇਕੱਠਾ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਤੱਤਾਂ ਦਾ ਜੋੜਾ।
- **ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਗੁਣਾ** ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ A ਅਤੇ B ਦੇ ਲਈ $A \times B$,

  $A \times B = \{(a, b): a \in A, b \in B\}$

  ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y): x, y \in \mathbf{R}\}$

  ਅਤੇ $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y, z): x, y, z \in \mathbf{R}\}$
- ਜੇਕਰ $(a, b) = (x, y)$, ਤਾਂ $a = x$ ਅਤੇ $b = y$
- ਜੇਕਰ $n(A) = p$ ਅਤੇ $n(B) = q$, ਤਾਂ $n(A \times B) = pq$
- $A \times \phi = \phi$
- ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ $A \times B \neq B \times A$.
- **ਸੰਬੰਧ** ਸਮੂਹ A ਤੋਂ ਸਮੂਹ B ਦਾ ਸੰਬੰਧ ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਗੁਣਾ $A \times B$ ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਜਿਸਨੂੰ $A \times B$ ਦੇ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਜੋੜਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਪਹਿਲੇ ਤੱਤ x ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਤੱਤ y ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਸੰਬੰਧ ਨੂੰ ਦਰਸਾ ਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
- ਕਿਸੇ ਤੱਤ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਬਿੰਬ ਸੰਬੰਧ R ਤਹਿਤ y ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $(x, y) \in R$
- ਸੰਬੰਧ R ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ, R ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਗਏ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਤੱਤਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
- ਸੰਬੰਧ R ਦੀ ਵਿਸਥਾਰ, R ਵਿਚਲੇ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਦੂਸਰੇ ਤੱਤ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
- **ਫਲਨ** ਸਮੂਹ A ਤੋਂ ਸਮੂਹ B ਵਿੱਚ ਫਲਨ f ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਸੰਬੰਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਸਮੂਹ A ਦੇ ਹਰ ਇੱਕ ਤੱਤ x ਦਾ ਸਮੂਹ B ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਪ੍ਰਤੀਬਿੰਬ y ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ $f: A \to B$, ਜਿੱਥੇ $f(x) = y$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।
- ਫਲਨ f ਦੀ A ਪ੍ਰਾਂਤ ਅਤੇ B ਸਹਿ-ਪ੍ਰਾਂਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
- ਫਲਨ f ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ, f ਦੇ ਪ੍ਰਤੀਬਿੰਬਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
- ਕਿਸੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨ ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਦੋਵੇਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਜਾਂ ਉਸਦਾ ਇੱਕ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

◆ **ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਬੀਜਗਣਿਤ (Algebra of Functions)** ਫਲਨ $f : \mathrm{X} \to \mathbf{R}$ ਅਤੇ $g : \mathrm{X} \to \mathbf{R}$, ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾਵਾਂ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), x \in \mathrm{X}$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x), x \in \mathrm{X}$$

$$(f.g)(x) = f(x) .g(x), x \in \mathrm{X}$$

$$(kf)(x) = k f(x), x \in \mathrm{X}, k \text{ ਕੋਈ ਅੱਚਲ ਹੈ।}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, x \in \mathrm{X}, g(x) \neq 0$$

ਇਤਿਹਾਸਿਕ ਨੋਟ

"Function" (ਫਲਨ) ਸ਼ਬਦ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ Gottfried Wiehelm Leibnitz (1646-1716 ਈ.) ਦੁਆਰਾ ਸੰਨ 1673 ਵਿੱਚ ਲਾਤੀਨੀ ਪਾਂਡੂਲਿਪੀ, ਲਿਖਤ (Latin manuscript) ਲਿਖਤ "Method's tangentium inversa seu de functionibus" ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਗਿਆ। Leibnitz ਨੇ ਇਸ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਅਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਨਾਤਮਕ ਭਾਵ ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ। ਉਸਨੇ ਫਲਨ ਨੂੰ ਗਣਿਤਿਕ ਕੰਮ ਅਤੇ ਕਰਮਚਾਰੀ ਦੇ ਪਦਾਂ ਦੁਆਰਾ ਉਤਪੰਨ ਸਿਰਫ਼ ਇੱਕ ਵਕਰ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਮੰਨਿਆ।

5 ਜੁਲਾਈ 1968 ਵਿੱਚ John Bernoullc ਨੇ Leibnitz ਨੂੰ ਲਿਖੇ ਇੱਕ ਪੱਤਰ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੀ ਵਾਰ ਜਾਣ ਬੁਝ ਕੇ "Function" (ਫਲਨ) ਸ਼ਬਦ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਨਾਤਮਕ ਤੌਰ 'ਤੇ ਕੀਤੀ। ਉਸੇ ਮਹੀਨੇ ਵਿੱਚ Leibnitz ਨੇ ਆਪਣੀ ਸਹਿਮਤੀ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹੋਏ ਉੱਤਰ ਵੀ ਦਿੱਤਾ।

ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ "Function" (ਫਲਨ) ਸ਼ਬਦ ਸੰਨ 1779 ਨੂੰ "Champber's Cyclopaedia" ਵਿੱਚ ਪਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਬੀਜ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਫਲਨ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਚਲ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਅਤੇ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜਾਂ ਅਚੱਲ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਸੰਯੁਕਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਣੇ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਨਾਤਮਕ ਵਿਅੰਜਕਾਂ (expressions) ਦੇ ਲਈ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ।

— ❖ —