



**CENTRO DE INVESTIGACIONES  
EN OPTICA, A.C.**

**“DESARROLLO DE PRUEBAS ÓPTICAS PARA LA CARACTERIZACIÓN  
DIMENSIONAL DE LA CÓRNEA”**



**Tesis para obtener el grado de Doctor en Ciencias (Óptica)  
Versión Definitiva. Incluye cambios sugeridos por revisores.**

***Presenta: Daniel Alexis Gómez Tejada***

*Director de Tesis: Dr. Daniel Malacara Hernández*

*León · Guanajuato · México*

*Julio de 2022*

*Por el amor de mi padre...*

## Agradecimientos

Deseo agradecer el apoyo y amor de mi esposa Natalith, sin la cual nada de esto hubiese sido posible. Ella ha sido la razón principal que me ha impulsado a querer ser mejor esposo, amigo y profesional.

Agradezco a toda mi familia, a quienes aún están, a quienes se nos adelantaron, por su apoyo y sacrificio, quienes desde la distancia han sido vitales para encontrar las fuerzas y la motivación necesaria para lograr esta investigación.

A mis amigos del CIO que con su amistad hicieron que todo lo vivido hasta ahora en México haya sido tan especial. Le brindaron un bello color a la experiencia de hacer un doctorado.

Al Centro de Investigaciones en Óptica, sus profesores y administrativos, por siempre estar ahí para apoyarme en lo académico y en lo personal. Al Dr. Daniel Malacara Hernandez, por su calidez, por enseñarme a disfrutar el hacer ciencia entre amigos, por brindarme un ejemplo de sencillez, humildad y disciplina.

A los Dres. Alejandro Cornejo, Rufino Diaz y Gonzalo Páez, por su guía y consejo generoso desde el primer periodo académico hasta la evaluación de esta tesis.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología de México (CONACYT) por el apoyo brindado a través del programa de Becas Nacionales para extranjeros (636622), sin el cual no habría sido posible el presente trabajo de investigación.

En general, al pueblo mexicano, que gracias a sus impuestos hacen posible la financiación de la investigación y el avance de la ciencia en México.

## Tabla de contenido

Resumen .....	5
Prefacio .....	6
Capítulo 1 .....	8
El Ojo y la Córnea Humana .....	8
1.1. El Ojo Humano .....	9
1.2. La Córnea y su Estructura .....	10
1.3. Superficie Anterior de la Córnea.....	11
1.4. Conclusiones .....	14
Bibliografía .....	14
Capítulo 2.....	16
Topografía Corneal .....	16
2.1. Técnicas para la Medición de Topografía Corneal .....	17
2.1.1. Lámpara de Hendidura .....	18
2.1.2. Imágenes de Scheimpflug .....	19
2.2. Topografía Corneal Basada en Anillos de Plácido.....	19
2.3. Error del Rayo Oblicuo .....	25
2.4. Conclusiones .....	26
Bibliografía .....	27
Capítulo 3.....	31
Procesamiento de Anillos de Plácido .....	31
3.1. Patrones de Hartmann con Simetría Circular .....	32
3.2. Recuperación del Frente de Onda con Integración Trapezoidal Newtoniana .....	38
3.3. Integración de Anillos de Plácido y Solución al Error del Rayo Oblicuo.....	44
3.4. Conclusiones .....	52
Bibliografía .....	53
Capítulo 4.....	55
Representación de Superficies Ópticas .....	55
4.1. Representación de Superficies .....	56
4.2. Polinomios de Zernike .....	58
4.3. Representaciones Alternativas de Superficies.....	61
4.4. Propuesta de Representación con Funciones Gaussianas.....	63
4.5. Conclusiones .....	77
Conclusiones Generales .....	79
Bibliografía .....	81

## Resumen

La superficie anterior de la córnea aporta la mayor parte de la potencia óptica del ojo humano, en córneas normales es la responsable de aproximadamente la mitad de las aberraciones totales del ojo. Por esta importancia, es indispensable conocer las características dimensionales de su topografía, las cuales afectan directamente el diagnóstico de ciertas enfermedades corneales y los tratamientos clínicos consecuentes. En esta tesis se abordan dos aspectos que afectan directamente la calidad de la medición de una topografía corneal: la capacidad de la técnica para medir efectivamente los distintos cambios de altura en la topografía y la fidelidad de la representación matemática usada para reproducir la superficie medida.

La técnica de topografía corneal basada en anillos de Plácido es una de las técnicas más usadas en oftalmología, esta técnica emplea una serie de anillos concéntricos que son proyectados sobre la córnea codificando la topografía corneal en una imagen de anillos deformados. Por la continuidad de los anillos se ha considerado que esta técnica no logra medir correctamente las deformaciones que están en la dirección tangencial a los anillos. Esto conlleva a un error llamado error del rayo oblicuo. En esta tesis se presenta una solución basada en los fundamentos de la prueba de Hartmann. La solución es intuitiva, simple y directa, mostrando que la técnica no está limitada, la información de la topografía corneal solo se encuentra oculta en los anillos continuos deformados.

En cuanto a la representación matemática de una superficie, el estándar actual en oftalmología son los polinomios de Zernike. Sin embargo, estos fallan al tratar de representar superficies altamente aberradas o con cambios abruptos de topografía. Para solucionarlo se propone una representación matemática alternativa que combina polinomios de Zernike de bajo orden con funciones gaussianas cuyo fuerte carácter local es aprovechado para representar las variaciones rápidas de la topografía.

## Prefacio

En la oftalmología se valoran diversos aspectos de la salud de la visión humana. Para ello se emplean evaluaciones clínicas que generalmente se respaldan en exámenes donde se miden distintos parámetros de los constituyentes del ojo, entregando información de su estado y desempeño particular. Uno de estos parámetros es la topografía corneal, que no es otra cosa que la forma de la primera superficie de la córnea. Al ser esta la primera interfaz que se encuentra la luz al ingresar al ojo, ella tiene mucha responsabilidad en la calidad de la imagen que finalmente se forma en la retina.

Existen distintas evaluaciones clínicas y procedimientos que dependen del conocimiento de la topografía corneal, por nombrar algunos de ellos, se tiene la detección prematura de enfermedades corneales como el queratocono, la corrección de defectos refractivos con el uso de lentes de contacto personalizados, o bien, a través del moldeamiento de la forma de la superficie de la córnea empleando ablación láser. Es evidente considerar que la eficacia de estos procedimientos dependerá en que tanto la topografía corneal medida coincide con la forma real de la córnea.

Se puede asumir que la calidad de una topografía corneal depende de la combinación de dos aspectos que se encuentran fuertemente interrelacionados entre sí, uno es la capacidad de la técnica para detectar de manera efectiva las pequeñas variaciones de altura en la superficie corneal, y el otro es su posterior representación matemática que debe acercarse lo más posible a la forma medida de la córnea, sin importar la particularidad de esta topografía.

Justamente en esta tesis se trabaja sobre estos dos problemas. Para el primero de ellos, el de la medición de la topografía corneal, hay que tener en cuenta que entre las diversas técnicas que existen para medirla está la topografía corneal basada en los anillos de Plácido. Esta técnica es una de las más establecidas por su sencillez e historia. Sin embargo, en la actualidad su implementación en dispositivos comerciales carece de precisión cuando se emplea en la medición de córneas con formas que distan mucho de una superficie esférica ideal. El origen de este inconveniente radica en un error conocido como el error del rayo oblicuo, el cual, como se verá más adelante, se ha tratado de corregir de diversas maneras muy sofisticadas, aunque sin ninguna aplicación comercial conocida hasta el momento. Uno de los aportes de esta tesis es enriquecer esta técnica de topografía corneal al brindar una solución alternativa al error del rayo oblicuo. Esta solución es intuitiva, simple y rápida, sin requerir cambios en el hardware del topógrafo, ni realizar algún tipo de filtrado digital de datos. La modificación está en la forma misma en la que se procesa la información existente en la imagen de los anillos de Plácido deformados capturada por el topógrafo corneal.

El segundo problema abordado en esta tesis es la representación matemática de la superficie, la cual se realiza posterior a la medición de la topografía corneal. Su relevancia radica en que de poco sirve tener la mejor técnica para medir la topografía si la representación matemática

no tiene la capacidad suficiente de representar todos los detalles topográficos de la superficie medida. En oftalmología, la representación matemática estándar son los polinomios de Zernike [1], sin embargo, el uso de estos polinomios ha empezado a generar preocupaciones ya que han mostrado fallas en ciertas condiciones, por ejemplo, en la imposibilidad de representar córneas altamente aberradas con combinaciones de polinomios de alto orden [2], [3]. Para solucionar este problema, en esta tesis se propone una representación alternativa que tiene la intención de quitarle parcialmente a los polinomios de Zernike la responsabilidad que tienen de representar aberraciones de alto orden y también variaciones locales de topografía, en su lugar se propone usar funciones de bajo orden combinadas con distintas funciones gaussianas superpuestas.

La efectividad de ambas propuestas será evaluada por medio de simulaciones, donde los métodos formulados actúan sobre superficies con distintos tipos de aberraciones sin simetría de rotación y en superficies con deformaciones locales de topografía.

Todo lo mencionado anteriormente se describe a lo largo de cuatro capítulos. En el Capítulo 1 se realiza una introducción breve de la descripción del ojo humano, con particular interés en la córnea cuya primera superficie, también llamada superficie anterior, es el objeto de estudio de esta tesis. En el Capítulo 2 se revisa la topografía corneal, los principales métodos empleados para medirla, entre ellos el topógrafo basado en anillos de Plácido. En este capítulo es donde se introduce formalmente el concepto del error de rayo oblicuo, para que posteriormente, en el Capítulo 3, se presente la propuesta de solución a este error, su implementación y los resultados obtenidos. En el Capítulo 4 se introduce el tema de la representación de superficies, mencionando algunas representaciones existentes, entre ellas los ya mencionados polinomios de Zernike. Finalmente, se presenta una propuesta de representación de superficies que usa funciones de bajo orden que son combinadas con series de funciones gaussianas de distintos tipos.

# Capítulo 1

## El Ojo y la Córnea Humana

La visión es uno de los sentidos más importantes para los seres vivos debido a que con ella es posible obtener información abundante del entorno, permitiendo actividades fundamentales como la caza y las interacciones en comunidad. Para los humanos, este panorama es similar, la visión es primordial para cualquier tipo de actividad, bien sea de interacción social, laboral, de estudio, de recreación, entre otras.

Ignorando por el momento el aspecto neurológico de la visión humana, esta es posible gracias al ojo, el cual se puede considerar como un sistema óptico formador de imágenes que está compuesto fundamentalmente por un sistema de dos lentes positivas separadas por una distancia fija. El sistema de lentes forma una imagen real invertida sobre el sensor del sistema, la retina. Desde esta perspectiva meramente óptica y excluyendo los posibles deterioros de la retina, la calidad de la imagen formada se verá principalmente afectada por las propiedades ópticas de las dos lentes, la córnea y el cristalino. En estas lentes es de interés la calidad óptica de sus superficies, sin embargo, la primera superficie de la córnea es la que más influye en la calidad de la imagen retinal. Esto se debe a que en la interfaz aire-córnea es donde hay una mayor diferencia de índice de refracción, por lo que en esta interfaz es donde la luz sufre una mayor refracción.

En este Capítulo se presentan algunos fundamentos respecto al ojo humano y su córnea, con interés especial en la primera superficie de la córnea, que como se mencionó previamente, es el objeto de estudio de esta tesis.



## 1.1. El Ojo Humano

La estructura básica del ojo humano se presenta en la Figura 1.1. El interior del ojo se divide en tres cámaras, la cámara anterior, la posterior y la vítrea. La cámara anterior contiene el humor acuoso que es rodeado por la córnea y el iris. La cámara posterior se encuentra entre el iris y el cuerpo ciliar, conteniendo también humor acuoso. La cámara vítrea contiene el humor vítreo limitado por la cara posterior del cristalino y la retina. La estructura interna del ojo está contenida por un tejido protector denso y opaco llamado esclera, y por la superficie anterior de la córnea. Entre la retina y la esclera existen dos capas intermedias llamadas esclerótica y coroides, las cuales también pueden ser vistas en la Figura 1.1. [4].

Desde una perspectiva óptica, el ojo humano funciona como un sistema de formación de imágenes compuesto por dos lentes, la luz ingresa por la córnea (primera lente), pasa a través del iris (pupila real), para ser luego refractada por segunda vez en el cristalino (segunda lente), formando una imagen real invertida sobre la retina (elemento sensible a la luz: sensor del sistema). Del sistema de lentes, la córnea tiene mayor potencia que el cristalino, sin embargo, este último posee una potencia variable permitiendo el proceso llamado acomodación [5], que consiste en poder enfocar objetos a distintas distancias pese a tener una distancia imagen o distancia a la retina, fija. La potencia variable del cristalino se debe a que este puede modificar su forma (o curvatura) gracias a la contracción o relajación de los músculos ciliares que hacen parte del cuerpo ciliar que también se presenta en la Figura 1.1.

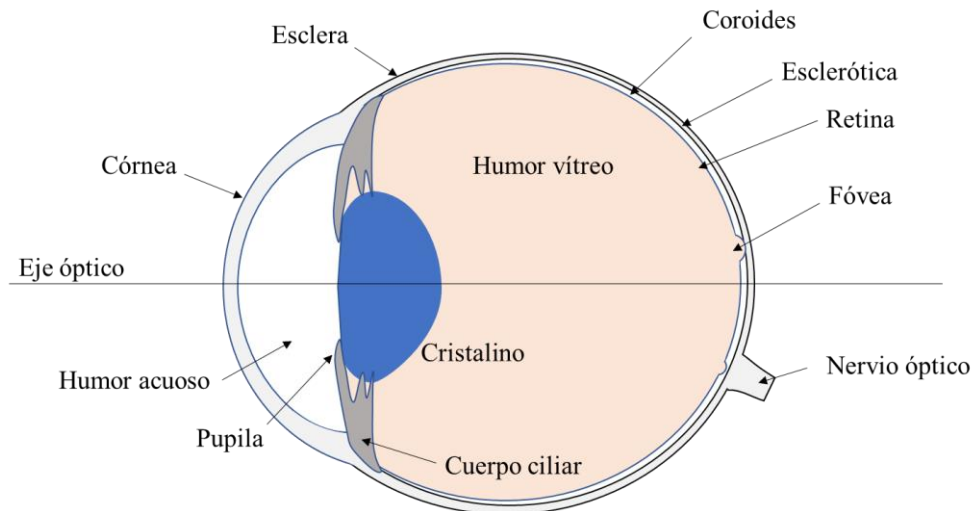


Figura 1.1. Esquema del ojo humano.

Por su parte, la retina es el elemento sensible del ojo, transformando la luz que recibe en estímulos nerviosos. Su superficie externa está compuesta por dos tipos de células, los conos y los bastones. Los conos son células sensibles a la luz con preferencia a ciertos colores, mientras que los bastones son células que solo son sensibles a la intensidad de la luz, indiferentemente del color que tenga. Los bastones son capaces de percibir luz de baja

intensidad, están distribuidos en casi toda la superficie de la retina a excepción del área central de una zona de la retina llamada fovea [5]; por ello se dice que esta zona no posee “visión nocturna”. En la fovea, la densidad de conos es más grande que en cualquier otra parte de la retina, lo que permite percibir con mayor resolución los detalles finos de la imagen que se proyecta en la fovea [4], [5]. Por ello, cuando el ojo observa un objeto de interés, el centro de la imagen se ubica sobre la fovea, a 5° del eje óptico mostrado en la Figura 1.1 [4].

Como se habrá notado, hasta el momento se ha hecho poca mención de la córnea, a pesar de que su topografía es el objeto de estudio de esta tesis. La siguiente sección está dedicada por completo a esta componente del ojo humano, se revisarán los detalles de su estructura, sus características físicas, y ópticas, con una descripción básica de la forma de su superficie anterior.

## 1.2. La Córnea y su Estructura

En la formación de la imagen retinal participan los dos elementos refractores del ojo, la córnea y el cristalino. La luz se refracta principalmente en cuatro superficies, las superficies anterior y posterior de cada una de las lentes; aunque en el cristalino la luz se refracta progresivamente a medida que lo atraviesa. Esto sucede porque el cristalino es un tejido celular no homogéneo que puede modelarse como una estructura de gradiente de índice de refracción, siendo mayor en el núcleo del cristalino donde es más densa la estructura en comparación con las capas exteriores [4], [5]. La calidad de la imagen retinal dependerá de las propiedades ópticas de las lentes, particularmente, sus índices de refracción, sus transparencias, las curvaturas y la calidad de las superficies. Respecto a esta última, se conoce que en ojos normales aproximadamente la mitad de las aberraciones del ojo se les atribuyen a las aberraciones existentes en la primer superficie de la córnea, la superficie anterior; aunque esta contribución depende de la edad, y de la existencia o no de enfermedades corneales y cirugías [3].

La estructura anatómica de la córnea se puede visualizar en la Figura 1.2, de afuera hacia dentro se tiene una capa de lágrima, el epitelio, la membrana de Bowman, el estroma, la membrana de Descemet y el endotelio corneal. La lagrime no afecta la refracción, su función es de mantener la humedad y suavizar las células epiteliales, además de brindar una superficie de índice de refracción suave permitiendo la reflexión especular de la luz. El epitelio protege las capas internas de la córnea del ambiente externo del ojo. La membrana de Bowman está compuesta de colágeno y su función es ayudar a mantener la forma de la córnea. El estroma es el 90% de la córnea, está formado de láminas de colágeno que permiten su transparencia a la vez que mantiene su estructura mecánica. El endotelio contiene células hexagonales acopladas unas con otras y su función es de mantener un balance en los fluidos de la córnea para que el estroma mantenga su transparencia. El endotelio y el estroma están separados por la membrana de Descemet [4].

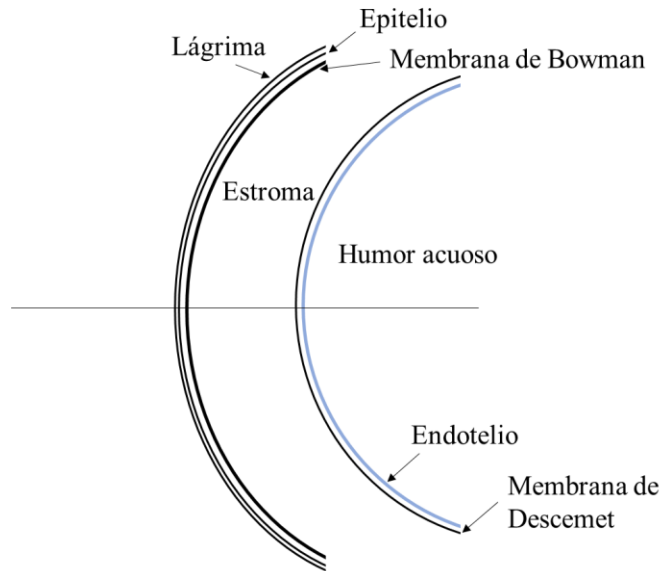


Figura 1.2. Estructura anatómica de la córnea. Figura adaptada de D. Atchison y G. Smith[4].

El ojo humano tiene aproximadamente 58 dioptrías de potencia, de ellas la córnea contribuye con 43 dioptrías, un poco más de dos tercios de la potencia total del ojo. Esta potencia es gracias a la curvatura de la córnea y a la diferencia entre el índice de refracción de la córnea y el del aire. Los radios de curvatura de la córnea varían según la persona, las mujeres tienen una superficie anterior ligeramente más pronunciada que los hombres. Sin embargo, existe una relación estable entre los radios de curvatura de ambas superficies dada por la expresión  $R_2 = 0.81R_1$ , donde  $R_2$  y  $R_1$ , son los radios de curvatura de las superficies posterior y anterior, respectivamente [4]. En promedio, una córnea humana tiene radios de curvatura  $R_1 = 7.8$  mm y  $R_2 = 6.5$  mm, espesor de 3.05 mm, e índice de refracción de 1.3771 [5].

### 1.3. Superficie Anterior de la Córnea

Como se mencionó en la sección previa, la superficie anterior de la córnea es la responsable de gran parte de las aberraciones totales del ojo, esto por su forma y por la diferencia de índice de refracción con respecto al aire. Por lo anterior, en la oftalmología es de suma importancia realizar una correcta medición y una adecuada caracterización de la superficie anterior de la córnea.

Al usar el concepto de radio de curvatura, se puede generar la idea de que las superficies corneales tienen una forma perfectamente esférica, lo cual no es así. Como veremos a continuación, en general estas superficies pueden tener una forma toroidal, o esférica.

La superficie anterior de la córnea tiene un diámetro aproximado de 12 mm, de esta área es de interés su zona central que mide 8 mm de diámetro, ya que es la responsable de formar la imagen sobre la fovea [4]. Esta zona de interés puede variar por el tamaño de la apertura del iris según si es visión fotópica (diurna) o escotópica (nocturna). La superficie anterior puede tener una forma toroidal o astigmática, es decir que los rayos de luz que ingresan por el eje del toroide tienen un foco distinto a los rayos que ingresan por un eje perpendicular al eje del toroide. En jóvenes, la curvatura es menor en la dirección horizontal de la córnea que en el meridiano vertical. Este es el astigmatismo más probable y se conoce como “astigmatismo con la regla”. El caso contrario se llama “astigmatismo contra la regla”. Si el eje de mayor curvatura se encuentra inclinado se le designa como astigmatismo oblicuo. Un astigmatismo con la regla tiende a revertirse con el paso de los años.

La superficie anterior de la córnea puede tener formas distintas a las del toroide, por ello esta superficie también ha sido caracterizada como una asfera con simetría de rotación, también llamada cónica de revolución [6]:

$$Z(x, y) = \frac{cS^2}{1 + \sqrt{1 - (K + 1)c^2S^2}} \quad (1)$$

aquí  $c$  es la curvatura definida como  $c = 1/R$ ,  $R$  es el radio de curvatura,  $S$  es el semidiámetro  $s = \sqrt{x^2 + y^2}$ , y  $K$  es la constante de conicidad. Dependiendo del valor de  $K$  la superficie puede tomar cualquiera de las formas que se presentan en la Tabla 1.1.

Tipo de cónica	Valor de la constante de conicidad
Hiperboloide	$K < -1$
Paraboloide	$K = -1$
Esferoide prolato (elipsoide o elipse que rota sobre su eje mayor)	$-1 < K < 0$
Esfera	$K = 0$
Esferoide oblato (elipse que rota sobre su eje menor)	$K > 0$

Tabla 1.1. Valores de la constante de conicidad para superficies cónicas<sup>1</sup>.

Existen diversos estudios que han medido la constante de conicidad en ojos humanos, en la mayoría de ellos el valor de  $K$  está entre  $-0.01$  y  $-0.28$  [7]–[9], siendo el valor de  $-0.23 \pm 0.008$  el valor más aceptado para adultos jóvenes [9], [10]. Según la Tabla 1.1 este valor corresponde a la forma de un esferoide prolato. Con ello, la superficie anterior se hace menos curva a medida que se aleja de su centro. Fisiológicamente existen algunas explicaciones para que la córnea tenga esta forma; una de ellas es que esto es debido a la búsqueda evolutiva

<sup>1</sup> Tabla adaptada de[6].

de disminuir la aberración de esfericidad de la córnea, otra explicación quizás más simple, es que la superficie anterior se hace más plana con el fin de hacer una transición suave a la forma del globo ocular [4]. Por otra parte, es probable encontrar córneas con formas de esferoide oblato ( $K > 0$ ) en los casos de córneas que han sufrido cirugías de ablación láser para la corrección de defectos refractivos de la córnea (queratomileusis in situ asistida con láser: LASIK), o en córneas con tratamiento de ortoqueratología [11]; que es el uso de lentes de contacto especiales para realizar moldeamiento de la forma de la primera superficie corneal [12].

Para ser objetivos, las formas mencionadas hasta ahora realmente revelan la forma global de la córnea y sus propiedades, sin embargo, estas no permiten representar las variaciones irregulares en altura que también pueden existir en la superficie corneal, particularmente en los casos de córneas que han sufrido intervenciones quirúrgicas [13]. Para esta situación es necesario que la descripción matemática de la superficie incluya métodos más sofisticados como lo son, por ejemplo, los polinomios de Zernike [14] que permiten descomponer la superficie corneal en componentes de aberraciones ópticas [15].

La introducción de los polinomios de Zernike en la óptica visual ha permitido conocer las contribuciones relativas de los constituyentes del ojo en la calidad de la imagen retinal [16], la correlación entre las aberraciones de la superficie anterior de la córnea y el desempeño visual [17], la detección y clasificación de grado de córneas con queratocono [11], [18], [19], la realización de diferentes estudios clínicos, por ejemplo, la presencia de aberraciones de alto orden en las superficies corneales [20] y los cambios de las aberraciones de la superficie anterior de la córnea por la edad [21], [22], entre otros [15].

Los polinomios de Zernike serán presentados formalmente en el Capítulo 4, el cual es un capítulo dedicado exclusivamente a la representación de superficies ópticas. Además de las bondades de los polinomios de Zernike, en ese capítulo se explorarán sus limitantes, lo que ha llevado a que se propongan otros tipos de funciones como, por ejemplo, los polinomios de Bathia-Wolf, las funciones de Bessel, gaussianas, etcétera.

Ahora bien, tras ser analizado el objeto de estudio de esta tesis y haber sentado las bases de lo que serán los capítulos posteriores, a continuación, se realizará una recapitulación sobre las técnicas de topografía corneal, entre ellas la topografía corneal basada en anillos de Plácido. De interés especial es la descripción de un algoritmo básico de arc-step iterativo en aproximación meridional, cuyos fundamentos están incluidos en la mayoría de los softwares existentes en los topógrafos comerciales que emplean anillos de Plácido. Así mismo, se encuentra la definición formal del error del rayo oblicuo, error que se solucionará más adelante en el Capítulo 3.

## 1.4. Conclusiones

En este Capítulo se ha realizado una breve descripción de la estructura del ojo humano, permitiendo explorar algunos conceptos básicos sobre el funcionamiento de este como un sistema óptico formador de imágenes, con la capacidad de observar objetos a diferentes distancias.

Del ojo humano se prestó interés especial en la córnea, en conocer su estructura y reconocer su importancia en la potencia óptica del ojo y en la calidad de la imagen retinal obtenida. Como gran parte de la responsabilidad de las aberraciones del ojo recae en la superficie anterior de la córnea, se realizó una revisión de la forma de esta superficie, la cual puede ser caracterizada como una superficie toroidal (astigmática), o una asfera con simetría de rotación (superficie cónica), reconociendo que en adultos jóvenes la superficie corneal tiene forma de un esferoide prolato. Finalmente, se realizó una introducción de los polinomios de Zernike, los cuales, en principio, tienen la capacidad de representar defectos de la superficie corneal que no puede ser representada como un toroide o una superficie cónica.

## Bibliografía

- [1] L. N. Thibos, R. A. Applegate, J. T. Schwiegerling, and R. Webb, “Standards for reporting the optical aberrations of eyes,” in *Journal of Refractive Surgery*, 2002, vol. 18, no. 5, pp. S652-60.
- [2] S. D. Klyce, M. D. Karon, and M. K. Smolek, “Advantages and disadvantages of the Zernike expansion for representing wave aberration of the normal and aberrated eye,” *J. Refract. Surg.*, vol. 20, no. 5, 2004.
- [3] M. K. Smolek and S. D. Klyce, “Zernike polynomial fitting fails to represent all visually significant corneal aberrations,” *Investig. Ophthalmol. Vis. Sci.*, vol. 44, no. 11, pp. 4676–4681, 2003.
- [4] D. A. Atchison, G. Smith, and G. Smith, *Optics of the human eye*, vol. 2. Butterworth-Heinemann Oxford, 2000.
- [5] D. Malacara-Hernández, *Óptica básica*, 3a. Fondo de Cultura Económica, 2015.
- [6] D. Malacara-Hernández and Z. Malacara-Hernández, *Handbook of optical design*, 3rd ed. CRC Press, 2017.
- [7] P. M. Kiely, G. Smith, and L. G. Carney, “The mean shape of the human cornea,” *Opt. Acta Int. J. Opt.*, vol. 29, no. 8, pp. 1027–1040, 1982.
- [8] C. Edmund and E. Sjøntoft, “The central-peripheral radius of the normal corneal curvature: a photokeratoscopic study,” *Acta Ophthalmol.*, vol. 63, no. 6, pp. 670–677, 1985.

- [9] J. M. González-Méijome, C. Villa-Collar, R. Montés-Micó, and A. Gomes, “Asphericity of the anterior human cornea with different corneal diameters,” *J. Cataract Refract. Surg.*, vol. 33, no. 3, pp. 465–473, 2007.
- [10] E. Yebra-Pimentel, J. M. González-Méijome, A. Cerviño, M. J. Giráldez, J. González-Pérez, and M. A. Parafita, “Asfericidad corneal en una población de adultos jóvenes: implicaciones clínicas,” *Arch. Soc. Esp. Oftalmol.*, vol. 79, no. 8, pp. 385–391, 2004.
- [11] D. P. Piñero, J. C. Nieto, and A. Lopez-Miguel, “Characterization of corneal structure in keratoconus,” *J. Cataract Refract. Surg.*, vol. 38, no. 12, pp. 2167–2183, 2012.
- [12] H. A. Swarbrick, “Orthokeratology review and update,” *Clin. Exp. Optom.*, vol. 89, no. 3, pp. 124–143, 2006.
- [13] J. Schwiegerling and J. E. Greivenkamp, “Using corneal height maps and polynomial decomposition to determine corneal aberrations,” *Optom. Vis. Sci.*, vol. 74, no. 11, 1997.
- [14] D. Malacara-Hernández and S. L. DeVore, “Interferogram evaluation and wavefront fitting,” in *Optical Shop Testing*, 2nd ed., D. Malacara-Hernández, Ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1992, pp. 455–500.
- [15] C. M. Oliveira, A. Ferreira, and S. Franco, “Wavefront analysis and Zernike polynomial decomposition for evaluation of corneal optical quality,” *J. Cataract Refract. Surg.*, vol. 38, no. 2, pp. 343–356, 2012.
- [16] P. Artal and A. Guirao, “Contributions of the cornea and the lens to the aberrations of the human eye,” *Opt. Lett.*, vol. 23, no. 21, pp. 1713–1715, 1998.
- [17] R. A. Applegate, G. Hilmantel, H. C. Howland, E. Y. Tu, T. Starck, and E. J. Zayac, “Corneal first surface optical aberrations and visual performance,” vol. 16, no. 5, pp. 507–514, 2000.
- [18] J. Schwiegerling and J. E. Greivenkamp, “Keratoconus detection based on videokeratoscopic height data,” *Optom. Vis. Sci. Off. Publ. Am. Acad. Optom.*, vol. 73, no. 12, pp. 721–728, 1996.
- [19] J. Schwiegerling, “Cone dimensions in keratoconus using Zernike polynomials,” *Optom. Vis. Sci.*, vol. 74, no. 11, pp. 963–969, 1997.
- [20] J. C. He, J. Gwiazda, F. Thorn, and R. Held, “Wave-front aberrations in the anterior corneal surface and the whole eye,” *JOSA A*, vol. 20, no. 7, pp. 1155–1163, 2003.
- [21] T. Oshika, S. D. Klyce, R. A. Applegate, and H. C. Howland, “Changes in corneal wavefront aberrations with aging,” *Investig. Ophthalmol. Vis. Sci.*, vol. 40, no. 7, pp. 1351–1355, 1999.
- [22] A. Guirao, M. Redondo, and P. Artal, “Optical aberrations of the human cornea as a function of age,” *JOSA A*, vol. 17, no. 10, pp. 1697–1702, 2000.

## Capítulo 2

### Topografía Corneal

Se refiere como topografía corneal a la información de altura que tiene cada punto de la superficie anterior de la córnea. Las medidas de altura pueden ser medidas absolutas respecto a un plano, o respecto a una superficie de referencia, generalmente una esfera. Es natural pensar que tener la información de altura de la superficie corneal es ideal en cualquier diagnóstico clínico en oftalmología, sin embargo, es usual encontrar que los mapas de curvatura, que no representan la forma real de la córnea, sean los descriptores más usados en cualquier entorno clínico para evaluar el estado de la topografía corneal del ojo y sus aberraciones [1], además de ser útiles para la prescripción de lentes y lentes de contacto [2]. Esto último porque la curvatura es directamente proporcional a la potencia óptica, o lo que es lo mismo, poder de convergencia o divergencia. En general, cualquier topógrafo comercial realiza el cálculo de los mapas de elevación y de curvaturas.

Por lo anterior, no se debe pensar que la topografía corneal y los respectivos mapas de elevación no son relevantes, ellos son particularmente indispensables en la planeación de cirugías refractivas. En estas cirugías se remueve material de la córnea, dándole una nueva forma a la superficie anterior. Conocer la topografía antes de la cirugía permite cuantificar qué tanto material debe ser removido para obtener la corrección refractiva deseada. Así mismo, una evaluación posterior de la topografía hace posible evaluar el procedimiento quirúrgico en busca de errores de ablación de tejido corneal [1].

Para la medición de la topografía corneal se han desarrollado distintas técnicas, de las cuales, en el presente Capítulo se van a describir de forma general aquellas que son más comunes y con amplia aplicación clínica; entre las técnicas revisadas se encuentra la topografía corneal basada en la proyección de anillos de Plácido. La revisión de esta técnica llevará a la definición del error del rayo oblicuo, lo cual será introductorio a la propuesta de solución que se presentará en el Capítulo 3.



## 2.1. Técnicas para la Medición de Topografía Corneal

Según Mejía-Barbosa Y., et al, [3], las técnicas con las que generalmente se realiza la medición de la topografía de la superficie anterior de la córnea pueden ser clasificadas según el principio óptico empleado para la medida: reflexión especular, reflexión difusa y luz esparcida. Para la reflexión especular se tienen los sistemas basados en anillos de Placido [4], en la deflectometría Moiré [5], [6], en el uso de la prueba de Hartmann [7], [8], en la prueba de Shack-Hartmann [9], en la prueba de pantallas nulas [10]–[12] y en interferometría; un ejemplo de este último es el uso de un interferómetro de Twyman-Green para la medición de la topografía corneal [13]. En estas técnicas la superficie anterior de la córnea es considerada como una superficie reflectora de un espejo o de una lente que genera una imagen virtual que debe ser capturada y posteriormente procesada.

Para la reflexión difusa, las propiedades reflectoras de la córnea deben ser modificadas de manera invasiva colocando fluoresceína de sodio sobre la superficie de la córnea, con ello la luz incidente se reflejará en todas las direcciones permitiendo que se puedan emplear técnicas basadas en proyección de franjas, por ejemplo, la perfilometría de transformada de Fourier [14], [15], la rasterestereografía [16] y franjas de Moiré [17].

El esparcimiento de la luz es empleado en sistemas basados en la lámpara de hendidura, donde se emplea la luz esparcida a medida que esta atraviesa la superficie corneal. Este tipo de sistemas tiene la ventaja de poder evaluar no solo la superficie anterior, sino también la superficie posterior de la córnea [3]. Adicionalmente, existen otros sistemas que también permiten obtener información tridimensional de la córnea, desde la paquimetría ultrasónica que es una técnica que requiere del contacto con la córnea para medir únicamente su espesor en un punto específico [18], hasta los métodos más avanzados como lo son la aquellos basados en las imágenes de Scheimpflug [19], y la tomografía de coherencia óptica (OCT). Esta última técnica no solo examina la córnea sino también permite determinar la estructura del segmento posterior del ojo, la posición [20] y estructura de la parte central del iris [21], la biometría de la cámara, opacidades del humor vítreo [19], [22], y la estructura de la retina [23], [24].

De las técnicas basadas en esparcimiento de la luz, la lámpara de hendidura y las imágenes de Scheimpflug son técnicas consideradas ineludibles al momento de evaluar cirugías corneales, o al diagnosticar y monitorear patologías corneales [25]. Por ello, con la intención de ampliar el marco teórico de esta tesis, este par de técnicas serán presentadas a continuación con un poco de más detalle. Posteriormente, en la siguiente sección será introducida formalmente la técnica de topografía corneal basada en anillos de Plácido, que a pesar de ser una técnica muy antigua continúa siendo ampliamente usada en diversas aplicaciones clínicas. Justamente, uno de los aportes de esta tesis es una propuesta de mejora a esta técnica de topografía corneal y será presentada en el Capítulo 3.

### 2.1.1. Lámpara de Hendidura

La lámpara de hendidura es un instrumento creado por Allvard Gullstrand en 1911 que permite la examinación microscópica de la cámara anterior de la córnea, el cristalino y la porción anterior de la cámara vítrea. Es un instrumento con distancia de trabajo grande lo que facilita su uso en la inspección clínica del ojo en un consultorio oftalmológico. La lámpara de hendidura consiste básicamente de dos sistemas ópticos, el sistema de iluminación y el sistema de observación. El sistema de iluminación proyecta una rendija angosta sobre la córnea, la luz es reflejada por la superficie anterior de la córnea, y luego es esparcida por las estructuras internas del ojo. Tanto la luz reflejada como la luz esparcida son capturadas por el sistema de observación que consta de un microscopio binocular estereoscópico que permite tener distintas magnificaciones, entre 6 y 40 veces el tamaño real, proporcionando siempre una imagen erecta [26]. Los sistemas de iluminación y observación están montados en un mecanismo giratorio cuyo eje coincide con el lugar en donde se forma la imagen de la rendija y se encuentra en el foco del microscopio binocular. El mecanismo giratorio permite modificar los ángulos de iluminación y observación para así inspeccionar las distintas estructuras del ojo. Con la lámpara de hendidura se observan principalmente cuatro imágenes deformadas de la rendija, cada una formada por las superficies anterior y posterior de la córnea y el cristalino [26]. La deflexión de la luz de la rendija por cada superficie hace posible que, con los principios de la triangulación, se pueda realizar una medición absoluta de la elevación de cada punto de las superficies que conforman la cámara anterior y posterior del ojo [27].

Si los principios de la lámpara de hendidura son usados de forma secuencial es posible obtener la topografía de toda la superficie corneal. Esto lo realiza un instrumento llamado Orbscan II/IIz [28], que con un proyector muestrea dos veces la córnea del paciente, proyectando secuencialmente 20 rendijas por muestreo, de cada rendija se analizan 240 puntos para al tener un total de 9600 puntos de medida sobre el ojo [27]. De forma complementaria, el instrumento posee un sistema de anillos de Plácido<sup>2</sup> que mide simultáneamente la curvatura de la superficie anterior de la córnea. Con el Orbscan II/IIz es posible medir la altura de las superficies anterior y posterior de la córnea, el iris, y la superficie anterior del cristalino. A partir de estas mediciones se realizan cálculos como las topografías de ambas superficies de la córnea, el espesor corneal (paquimetría corneal), la potencia de la córnea y demás mapas de curvaturas típicos en un topógrafo corneal [27].

La desventaja de esta técnica radica en la dificultad para detectar detalles topográficos cuando se examinan córneas opacas u operadas; en estas situaciones la medición es afectada por el alto esparcimiento de la luz por la superficie anterior de la córnea [25]. Adicionalmente existen controversias respecto al desempeño del equipo y su limitada repetitividad en las mediciones realizadas sobre la superficie posterior de la córnea [29].

---

<sup>2</sup> El proceso de medición con los anillos de Plácido será explicado en la Sección 2.2

### 2.1.2. Imágenes de Scheimpflug

Como en una lámpara de hendidura el sistema de observación es un microscopio, su poca profundidad de campo hace muy difícil obtener en una misma captura la forma de la córnea y del cristalino [19]. Para mejorarlo se puede emplear el principio de Scheimpflug que permite obtener la imagen de un objeto inclinado, maximizando la profundidad de foco y minimizando la distorsión [30]. Para ello se puede seguir cualquiera de las siguientes dos estrategias: inclinar la lente o inclinar el plano del sensor. La magnitud de la inclinación dependerá de la pendiente del objeto oblicuo a ser observado, en tanto la prolongación del plano imagen, el plano objeto y el plano de la lente se intercepten en la “línea de Scheimpflug”, posición en donde debe ser ubicada la lámpara de hendidura [19] que ilumina la sección de interés del ojo, que viene desde la córnea hasta la superficie posterior del cristalino.

Desde los años 1990 las imágenes de Scheimpflug han sido usadas en el desarrollo de equipos comerciales para la evaluación del ojo humano, los principales equipos son el Galilei de Ziemer, el Sirius de CSO y el Pentacam de Oculus, siendo este último uno de los más conocidos. En un Pentacam se emplea un sistema de escaneo del ojo que toma hasta 100 imágenes de Scheimpflug en 2 segundos, el cual incluye un sistema de visión que monitorea y compensa los movimientos involuntarios del ojo [19]. El sistema de escaneo gira en trayectorias circulares alrededor de un eje fijo tomando imágenes solo cuando se alcanza una velocidad constante de rotación, la trayectoria circular genera una mayor densidad de puntos de muestreo en el área central del ojo [31]. La información adquirida permite la reconstrucción tridimensional de la cámara anterior del ojo generando imágenes tomográficas que permiten extraer la paquimetría de la córnea, mapas topográficos y de curvatura de las superficies de la córnea y el cristalino. Adicionalmente, de las características de la luz esparcida el Pentacam extrae información de la opacidad del cristalino que es útil para la detección de cataratas [19].

## 2.2. Topografía Corneal Basada en Anillos de Plácido

A pesar de las evidentes ventajas que se obtendrían al emplear equipos sofisticados como el Orbscan o el Pentacam, los topógrafos corneales basados en anillos de Plácido continúan siendo la técnica más común para la evaluación clínica de la topografía corneal. Con sus más de 140 años de uso, esta técnica sigue siendo vigente por su simplicidad, cómoda interpretación de resultados y bajo costo del equipo; por lo que es muy común encontrar un topógrafo de este tipo en casi cualquier consultorio oftalmológico. Su uso se remonta al año 1880 cuando el oftalmólogo Portugués Antonio Plácido inspeccionaba la forma de la córnea de sus pacientes viendo a través de un pequeño agujero central de una paleta que tenía círculos claros y oscuros [4].

Un topógrafo basado en anillos de Plácido emplea una serie de anillos concéntricos que iluminan la superficie anterior de la córnea. La luz reflejada por la córnea forma una imagen de anillos perfectamente concéntricos si la superficie anterior tiene forma esférica, en caso contrario la imagen tendrá anillos deformados que codifican las aberraciones de la superficie. En el topógrafo, los anillos de Plácido se ubican en una pantalla que en la literatura se conoce como “target” o “pantalla de Plácido”. En sus inicios, esta pantalla tenía una forma plana lo que permitía inspeccionar solamente la parte central de la córnea [32]. En 1957, Knoll H. A., et al., [33], propusieron una pantalla de Plácido hemisférica para lograr medir zonas más amplias de la córnea aunque esto traía la dificultad de sombras por la nariz y cejas del paciente [3]. En los topógrafos actuales, como el del esquema de la Figura 2.1, la pantalla de Plácido tiene forma de cono para tener una distancia de trabajo corta y un cubrimiento amplio de la córnea [3]. En este sistema se colectan los rayos que pasan a través del punto nodal equivalente de la lente y la imagen de los anillos es capturada por una cámara para luego ser procesada por la computadora del topógrafo. También existe otra configuración que solo colecta los rayos paralelos al eje óptico, para ello la pupila real del sistema está ubicada en el punto focal de la lente, ver Figura 2.2. En la Figura 2.3 se presenta una imagen típica de anillos capturada con un topógrafo corneal de anillos de Plácido [34].

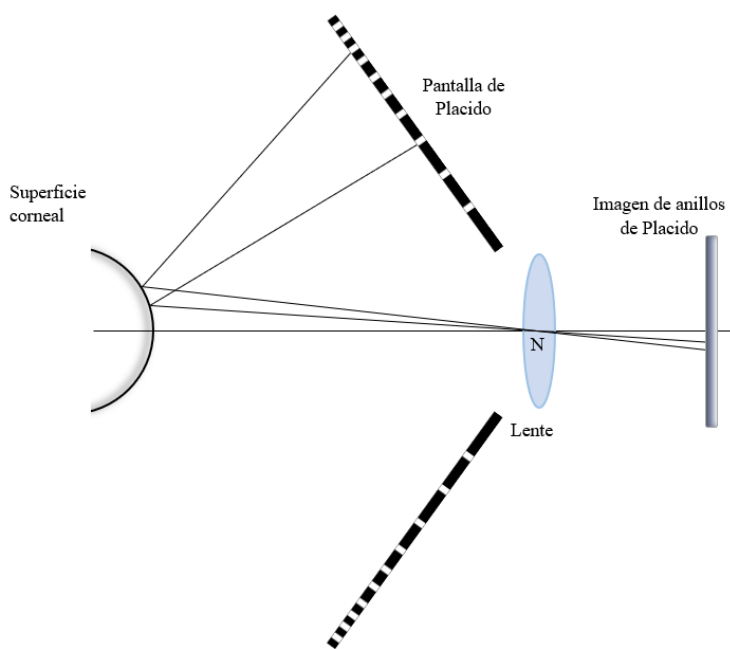


Figura 2.1. Esquema de un topógrafo corneal basado en anillos de Plácido con un sistema óptico que colecta los rayos que pasan a través del punto nodal equivalente N.

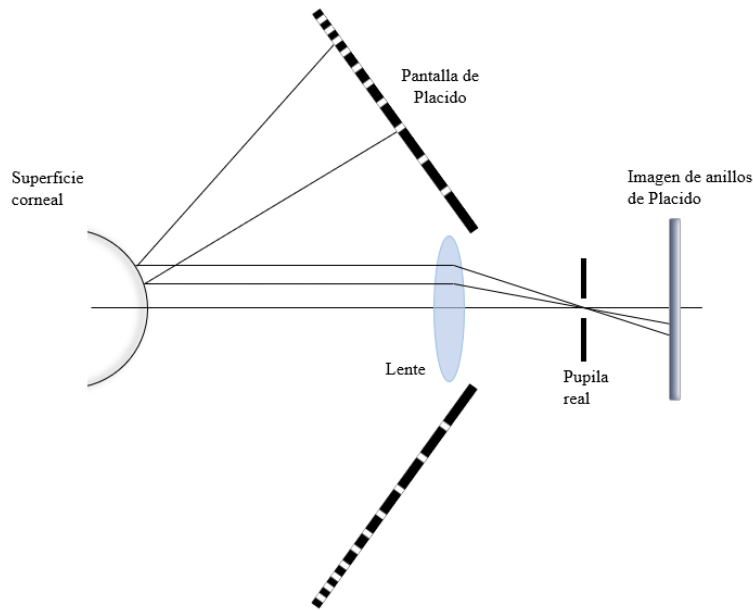


Figura 2.2. Esquema de un topógrafo corneal basado en anillos de Plácido con un sistema óptico que solo colecta los rayos reflejados por la córnea que son paralelos al eje óptico.

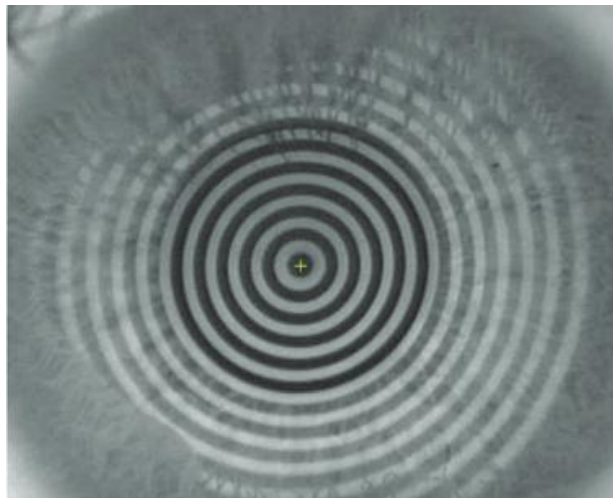


Figura 2.3. Imagen de anillos de Plácido sobre una córnea [34].

Mientras que en la lámpara de hendidura y en las imágenes de Scheimpflug se mide directamente la elevación absoluta de las superficies, en un registro de anillos de Plácido se puede inferir las pendientes del frente de onda que llega al detector desde la reflexión de la luz sobre la superficie de la córnea. Estas pendientes también pueden expresarse en términos de aberraciones transversales ( $TA$ ) cuando estas son medidas sobre un plano de observación ubicado a una distancia  $r$ . El hecho de emplear aberraciones transversales del frente de onda en lugar de medidas absolutas de elevación de la córnea hace que los cálculos de los mapas

de elevación requieran procesos de integración, y los mapas de curvatura requieran diferenciación de la información extraída de los anillos de Plácido. Proceso diferente sucede en la lámpara de hendidura donde la pendiente del frente de onda y los mapas de curvatura requieren una y dos diferenciaciones, respectivamente. Según Karpecki P. M. [27], aunque sea mayor el ruido de alta frecuencia generado al diferenciar, este podría ser preferible al ruido de baja frecuencia que se obtiene al integrar, ya que este representa aberraciones de bajo orden que en algunas ocasiones puede ser difícil de eliminar.

Para entender la forma en la que se puede extraer la topografía corneal en los topógrafos de anillos de Plácido, es necesario revisar la geometría del topógrafo presentado en la Figura 2.4. Ahí, un punto sobre el anillo luminoso del topógrafo actúa como fuente puntual que ilumina la superficie de la córnea, la luz reflejada por la córnea es capturada por la lente para formar un punto en el plano imagen. En los topógrafos convencionales la reconstrucción de la córnea se realiza un meridiano a la vez, empleando el plano meridional que se presenta en la Figura 2.4, este plano contiene el eje óptico del equipo, los puntos objeto e imagen y el punto reflejante de la córnea. La anterior aproximación asume que el rayo principal del cono de luz que forma un punto de la imagen siempre está contenido dentro dicho plano, lo cual excluye los rayos oblicuos [35], que pueden ser posibles y generan un error conocido como el error del rayo oblicuo [36]. Esta aproximación meridional se emplea en la mayoría de topógrafos comerciales [37]–[39], funcionando bien siempre que el mayor componente de la topografía corneal tenga simetría de rotación y que las aberraciones corneales no sean tan grandes como para ser consideradas patológicas [3], [39].

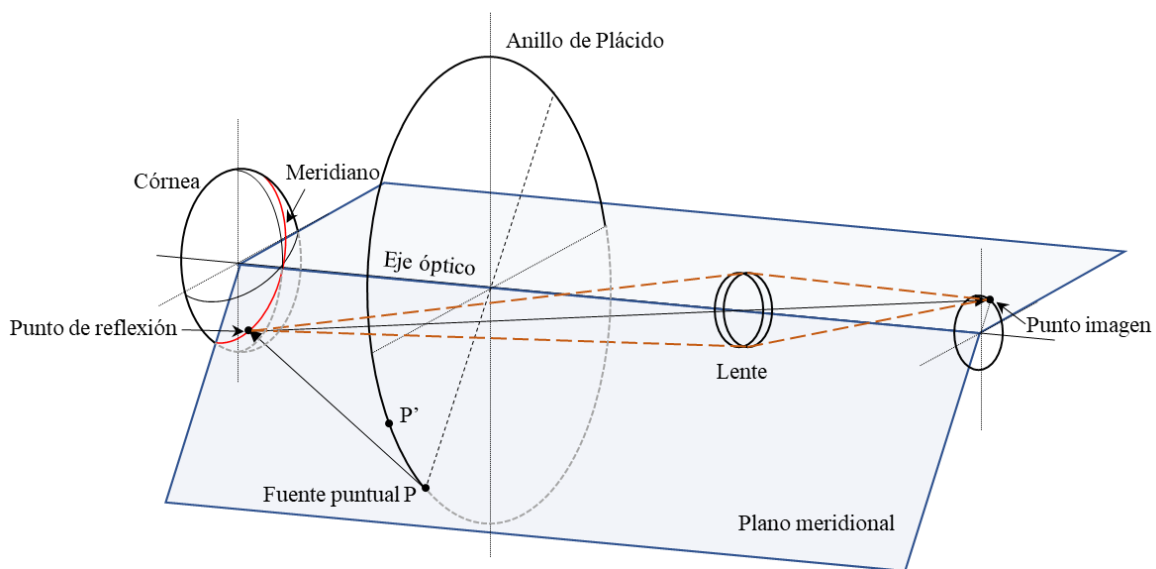
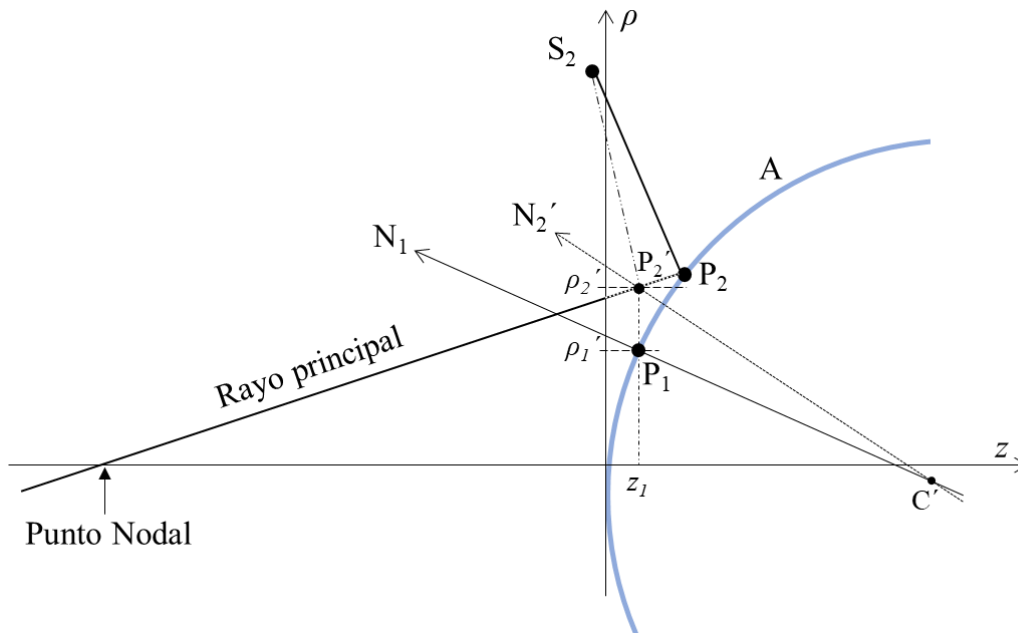


Figura 2.4. Esquema detallado de un topógrafo de anillos de Plácido.

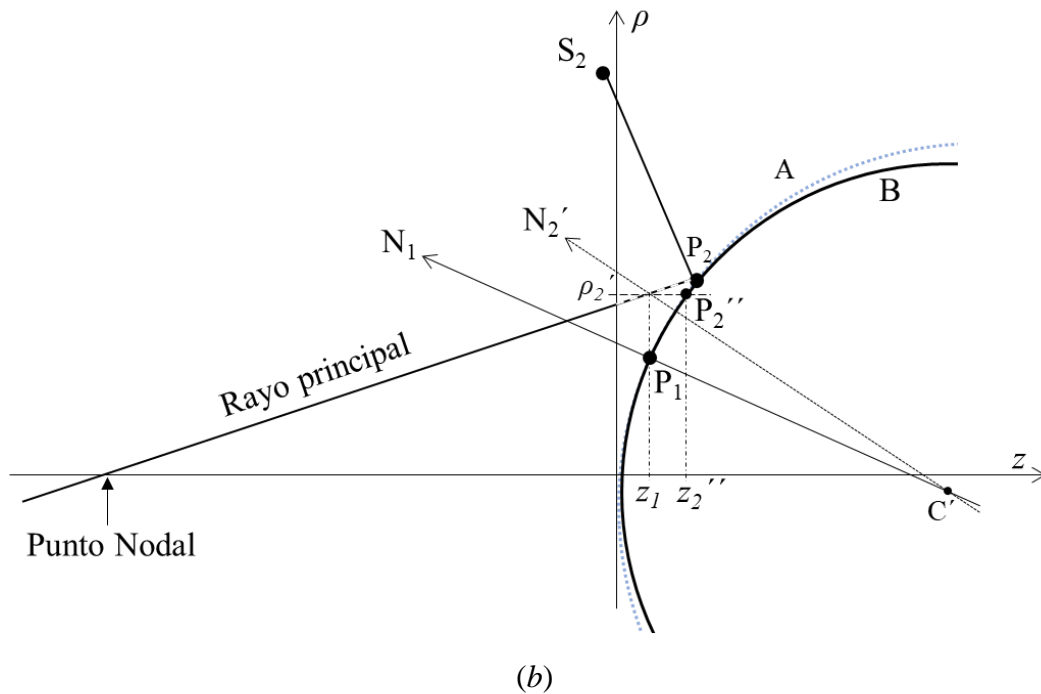
La reconstrucción del meridiano típicamente se realiza a través de un algoritmo de arc-step iterativo que emplea un valor conocido de la superficie corneal; generalmente el ápice de la

córnea que se logra a partir de la geometría del instrumento y la alineación de la córnea del paciente. Para explicar el algoritmo se hará referencia al esquema de la Figura 2.5 (a-b), donde se trata de encontrar las coordenadas del punto  $P_2$  a partir del punto cercano  $P_1$  conocido con anticipación. Las coordenadas del sistema son  $\rho$  y  $z$ , siendo  $z$  quien representa la altura de la superficie corneal. El origen del sistema de coordenadas se ubica en el ápice de la córnea y las coordenadas de  $P_1$  son  $(\rho_1, z_1)$ .

La primera etapa del algoritmo es aproximar el segmento del meridiano entre  $P_1$  y  $P_2$  a una sección de un círculo A. Con la inclinación conocida del rayo principal para el punto  $P_2$ , y la altura  $z_1$ , se logra una primera aproximación de la posición real desconocida del punto  $P_2$ , etiquetada como  $P_2'$  en la Figura 2.5 (a), con ello, las coordenadas de  $P_2'$  son  $(\rho_2', z_1)$ . Como la luz que forma el punto imagen contenido en el plano meridional bajo estudio proviene del punto  $S_2$  sobre el anillo, con la ley de la reflexión se calcula la normal  $N_2'$  al punto  $P_2'$ . Extendiendo las normales  $N_1$  y  $N_2'$  se puede hacer una primera estimación del centro de curvatura  $C'$  para una siguiente sección circular que representaría de mejor manera la sección del círculo que une  $P_1$  y  $P_2$ . Ahora bien, con  $C'$  y  $P_1$  se traza el círculo B, y con la intersección de la coordenada  $\rho_2'$  con este círculo se encuentra una segunda aproximación llamada  $P_2''$ , ver Figura 2.5 (b). Este punto  $P_2''$  con coordenadas  $(\rho_2'', z_2'')$  será el punto inicial para la siguiente iteración. El proceso se repite iterativamente hasta que se alcance el mínimo umbral de error definido entre iteraciones. Progresivamente, de anillo a anillo, se reconstruye todo el meridiano, y el mismo proceso se repite en todos los meridianos hasta cubrir la superficie corneal. Para más detalles de un algoritmo de arc-step se recomienda consultar el trabajo de Campbell C. [39].



(a)



(b)  
 Figura 2.5. Construcción geométrica que muestra el funcionamiento del algoritmo de arc-step para aproximar una sección de un círculo al segmento del meridiano entre  $P_1$  y  $P_2$ .

Como se mencionó previamente, la condición para que sea válida la aproximación meridional empleada en la reconstrucción es que la superficie posea simetría de rotación, la cual fácilmente se rompe en una córnea con cualquier astigmatismo patológico. En este caso, la influencia del error del rayo oblicuo es considerable y debe ser tenido en cuenta a la hora de implementar un algoritmo de reconstrucción en un topógrafo de anillos de Plácido.

Antes de continuar, es pertinente aclarar que en esta sección se ha empezado a emplear indistintamente los conceptos de frente de onda y de superficie para referirse a la superficie bajo prueba, muy a pesar de la naturaleza distinta de ambos conceptos. Es importante notar que, en la situación bajo estudio, el frente de onda representa una superficie imaginaria donde las normales de los rayos de la luz proveniente de las fuentes luminosas del topógrafo son perpendiculares. El frente de onda incide sobre la superficie corneal para luego ser reflejado por la misma. En este proceso el frente de onda recorre aproximadamente dos veces (ida y vuelta al reflejarse por la superficie) cada uno de los defectos de la superficie, bien sean depresiones o abultamientos. En otras palabras, en este contexto la magnitud del frente de onda y la superficie están relacionadas por un factor aproximado de 2.



### 2.3. Error del Rayo Oblicuo

El error del rayo oblicuo es la consecuencia de una “*incapacidad aparente*” que tienen los anillos de Plácido para procesar información cuando se involucran rayos oblicuos en la reconstrucción de la topografía corneal. Esta *incapacidad aparente* viene del hecho de usar una fuente de luz continua como un anillo luminoso de Plácido, lo que hace *aparentemente imposible* relacionar un punto particular de la imagen de anillos con la fuente puntual que lo generó. Por esta aparente falta de relación, incluso se ha aseverado que la *información perdida por el error del rayo oblicuo no puede ser recuperada* [40].

En la aproximación meridional mencionada en la sección anterior, se considera que la fuente puntual, el eje óptico y el punto imagen están contenidos en el plano meridional, sin embargo, cualquier otra inclinación que tuviera el punto de reflexión en la córnea generaría cualquier otro punto imagen que no necesariamente estaría contenido en el plano meridional, en otras palabras, la luz que forma el punto imagen podría provenir de infinitas fuentes puntuales del anillo luminoso de Plácido, por ejemplo del punto P’ mostrado en la Figura 2.4. Esta falta de claridad entre qué puntos objeto e imagen existe correspondencia, en definitiva, es el origen del error del rayo oblicuo. En el Capítulo 3 se presentará una propuesta de solución fundamentada en los principios de las pruebas ópticas.

Antes de eso, es pertinente mencionar que en la literatura ya existen algunas soluciones a este error. La solución más simple es cambiar el sistema de anillos luminosos continuos por patrones bidimensionales, por ejemplo, incluir líneas radiales perpendiculares a los anillos de Plácido [41], [42], o un patrón con áreas blancas y negras con geometría similar a la de un tablero de dardos [43], [44]; en ambas propuestas los puntos imágenes que corresponden a los puntos objeto en el target del topógrafo son fácilmente reconocibles, eliminando así el error del rayo oblicuo.

A pesar de la existencia de esta dificultad inherente a los anillos de Plácido, esta técnica sigue siendo bastante empleada en la topografía corneal, por ello se han desarrollado soluciones sofisticadas al error del rayo oblicuo [44]–[47]. Halstead M.A., et al., en sus trabajos [44]–[46] emplean una imagen de anillos de Plácido como entrada del sistema, realizan un trazado inverso de rayos que sigue la ley de reflexión desde cada punto de la imagen de anillos hasta el target, utilizando un modelo preestablecido de la superficie corneal. Este modelo de la córnea se va ajustando iterativamente hasta que genere una imagen de anillos igual que la entrada del sistema. Cuando esto sucede el modelo de la córnea corresponde con la superficie corneal que se está midiendo. No obstante, por los métodos matemáticos empleados, existía la posibilidad de que se entregaran múltiples soluciones, lo cual representaba la posibilidad de que una única imagen de anillos de Plácido podría ser generada por distintas topografías corneales; esto era también soportado por la hipótesis de que los patrones circulares no podrían detectar una inclinación sagital de la superficie corneal. Lo anterior es algo que Klein S. A., parte del mismo equipo de trabajo de Halstead M. A., en su trabajo [47] desmintió al demostrar que sin importar la forma de la superficie corneal su algoritmo siempre entregaba una única y correcta solución. Adicionalmente, Klein S. A. propone un método arc-step como

el que se mencionó en la Sección 2.2, con la gran diferencia de que se permiten las normales a la córnea que no están contenidas en el plano meridional, es decir, el error del rayo oblicuo no es ignorado.

Otras soluciones del tipo arc-step son las propuestas por Turuwhenua J., et al. [48] y Turuwhenua J. [49], que solucionan el error del rayo oblicuo en una etapa de pos-procesamiento o de forma directa, respectivamente. Estos algoritmos corrigen el error del rayo oblicuo realizando una implementación directa del método Halstead M. A., et al. [44]–[46] en un algoritmo de arc-step. Este tiene un desempeño superior, incluso al mismo algoritmo de Klein S. A. [47].

Finalmente, es importante aclarar que, aunque los métodos mencionados anteriormente solucionan el efecto del error del rayo oblicuo en la topografía corneal recuperada con anillos de Plácido, parece ser que aún no existe una implementación comercial [50], [51]. En este punto se desconoce si esta falta de implementación obedece a una motivación de índole comercial o es debido a la complejidad de los métodos expuestos.

Tras haber estudiado las técnicas de topografía corneal y en más detalle la topografía corneal basada en anillos de Plácido, en el siguiente Capítulo será presentada una nueva propuesta de solución al error del rayo oblicuo que es sencilla, intuitiva y directa, cuya implementación comercial podría ser factible, aunque esta posibilidad va más allá del alcance de la presente tesis.

## 2.4. Conclusiones

Tras conocer algunos aspectos anatómicos del ojo en el Capítulo anterior, aquí se dieron a conocer algunas de las técnicas que permiten extraer la topografía de la superficie anterior de la córnea humana, clasificándolas según el principio óptico empleado para hacer la medición: reflexión difusa, especular y esparcimiento. Entre estas técnicas se destacaron la lámpara de hendidura, las imágenes de Scheimpflug y los anillos de Plácido. Las primeras dos técnicas se destacan por ser los fundamentos de los instrumentos ópticos que son referencia en la topografía corneal, mientras que los anillos de Plácido son destacados por ser la técnica de más amplio uso y versatilidad dentro de un consultorio clínico.

Por ser la topografía corneal basada en anillos de Plácido el objeto de estudio de esta tesis, se realizó una descripción detallada de la técnica, su evolución, su arreglo experimental actual y uno de los algoritmos de arc-step típicos empleados para la recuperación de la superficie corneal a través de una imagen de anillos de Plácido distorsionados; aquí cualquier distorsión de unos anillos perfectamente concéntricos representa una desviación de la córnea de una forma esférica. El algoritmo de arc-step reconstruye la superficie corneal un meridiano a la vez, asumiendo que tanto la luz que ilumina la córnea como la que es reflejada para formar la imagen de anillos, está contenida en un plano meridional. Esta aproximación restringe la efectividad de la técnica a que la córnea sea rotacionalmente simétrica, cualquier desviación

significativa de esta forma geométrica genera el error del rayo oblicuo, el cual debe ser tenido en cuenta para una correcta medición de la topografía corneal.

Para solucionar el error del rayo oblicuo existen distintas soluciones, algunas de ellas proponen cambiar los anillos de Plácido por un patrón bidimensional para tener una relación conocida entre puntos objeto e imagen, o bien emplear métodos sofisticados iterativos como trazado de rayos inverso, o algoritmos modificados de arc-step que compensan el error del rayo oblicuo. Ninguno de ellos con aplicación comercial conocida.

## Bibliografía

- [1] M. Wang and L. Kugler, *Atlas and Clinical Reference Guide for Corneal Topography*. SLACK Incorporate, 2014.
- [2] J. Schwiegerling, J. E. Greivenkamp, and J. M. Miller, “Representation of videokeratoscopic height data with Zernike polynomials,” *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 12, no. 10, pp. 2105–2113, 1995.
- [3] Y. Mejía-Barbosa and D. Malacara-Hernández, “A review of methods for measuring corneal topography,” *Optom. Vis. Sci.*, vol. 78, no. 4, pp. 240–253, 2001.
- [4] A. Plácido, “Novo instrumento de exploração da córnea,” *Period. d’Oftalmologica Pract. Lisbon*, vol. 5, pp. 27–30, 1880.
- [5] O. Kafri and A. Livnat, “Reflective surface analysis using moiré deflectometry,” *Appl. Opt.*, vol. 20, no. 18, pp. 3098–3100, 1981.
- [6] O. Kafri and I. Glatt, “High-sensitivity reflection-transmission moiré deflectometer,” *Appl. Opt.*, vol. 27, no. 2, pp. 351–353, 1988.
- [7] Y. Mejía-Barbosa and D. Malacara-Hernández, “Object surface for applying a modified Hartmann test to measure corneal topography,” *Appl. Opt.*, vol. 40, no. 31, pp. 5778–5786, 2001.
- [8] Y. Mejía and J. C. Galeano, “Corneal topographer based on the Hartmann test,” *Optom. Vis. Sci.*, vol. 86, no. 4, pp. 370–381, 2009.
- [9] F. Zhou, X. Hong, D. T. Miller, L. N. Thibos, and A. Bradley, “Validation of a combined corneal topographer and aberrometer based on Shack–Hartmann wave-front sensing,” *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 21, no. 5, pp. 683–696, 2004.
- [10] M. Campos-García, A. Estrada-Molina, and R. Díaz-Uribe, “New null screen design for corneal topography,” *Int. Comm. Opt. (ICO 22)*, vol. 8011, no. October 2011, p. 801124, 2011.
- [11] M. Campos-García, C. Cossio-Guerrero, V. I. Moreno-Oliva, and O. Huerta-Carranza, “Surface shape evaluation with a corneal topographer based on a conical null-screen with a novel radial point distribution,” *Appl. Opt.*, vol. 54, no. 17, pp. 5411–5419,

2015.

- [12] D. Aguirre-Aguirre, C. Camargo Fierro, M. Campos-García, and V. E. Armengol-Cruz, “Obtaining the topography of human corneas with the null-screen testing method,” *Opt. Fabr. Testing, Metrol. VI*, vol. 10692, no. June, p. 1069216, 2018.
- [13] H. T. Kasprzak, W. Kowalik, and J. Jaroński, “Interferometric measurements of fine corneal topography,” *Proc. SPIE*, vol. 2329, pp. 32–39, 1995.
- [14] M. Takeda, H. Ina, and S. Kobayashi, “Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry,” *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 72, no. 1, pp. 156–160, 1982.
- [15] F. H. Jongsma, J. de Brabander, F. Hendrikse, and B. A. Stultiens, “Development of a wide field height eye topographer: validation on models of the anterior eye surface,” *Optom. Vis. Sci. Off. Publ. Am. Acad. Optom.*, vol. 75, no. 1, pp. 69–77, 1998.
- [16] J. W. Warnicki, P. G. Rehkopf, D. Y. Curtin, S. A. Burns, R. C. Arffa, and J. C. Stuart, “Corneal topography using computer analyzed rasterstereographic images,” *Appl. Opt.*, vol. 27, no. 6, pp. 1135–1140, 1988.
- [17] T. Kawara, “Corneal topography using moiré contour fringes,” *Appl. Opt.*, vol. 18, no. 21, pp. 3675–3678, 1979.
- [18] J. Huang *et al.*, “Evaluation of corneal thickness using a Scheimpflug-Placido disk corneal analyzer and comparison with ultrasound pachymetry in eyes after laser in situ keratomileusis,” *J. Cataract Refract. Surg.*, vol. 39, no. 7, pp. 1074–1080, 2013.
- [19] M. Kaschke, K.-H. Donnerhacke, and M. S. Rill, *Optical devices in ophthalmology and optometry*. John Wiley & Sons, 2014.
- [20] E. Martinez-Enriquez, P. Pérez-Merino, S. Marcos, S. Durán-Poveda, and I. Jiménez-Alfaro, “Estimation of intraocular lens position from full crystalline lens geometry: towards a new generation of intraocular lens power calculation formulas,” *Sci. Rep.*, vol. 8, no. 9829, pp. 1–11, 2018.
- [21] E. Martinez-Enriquez, M. Sun, M. Velasco-Ocana, J. Birkenfeld, P. Pérez-Merino, and S. Marcos, “Optical coherence tomography based estimates of crystalline lens volume, equatorial diameter, and plane position,” *Investig. Ophthalmology Vis. Sci.*, vol. 57, no. 9, pp. OCT600–OCT610, 2016.
- [22] I. Grulkowski, S. Manzanera, P. Artal, L. Cwiklinski, and F. Sobczuk, “SS-OCT with focus tunable optics for enhanced visualization of vitreous opacities (Conference Presentation),” *Ophthalmic Technol. XXVIII*, vol. 10474, p. 1047412, 2018.
- [23] O. Thouvenin *et al.*, “Ultrahigh resolution imaging of cellular dynamics in explanted corneas and retinas with ocular pathologies using dynamic full-field OCT (Conference Presentation),” *Ophthalmic Technol. XXVIII*, vol. 10474, p. 104740T, 2018.
- [24] Z. Liu, J. Crowell, F. Zhang, D. T. Miller, and K. Kurokawa, “Method to investigate temporal dynamics of ganglion and other retinal cells in the living human eye,” *Ophthalmic Technol. XXVIII*, vol. 10474, p. 104740W, 2018.

- [25] J. M. Jalife-Chavira, G. Trujillo-Schiaffino, P. G. Mendoza-Villegas, D. P. Salas-Peimbert, M. Anguiano-Morales, and L. F. Corral-Martínez, “Optical methods for measuring corneal topography: a review,” *Opt. Pura y Apl.*, vol. 52, no. 2, pp. 1–26, 2019.
- [26] D. Malacara-Hernández, *Óptica básica*, 3a. Fondo de Cultura Económica, 2015.
- [27] P. M. Karpecki, “The Bausch & Lomb Orbscan II/IIz anterior segment analysis system,” in *Corneal topography: a guide for clinical application in the wavefront era*, 2nd ed., M. Wang and T. Schroeder Swartz, Eds. SLACK Incorporated, 2012, pp. 103–117.
- [28] “Orbscan II,” *Technolas Perfect Vis. GmbH - A Bausch Lomb Co.*, 1999.
- [29] F. Cavas-Martínez, E. De La Cruz Sánchez, J. Nieto Martínez, F. J. Fernández Cañavate, and D. G. Fernández-Pacheco, “Corneal topography in keratoconus: state of the art,” vol. 3, no. 1, pp. 1–12, 2016.
- [30] R. Jain and S. P. S. Grewal, “Pentacam: principle and clinical applications,” *J. Curr. Glaucoma Pract.*, vol. 3, no. 2, pp. 20–32, 2009.
- [31] S. S. Khachikian and M. W. Belin, “Oculus Pentacam,” in *Corneal topography: a guide for clinical application in the wavefront era*, 2nd ed., M. Wang and T. Schroeder Swartz, Eds. SLACK Incorporated, 2006, pp. 117–126.
- [32] A. Gullstrand, “Procedure of the rays in the eye imagery-laws of first order,” in *Helmholtz’s treatise on physiological optics, Vol. 1*, H. Helmholtz and J. Southall, Eds. Rochester, NY: The Optical Society of America, 1924, pp. 301–58.
- [33] H. A. Knoll, R. Stimson, and C. L. Weeks, “New photokeratoscope utilizing a hemispherical object surface,” *JOSA*, vol. 47, no. 3, pp. 221–222, 1957.
- [34] D. P. Pinero, “Technologies for anatomical and geometric characterization of the corneal structure and anterior segment: a review,” in *Seminars in ophthalmology*, 2015, vol. 30, no. 3, pp. 161–170.
- [35] D. Malacara-Hernández and Z. Malacara-Hernández, *Handbook of optical design*, 3rd ed. CRC Press, 2017.
- [36] S. A. Klein, “Axial curvature and the skew ray error in corneal topography,” *Optom. Vis. Sci.*, vol. 74, no. 11, pp. 931–944, 1997.
- [37] R. Mattioli and N. K. Tripoli, “Corneal geometry reconstruction with the Keratron videokeratographer,” *Optometry and Vision Science*, vol. 74, no. 11, pp. 881–894, 1997.
- [38] D. Brenner, “Modeling the cornea with the topographic modeling system videokeratoscope,” *Optometry and Vision Science*, vol. 74, no. 11, pp. 895–898, 1997.
- [39] C. Campbell, “Reconstruction of the corneal shape with the MasterVue corneal topography system,” *Optom. Vis. Sci.*, vol. 74, no. 11, pp. 899–905, 1997.
- [40] F. Nasrin, R. V Iyer, and S. M. Mathews, “Simultaneous estimation of corneal

topography, pachymetry, and curvature,” *IEEE Trans. Med. Imaging*, vol. 37, no. 11, pp. 2463–2473, 2018.

- [41] R. A. Applegate and H. C. Howland, “Noninvasive measurement of corneal topography,” *IEEE Eng. Med. Biol. Mag.*, vol. 14, no. 1, pp. 30–42, 1995.
- [42] R. H. Rand, H. C. Rowland, and R. A. Applegate, “Mathematical model of a Placido disk keratometer and its implications for recovery of corneal topography,” *Optom. Vis. Sci.*, vol. 74, no. 11, pp. 926–930, 1997.
- [43] M. A. Halstead, B. A. Barsky, S. A. Klein, and R. B. Mandell, “A spline surface algorithm for reconstruction of corneal topography from a videokeratographic reflection pattern,” *Optom. Vis. Sci.*, vol. 72, no. 11, pp. 821–827, 1995.
- [44] M. A. Halstead, B. A. Barsky, S. A. Klein, and R. B. Mandell, “Reconstructing curved surfaces from specular reflection patterns using spline surface fitting of normals,” *Proc. 23rd Annu. Conf. Comput. Graph. Interact. Tech. - SIGGRAPH '96*, pp. 335–342, 1996.
- [45] M. A. Halstead, B. A. Barsky, S. A. Klein, and R. B. Mandell, “A spline surface algorithm for reconstruction of corneal topography from a videokeratographic reflection pattern,” *Optom. Vis. Sci.*, vol. 72, no. 11, pp. 821–827, 1995.
- [46] M. Halstead, Barsky BA, Klein SA, and Mandell RB, “Geometric modeling of the cornea using videokeratography,” *Math. methods curves surfaces*, pp. 213–223, 1995.
- [47] S. A. Klein, “Corneal topography reconstruction algorithm that avoids the skew ray ambiguity and the skew ray error,” *Optom. Vis. Sci.*, vol. 74, no. 11, pp. 945–962, 1997.
- [48] J. Turuwhenua and J. Henderson, “A novel low-order method for recovery of the corneal shape,” *Optom. Vis. Sci.*, vol. 81, no. 11, pp. 863–871, 2004.
- [49] J. Turuwhenua, “An improved low order method for corneal reconstruction,” *Optom. Vis. Sci.*, vol. 85, no. 3, pp. E211–E218, 2008.
- [50] J. J. Snellenburg, E. A. Hermans, B. Braaf, R. G. L. van der Heijde, V. A. D. P. Sicam, and J. J. Snellenburg, “Forward ray tracing for image projection prediction and surface reconstruction in the evaluation of corneal topography systems,” *Opt. Express*, vol. 18, no. 18, pp. 19324–19338, 2010.
- [51] T. Swartz, L. Marten, and M. Wang, “Measuring the cornea: the latest developments in corneal topography,” *Curr. Opin. Ophthalmol.*, vol. 18, no. 4, pp. 325–333, 2007.

## Capítulo 3

### Procesamiento de Anillos de Plácido

Respecto al error del rayo oblicuo presentado en la Sección 2.3 del Capítulo 2, el lector podrá recordar las frases: “*apparentemente imposible*”, “*incapacidad aparente*”, “*información perdida por el error del rayo oblicuo no puede ser recuperada*”. Estas frases hacen referencia a que con este error se puede considerar que los anillos de Plácido no son capaces de medir la topografía real de la superficie anterior de la córnea, lo cual no es cierto, la información está ahí, solo que está oculta en la continuidad del anillo. El error del rayo oblicuo es un error que al presentarse se propaga a lo largo de toda la reconstrucción de la córnea, que en caso de no solucionarse genera un efecto adverso significativo, especialmente en córneas distorsionadas [1].

Justamente, el objetivo de este Capítulo es mostrar que es posible encontrar una solución simple iterativa al error del rayo oblicuo partiendo de los principios básicos de las pruebas ópticas. Para ello hay que recordar que los anillos de Plácido miden aberraciones transversales del frente de onda y que, así como está técnica, existen muchas otras que han mostrado ser eficientes para medir las aberraciones transversales en superficies reflectantes, una de ellas es la prueba de Hartmann.

Partiendo de la prueba de Hartmann se va a mostrar que siguiendo sus principios es posible analizar también los anillos de Plácido, lo que trae consigo retos como la definición de la pantalla, la integración de las aberraciones transversales y finalmente la propuesta e implementación de la solución al error del rayo oblicuo.

### 3.1. Patrones de Hartmann con Simetría Circular

Entre 1900 y 1904 Hartmann J. [2]–[5] ideó una prueba para medir la lente objetivo de 80 cm de diámetro del telescopio refractivo “Gran Refractor” localizado en la ciudad de Potsdam, Alemania. En la prueba se emplea una pantalla con un arreglo de agujeros comúnmente llamada “Pantalla de Hartmann”, la cual es ubicada en la pupila de entrada o de salida del sistema bajo prueba [6]. En la Figura 3.1. se presenta un esquema experimental típico para una prueba de Hartmann que emplea una pantalla con un arreglo rectangular de agujeros, los cuales definen los puntos de muestreo de la superficie bajo prueba.

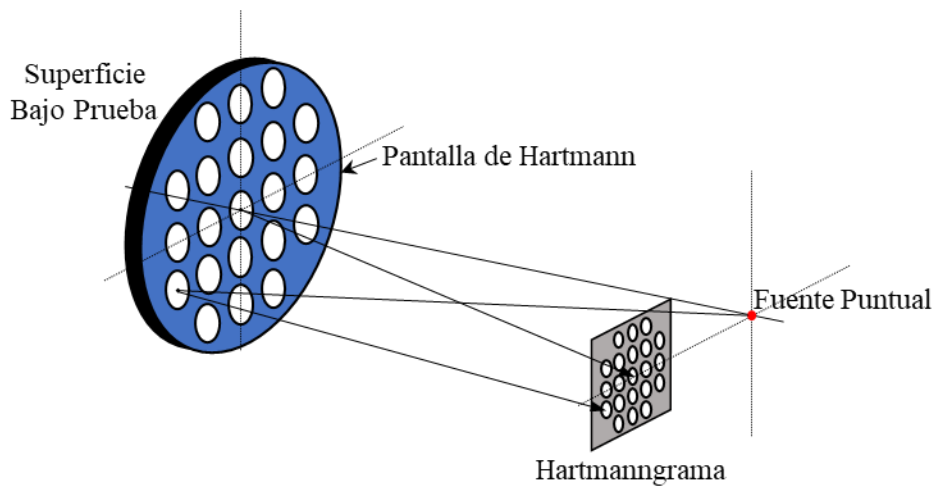


Figura 3.1. Esquema experimental de una prueba de Hartmann.

En el sistema óptico de la Figura 3.1, una fuente puntual ilumina la superficie solo en los lugares en donde están los agujeros de la pantalla, la luz reflejada forma un patrón de puntos sobre el plano de observación del sistema que es llamado Hartmanngrama o simplemente patrón de Hartmann. El plano de observación debe estar desplazado del foco de la superficie bajo prueba, generalmente adentro del foco para evitar el cruce de los rayos que provienen de la pantalla y así identificar correctamente los puntos en el patrón de Hartmann [6].

Con una pantalla rectangular si el espejo tiene una forma perfectamente esférica, el patrón de puntos tendrá también una forma rectangular perfecta; cualquier desviación de dicha forma será una medición de las aberraciones transversales presentes en la superficie bajo prueba, ver Figura 3.2.



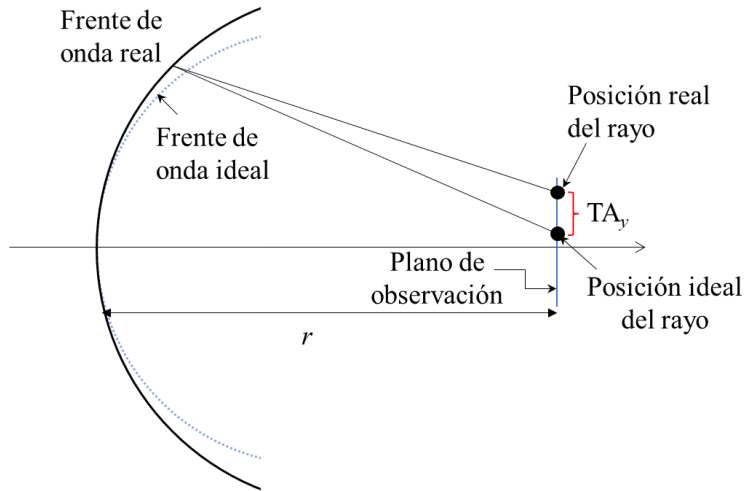


Figura 3.2. Aberración transversal como una representación del error del frente de onda<sup>3</sup>.

La relación existente entre el frente de onda  $W(x, y)$  y las aberraciones transversales  $TA_x$  y  $TA_y$  a lo largo de las coordenadas rectangulares  $x, y$ , están dadas, respectivamente, de forma aproximada por [6]:

$$\frac{\partial W(x, y)}{\partial x} = -\frac{TA_x(x, y)}{r}; \quad \frac{\partial W(x, y)}{\partial y} = -\frac{TA_y(x, y)}{r} \quad (1)$$

donde  $r$  es la distancia entre la pupila del frente de onda y el plano de observación.

Hay que mencionar que la Ecuación (1) es una aproximación a la relación entre las variaciones del frente de onda y las respectivas aberraciones transversales. La forma exacta de esta relación se puede encontrar en el trabajo de Rayces J. L. [7]. La diferencia con la Ecuación (1) es que en el punto específico de la superficie bajo prueba, la distancia al plano de observación es  $r$  menos el valor del frente de onda  $W$ . Omitir el frente de onda en los denominadores de los lados derechos de la Ecuación (1) significa que la magnitud del frente de onda podría ser despreciable en comparación al radio de la esfera de referencia [7]. Esta última consideración debe ser valorada en trabajos futuros que involucren experimentación, ya que en el contexto de la topografía corneal la aproximación podría no ser válida.

Así que teniendo en cuenta la Ecuación (1), si una técnica mide aberraciones transversales estas deben integrarse para obtener la forma del frente de onda:

$$W(x, y) = -\frac{1}{r} \int_0^x TA_x(x, y) dx; \quad W(x, y) = -\frac{1}{r} \int_0^y TA_y(x, y) dy \quad (2)$$

<sup>3</sup> Figura adaptada de Malacara-Doblado D. y Ghozeil I. [6]

La integración del frente de onda se puede realizar de distintas maneras, uno de los métodos zonales más usados es la integración trapezoidal Newtoniana; una modificación a este método será presentada en la siguiente sección.

En las pruebas de Hartmann la pantalla rectangular es el arreglo más popular, sin embargo, también existen otras pantallas formadas por polígonos regulares como triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos. Siendo los hexágonos el arreglo que logra muestrear de mejor manera una superficie con forma circular [8], [9]. Una pantalla compuesta de hexágonos regulares es mostrada en la Figura 3.3.

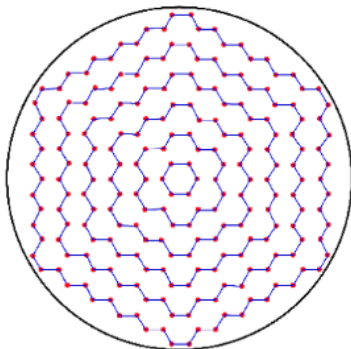


Figura 3.3. Pantalla de Hartmann con hexágonos regulares idénticos<sup>4</sup>.

La razón por la cual se revisó la prueba de Hartmann es que sus fundamentos pueden aplicarse al procesamiento de anillos de Plácido deformados en lugar de usar los algoritmos típicos arc-step como el explicado en la Sección 2.2. La similitud que hay entre la topografía corneal de anillos de Plácido y la prueba de Hartmann es que ambas, al probar una superficie esférica generan un patrón con la misma forma del target de los anillos o de la pantalla de Hartmann, según sea el caso. En ambas situaciones si la superficie se aleja de la forma esférica, los patrones empiezan a deformarse y las distancias de deformación con respecto a los patrones de referencia, son las aberraciones transversales del frente de onda asociado a la forma de la superficie bajo prueba, esto con respecto a una superficie esférica de referencia.

A pesar de sus coincidencias, hay que considerar que existen diferencias entre ambas pruebas. Una de ellas es que en la prueba de Hartmann el frente de onda que incide sobre el espejo proviene de una fuente puntual, esto hace que el frente de onda que se refleja para luego formar el Hartmanngrama sea el frente de onda original pero deformado por la forma de la superficie. En los anillos de Plácido la luz que ilumina la córnea proviene de distintas fuentes de iluminación ubicadas sobre los anillos. En este caso el frente de onda se debe interpretar como una superficie imaginaria que es perpendicular a la dirección de los rayos reflejados por la córnea.

Otra diferencia entre las pruebas es que en la prueba de Hartmann se está midiendo una superficie convergente, mientras que, en los anillos de Plácido, y en general en los topógrafos corneales, se mide una superficie divergente. Es importante mencionar que en la literatura

---

<sup>4</sup> Imagen tomada de Gómez-Tejada D., et al. [13].

existe una prueba de Hartmann modificada para medir superficies divergentes, esta es conocida como la prueba inversa de Hartmann. En esta prueba fuentes individuales son ubicadas sobre un target, iluminando la superficie de tal manera que la luz reflejada por ella forma una imagen del respectivo Hartmanngrama, esto último gracias a una lente convergente ubicada en el eje óptico del dispositivo [10]. Aquí, nuevamente, el patrón generado tiene la forma de la pantalla y cualquier desviación es una medida de las aberraciones transversales del frente de onda asociado a la superficie bajo prueba.

A pesar de estas salvedades, los principios mencionados sobre la prueba de Hartmann pueden ser aplicados a la topografía corneal basada en anillos de Plácido. El primer paso es tener en cuenta que las aberraciones transversales en los anillos deformados se deben medir respecto a un conjunto perfecto de anillos concéntricos asociados a una esfera de referencia. Con ello, como en la prueba de Hartmann, se debe caracterizar la pantalla, en este caso definir los puntos de muestreo sobre los anillos de referencia desde donde se van a medir las aberraciones transversales en la imagen de los anillos:

En la Figura 3.3, los puntos de referencia en un arreglo con hexágonos regulares no forman anillos circulares. Sin embargo, es posible tener un arreglo similar, si los puntos son ubicados uniformemente sobre una serie de anillos concéntricos, con un número de puntos igual a seis veces el número del anillo. Esta pantalla se presenta en la Figura 3.4 y está formada nuevamente por hexágonos, aunque en este caso el hexágono central es el único hexágono regular. Cualitativamente se puede apreciar que en la pantalla la densidad de puntos es cercana a ser isotrópica, es decir que la densidad de puntos es similar en todas las direcciones.

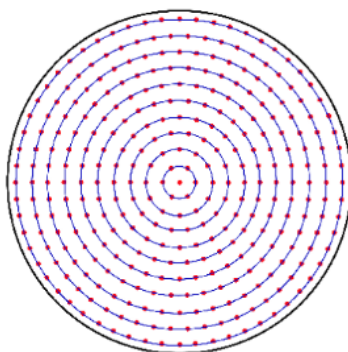


Figura 3.4. Pantalla con puntos de muestreo sobre círculos concéntricos formando hexágonos deformados<sup>5</sup>.

Para desempeñar los distintos procesos envueltos en la reconstrucción de una superficie empleando anillos de Plácido, es necesario definir algunas variables que permitirán acceder

---

<sup>5</sup> Imagen tomada de Gómez-Tejada D., et al. [13].

analíticamente a cada uno de los puntos de referencia de la pantalla de Hartmann con círculos concéntricos.

Con referencia a la Figura 3.5, la pantalla tiene  $M$  anillos con una separación  $a$  entre anillos. El radio del anillo más externo es  $d/2 = Ma$ , siendo  $d$  el diámetro de la pantalla. Los anillos son identificados con el índice  $m = 1, 2, 3, \dots, M$ . Cada anillo  $m$  tiene  $N$  puntos uniformemente separados, los cuales están etiquetados como  $n = 1, 2, 3, \dots, N$ , con  $N = 6m$ . Puntos consecutivos en un mismo anillo están separados por un ángulo  $\psi_m = 60^\circ/m$ .

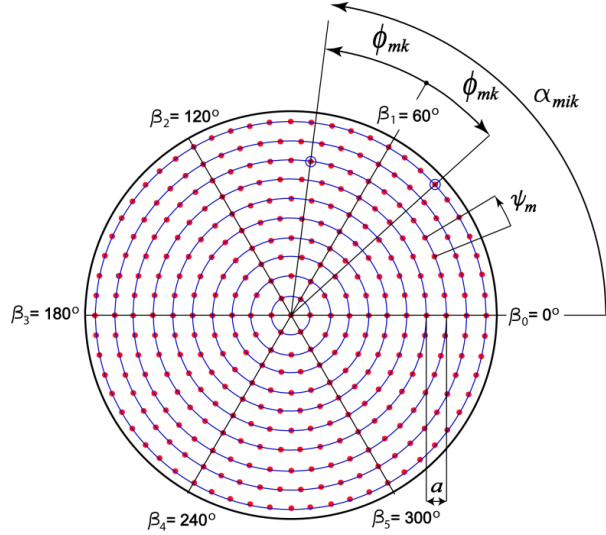


Figura 3.5. Variables empleadas para identificar analíticamente cada punto de muestreo en la pantalla de Hartmann con círculos concéntricos<sup>6</sup>.

Con los puntos que forman el hexágono central partiendo del centro de la pantalla, se pueden trazar seis líneas radiales con  $M$  puntos de muestreo, cada línea forma un ángulo  $\beta_i = 0^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ$  y  $300^\circ$ , para  $i = 0, 1, 2, 3, 4$  y  $5$ , respectivamente. Las líneas radiales dividen la pantalla en seis sectores. El ángulo  $\beta_i$  está definido por:

$$\beta_i = i \psi_m m \quad (3)$$

Cada punto de muestreo en el anillo  $m$  forma un ángulo  $\alpha_{mik}$  con el eje  $x$ , igual a:

$$\alpha_{mik} = \beta_i + \phi_{mk} \quad (4)$$

donde el ángulo  $\phi_{mk}$  es positivo en el sentido contrario a las manecillas del reloj y negativo en el sentido de las manecillas del reloj. El número  $k$  es un entero positivo o negativo de la misma manera, e identifica al punto de muestreo partiendo desde cualquier punto de la recta radial  $i$ . Los valores de  $k$  están en el rango:

<sup>6</sup> Imagen tomada de Gómez-Tejada D., et al. [13].

$$-(m-1) \leq k \leq (m-1) \quad (5)$$

y permiten definir el ángulo  $\phi_{mk}$  como:

$$\phi_{mk} = \psi_m k \quad (6)$$

Con ello, el ángulo  $\alpha_{mik}$  es:

$$\alpha_{mik} = (i m + k) \psi_m = \left( i + \frac{k}{m} \right) 60^\circ \quad (7)$$

La distancia radial a un punto de referencia cualquiera sobre la pantalla se puede escribir como:

$$S = \frac{md}{2M} \quad (8)$$

con ello, la posición de cada punto en coordenadas cartesianas es:

$$x = S \cos \alpha_{mik} \quad y \quad y = S \sin \alpha_{mik} \quad (9)$$

Para calcular las coordenadas cilíndricas del punto a partir de las coordenadas rectangulares, solo es necesario hacer:

$$S = (x^2 + y^2)^{1/2} \quad (10)$$

y:

$$\tan \alpha_{mik} = \frac{y}{x} \quad (11)$$

Con la Ecuación (8) es posible encontrar el número del anillo  $m$  solo con conocer la distancia radial a cualquier punto:

$$m = \frac{2M}{d} S \quad (12)$$

Ahora, escribiendo la Ecuación (7) como:

$$\frac{\alpha_{mik}}{60^\circ} = i + \frac{k}{m} \quad (13)$$

donde  $k < |m-1|$ , se pueden calcular los índices  $i$  y  $k$ :

$$i = \text{int} \left( \frac{\alpha_{mik}}{60^\circ} \right) \quad (14)$$

$$\frac{k}{m} = \frac{\alpha_{mik}}{60^\circ} - i \quad (15)$$

### 3.2. Recuperación del Frente de Onda con Integración Trapezoidal Newtoniana

Una imagen de anillos de Plácido se puede considerar como un mapa de las aberraciones transversales del frente de onda que provienen de la superficie bajo prueba. Su integración, que entrega la forma del frente de onda, se propone realizar con el método de integración trapezoidal Newtoniana, el cual para ser aplicado en este contexto debe ser modificado de tal forma que las aberraciones transversales obtenidas con una pantalla de Hartmann circular se logren integrar correctamente.

En la recuperación del frente de onda con una pantalla de Hartmann circular, para medir las aberraciones transversales se emplean dos patrones de puntos, uno para un frente de onda ideal y otro para un frente de onda aberrado. Un ejemplo de estos patrones para diez anillos puede ser visto en la Figura 3.6. Los puntos para el frente de onda ideal, que actúan como puntos de referencia, se obtienen al escalar la pantalla de Hartmann circular como la presentada en las Figuras 3.4 y 3.5, con un factor tal que tanto el patrón de referencia como el del frente de onda aberrado, tengan un diámetro similar. El escalamiento se puede realizar a la zona paraxial, ajuste a la esfera osculadora, o también a una esfera de mejor ajuste, en cuyo caso se genera una pantalla escalada de tal forma que tanto los puntos de referencia cercanos al eje óptico como los de la periferia estén a una distancia razonable. En trabajos futuros experimentales con córneas reales este escalamiento también debe reevaluarse, dado que la córnea es una superficie rápida con amplificación diferente entre la zona paraxial y fuera de ella. En la Figura 3.6, los puntos rojos son los puntos de referencia y los puntos azules son los puntos correspondientes a un frente de onda aberrado.

Si las aberraciones transversales se miden con respecto al patrón de puntos de referencia, las deformaciones del frente de onda se obtienen con respecto a una esfera de referencia, la cual, dependiendo del factor, puede ser una esfera de mejor ajuste o una esfera osculadora. La magnitud del factor que determina el diámetro  $d$  máximo que tenga el patrón de referencia dependerá del cambio de foco introducido. En el caso de que las aberraciones se llegaran a medir con respecto al eje óptico (centro del patrón), el frente de onda se estaría obteniendo respecto a un frente de onda plano.

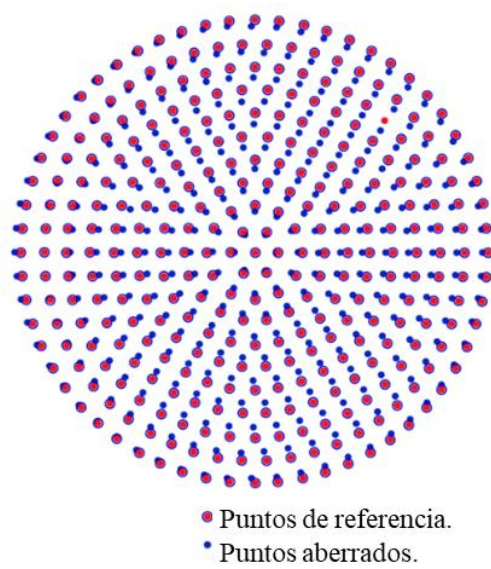


Figura 3.6. Patrón de Hartmann para una pantalla con diez anillos concéntricos. Se ilustran los puntos aberrados (azules) y los de referencia (rojos)<sup>7</sup>.

La integración trapezoidal entrega una solución exacta si el frente de onda es esférico, pero si este tiene distintas aberraciones que lo alejan de su forma esférica, el método de integración trapezoidal entrega un valor ligeramente diferente cuando se recorren los puntos de medida a través de distintas trayectorias de integración [11]. Para evitar esta dificultad e incrementar la exactitud del método, se propone que cada punto de muestreo de la pantalla sea recorrido tres veces por distintos caminos de integración, tomando como el valor del frente de onda en ese punto el promedio de las tres mediciones. Tras integrar dos veces por un punto se obtienen los valores del frente de onda  $W_1$  y  $W_2$ , el valor promedio será  $W_{12} = (W_1 + W_2)/2$ . Posteriormente, tras la tercera integración el punto tendrá un valor del frente de onda,  $W_{123}$ , dado por:

$$W_{123} = \frac{2W_{12} + W_3}{3} \quad (16)$$

<sup>7</sup> Imagen tomada de Gómez-Tejada D., et al. [13].

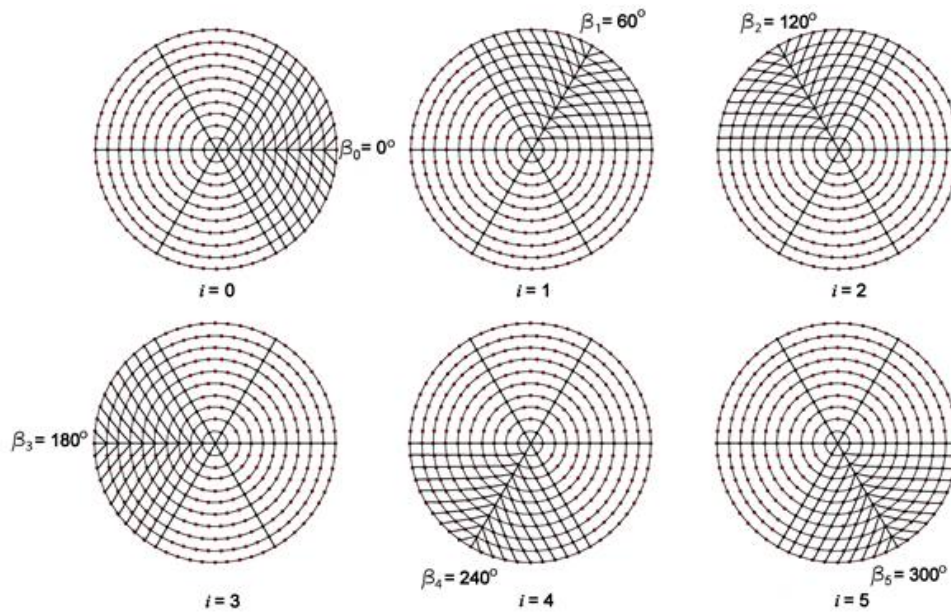


Figura 3.7. Caminos de integración para la pantalla de Hartmann circular dividida en seis sectores. Cada punto de la pantalla es recorrido tres veces<sup>8</sup>.

Los tres caminos de integración usados se pueden observar en la Figura 3.7. Cada punto de la pantalla puede identificarse como  $P(\beta_i, m, k)$  o  $P(n, m)$ , donde los índices  $\beta_i$ ,  $m$ ,  $k$  y  $n$ , fueron definidos en la sección anterior. Los pasos propuestos para recorrer los puntos de la pantalla y obtener el frente de onda son descritos a continuación:

- ❖ *Paso 1:* Partiendo desde el centro del patrón, la primera integración se realiza a lo largo de las seis líneas radiales con ángulo  $\beta_i$ , con puntos de muestreo que incrementen el número de anillo  $m$ . La integración de cada línea radial se realiza siguiendo los puntos etiquetados con los índices  $i$ ,  $m$  y  $k$ , como se muestra en el siguiente pseudocódigo:

<sup>8</sup> Imagen tomada de Gómez-Tejada D., et al. [13].



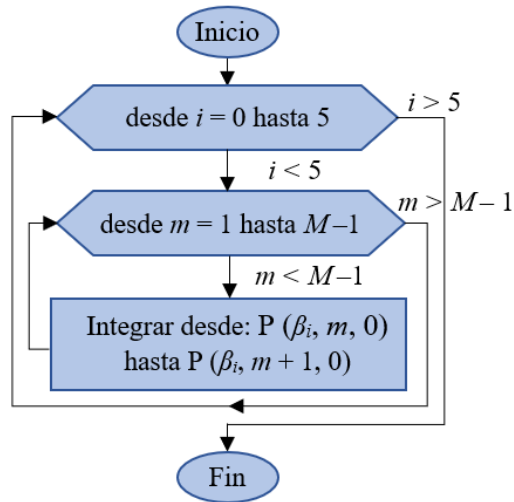


Figura 3.8. Seudocódigo para la integración de las seis líneas radiales con ángulo  $\beta_i$  <sup>9</sup>.

- ❖ *Paso 2*: La integración comienza en cada uno de los puntos a lo largo de las líneas radiales integradas en el *Paso 1*, incrementando los números  $m$  y  $k$ . Primero en la dirección contraria a las manecillas del reloj, Figura 3.9 (a), y luego en la dirección de las manecillas, Figura 3.9 (b).

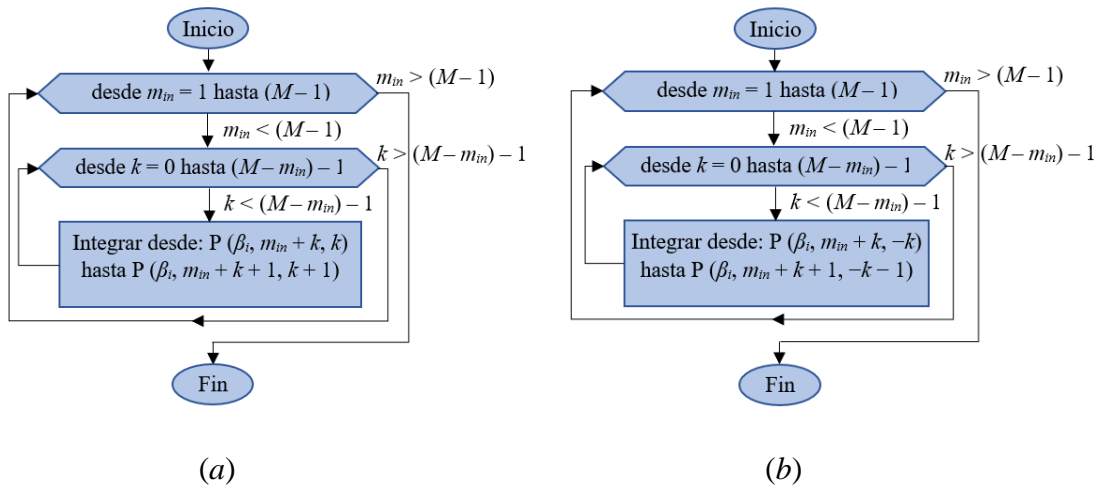


Figura 3.9. Seudocódigo con la secuencia de integración partiendo desde una línea radial cualquiera  $\beta_i$ , en (a) las trayectorias son curvas en dirección contraria a las manecillas del reloj, y en (b) la dirección es la de las manecillas del reloj<sup>9</sup>.

<sup>9</sup> Figuras adaptadas de Gómez-Tejada D., et al. [13].

- ❖ *Paso 3:* La última integración se realiza a lo largo del anillo, uno a la vez, incrementando los valores del índice  $n = 1, 2, 3, \dots, N-1$ . Ver Figura 3.10.

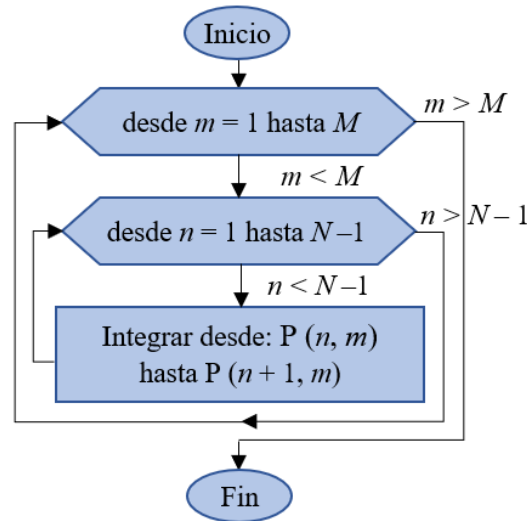


Figura 3.10. Seudocódigo para la integración realizada a lo largo de cada anillo  $m = 1, 2, 3, \dots, M$ .<sup>10</sup>

Teniendo claras las trayectorias de integración, ahora hay que recordar que la forma del frente de onda se obtiene por las integrales de la Ecuación (2):

$$W(x, y) = -\frac{1}{r} \int_0^x TA_x(x, y) dx; \quad W(x, y) = -\frac{1}{r} \int_0^y TA_y(x, y) dy$$

Cuya aproximación trapezoidal generalmente se realiza a lo largo de la coordenada  $x$  o  $y$  según sea el caso. Para el caso de los caminos de integración descritos en los pseudocódigos anteriores, la aproximación trapezoidal se debe realizar específicamente sobre las trayectorias inclinadas. Aquí no cabe la posibilidad de recorrer estas curvas con superposición de desplazamientos rectangulares ya que se estarían involucrando posiciones ficticias donde no existen puntos de muestreo reales. Para superar esta dificultad es necesario modificar la integración trapezoidal convencional como sigue:

Para integrar frentes de onda con trayectorias inclinadas es necesario conocer la aberración transversal  $TA_u$  a lo largo de esta dirección de integración, la cual está definida por la trayectoria al siguiente punto de muestreo a ser integrado, ver Figura 3.11. La aberración transversal  $TA_g$  corresponde al gradiente del frente de onda, cuya dirección  $\alpha$  medida desde el eje  $x$  es determinada por las aberraciones transversales medidas  $TA_x$  y  $TA_y$ :

$$TA_x = TA_g \cos \alpha, \quad y \quad TA_y = TA_g \sin \alpha \quad (17)$$

<sup>10</sup> Figura adaptada de Gómez-Tejada D., et al. [13].

La aberración transversal en la dirección de integración  $\theta$  será dada por:

$$TA_u = TA_g \cos(\alpha - \theta) = (\cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta) TA_g \quad (18)$$

Que al usar la Ecuación (17) se encuentra una expresión final para la aberración transversal  $TA_u$ :

$$\begin{aligned} TA_u &= \left( \frac{TA_x}{TA_g} \cos \theta + \frac{TA_y}{TA_g} \sin \theta \right) TA_g \\ &= TA_x \cos \theta + TA_y \sin \theta \end{aligned} \quad (19)$$

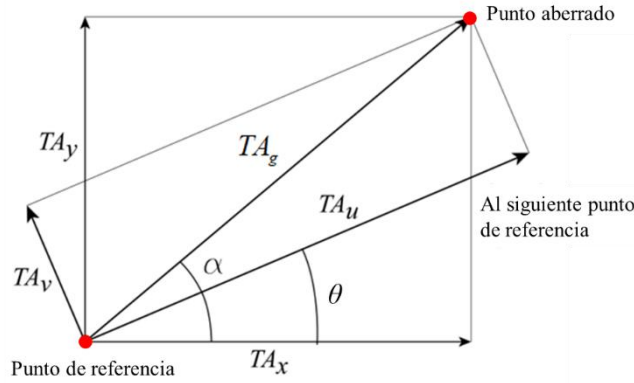


Figura 3.11. Aberraciones transversales para la integración siguiendo trayectorias inclinadas<sup>11</sup>.

La separación  $\Delta u$  entre dos puntos de referencia consecutivos depende de las diferencias de coordenadas rectangulares  $\Delta x$  y  $\Delta y$ , así:

$$\Delta u = (\Delta x^2 + \Delta y^2)^{1/2} \quad (20)$$

Entonces, la integración en aproximación trapezoidal Newtoniana da como resultado que el frente de onda en cualquier punto de muestreo  $j$  tenga un valor  $W_j$  dado por:

$$\begin{aligned} W_j &= W_{j-1} + \frac{1}{2r} (TA_{u_{j-1}} + TA_{u_j}) \Delta u \\ W_j &= W_{j-1} + \frac{1}{2r} \left[ (TA_{x_{j-1}} + TA_{x_j}) \cos \theta + (TA_{y_{j-1}} + TA_{y_j}) \sin \theta \right] (\Delta x^2 + \Delta y^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (21)$$

donde  $j-1$  es justo el punto de muestreo anterior a  $j$ , con valor de frente de onda conocido  $W_{j-1}$ , y  $r$  es el radio de una esfera cercana al frente de onda bajo prueba. La Ecuación (21) debe ser aplicada sobre todos los puntos de muestreo de la pantalla de Hartmann para así obtener el frente de onda completo. Es fácilmente demostrable que ante desplazamientos horizontales

<sup>11</sup> Figura adaptada de Gómez-Tejada D., et al. [13].

o verticales, la Ecuación (21) se convierte en las expresiones conocidas de integración trapezoidal para pantallas de Hartmann rectangulares [6]:

$$W_j = W_{j-1} + \frac{1}{2r} (TA_{x_{j-1}} + TA_{x_j}) \Delta x \quad y \quad W_j = W_{j-1} + \frac{1}{2r} (TA_{y_{j-1}} + TA_{y_j}) \Delta y \quad (22)$$

### 3.3. Integración de Anillos de Plácido y Solución al Error del Rayo Oblicuo

En la topografía corneal basada en anillos de Plácido, el patrón de Hartmann tiene la forma de anillos continuos en lugar de tener puntos de muestreo discretos como en la prueba de Hartmann. Estos anillos continuos poseen toda la información acerca de las aberraciones transversales de la superficie bajo prueba. En la Figura 3.12 es presentada una imagen de anillos de Plácido aberrados con sus correspondientes anillos de referencia.

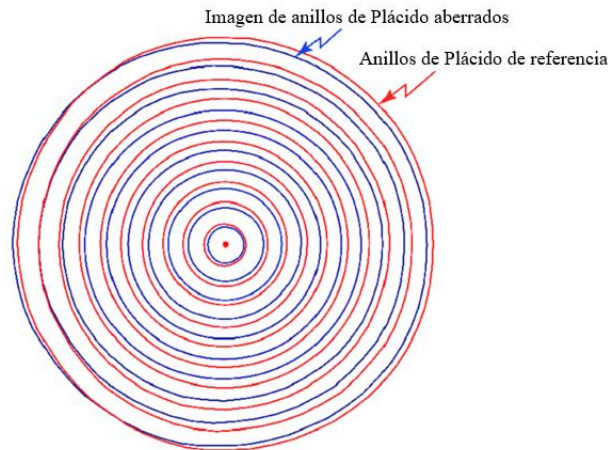


Figura 3.12. Anillos de Plácido distorsionados que poseen toda la información de las aberraciones de la superficie bajo prueba. Los anillos azules son anillos de referencia escalados apropiadamente al tamaño de la imagen de anillos de Plácido<sup>12</sup>.

Como se ha mencionado anteriormente, por la continuidad de los anillos de Plácido, y ahora también la de los anillos de referencia, pareciera imposible tener información de las aberraciones transversales en la dirección sagital o angular (dirección del anillo). Con ello, cualquier punto en los anillos distorsionados podrían corresponder con infinitos puntos en los anillos de referencia. Una vez más, el error del rayo oblicuo aparenta una pérdida de información que debe ser recuperada. En este trabajo se presenta un método zonal de

<sup>12</sup> Figura adaptada de Gómez-Tejada D., et al. [13].

integración que recupera la información aparentemente perdida por el error del rayo oblicuo. Del método que será descrito a continuación, las ideas y resultados preliminares fueron publicados en "A proposal to eliminate the skew ray error in corneal topography using Placido disks images", *Proceedings of SPIE (2019)*, Vol. 11102,[12], y posteriormente, de una forma completa en el artículo "Zonal integration of circular Hartmann and Placido patterns with non-rotationally symmetric aberrations," *J. Opt. Soc. Am. A* 37, 1381 (2020),[13], siendo este último el artículo de donde se extraen la mayoría de las figuras presentadas en este Capítulo.

Para visualizar el error del rayo oblicuo en los anillos de Plácido se pueden ubicar algunos puntos de referencia como se muestra en la Figura 3.13. Las imágenes de estos "puntos de referencia" están sobre el anillo deformado en unas posiciones desconocidas etiquetadas como "puntos reales desconocidos". Si se aplica aproximación meridional equivalente a la usada en el algoritmo de arc-step explicado en la Sección 2.2, las aberraciones transversales se miden entre los "puntos de referencia" y unos puntos llamados "puntos iniciales de Hartmann", que fueron encontrados al extender líneas radiales desde las posiciones de los "puntos de referencia" al centro del patrón de anillos. Las diferencias de las posiciones entre los "puntos iniciales de Hartmann" y los "puntos reales desconocidos" son efecto del error del rayo oblicuo. Este error se puede representar como la ausencia de ciertas aberraciones transversales sagitales desconocidas que deben ser encontradas para solucionarlo. Así que una implementación de una solución al error del rayo oblicuo hará que estos dos patrones de puntos se acerquen entre sí.

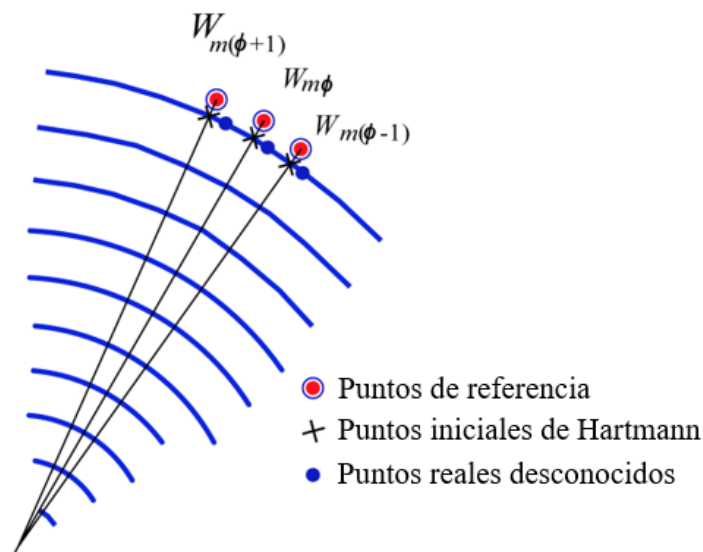


Figura 3.13. Anillos de Plácido con los puntos de referencia y sus respectivas imágenes cuya localización es desconocida. Los puntos iniciales de Hartmann son los lugares desde donde se medirían las aberraciones transversales en una aproximación meridional<sup>13</sup>.

<sup>13</sup> Figura adaptada de Gómez-Tejada D., et al. [13].

El método zonal de integración para la solución del error del rayo oblicuo es un método iterativo que consta de dos pasos:

1. El *primer paso* es justamente calcular las aberraciones transversales a los “*puntos iniciales de Hartmann*”, que luego son integradas siguiendo la aproximación trapezoidal Newtoniana explicada en la sección anterior, para así obtener un frente de onda preliminar que contiene el efecto del error del rayo oblicuo.
2. El *segundo paso* consiste en calcular un valor aproximado de la pendiente en la dirección sagital del frente de onda preliminar encontrado en el *primer paso*. Esto se realiza de la siguiente forma:

Sea  $W_{m\phi}$  el valor calculado del frente de onda en un punto de muestreo cualquiera sobre el anillo  $m$  formando un ángulo  $\phi$  con el centro del patrón de anillos. Sobre el mismo anillo, a cada lado hay dos puntos vecinos con valores del frente de onda  $W_{m(\phi-1)}$  y  $W_{m(\phi+1)}$ . Con ello, el valor aproximado de la pendiente del frente de onda en la dirección sagital es:

$$\frac{\partial W_{m\phi}}{\partial s} = -\frac{TA_s}{r} \approx \frac{W_{m(\phi+1)} - W_{m(\phi-1)}}{2\Delta s} \quad (23)$$

donde  $TA_s$  es la aberración transversal sagital desconocida,  $r$  es nuevamente el radio de curvatura de la esfera más cercana al frente de onda bajo prueba, y  $\Delta s$  es la longitud del segmento de curva definido como:

$$\Delta s = S\psi_m = \frac{md}{2M}\psi_m \quad (24)$$

y así, la aberración transversal sagital  $TA_s$  tendrá un valor aproximado de:

$$TA_s = \frac{M(W_{m(\phi-1)} - W_{m(\phi+1)})r}{md\psi_m} \quad (25)$$

Este cálculo se realiza para todos los puntos de muestreo, obteniéndose así un nuevo conjunto de aberraciones transversales, que, junto a las calculadas en el *primer paso*, hace posible que los puntos de integración se acerquen cada vez más a los puntos reales desconocidos de la Figura 3.13. En otras palabras, esto significa que la información oculta por el error del rayo oblicuo está siendo revelada. El frente de onda que se obtiene al integrar este nuevo conjunto de aberraciones transversales describirá de una mejor manera la superficie bajo prueba de los anillos de Plácido.

Estos dos pasos que conforman el método propuesto se repiten iterativamente hasta que el error en el frente de onda alcance un umbral mínimo y se estabilice.

Este método iterativo de solución al error del rayo oblicuo fue implementado satisfactoriamente con MATLAB. Básicamente, el software permite simular distintos frentes de ondas definidos con polinomios de Zernike [14], genera los anillos de Plácido deformados por las aberraciones de la superficie, para luego integrarlos con el método zonal descrito,

solucionando así el error del rayo oblicuo. Para mostrar el desempeño del método, a continuación, se probará un frente de onda con aberración de astigmatismo con un coeficiente de  $1 \times 10^{-8}$ . Este frente de onda se presenta en la Figura 3.14.

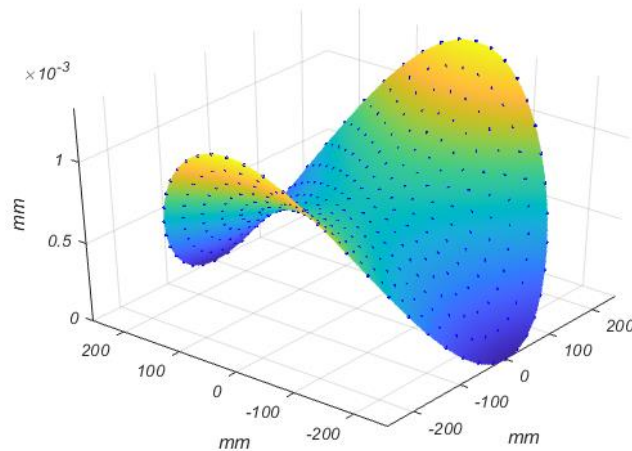


Figura 3.14. Frente de onda con aberración de astigmatismo, que será probado con el método zonal de integración<sup>14</sup>.

Luego de generar los correspondientes anillos de Plácido para el frente de onda bajo prueba, se aplica el *primer paso* del método zonal, inicialmente generando los patrones de puntos de integración que se muestran en la Figura 3.15 (a), donde es evidente el error en las posiciones de integración (distancia entre los puntos iniciales de Hartmann y los puntos reales desconocidos). Al integrar las aberraciones transversales que hay entre los puntos iniciales de Hartmann y los puntos de referencia, se obtiene el frente de onda recuperado de la Figura 3.15 (b), el cual, claramente posee el error del rayo oblicuo. Comparando el frente de onda original con el recuperado, cualitativamente, es evidente el error en este último frente de onda; cuantitativamente, el error promedio correspondiente es del 65%. Este error es clínicamente significativo ya que excede por mucho el umbral de relevancia clínica, que, según Sicam V. A. et al. [15], está en un valor porcentual del 6.3%.

<sup>14</sup> Figura tomada de Gómez-Tejada D., et al. [13].

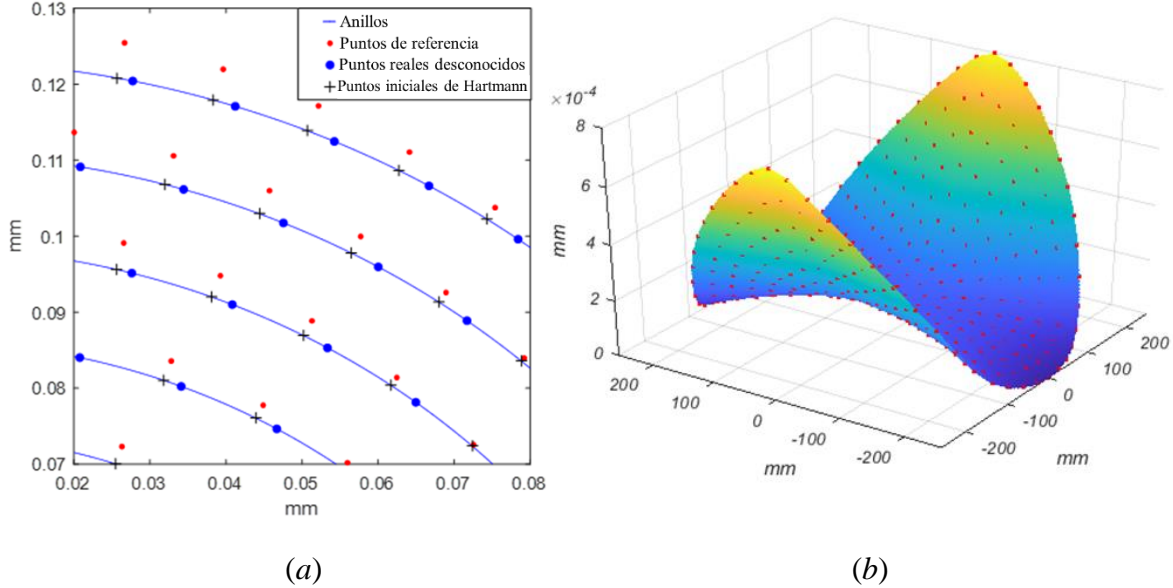


Figura 3.15. Efecto del error del rayo oblicuo en los puntos de integración (a), y en el frente de onda recuperado (b)<sup>15</sup>.

Ahora, en el *segundo paso* del método se emplea el frente de onda recuperado de la Figura 3.15 (b) para calcular las aberraciones transversales sagitales  $TA_s$  siguiendo la Ecuación (25). Con estas nuevas aberraciones transversales y con las encontradas en el *primer paso*, se integran nuevamente para obtener un nuevo frente de onda. Si el proceso se realiza iterativamente, tras dos iteraciones se obtienen los patrones de puntos de integración que son mostrados en la Figura 3.16 (a), tras ocho iteraciones se logran los presentados en la Figura 3.16 (b).

<sup>15</sup> Figuras tomadas de Gómez-Tejada D., et al. [13].



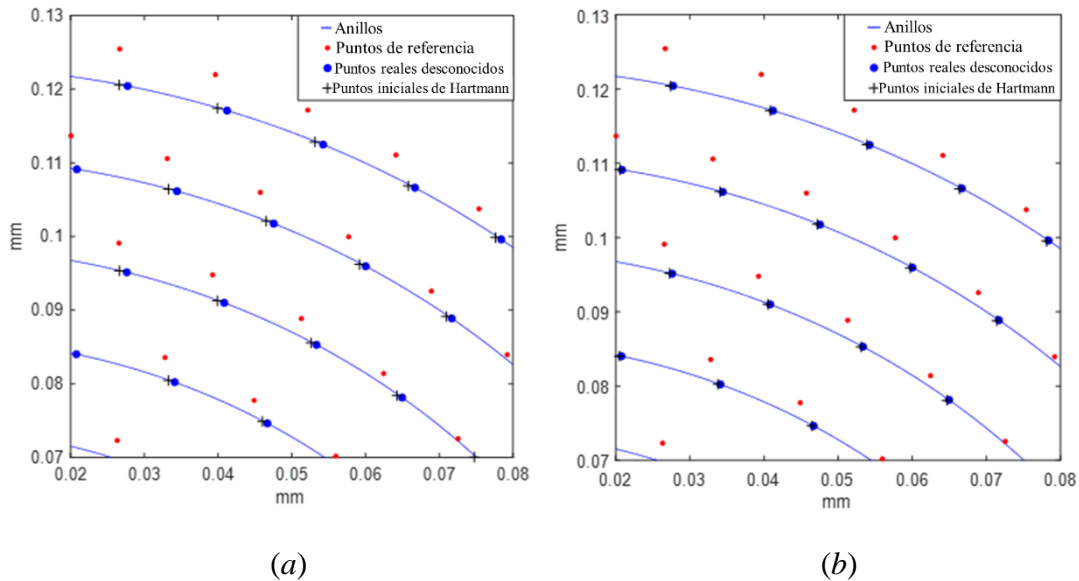


Figura 3.16. Posiciones de los puntos de integración tras aplicar el método de solución del rayo oblicuo con dos (a) y ocho (b) iteraciones<sup>16</sup>.

Como se puede apreciar de la figura anterior, es notorio como los “*puntos iniciales de Hartmann*” se acercan a los “*puntos reales desconocidos*” a medida que se ejecutan más iteraciones, lo que significa que la información oculta por el error del rayo oblicuo empieza a ser revelada. La corrección progresiva de las posiciones de integración evidentemente generará un frente de onda que se irá acercando más a la forma original del frente de onda bajo prueba. Los frentes de onda mostrados en las Figuras 3.17 (a) y (b), corresponden, respectivamente, a la integración de los puntos de las Figuras 3.16 (a) y (b). Con dos iteraciones el error promedio decrece hasta un 17%, y con ocho iteraciones se logra un 3.3% de error.

<sup>16</sup> Figuras adaptadas de Gómez-Tejada D., et al. [13].

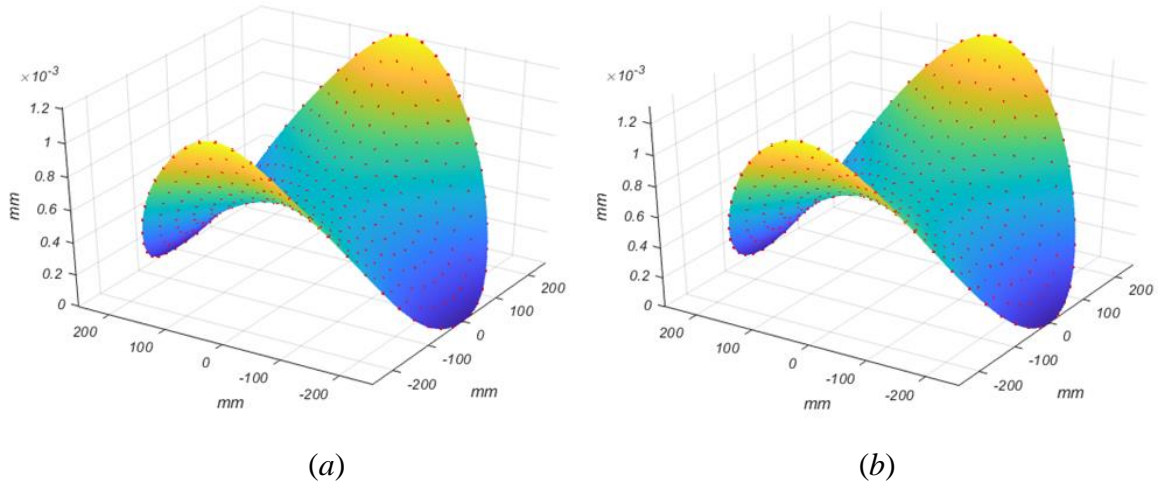


Figura 3.17. Frentes de onda obtenidos tras integrar las aberraciones transversales de la Figura 3.16, en (a) tras dos iteraciones y en (b) tras ocho iteraciones<sup>17</sup>.

Una prueba adicional del método es presentada en la Figura 3.18, donde es probado un frente de onda con una aberración de orden superior tipo quadrafoil también conocida como aberración tipo cenicero, con un coeficiente de  $5 \times 10^{-14}$ . En (a) se muestra el frente de onda con el error del rayo oblicuo y en (b) después de solucionarlo con el método propuesto.

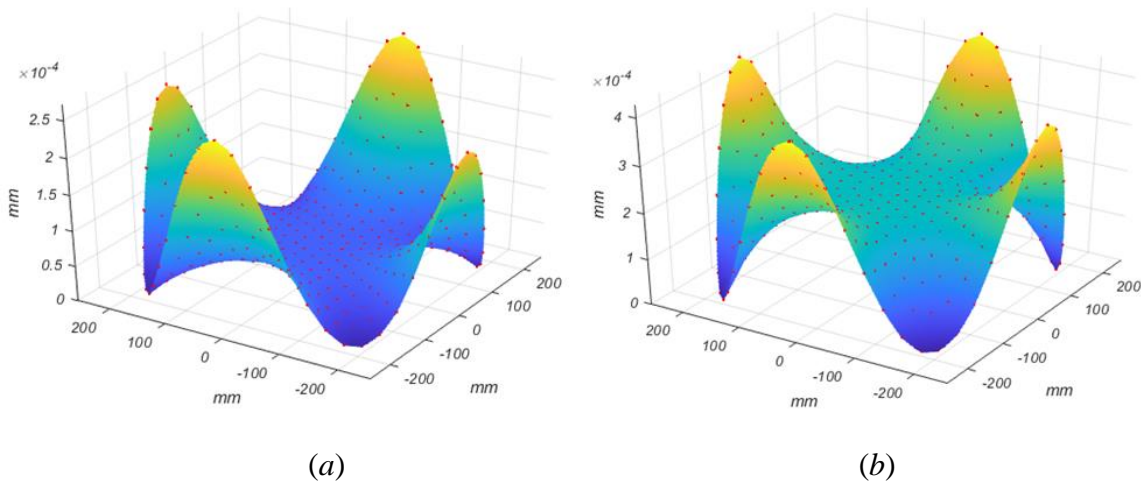


Figura 3.18. Frente de onda recuperado sin solucionar el error del oblicuo (a), y luego de solucionarlo (b)<sup>17</sup>.

<sup>17</sup> Figuras tomadas de Gómez-Tejada D., et al. [13].

Finalmente, la Figura 3.19 presenta el comportamiento del error promedio del frente de onda en función de las iteraciones del algoritmo. El error promedio decrece rápidamente en las primeras iteraciones y se estabiliza después de ocho a diez iteraciones. Durante todas las pruebas realizadas, el error promedio mantuvo el comportamiento de la figura. Aunque, dependiendo de las aberraciones el valor mínimo se consiguió con distinto número de iteraciones. En todos los casos, tras diez iteraciones el método siempre alcanzó el mínimo error que fue cercano al 3%. Error que no es clínicamente significativo frente al umbral de 6.3% aceptado de tolerancia en la práctica clínica [15].

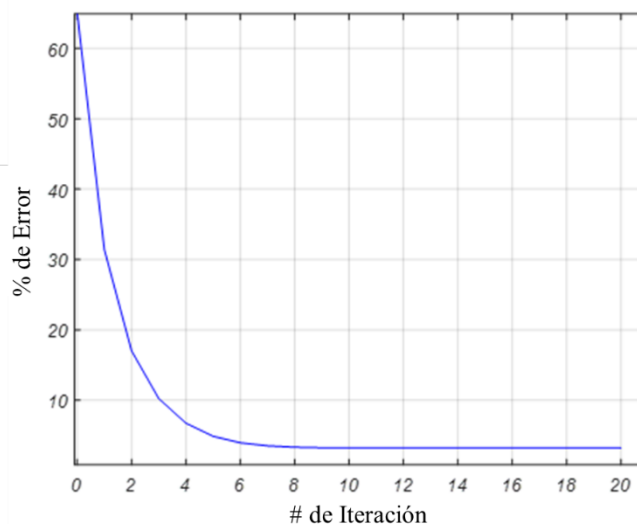


Figura 3.19. Error promedio del frente de onda recuperado tras cada iteración del algoritmo<sup>18</sup>.

En la introducción del Capítulo 2 se mencionó que en un ámbito clínico son los mapas de curvatura los elementos de diagnóstico de preferencia para optómetras y oftalmólogos. Por ello es importante mencionar que partiendo de los resultados expuestos en este Capítulo es posible construir mapas de curvaturas y de potencia dióptrica, todo esto a partir de la información del frente de onda recuperada con el método propuesto. También es viable la construcción de mapas de elevación, el análisis numérico tradicional con polinomios de Zernike para el cálculo de aberraciones, y así cualquier otro cálculo consecuente a la medición topográfica.

Como se pudo ver, en este Capítulo se han presentado aportes significativos a la solución del error del rayo oblicuo, estos aportes no solo solucionan el error, sino que aportan un punto de vista distinto sobre los anillos de Plácido, haciendo al método propuesto aún más llamativo. Para el siguiente Capítulo se presentará el segundo problema analizado en esta tesis, que es acerca de la representación de superficies. Allí se hará una revisión de los métodos matemáticos existentes, lo que llevará a la definición del problema y de ahí a la estructuración de la propuesta presentada que incluye el uso de funciones gaussianas. Al

<sup>18</sup> Figura adaptada de Gómez-Tejada D., et al. [13].

respecto, se presentarán los resultados preliminares de la aplicación del método, sus posibles alcances y futuras expectativas.

### 3.4. Conclusiones

Se desarrolló una solución alternativa al error del rayo oblicuo en topografía corneal basada en anillos de Plácido. Esta solución fue implementada en un método zonal de integración inspirado en la prueba clásica de Hartmann. Al ser un método zonal no tiene riesgos de generar filtrado espacial de altas frecuencias como si sucede con los métodos modales. La solución al error del rayo oblicuo es un método iterativo que rápidamente converge a una solución en donde el error inducido por la continuidad de los anillos es reducido a un valor mínimo.

Para lograr una implementación satisfactoria de la solución al error del rayo oblicuo fue necesario considerar algunos elementos de la prueba de Hartmann que pueden ser útiles en la prueba con los anillos de Plácido, lo que llevó a la definición de aspectos esenciales como el buen muestreo espacial a través del uso de patrones hexagonales sobre anillos concéntricos y la integración de aberraciones transversales con diferentes trayectorias. Esto último requirió de la modificación del método tradicional de integración trapezoidal Newtoniana para permitirle seguir caminos de integración en cualquier dirección. Esta mejora podría ser implementada en el procesamiento de patrones de Hartmann que usen pantallas hexagonales.

Para mostrar la efectividad del método de integración zonal, este fue probado a través de distintas simulaciones de frentes de ondas con diferentes aberraciones sin simetrías de rotación, asegurando así la presencia del error del rayo oblicuo. Sin considerar la solución del rayo oblicuo el frente de onda obtenido alcanzó un error promedio del 65%. Usando la solución propuesta el error decreció rápidamente, con dos iteraciones el error promedio disminuyó al 17% y en ocho iteraciones a tan solo un 3%, lo cual puede considerarse despreciable en comparación con el umbral de significancia clínica del 6.3%.

La solución al error del rayo oblicuo propuesta es una alternativa interesante que podría ser implementada en cualquier topógrafo corneal basado en anillos de Plácido. Por su sencillez, tiene el potencial de ser implementado sin generar un gran costo computacional, aunado al hecho de que no requiere un cambio en el hardware del topógrafo. El afán de brindar esta solución radica en la vulnerabilidad existente en los casos en las que personas con córneas muy aberradas son examinadas con anillos de Plácido. Un error en la topografía corneal obtenida puede generar un diagnóstico erróneo, tratamientos consecuentes desafortunados, e intervenciones clínicas mal dirigidas por la falta de conocimiento de la forma real de la córnea.

El contenido de este capítulo se basa en el artículo “*Zonal integration of circular Hartmann and Placido patterns with non-rotationally symmetric aberrations*” publicado en la revista arbitrada *Journal of the Optical Society of America A*, el 31 de julio de 2020 [13], cuyo autor principal es el mismo autor de esta tesis doctoral.

## Bibliografía

- [1] J. Turuwhenua, “An improved low order method for corneal reconstruction,” *Optom. Vis. Sci.*, vol. 85, no. 3, pp. E211–E218, 2008.
- [2] J. Hartmann, “Bemerkungen über den Bau und die Justirung von Spektrographen,” *Zeitschrift für Instrumentenk.*, vol. 20, pp. 47–58, 1900.
- [3] J. Hartmann, “Objektivuntersuchungen,” *Zeitschrift für Instrumentenk.*, vol. 24, p. 1, 1904.
- [4] J. Hartmann, “Objektivuntersuchungen,” *Zeitschrift für Instrumentenk.*, vol. 24, p. 33, 1904.
- [5] J. Hartmann, “Objektivuntersuchungen,” *Zeitschrift für Instrumentenk.*, vol. 24, p. 97, 1904.
- [6] D. Malacara-Doblado and I. Ghozeil, “Hartmann, Hartmann-Shack, and other screen tests,” in *Optical Shop Testing*, 3rd ed., D. Malacara-Hernández, Ed. John Wiley & Sons, Inc., 2007, pp. 361–397.
- [7] J. L. Rayces, “Exact Relation between Wave Aberration and Ray Aberration,” *Opt. Acta Int. J. Opt.*, vol. 11, no. 2, pp. 85–88, Apr. 1964, doi: 10.1080/713817854.
- [8] F. J. Gantes-Nuñez, Z. Malacara-Hernández, D. Malacara-Doblado, and D. Malacara-Hernández, “Zonal processing of Hartmann or Shack–Hartmann patterns,” *Appl. Opt.*, vol. 56, no. 7, p. 1898, 2017.
- [9] F. J. Gantes-Nuñez, Z. Malacara-Hernández, D. Malacara-Doblado, and D. Malacara-Hernández, “Zonal wavefront reconstruction of Shack–Hartmann and Hartmann patterns with hexagonal cells,” *Opt. Commun.*, vol. 427, pp. 61–69, 2018.
- [10] J. H. Delgado, Z. Malacara-Hernández, D. Malacara-Doblado, B. Vázquez-Dorrío, and D. Malacara-Hernández, “Local curvatures and its measurements of an optical surface or a wavefront: a review,” *Opt. Eng.*, vol. 61, no. 5, pp. 1–38, May 2022.
- [11] I. Ghozeil and J. E. Simmons, “Screen test for large mirrors,” *Appl. Opt.*, vol. 13, no. 8, pp. 1773–1777, 1974.
- [12] D. Gomez-Tejada and D. M. Hernández, “A proposal to eliminate the skew ray error in corneal topography using Placido disks images,” *Proc.SPIE*, vol. 11102, p. 1110206, 2019.
- [13] D. Gómez-Tejada, Z. Malacara-Hernández, D. Malacara-Doblado, and D. Malacara-Hernández, “Zonal integration of circular Hartmann and Placido patterns with non-rotationally symmetric aberrations,” *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 37, no. 8, pp. 1381–1389, 2020.
- [14] D. Malacara-Hernandez and D. Malacara-Doblado, “Optical testing and interferometry,” in *Progress in Optics*, vol. 62, T. D. Visser, Ed. Elsevier, 2017, pp. 73–156.

- [15] V. A. D. P. Sicam and R. G. L. Van Der Heijde, "Topographer reconstruction of the nonrotation-symmetric anterior corneal surface features," *Optom. Vis. Sci.*, vol. 83, no. 12, pp. 910–918, 2006, doi: 10.1097/01.opx.0000250018.82043.a6.

## Capítulo 4

### Representación de Superficies Ópticas

Como se mencionó al inicio de esta tesis, una medición de topografía corneal de buena calidad es lograda con la combinación de una buena técnica de medida y una adecuada representación matemática de la superficie. Hasta este momento, en esta tesis se han realizado aportes sobre una de las técnicas más usadas en la medición de topografía corneal, los anillos de Plácido. Ahora es el momento de ampliar los conceptos acerca de las superficies ópticas y de presentar algunas ideas que podrían encontrarse útiles en la representación de superficies, lo que se sumaría a la breve introducción sobre la forma de la superficie anterior de la córnea realizada en el Capítulo 1.

Inicialmente en este Capítulo se presentará la forma más común de representar superficies ópticas que es a través de polinomios, lo cual incluye a los polinomios de Zernike que son el estándar en las aplicaciones oftalmológicas. Esto será introductorio para exponer la problemática, que incluso puede ser clínica, que se ha evidenciado al representar una superficie corneal como una superposición de este tipo de polinomios. Seguidamente se mencionarán algunas representaciones alternativas que se pueden encontrar en la literatura, entre las cuales se encuentran propuestas que involucran funciones gaussianas. Justamente basándose en estas funciones, se realiza una propuesta preliminar para representar la superficie corneal como una superposición de funciones gaussianas de distintos tipos. Aunque los resultados que serán presentados en este Capítulo no son definitivos, se considera que las ideas propuestas podrían marcar el camino hacia lo que sería una representación de superficies corneales que subsanaría las dificultades encontradas en el estándar actual de la oftalmología y la óptica visual.

## 4.1. Representación de Superficies

Reconociendo la relación entre superficie y deformación del frente de onda, se podría considerar históricamente que, así como las deformaciones del frente de onda han sido representadas por polinomios, también podría haber sido el caso de las superficies ópticas. La representación más simple que se puede tener para las deformaciones del frente de onda es a través de una serie de potencias de la forma [1]:

$$W(x, y) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^i a_{ij} x^i y^{i-j} \quad (1)$$

$$= a_{00} + a_{10}x + a_{11}y + a_{20}x^2 + a_{21}xy + a_{22}y^2 + \dots + a_{kk}y^k$$

Otra forma de expresar las deformaciones del frente de onda es la realizada por Kingslake R. [2], donde se propone la siguiente representación que contiene las aberraciones primarias de Seidel:

$$W(x, y) = A + Bx + Cy + D(x^2 + y^2) + E(x^2 - y^2) + F(x^2 + y^2)y + G(x^2 + y^2)^2 \quad (2)$$

donde los coeficientes de aberración representan las siguientes aberraciones ópticas:

A: Término constante o de pistón	E: Astigmatismo
B: Tilt o inclinación en el eje y	F: Coma
C: Tilt o inclinación en el eje x	G: Aberración esférica
D: Defoco.	

El frente de onda representado por la Ecuación (2) tiene simetría de rotación alrededor del eje z, por lo que estaría limitado a sistemas ópticos axialmente simétricos [1].

Dado que en óptica es común tener una pupila circular, es conveniente escribir los términos de aberración en coordenadas polares. Empleando las relaciones conocidas  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$  con el ángulo  $\theta$  medido desde el eje x en dirección contraria a las manecillas del reloj, se tiene que:

$$W(x, y) = \sum_{n=0}^k \sum_{l=0}^n a_{nl} \rho^n \cos^l \theta \quad (3)$$

donde solo los términos cosenos fueron empleados para mantener la simetría de rotación. En esta expresión los índices  $n$  y  $l$  deben ser ambos pares o ambos impares, y además cumplir la desigualdad  $l \leq n$  [3].

Teniendo en cuenta lo revisado en el Capítulo 2, es evidente que la simetría de rotación no es común tanto en las pruebas ópticas como en las pruebas actuales de topografía corneal. Para eliminar esta restricción, el frente de onda debe incluir los términos sin  $\theta$ .



Adicionalmente, por comodidad las potencias de las funciones trigonométricas son reemplazadas por funciones armónicas dependientes de la variable angular  $l$ . Con ello:

$$W(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^k \sum_{m=0}^n a_l \rho^n \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} l\theta \quad (4)$$

$$= a_0 + a_1 \rho \sin \theta + a_2 \rho \cos \theta + a_3 \rho^2 + a_4 \rho^2 \sin 2\theta + a_5 \rho^2 \cos 2\theta + \dots$$

Los coeficientes  $a_l$  son llamados coeficientes de aberración y representan la magnitud de la aberración respectiva en el frente de onda. Con ello el polinomio que representa al frente de onda queda expresado en términos de los coeficientes de aberración. Por otra parte, para garantizar que la función sea univaluada, los índices  $n$ ,  $m$ ,  $l$  definidos por Malacara-Hernandez y Malacara-Doblado en [1] deben cumplir las condiciones dadas por Hopkins H. H. [4], esto es que  $l = 0, \dots, n$ , que  $m = 0, 1, \dots, n$ , y que  $n+l$  sea par. La selección entre las funciones trigonométricas  $\cos \theta$  y  $\sin \theta$ , dependerá si  $n+m$  es par, o impar, respectivamente<sup>19</sup>.

Con todo esto en consideración, la Ecuación (4) llevada hasta la cuarta potencia crea los siguientes términos de aberración:

**Tabla 4.1.** Términos de Aberración hasta el cuarto grado<sup>20</sup>

Índices			Coordenadas Cartesianas	Coordenadas Polares	Nombre de la aberración
$n$	$m$	$l$			
0	0	0	1	1	Pistón
1	0	1	$y$	$\rho \sin \theta$	Inclinación en la dirección $x$
	1	1	$x$	$\rho \cos \theta$	Inclinación en la dirección $y$
2	0	0	$x^2 + y^2$	$\rho^2$	Defoco
	1	2	$2xy$	$\rho^2 \sin 2\theta$	Astigmatismo con ejes a $\pm 45^\circ$
	2	2	$x^2 - y^2$	$\rho^2 \cos 2\theta$	Astigmatismo con ejes a $0^\circ$ y $90^\circ$
3	0	1	$(x^2 + y^2)y$	$\rho^3 \sin \theta$	Coma a lo largo del eje $y$
	1	1	$(x^2 + y^2)x$	$\rho^3 \cos \theta$	Coma a lo largo del eje $x$
	2	3	$(3x^2 - y^2)y$	$\rho^3 \sin 3\theta$	Astigmatismo triangular con semiejes a $30^\circ$ , $150^\circ$ y $270^\circ$ .
	3	3	$(x^2 - 3y^2)x$	$\rho^3 \cos 3\theta$	Astigmatismo triangular con semiejes a $0^\circ$ , $120^\circ$ y $240^\circ$ .

<sup>19</sup> La definición de los índices y sus relaciones puede ser ampliada en [1], pp. 75-77.

<sup>20</sup> Tabla adaptada de [1]

4	0	0	$(x^2 + y^2)^2$	$\rho^4$	Aberración esférica
	1	2	$2(x^2 + y^2)xy$	$\rho^4 \sin 2\theta$	Astigmatismo de quinto orden a $\pm 45^\circ$
	2	2	$x^4 - y^4$	$\rho^4 \cos 2\theta$	Astigmatismo de quinto orden a $0^\circ$ y $90^\circ$
	3	4	$4(x^2 - y^2)xy$	$\rho^4 \sin 4\theta$	Quadrafoil o cenicero a $22.5^\circ$ o $67.5^\circ$
	4	4	$(x^2 - y^2)^2 - 4x^2y^2$	$\rho^4 \cos 4\theta$	Quadrafoil o cenicero a $0^\circ$ o $45^\circ$

## 4.2. Polinomios de Zernike

Propuestos por Fritz Zernike [5], [6], estos polinomios que en su honor llevan su apellido, están definidos en un círculo de radio unitario, con infinitos puntos de muestreo espaciados uniformemente. Son descritos de tal manera que el eje óptico es el eje  $z$  y el plano  $x$ - $y$  contiene el círculo unitario. Es común encontrarlos definidos en coordenadas polares, como una función de variables separables con un término que depende del radio  $\rho$  y otro que depende del ángulo  $\theta$ , frecuentemente medido con respecto al eje  $x$  [1], aunque también existen definiciones de los polinomios de Zernike con el ángulo medido respecto al eje  $y$  [3].

Sea  $Z_n^l(\rho, \theta)$  un polinomio de Zernike de grado  $n$  con argumento angular determinado por el armónico  $l$ , definido como:

$$Z_n^l = R_n^l(\rho) e^{il\theta} \quad (5)$$

o:

$$Z_n^l = R_n^l(\rho) \begin{pmatrix} \sin \\ \cos \end{pmatrix} l\theta \quad (6)$$

que es ortogonal en el círculo unitario:

$$\int \int Z_n^l Z_m^{l'} \rho d\rho d\theta = \delta_{nm} \delta_{ll'} \quad (7)$$

donde el radio  $\rho$  ha sido normalizado.

Los índices de los polinomios ( $n$ ,  $l$ ) son nuevamente ambos pares o ambos impares, con  $n-l$  siempre par. Para cierto grado  $n$ , existen  $(n+1)(n+2)/2$  polinomios de Zernike linealmente independientes. Por ejemplo, para el cuarto grado,  $n = 4$ , existen 15 polinomios independientes, los cuales son justamente presentados en la Tabla 4.2.

La ventaja de tener un frente de onda ajustado a una sumatoria de polinomios ortogonales radica en que cada término de la sumatoria logra por sí mismo el mejor ajuste posible, el cual no cambia si se sustraen o se adhieren términos a la sumatoria de polinomios, así, cualquier

combinación también termina siendo el mejor ajuste posible del frente de onda [1]. En otras palabras, los valores obtenidos para los coeficientes de aberración son independientes del número y del tipo de términos considerados en el proceso de mejor ajuste. Típicamente el mejor ajuste se realiza con el método de mínimos cuadrados.

Antes de entrar a las aplicaciones de los polinomios de Zernike en óptica visual y oftalmología, vale la pena mencionar que estos polinomios también se emplean en otros campos de estudio: En la propagación atmosférica, en donde polinomios de Zernike se usan para describir las fluctuaciones del índice de refracción que se asocian con turbulencia atmosférica [7]. En la conducción autónoma los Zernikes son usados en el desarrollo de algoritmos de reconocimiento de patrones, estos algoritmos son inmunes a la rotación, traslación y escalamiento [8]. En física médica, los polinomios de Zernike son usados en el desarrollo de herramientas computacionales de diagnóstico que permiten la clasificación de masas mamarias como benignas y malignas [9]; en esta aplicación las imágenes de mamografías son procesadas empleando momentos de Zernike, los cuales, basándose en polinomios de Zernike, permiten representar las propiedades de la imagen bajo estudio sin redundancia.

**Tabla 4.2.** Polinomios ortogonales de Zernike hasta el grado cuarto<sup>21</sup>

<i>Índices</i>			<i>Coordenadas Cartesianas</i>	<i>Coordenadas Polares</i>	<i>Nombre de la aberración</i>
<i>n</i>	<i>m</i>	<i>l</i>			
0	0	0	1	1	Pistón
1	0	1	$y$	$\rho \sin \theta$	Inclinación en la dirección $x$
	1	1	$x$	$\rho \cos \theta$	Inclinación en la dirección $y$
2	0	0	$2x^2 + 2y^2 - 1$	$2\rho^2 - 1$	Defoco
	1	2	$2xy$	$\rho^2 \sin 2\theta$	Astigmatismo con ejes a $\pm 45^\circ$
	2	2	$x^2 - y^2$	$\rho^2 \cos 2\theta$	Astigmatismo con ejes a $0^\circ$ y $90^\circ$
3	0	1	$(3x^2 + 3y^2 - 2)y$	$(3\rho^3 - 2\rho)\sin \theta$	Coma a lo largo del eje $y$
	1	1	$(3x^2 + 3y^2 - 2)x$	$(3\rho^3 - 2\rho)\cos \theta$	Coma a lo largo del eje $x$
	2	3	$(3x^2 - y^2)y$	$\rho^3 \sin 3\theta$	Astigmatismo triangular con semiejes a $30^\circ$ , $150^\circ$ y $270^\circ$ .
	3	3	$(x^2 - 3y^2)x$	$\rho^3 \cos 3\theta$	Astigmatismo triangular con semiejes a $0^\circ$ , $120^\circ$ y $240^\circ$ .

<sup>21</sup> Tabla adaptada de [1]

4	0	0	$6(x^2 + y^2)^2 - 6(x^2 + y^2) + 1$	$6\rho^4 - 6r^2 + 1$	Aberración esférica
	1	2	$-4x^4 + 4y^4 + 3x^2 - 3y^2$	$(4\rho^4 - 3\rho^2)\sin 2\theta$	Astigmatismo de quinto orden a $\pm 45^\circ$
	2	2	$(8x^2 + 8y^2 - 6)xy$	$(4\rho^4 - 3\rho^2)\cos 2\theta$	Astigmatismo de quinto orden a $0^\circ$ y $90^\circ$
	3	4	$4(x^2 - y^2)xy$	$\rho^4 \sin 4\theta$	Quadrafoil o cenicero a $22.5^\circ$ o $67.5^\circ$
	4	4	$(x^2 - y^2)^2 - 4x^2y^2$	$\rho^4 \cos 4\theta$	Quadrafoil o cenicero a $0^\circ$ o $45^\circ$

Desde el año 2002 los polinomios de Zernike se han considerado un estándar para expresar las aberraciones oculares [10], la mayoría de los aberrómetros modernos emplean polinomios hasta de orden seis para representar córneas normales [11]. Los polinomios de Zernike son utilizados directamente en aplicaciones clínicas, por ejemplo, en la cirugía refractiva personalizada, la ablación láser que se realiza sobre la superficie anterior de la córnea es guiada por los coeficientes de Zernike [12]. Otro ejemplo es el diagnóstico de queratocono y su clasificación según la severidad de afectación de la córnea, aquí los coeficientes de aberración son empleados como variables de entrada en algoritmos de redes neuronales encargados de la clasificación [13].

Los polinomios de Zernike se ajustan adecuadamente a la topografía de córneas normales, pero en el caso de examinar córneas con topografías complejas e irregulares, el uso de estos polinomios ha empezado a generar ciertas preocupaciones [12], [14], [15]. Por ejemplo, Smolek M. K., et al., en su trabajo [12], realizan mediciones topográficas sobre córneas con queratocono, y córneas que han sufrido intervenciones quirúrgicas de queratoplastia corneal penetrante (trasplante total de la córnea) y conductiva (moldeamiento corneal por radiofrecuencia o luz láser), para luego realizar el ajuste a polinomios de Zernike hasta cuarto y décimo orden. De sus deliberaciones concluyen que los polinomios de Zernike fallan al no lograr representar ciertas características de la superficie corneal que influyen en la calidad visual de córneas patológicas como las que evalúan. Error que aumenta a medida que las córneas se hacen más irregulares. Además, contrario a lo esperado, ampliar el orden de los polinomios no siempre logra una mejor representación, incluso en la inspección de córneas medianamente aberradas. Este aspecto impredecible en el ajuste con polinomios de Zernike podrían ser responsables del resultado, también impredecible, que se ha encontrado ocasionalmente en los procedimientos de ablación láser, aunado al hecho de que para este procedimiento solo se emplean polinomios hasta de cuarto orden. Los autores [12] enfatizan que, si este problema es inherente a los polinomios de Zernike, este “*método podría ser no fiable e inaceptable para uso clínico*”.

La dificultad para reconocer cuántos polinomios de Zernike son suficientes para realizar una buena reconstrucción de una superficie corneal ha sido también advertido por otros autores [16]. Adicionalmente, los polinomios de Zernike también han presentado dificultades en detectar y evaluar la severidad en casos de queratocono severo [17], han mostrado su

incapacidad para representar cambios locales de topografía [18], y finalmente, aunque los polinomios de Zernike logran capturar muy bien las aberraciones de bajo orden, fallan por completo al tratar de medir aberraciones de alto orden con importancia clínica en ojos patológicos, creando una subestimación de su cantidad clínica significativa que afectarían los resultados posoperatorios de cirugías refractivas [15].

### 4.3. Representaciones Alternativas de Superficies

En la literatura existen distintas propuestas de representaciones alternativas a los polinomios de Zernike. Entre ellas se encuentran los polinomios propuestos por Forbes G. W. [19], [20], la representación con funciones circulares de Bessel [21], los polinomios ortogonales de Bhatia-Wolf [22], y la representación con componentes de Fourier [23]; aunque estos últimos se les ha cuestionado su eficacia [24]. Cabe mencionar que respecto a los polinomios de Bhatia-Wolf, estos han mostrado tener mayor precisión que los polinomios de Zernike [25], no obstante, también fallan para describir deformaciones locales [18]. La capacidad de reproducir cambios abruptos de topografía podría ser considerado como factor clave para lograr reproducir detalles de alta frecuencia, como los que existen en córneas con aberraciones de alto orden.

En búsqueda de funciones que, quizás, puedan ser buenas candidatas para representar deformaciones locales de topografía, las funciones gaussianas tienen ciertas características que las hacen interesantes. Una de ellas, y quizás la más importante, es que la función gaussiana actúa solamente en un ámbito local, en la zona cercana a su centro. Otra característica es que pueden ser formuladas dentro de un método modal, y también pueden ser superpuestas sin afectar su efecto local.

En la literatura, no fue hasta el año 1997 cuando Jim Schwiegerling en su trabajo [17] propuso la idea de usar una función Gaussiana para detectar y caracterizar el cono presente en superficies corneales afectadas con queratocono. En este trabajo, a la superficie corneal recuperada por un topógrafo se le realiza un ajuste con polinomios de Zernike de bajo orden, luego, a la superficie resultante de la resta entre la topografía original y la superficie generada por los polinomios, se ajusta manualmente una gaussiana simple con anchos distintos en  $x$  y  $y$  de la forma:

$$Z = Z_0 \exp \left( - \left[ \frac{(x - x_0)^2}{2\sigma_x^2} + \frac{(y - y_0)^2}{2\sigma_y^2} \right] \right) \quad (8)$$

La función gaussiana anterior es una expresión que simplifica bastante la forma de los conos que pueden existir en una córnea afectada por queratocono, ya que estos conos podrían tener formas más complejas como torceduras alrededor de su centro, tener múltiples picos, o que los ejes de la gaussiana no coincidan con los ejes coordenados [17].

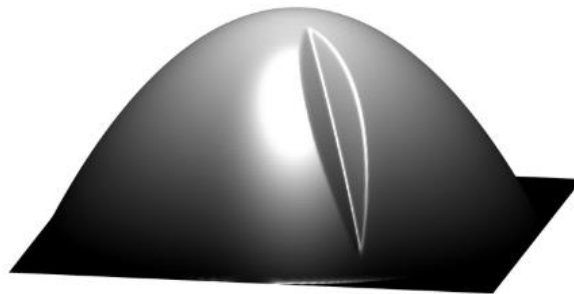
Adicionalmente, se encuentran tres trabajos que incluyen funciones gaussianas en el contexto de las superficies y de los frentes de onda. Uno de ellos es el propuesto por Montoya-Hernández M., et al. [26], quienes ajustan el frente de onda a un conjunto de gaussianas uniformemente distribuidas en la pupila. Los otros dos trabajos, son los realizados por Martínez-Finkelshtein A., et al. [14], [18], quienes logran resultados interesantes proponiendo que la superficie corneal sea la combinación de una forma global esférica con una sumatoria de funciones gaussianas que tiene la forma:

$$\sum_{j=1}^n c_j b_j(x, y) \quad (9)$$

con

$$b_j(x, y) = \exp\left[\alpha_x(x-x_0)^2 + 2\alpha_{xy}(x-x_0)(y-y_0) + \alpha_y(y-y_0)^2\right] \quad (10)$$

siendo una función gaussiana con centro en las coordenadas  $(x_0, y_0)$ , y con factores de forma  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$ , y  $\alpha_{xy}$ . Los autores ajustan los factores de forma de las gaussianas dispuestas uniformemente [18], o solo en los lugares de mayor error [14], de tal manera que en cada iteración del algoritmo el error de la superficie recuperada disminuya. Un ejemplo de los resultados que logran es presentado en la Figura 4.1, donde la superficie a representar es la de la simulación de una cornea con una cicatriz radial (*a*), con sus respectivas curvas de contorno (*b*), y la superficie recuperada (*c*) con las funciones gaussianas de las Ecuaciones (9-10).



(*a*)

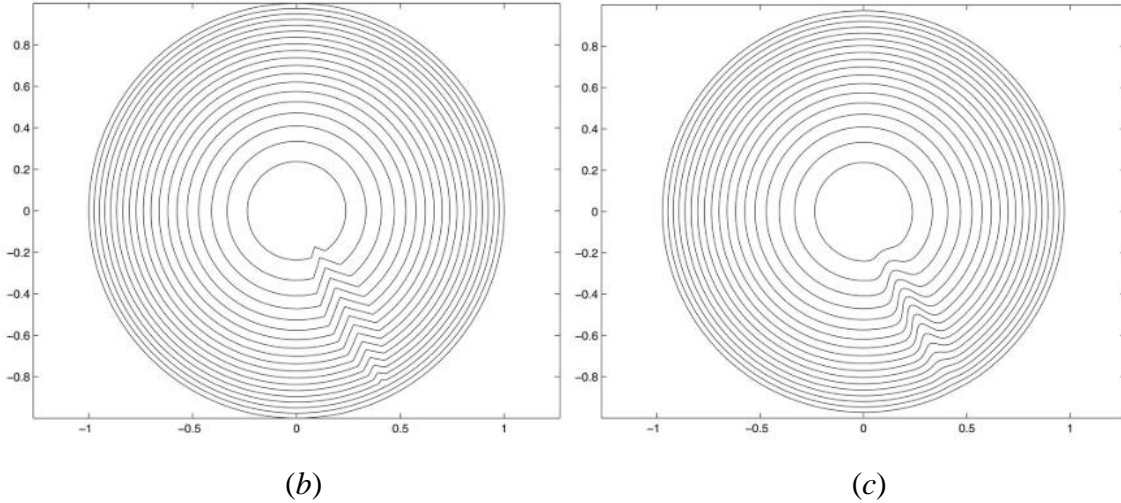


Figura 4.1. Representación de una superficie corneal con una cicatriz radial (a). En (b) las curvas de contorno para la superficie original, y en (c) para la superficie recuperada. Figuras tomadas de Martínez-Finkelshtein A., et al. [14], [18].

#### 4.4. Propuesta de Representación con Funciones Gaussianas

En esta tesis se realiza una propuesta de representación de superficies corneales que involucra el uso de tres tipos de funciones mencionadas previamente: las funciones gaussianas, los polinomios de Zernike y las asferas con simetría de rotación. La intención de esta propuesta es subsanar la deficiencia que en ocasiones han mostrado los polinomios de Zernike para representar por sí solos todas las variaciones locales que pueda tener la topografía corneal, involucrando también los detalles de alta frecuencia espacial. La forma de hacerlo es justamente quitándoles esta responsabilidad a los polinomios de Zernike, y entregársela en su lugar a las funciones gaussianas, que, por su fuerte carácter zonal localizado se considera podría realizar un mejor trabajo.

Efectivamente, la propuesta no excluye del todo a los polinomios de Zernike, ellos se seguirán usando, solo que limitados a polinomios de bajo orden. En esta propuesta, la forma global de la superficie corneal será representada por una asfera con simetría de rotación; que como se recordará del primer Capítulo 1 esta representación matemática permite una caracterización clínica de córneas normales y anormales, [27]–[31], donde según González-Méijome et al., [27], [32], las córneas de jóvenes adultos típicamente pueden representarse con un elipsoide prolato con constante de conicidad de  $K = -0.23$ .

Por lo anterior, la superficie  $z$  propuesta tendrá la forma:

$$z = R(x, y) + \sum_{n=1}^2 D_n^l Z_n^l + G \quad (11)$$

donde  $R(x, y)$  es la asfera con simetría de rotación:

$$R(x, y) = \frac{cS^2}{1 + \sqrt{1 - (K+1)c^2S^2}} \quad (12)$$

la sumatoria en  $Z$  son los polinomios de Zernike de bajo orden con  $n = 0, 1, 2$ ; es decir, los primeros 6 términos de la Tabla 4.2 que coinciden con los propuestos por Jim Schwiegerling en su trabajo [17]. El término  $G$  en la Ecuación 11 es también una sumatoria que agrupa distintos tipos de funciones gaussianas, y se define como:

$$G = \sum_{n=1}^N B_n e^{-\left[ \frac{((x-x_n)\cos\phi_n + (y-y_n)\sin\phi_n)^2}{\Delta x_n^2} + \frac{((y-y_n)\cos\phi_n - (x-x_n)\sin\phi_n)^2}{\Delta y_n^2} \right]} + \sum_{l=1}^L \sum_{s=1}^S E_s e^{-(\rho-\rho_s)^2/\Delta\rho_s^2} \{A_{s1} \cos l\theta + A_{s2} \sin l\theta\} + \sum_{s=1}^S \sum_{k=1}^K F_s e^{-(\theta-\theta_s)^2/\Delta\theta_k^2} \left\{ 1 + G_s e^{-(\rho-\rho_0)^2/\Delta\rho^2} \right\} \quad (13)$$

Las gaussianas de la primera sumatoria son similares a las usadas en [14], [18], ver Ecuación (10), aunque aquí se definen de forma diferente. Estas gaussianas tienen sus ejes rotados un ángulo  $\phi$  con respecto al eje  $x$ , con anchos dados por  $\Delta x$  y  $\Delta y$ . Aquí se les denomina como gaussianas anisotrópicas porque partiendo del centro de la gaussiana en dirección radial, el perfil encontrado siempre es distinto (con  $\Delta x \neq \Delta y$ ). Un ejemplo de una gaussiana anisotrópica se muestra en la Figura 4.2, mientras que en la Figura 4.3 se presentan otras superficies con el fin de mostrar las capacidades que tiene este primer término de la Ecuación (13). Un defecto como el que se presenta en la Figura 4.3 (a), que bien podría representar un espejo con una orilla caída, es un defecto muy común en la construcción de espejos, dado que el abrasivo o el pulidor generalmente se acumula en la orilla; una superficie como esta sería muy difícil de recobrar únicamente con polinomios de Zernike. Por las formas de las otras superficies de la misma Figura 4.3, en el contexto de la óptica visual se podría considerar que estas representaciones matemáticas con gaussianas podrían ser usadas en la representación de superficies corneales con queratocono, en donde, como se mencionó anteriormente, podrían existir conos con formas complejas: múltiples conos, conos con ejes inclinados o con torceduras alrededor de su eje [17].



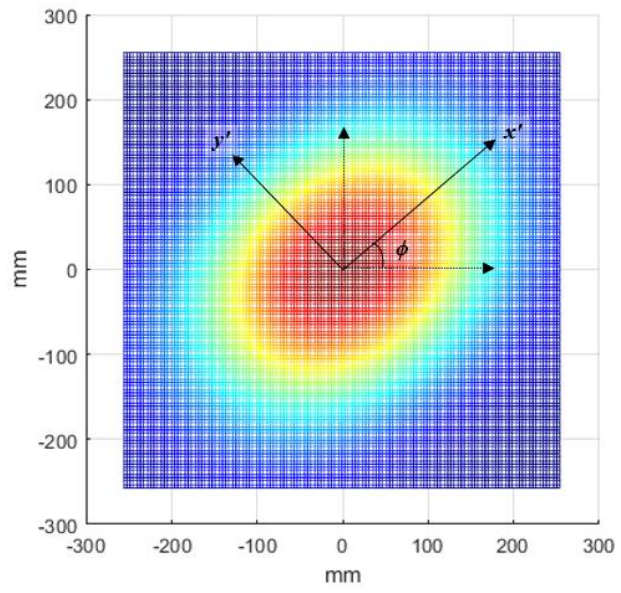
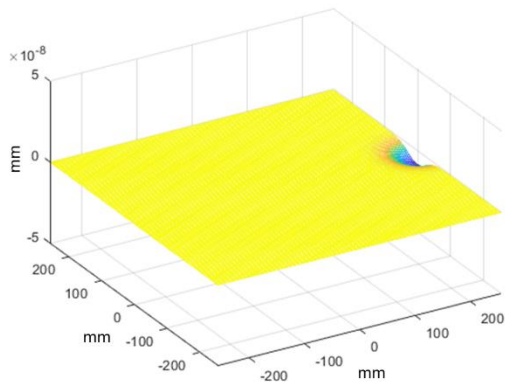
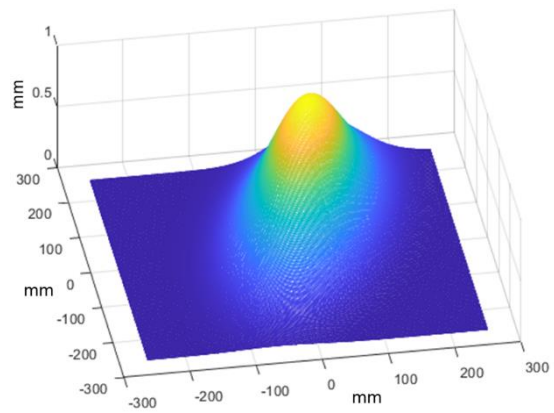


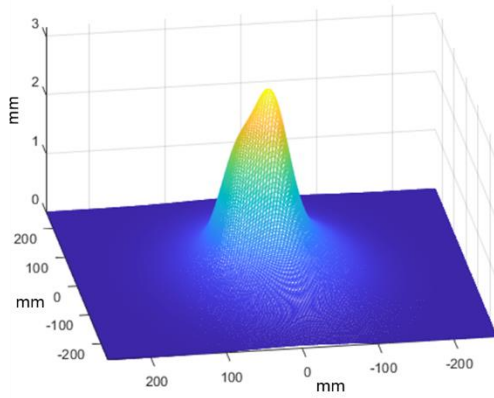
Figura 4.2. Gaussiana anisotrópica genérica.



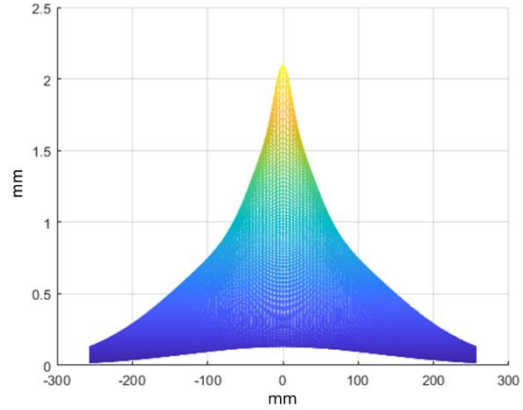
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 4.3. Gaussianas anisotrópicas construidas con el primer término de la Ecuación 13. En (a) representando un defecto aislado en el borde, en (b) una única gaussiana rotada un ángulo  $\phi_n$ , desplazada del centro, con anchos  $\Delta x$  y  $\Delta y$ . En (c), una combinación de 3 gaussianas de distintas alturas y anchos, una de ellas desplazada con respecto a las otras. En (d), 3 gaussianas centradas con distintas alturas y anchos para hacer más prominente el centro de la superficie.

El segundo término de la Ecuación (13),

$$G = \dots + \sum_{l=1}^L \sum_{s=1}^S E_s e^{-(\rho-\rho_s)^2/\Delta\rho_s^2} \{A_{s1} \cos l\theta + A_{s2} \sin l\theta\} + \dots$$

permite representar surcos de radio  $\rho_s$  y ancho  $\Delta\rho_s$ , modulados armónicamente por la variable  $l$ , y con una amplitud y desfase controlados por las constantes  $A_{s1}$  y  $A_{s2}$ . En la Figura 4.4 (a) se presenta un surco modulado típico que puede generar esta expresión, en (b-c) se presentan otras superficies interesantes que se logran formar cuando  $l < |1|$ , aunque en (c)  $\rho_s = 0$ . Un surco como el de la Figura 4.4 (a), o incluso sin la modulación angular, podrían suceder también en el pulido de superficies ópticas como consecuencia de un defecto de la herramienta de pulido.

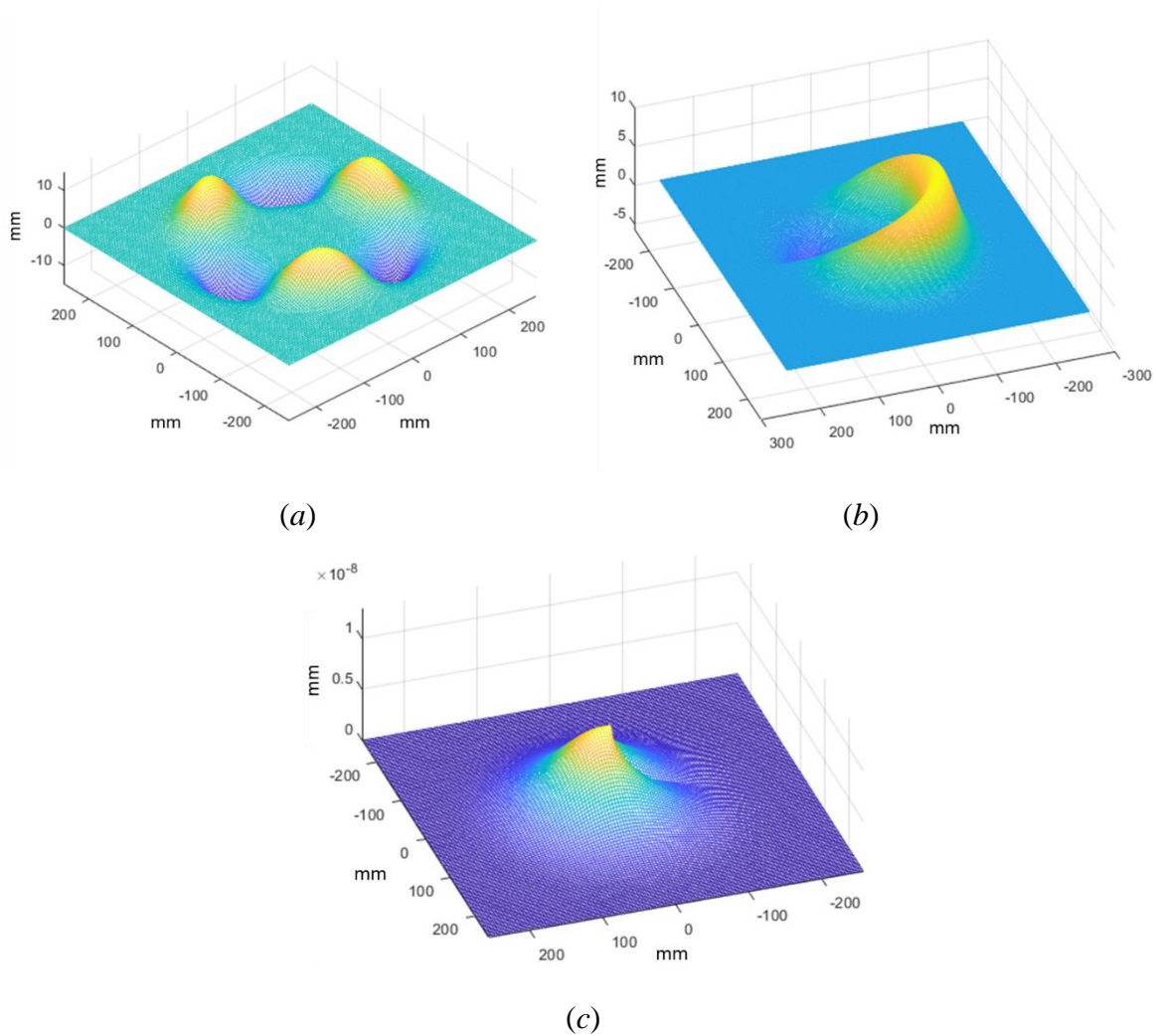


Figura 4.4. Superficies generadas por el segundo término de la Ecuación (13). En (b) y (c)  $l < |1|$ .

Continuando con la revisión de la Ecuación (13), el último término expresa:

$$G = \dots + \dots \sum_{s=1}^S \sum_{k=1}^K F_s e^{-(\theta-\theta_s)^2/\Delta\theta_k^2} \left\{ 1 + G_s e^{-(\rho-\rho_0)^2/\Delta\rho^2} \right\}$$

el cual combina dos tipos de funciones, la primera genera una ranura angular que puede ser vista en la Figura 4.5 (a), mientras que la segunda es una gaussiana que modula la ranura, ver Figura 4.5 (b). La combinación de estas dos funciones puede crear superficies como la de la Figura 4.5 (c).

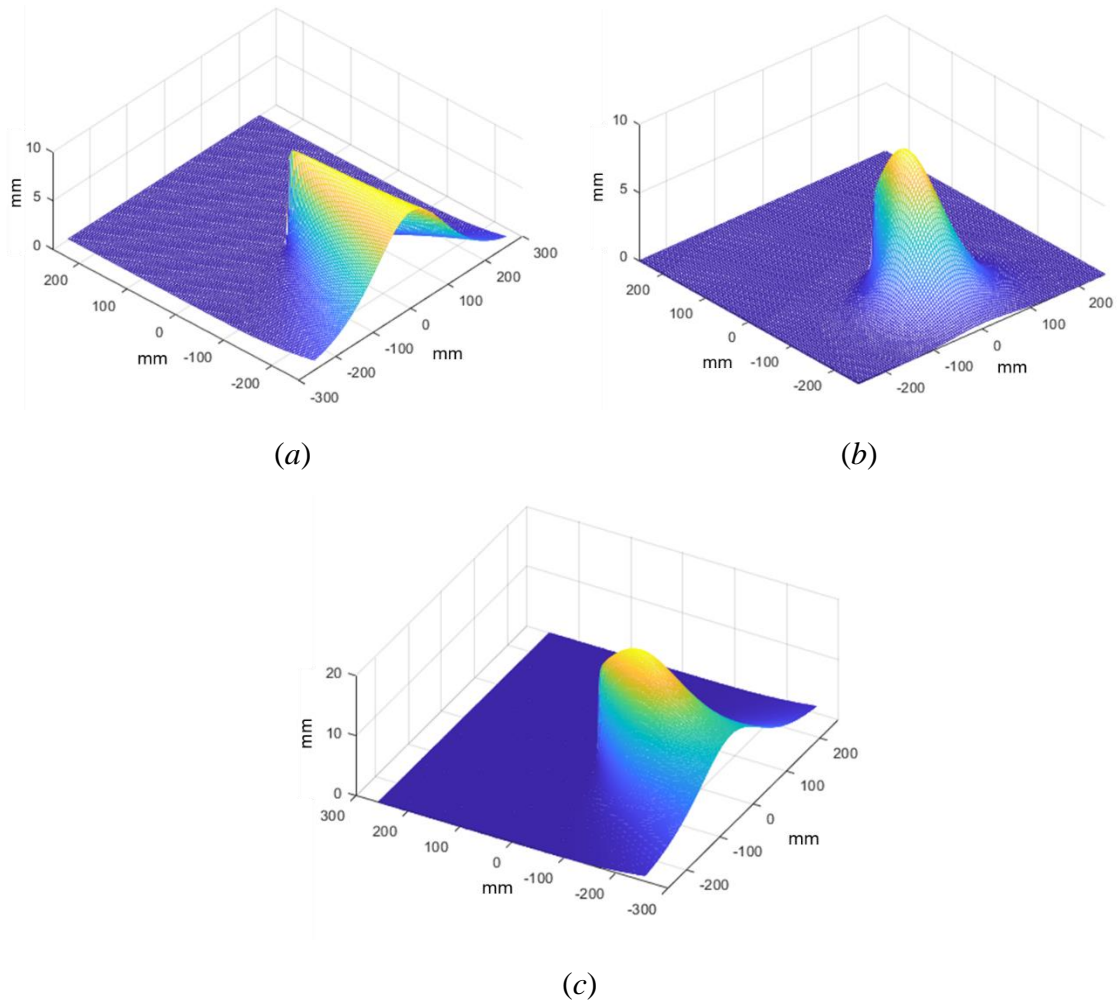


Figura 4.5. Ranura angular (a) que es modulada por la gaussiana (b) para formar la superficie presentada en (c).

Ahora bien, con la representación propuesta es esperable que una superficie como la de la córnea con una cicatriz radial presentada en la Figura 4.1 (a), se ajuste más rápidamente que cuando se usan solamente funciones gaussianas como las de las Ecuaciones (9-10) [14]. Para ello es solo mostrar que es posible generar una superficie parecida empleando exclusivamente algunos términos de la Ecuación (11):

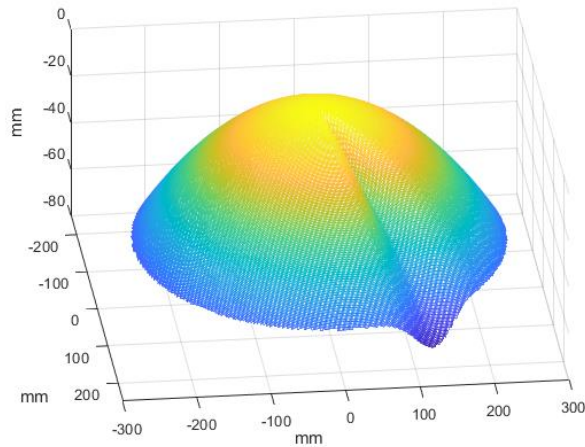


Figura 4.6. Representación de una superficie corneal con una cicatriz radial empleando la representación propuesta.

donde la forma de la superficie presentada se ha reducido a un círculo para mostrar más claramente los detalles de la superficie simulada.

Metodológicamente, el siguiente paso es plantear un método de ajuste que sea específico a la representación matemática propuesta, el cual se efectúa sobre una nube de puntos de información topográfica, que bien puede ser simulada o puede provenir de un topógrafo corneal. El método de ajuste, o de regresión, se propone de la siguiente manera:

Recordando que la representación matemática propuesta tiene la forma:

$$z = R(x, y) + \sum_{n=1}^2 D_n^l Z_n^l + G$$

el método de ajuste puede plantearse por etapas como puede verse en el esquema de la Figura 4.7. El método parte de un primer ajuste sobre la asfera  $R(x, y)$ , luego la superficie de error resultante se ajusta a los polinomios de Zernike, y posteriormente al término  $G$ . En este último ajuste el valor rms podría ser la variable de control para incluir o descartar funciones gaussianas en la descripción final de la superficie; en otras palabras, el valor rms podría servir como indicativo de que el modelo escogido aplica, o no, según sea la superficie bajo estudio.

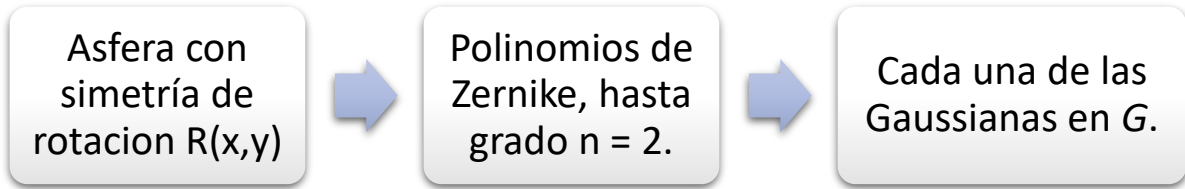


Figura 4.7. Ajuste por etapas: Tras la primera regresión, la nueva superficie a ser ajustada se obtiene de la resta entre la nube de puntos y la superficie obtenida para  $R(x, y)$ . En las siguientes regresiones la superficie de ajuste se actualiza substrayéndole la nueva superficie obtenida en la regresión correspondiente.

El primer ajuste se realiza sobre la asfera con simetría de rotación, que, recordando la Ecuación (1) del Capítulo 1, esta tiene la forma:

$$R(x, y) = \frac{cS^2}{1 + \sqrt{1 - (K+1)c^2S^2}} \quad (14)$$

la cual no se resuelve de forma directa como un ajuste cualquiera de mínimos cuadrados, sino que requiere de un método similar al empleado por Sun W, et al.[33]. Reescribiendo la Ecuación (14) se tiene que:

$$z = p_1 z^2 + p_2 s \quad (15)$$

donde por simplicidad la superficie se le ha llamado  $z$ , y las constantes  $p_1$  y  $p_2$  se definen como:  $p_1 = l/2$ ,  $p_2 = c/2$ , con  $l = mc$ ,  $m = K + 1$ .

Con la definición de la Ecuación (15), ahora si es posible aplicar una regresión de mínimos cuadrados convencional, en la que se realiza una optimización del error cuadrático definido como:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^N (z - z')^2 \quad (16)$$

donde  $z$  es la función dada por la Ecuación (15) y  $z'$  son los valores de la superficie en los puntos de muestreo  $i = 1, 2, \dots, N$ .

La optimización se da cuando el error cuadrático definido se minimiza respecto a las constantes  $p_1$  y  $p_2$ , así:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial p_1} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_2} = 0 \quad (17)$$

lo que genera un sistema de ecuaciones que escrito de forma matricial es:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N z^4 & \sum_{i=1}^N s^2 z^2 \\ \sum_{i=1}^N z^2 s^2 & \sum_{i=1}^N s^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N z' z^2 \\ \sum_{i=1}^N z' s^2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

La solución del sistema matricial permite encontrar la curvatura  $c$  y la constante de conicidad  $K$  haciendo  $c = 2p_2$  y  $K = p_1/p_2 - 1$ .

En el caso de los polinomios de Zernike hasta orden 2, la minimización del error cuadrático  $\varepsilon$  permite encontrar los coeficientes de aberración para cada uno de los primeros seis polinomios de la Tabla 4.2:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial A_0} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial A_1} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial A_2} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial A_3} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial A_4} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial A_5} = 0 \quad (19)$$

minimización que genera un sistema matricial cuya matriz se expresa como:

$$\begin{bmatrix} N & \sum_{i=1}^N \rho_i \sin \theta_i & \sum_{i=1}^N \rho_i \cos \theta_i & \sum_{i=1}^N \rho_i^2 & \sum_{i=1}^N \rho_i^2 \sin 2\theta_i & \sum_{i=1}^N \rho_i^2 \cos 2\theta_i \\ \sum_{i=1}^N \rho_i \cos \theta_i & \sum_{i=1}^N \rho_i^2 \sin \theta_i \cos \theta_i & \sum_{i=1}^N \rho_i^2 \cos^2 \theta_i & \sum_{i=1}^N \rho_i^3 \cos \theta_i & \sum_{i=1}^N \rho_i^3 \sin 2\theta_i \cos \theta_i & \sum_{i=1}^N \rho_i^3 \cos 2\theta_i \cos \theta_i \\ \sum_{i=1}^N \rho_i \sin \theta_i & \sum_{i=1}^N \rho_i^2 \sin^2 \theta_i & \sum_{i=1}^N \rho_i^2 \sin \theta_i \cos \theta_i & \sum_{i=1}^N \rho_i^3 \sin \theta_i & \sum_{i=1}^N \rho_i^3 \sin 2\theta_i \sin \theta_i & \sum_{i=1}^N \rho_i^3 \cos 2\theta_i \sin \theta_i \\ \sum_{i=1}^N \rho_i^2 & \sum_{i=1}^N \rho_i^3 \sin \theta_i & \sum_{i=1}^N \rho_i^3 \cos \theta_i & \sum_{i=1}^N \rho_i^4 & \sum_{i=1}^N \rho_i^4 \sin 2\theta_i & \sum_{i=1}^N \rho_i^4 \cos 2\theta_i \\ \sum_{i=1}^N \rho_i^2 \cos 2\theta_i & \sum_{i=1}^N \rho_i^3 \sin \theta_i \cos 2\theta_i & \sum_{i=1}^N \rho_i^3 \cos \theta_i \cos 2\theta_i & \sum_{i=1}^N \rho_i^4 \cos 2\theta_i & \sum_{i=1}^N \rho_i^4 \sin 2\theta_i \cos 2\theta_i & \sum_{i=1}^N \rho_i^4 \cos^2 2\theta_i \\ \sum_{i=1}^N \rho_i^2 \sin 2\theta_i & \sum_{i=1}^N \rho_i^3 \sin \theta_i \sin 2\theta_i & \sum_{i=1}^N \rho_i^3 \cos \theta_i \sin 2\theta_i & \sum_{i=1}^N \rho_i^4 \sin 2\theta_i & \sum_{i=1}^N \rho_i^4 \sin^2 2\theta_i & \sum_{i=1}^N \rho_i^4 \cos 2\theta_i \sin 2\theta_i \end{bmatrix}$$

con un vector de términos independientes dado por:

$$\left[ \sum_{i=1}^N Z'_z \quad \sum_{i=1}^N Z'_z \rho_i \cos \theta_i \quad \sum_{i=1}^N Z'_z \rho_i \sin \theta_i \quad \sum_{i=1}^N Z'_z \rho_i^2 \quad \sum_{i=1}^N Z'_z \rho_i^2 \cos 2\theta_i \quad \sum_{i=1}^N Z'_z \rho_i^2 \sin 2\theta_i \right]^T \quad (20)$$

La solución del sistema matricial entrega los coeficientes  $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$  que corresponden a la superficie de mejor ajuste posible usando los polinomios de Zernike definidos.

Por último, para el término  $G$  el ajuste se debe realizar sobre cada una de las funciones gaussianas de la Ecuación (13), las cuales deben ser linealizadas antes de aplicar mínimos cuadrados. Por ejemplo, en el término que representa la ranura angular:

$$z = F_s e^{-(\theta - \theta_s)^2 / \Delta\theta_k^2} \quad (21)$$

que linealizado tiene la forma:

$$\ln z = \ln F_s - (\theta - \theta_s)^2 / \Delta\theta_k^2 \quad (22)$$

haciendo  $a = \ln F_s - \theta_s^2 / \Delta\theta_k^2$ ,  $b = 2\theta_s / \Delta\theta_k^2$ ,  $c = -1 / \Delta\theta_k^2$ , se puede escribir como:

$$\ln z = a + b\theta + c\theta^2 \quad (23)$$

por lo que el error cuadrático es dado por:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^N (\ln z - \ln z')^2 = \sum_{i=1}^N (a + b\theta + c\theta^2 - \ln z')^2 \quad (24)$$

y su minimización genera:

$$\begin{bmatrix} N & \sum \theta & \sum \theta^2 \\ \sum \theta & \sum \theta^2 & \sum \theta^3 \\ \sum \theta^2 & \sum \theta^3 & \sum \theta^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \ln Z' \\ \sum (\theta \ln Z') \\ \sum (\theta^2 \ln Z') \end{bmatrix} \quad (25)$$

Solucionando el sistema matricial, se encuentran las incógnitas de la función gaussiana:

$$\Delta\theta_k = \sqrt{-1/c}, \quad \theta_s = -0.5b/c, \quad \ln F_s = a - 0.25b^2/c \quad (26)$$

Este proceso se repite en cada una de las funciones gaussianas de la Ecuación (13), creando sistemas matriciales similares al de la Ecuación (25).

Cada una de las regresiones propuestas hasta aquí fueron probadas con una variedad de frentes de ondas simulados que contenían distintos tipos de aberraciones. Todas las pruebas funcionaron según lo esperado a excepción de aquellas que contenían funciones gaussianas, las cuales se ajustaron muy bien solo en los casos en donde la nube de puntos tenía una forma muy cercana a la de la gaussiana, cualquier desviación de esta forma generaba un error considerable en el cálculo de los parámetros de la función. Se considera que esto es debido al fuerte carácter local que tiene las funciones gaussianas, lo que hace inconveniente realizar un ajuste modal (es decir usando toda la nube de puntos a la vez) con las Ecuaciones (21-25). En lugar de eso, se propone que con el mismo tipo de ecuaciones se realice el ajuste ahora de



forma zonal (empleando solo un área reducida de puntos), lo cual no debería afectar el carácter modal de la representación matemática propuesta.

Tomando en cuenta algunas consideraciones para el manejo de funciones gaussianas que se encuentran en [14], se propone un método de ajuste zonal para este tipo de funciones que consta de los siguientes tres pasos:

❖ *Paso 1: Selección del centro de la gaussiana*

En lugar de hacer que la regresión misma encuentre el centro de la gaussiana, se propone que este centro se ubique en el lugar de máximo error entre la nube de puntos y la superficie de error, que se logra con la resta entre la nube de puntos y la superficie conseguida en una regresión previa a este paso, la cual bien podría ser la ajustada por la esfera y los polinomios de Zernike, o cualquier otra función gaussiana.

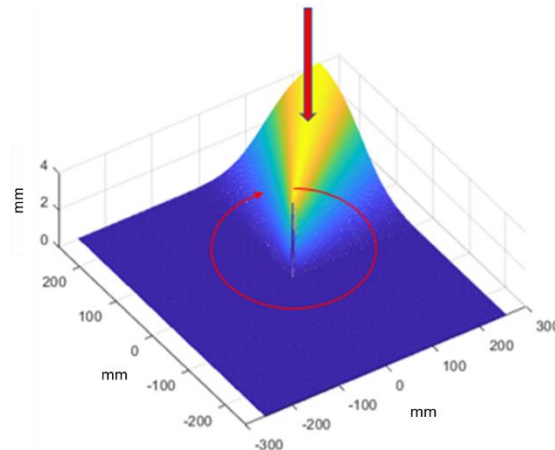


Figura 4.8. Selección del centro de la gaussiana de la Ecuación (21) “ranura angular”. En este caso, la búsqueda del centro se realiza siguiendo trayectorias circulares de distinto radio.

❖ *Paso 2: Selección de los puntos de influencia de la gaussiana*

Alrededor del centro de la gaussiana encontrado en el *Paso 1*, se seleccionan solo los puntos donde la superficie de error tenga el mismo signo, para así emplear en la regresión solo los datos que realmente pueden hacer parte de la campana de la gaussiana. Si la gaussiana es una gaussiana simétrica, el área tendrá la forma de un disco, si no, como en el caso de la ranura angular, el área a usar tendría una forma similar a la de la figura:

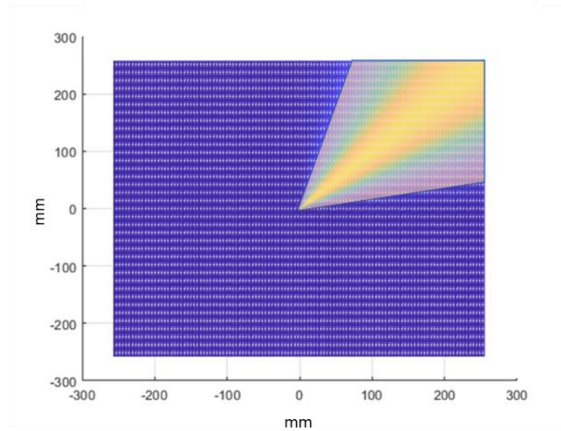
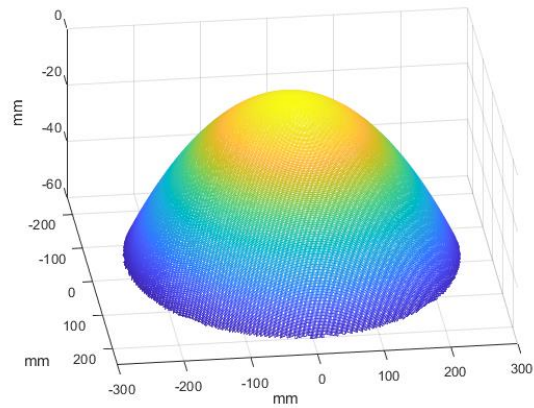


Figura 4.9. Área de influencia de la gaussiana donde la superficie de error tiene el mismo signo.

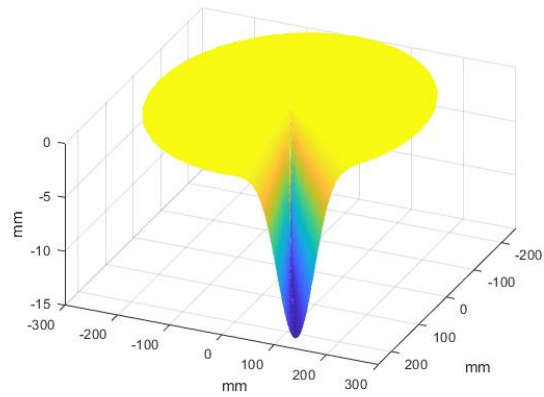
❖ *Paso 3: Ajuste de mínimos cuadrados ponderados (WLS):*

Conociendo el centro de la gaussiana (*Paso 1*) y su área de influencia (*Paso 2*), se puede realizar un ajuste de mínimos cuadrados ponderado (WLS) [34], con la intención de darle más importancia (más peso) a los datos cercanos al centro de la gaussiana y no tanto a los datos alejados de su centro. Sea  $P$  un punto cualquiera dentro de la región definida en el *Paso 2* y  $Q$  el centro de la función gaussiana, los pesos se incluyen multiplicando el factor  $(1 + \|P - Q\|^2)^{-1}$  a cada una de ecuaciones resultantes de la optimización de mínimos cuadrados [14]. En el caso de la ranura angular, este factor tiene la forma:  $(1 + (\theta - \theta_s)^2)^{-1}$ .

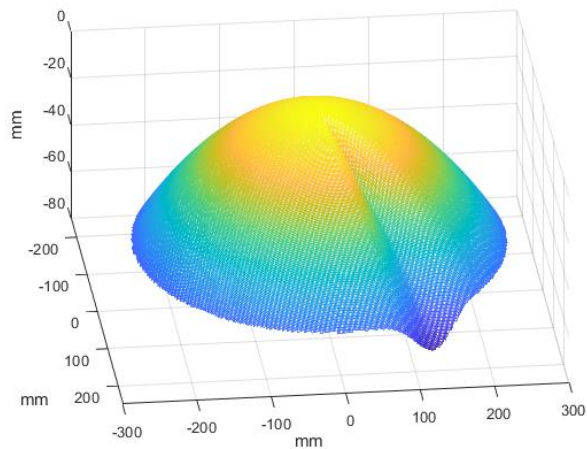
Este método de ajuste para las funciones gaussianas fue ensayado a través de una prueba de concepto, donde se aplicó el ajuste propuesto a una superficie que asemeja la forma de una córnea con una cicatriz radial que fue presentada anteriormente en la Figura 4.6. Esta superficie se logra al simular la superposición de una superficie esférica ( $K = 0$ ,  $R = -600$  mm) con una rendija angular ( $F_s = -15$  mm,  $\theta_s = 30^\circ$ ,  $\Delta\theta_k = 10^\circ$ ), ambas superficies constituyentes se pueden apreciar en la Figura 4.10. Es importante mencionar que la superficie se emplea a manera de ejemplo, a pesar de no contar con las dimensiones reales de una superficie corneal.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.10. Superficies simuladas para una esfera (a) y una rendija angular (b), cuya superposición genera una posible representación de una superficie corneal con una cicatriz radial (c).

Tras realizar el ajuste de la superficie cónica y luego el ajuste de la gaussiana empleando los *Pasos* 1 (Selección del centro de la gaussiana), 2 (Selección de los puntos de influencia de la gaussiana) y 3 (Ajuste de mínimos cuadrados ponderados), se obtienen los coeficientes presentados en la Tabla 4.3, con los cuales se crea la superficie de la Figura 4.11. Esta superficie recuperada, cualitativamente se asemeja mucho a la superficie original de la Figura 4.6 o la Figura 4.10 (c). Cuantitativamente, el porcentaje de error medio absoluto es de solo el 1.04%, un error rms de 0.80 mm que porcentualmente equivale al 0.65%. La superficie de error porcentual correspondiente se presenta en la Figura 4.12.

**Tabla 4.3.** Parámetros recuperados tras el ajuste propuesto.

	Cónica		Gaussiana	
	$R$ (mm)	$K$	$F_s$ (mm)	$\Delta\theta_k$
Original	-600	0	-15	$10^\circ$
Recuperado	-601.25	0.28	-14.41	$9.05^\circ$

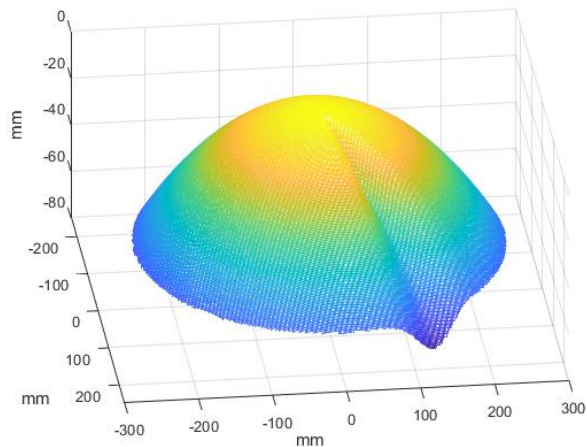


Figura 4.11. Superficie creada con los coeficientes recuperados tras aplicar el método de ajuste propuesto.

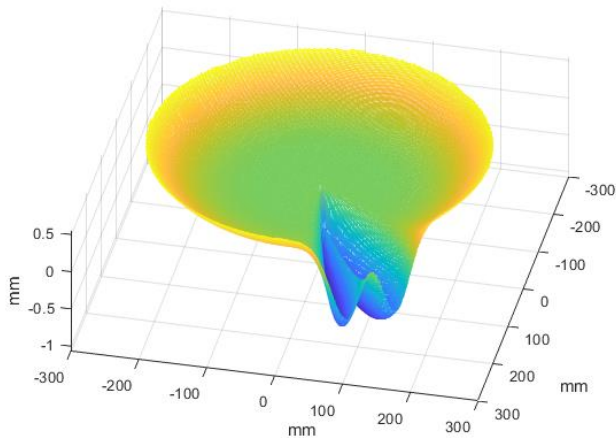


Figura 4.12. Error porcentual obtenido después de aplicar el ajuste propuesto a la superficie de la Figura 4.6 o la Figura 4.10 (c).

Se puede esperar que el error obtenido disminuya en la medida de que otras funciones gaussianas de distintos anchos se ajusten de forma iterativa a la superficie de error, lo cual correspondería a aplicar el método completo descrito inicialmente que emplea las sumatorias

de la expresión  $G$  en la Ecuación (13). Lamentablemente por falta de tiempo este ajuste iterativo no logró ser implementado por completo, sin embargo, los resultados de esta prueba de concepto son esperanzadores y servirán como guía para trabajos futuros que se realicen en esta dirección.

Para cerrar este capítulo se presenta un paralelismo entre el uso exclusivo de polinomios de Zernike y el uso de funciones gaussianas. Los polinomios de Zernike tienen un desbalance intrínseco, los órdenes bajos tienen un gran valor en la función, tienen un gran peso, mientras que los órdenes altos tienen un peso cada vez más pequeño. Los Zernikes son sumamente atractivos hasta que tienen que representar superficies con formas complejas, cuando son muy aberradas o cuando tienen cambios abruptos de topografía; es ahí donde todo se complica. La alternativa natural, antes mencionada, es subir el orden de los polinomios empleados, lo cual afecta la complejidad del problema porque el número de coeficientes a ajustar crece significativamente, alejándose del sentido práctico. Además, que pequeñas variaciones en los coeficientes de alto orden generan cambios fuertes en la superficie representada. Caso contrario sucede con las funciones gaussianas, el número de coeficientes de ajuste se mantiene fijo por cada gaussiana introducida a la representación, no crece de forma significativa cuando se agrega complejidad a la representación. Cada gaussiana tiene una gran responsabilidad en la representación final, es no más ver como unas pocas gaussianas se ajustan muy bien al ejemplo presentado en la Figura 4.10. El uso de gaussianas independientes entre sí le da a la propuesta una gran flexibilidad, un pequeño cambio en algún(os) coeficiente(s) genera cambios suaves en la forma de la gaussiana, y lo más importante es que solo afectan el ajuste de la función de forma local, no se propagan más allá del campo de acción de la función gaussiana, lo cual es muy contrario a lo que sucede con los polinomios de Zernike, donde cada término tiene una influencia sobre toda la pupila.

## 4.5. Conclusiones

En este Capítulo se estudiaron las representaciones matemáticas de superficies ópticas más relevantes que se encuentran en la literatura, estas incluyen las representaciones polinómicas clásicas y el estándar actual de la óptica visual: los polinomios de Zernike. Al respecto de estos últimos se dio a conocer las preocupaciones y advertencias que existen sobre su uso clínico, en especial cuando estos polinomios son usados en la detección y clasificación de afectaciones visuales y en la guía de intervenciones quirúrgicas. Se argumentó que, aunque los polinomios de Zernike logran representar muy bien la topografía de córneas normales, fallan al tratar de representar aberraciones de alto orden y cambios locales de topografía.

Por las inquietudes que generan los polinomios de Zernike, se presentaron representaciones alternativas de superficies que involucran distintos tipos de funciones matemáticas, entre ellas se destacan el uso de las funciones gaussianas, que siendo una función de ámbito modal tiene un carácter local que ha mostrado ser útil en la representación de distintos tipos de superficies con cambios abruptos de topografía.

Se propuso una representación alternativa de superficies donde las formas suaves, o más bien, las aberraciones de bajo orden son representadas por una esfera con simetría de rotación y por polinomios de Zernike de bajo orden. Mientras que los cambios abruptos de topografía son representados por una combinación de funciones gaussianas que no solo involucran superficies con su forma típica de campana, sino también representaciones más complejas como las ranuras angulares, los surcos modulados, entre otros. Se considera que esta representación matemática podría llegar a ser útil, e incluso esencial para representar distintos tipos de superficies ópticas, que bien pueden ser pequeñas, como es el caso de las topografías corneales afectadas por aberraciones de alto orden o por enfermedades como el queratocono, o superficies grandes como las de espejos o lentes afectadas por defectos locales de construcción.

A través de la generación de distintos tipos de superficies, se mostraron las capacidades y alcances que tiene cada uno de los términos que conforman la representación matemática propuesta. Se presentó un método de regresión que permitiría el ajuste de las funciones propuestas a una nube de puntos cualquiera; advirtiendo las dificultades que existen al aplicar un método de regresión convencional sobre las funciones gaussianas. Para el caso de las funciones gaussianas se propuso un método de regresión especial que tiene en cuenta el carácter local de este tipo de funciones. Se realizó una prueba de concepto sobre una superficie simulada cuya forma es parecida al de una superficie corneal con una cicatriz radial. La prueba arrojó resultados prometedores, con un error medio absoluto del 1.04% en la superficie recuperada.

El éxito de la prueba hace esperar que una futura implementación de un método iterativo que involucre el uso de todas las funciones gaussianas propuestas pueda solventar las dificultades que hay actualmente para representar aberraciones de alto orden y defectos topográficos locales. Hay que considerar que una implementación de este tipo podría tener un impacto significativo en las herramientas de diagnóstico y en los tratamientos quirúrgicos que son guiados únicamente con la información de los polinomios de Zernike; recordando que, por ejemplo, si los polinomios no capturan todas las características de la superficie, las cirugías refractivas podrían no corregir plenamente las aberraciones de alto orden que son clínicamente significativas [15].

## Conclusiones Generales

Dado que el estudio de esta tesis se centra sobre la caracterización dimensional de la córnea humana, se realizó una revisión general sobre distintos aspectos que involucran la anatomía del ojo y su funcionamiento como sistema óptico. Este estudio condujo naturalmente a la córnea humana que es la componente óptica responsable de la mayor parte del poder óptico y de las aberraciones del ojo, por lo que tiene un gran impacto en la calidad de la visión humana. El estudio de la córnea no solo abarcó sus componentes, sino también la revisión de las distintas formas de medir su topografía anterior y de representar matemáticamente su superficie. Esta revisión permitió preparar un marco de trabajo del cual se sustentaron los distintos aportes presentados en esta tesis.

Justamente, los aportes de esta tesis se centran en dos aspectos que combinados podrían generar impacto significativo en la caracterización dimensional de la córnea, estos son la medición y la representación matemática de su superficie anterior. Respecto a la medición, se realizaron aportes que enriquecen la técnica de topografía corneal basada en anillos de Placido, ya que brindan una solución alternativa al error del rayo oblicuo que es inherente al uso de anillos continuos proyectados sobre la córnea para obtener su topografía. La solución propuesta se fundamenta en las pruebas ópticas, esta es intuitiva, simple y rápida, no requiere cambios en el hardware del topógrafo, ni realiza ningún tipo de filtrado digital de datos. El algoritmo implementado es iterativo, requiriendo de pocas y rápidas iteraciones (típicamente 10 iteraciones) para alcanzar un error promedio del 3% en la topografía corneal recuperada; error que puede ser considerado despreciable en la mayoría de las aplicaciones prácticas, además de ser inferior al umbral de relevancia clínica en oftalmología. Estos resultados, aunque parecen prometedores tienen que ser confrontados en una instancia posterior con experimentos en condiciones reales, inicialmente con superficies de calibración y posteriormente con córneas reales.

Como puede verse, la solución implementada al error del rayo oblicuo es competitiva frente a otras soluciones que se encuentran en la literatura. El colocar este error por la presencia de rayos oblicuos en un valor inferior a la relevancia clínica aceptada, garantiza que cuando se use este topógrafo corneal se disminuye el riesgo de un mal diagnóstico, así como el de realizar intervenciones clínicas basándose en una medición errada de topografía.

Respecto a la representación matemática de la superficie anterior de la córnea, se propuso una representación modal que tiene la capacidad de los métodos zonales para reproducir cambios locales de topografía. Esto es posible gracias al uso de una combinación de funciones gaussianas de diferentes tipos, encargadas de representar las variaciones rápidas de la superficie, mientras que para las variaciones lentas se empleó una combinación de polinomios de Zernike de bajo orden con una asfera con simetría de rotación. El ajuste de la superficie corneal a las funciones de bajo orden se realizó empleando mínimos cuadrados. Para las funciones gaussianas se propuso un método de regresión que se ajusta a los defectos topográficos locales. Este método involucra la optimización de la ubicación del centro de la gaussiana, la selección del área de influencia y un ajuste de mínimos cuadrados ponderados.

Se realizó una prueba de concepto sobre una superficie simulada con un defecto topográfico local, obteniéndose un error medio absoluto del 1.04%. Gracias a estos resultados prometedores, se puede considerar que una implementación futura de la representación matemática propuesta que incluya un método iterativo que agregue de manera dinámica gaussianas de distintos tipos, se podría ajustar adecuadamente a la forma de córneas humanas altamente aberradas, o afectadas por enfermedades como el queratocono; ambas situaciones que han sido tratadas de solventar con éxito limitado empleando polinomios de Zernike de alto orden. En caso de éxito, la propuesta podría llegar a tener un efecto clínico significativo, ya que intervenciones quirúrgicas como la cirugía refractiva por ablación láser podrían llevarse a cabo empleando las expresiones propuestas para representar la córnea del paciente, sobrellevando así los inconvenientes demostrados al usar únicamente información de los polinomios de Zernike. Adicionalmente, esta representación matemática podría ser útil para representar superficies ópticas con defectos topográficos locales que pueden aparecer en la fabricación de lentes y espejos.

Es de destacar que los aportes presentados en esta tesis tienen una sinergia interesante ya que en conjunto tienen el potencial de aportar significativamente a la caracterización de la topografía corneal. Una solución individual de los problemas presentados crearía una solución incompleta a la problemática planteada. Una buena caracterización de una topografía corneal se logra con la combinación de una excelente técnica de medición con una apropiada representación matemática. Combinando ambas soluciones esto se puede lograr, generando como consecuencia que los diagnósticos y tratamientos clínicos subsecuentes tengan un real impacto en la calidad visual de los pacientes.

Los trabajos originales desarrollados durante esta investigación, plasmados en esta tesis doctoral, han sido objeto de divulgación y revisión de pares. Los resultados preliminares de la solución al error del rayo oblicuo fueron presentadas en ponencia oral en el congreso Optics+Photonics 2019 en la ciudad de San Diego, CA, cuyas memorias se encuentran publicadas en los Proceedings of SPIE en el trabajo titulado “*A proposal to eliminate the skew ray error in corneal topography using Placido disks images*” [35]. El trabajo completo que explica el procedimiento desarrollado para solucionar el error del rayo oblicuo fue plasmado en extenso en el artículo “*Zonal integration of circular Hartmann and Placido patterns with non-rotationally symmetric aberrations*”, que tras ser revisado por pares fue publicado sin modificaciones en la revista arbitrada Journal of the Optical Society of America A [36].



## Bibliografía

- [1] D. Malacara-Hernandez and D. Malacara-Doblado, “Optical testing and interferometry,” in *Progress in Optics*, vol. 62, T. D. Visser, Ed. Elsevier, 2017, pp. 73–156.
- [2] R. Kingslake, “The interferometer patterns due to the primary aberrations,” *Trans. Opt. Soc.*, vol. 27, no. 2, pp. 94–105, 1925.
- [3] D. Malacara-Hernández and S. L. DeVore, “Interferogram evaluation and wavefront fitting,” in *Optical Shop Testing*, 2nd ed., D. Malacara-Hernández, Ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1992, pp. 455–500.
- [4] H. H. Hopkins, *Wave theory of aberrations*. Clarendon Press, 1950.
- [5] F. Zernike, “The diffraction theory of aberrations,” *Proc. NBS Semicentennial Symp. Opt. Image Eval.*, vol. 526, pp. 1–8, 1954.
- [6] F. Zernike, “Beugungstheorie des schneidenverfahrens und seiner verbesserten form, der phasenkontrastmethode,” *Physica*, vol. 1, no. 7–12, pp. 689–704, 1934.
- [7] P. H. Hu, J. Stone, and T. Stanley, “Application of Zernike polynomials to atmospheric propagation problems,” *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 6, no. 10, pp. 1595–1608, 1989, doi: 10.1364/JOSAA.6.001595.
- [8] Z.-L. Yang and B.-L. Guo, “Image Registration Using Feature Points Extraction and Pseudo-Zernike Moments,” in *2008 International Conference on Intelligent Information Hiding and Multimedia Signal Processing*, 2008, pp. 752–755. doi: 10.1109/IIH-MSP.2008.337.
- [9] A. Tahmasbi, F. Saki, and S. B. Shokouhi, “Classification of benign and malignant masses based on Zernike moments,” *Comput. Biol. Med.*, vol. 41, no. 8, pp. 726–735, 2011, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compbiomed.2011.06.009>.
- [10] L. N. Thibos, R. A. Applegate, J. T. Schwiegerling, and R. Webb, “Standards for reporting the optical aberrations of eyes,” *J. Refract. Surg.*, vol. 18, no. 5, pp. S652–S660, 2002.
- [11] J. J. Rozema, D. E. M. Van Dyck, and M.-J. Tassignon, “Clinical comparison of 6 aberrometers. Part 1: Technical specifications,” *J. Cataract Refract. Surg.*, vol. 31, no. 6, pp. 1114–1127, 2005.
- [12] M. K. Smolek and S. D. Klyce, “Zernike polynomial fitting fails to represent all visually significant corneal aberrations,” *Investig. Ophthalmol. Vis. Sci.*, vol. 44, no. 11, pp. 4676–4681, 2003.
- [13] L. A. Carvalho, “Preliminary results of neural networks and Zernike polynomials for classification of videokeratography maps,” *Optom. Vis. Sci.*, vol. 82, no. 2, pp. 151–158, 2005.
- [14] A. Martínez-Finkelshtein, D. R. López, G. M. Castro, and J. L. Alió, “Adaptive

- cornea modeling from keratometric data,” *Investig. Ophthalmol. Vis. Sci.*, vol. 52, no. 8, pp. 4963–4970, 2011.
- [15] S. D. Klyce, M. D. Karon, and M. K. Smolek, “Advantages and disadvantages of the Zernike expansion for representing wave aberration of the normal and aberrated eye,” *J. Refract. Surg.*, vol. 20, no. 5, pp. S537–S541, 2004.
- [16] D. R. Iskander, M. J. Collins, and B. Davis, “Optimal modeling of corneal surfaces with Zernike polynomials,” *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. 48, no. 1, pp. 87–95, 2001.
- [17] J. Schwiegerling, “Cone dimensions in keratoconus using Zernike polynomials,” *Optom. Vis. Sci.*, vol. 74, no. 11, pp. 963–969, 1997.
- [18] A. Martinez-Finkelshtein, A. M. Delgado, G. M. Castro, A. Zarzo, and J. L. Alio, “Comparative analysis of some modal reconstruction methods of the shape of the cornea from corneal elevation data,” *Investig. Ophthalmol. Vis. Sci.*, vol. 50, no. 12, pp. 5639–5645, 2009.
- [19] G. W. Forbes, “Shape specification for axially symmetric optical surfaces,” *Opt. Express*, vol. 15, no. 8, pp. 5218–5226, 2007.
- [20] G. W. Forbes, “Robust and fast computation for the polynomials of optics,” *Opt. Express*, vol. 18, no. 13, pp. 13851–13862, 2010.
- [21] J. P. Trevino, J. E. Gómez-Correa, D. R. Iskander, and S. Chávez-Cerda, “Zernike vs. Bessel circular functions in visual optics,” *Ophthalmic Physiol. Opt.*, vol. 33, no. 4, pp. 394–402, 2013.
- [22] A. B. Bhatia and E. Wolf, “On the circle polynomials of Zernike and related orthogonal sets,” *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, vol. 50, no. 1, pp. 40–48, 1954.
- [23] F. Roddier and C. Roddier, “Wavefront reconstruction using iterative Fourier transforms,” *Appl. Opt.*, vol. 30, no. 11, pp. 1325–1327, 1991.
- [24] G. Dai, “Wavefront reconstruction methods,” *J. Refract. Surg.*, vol. 25, no. 1, pp. 9–11, 2009.
- [25] D. R. Iskander, M. R. Morelande, M. J. Collins, and B. Davis, “Modeling of corneal surfaces with radial polynomials,” *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. 49, no. 4, pp. 320–328, Apr. 2002.
- [26] M. Montoya-Hernández, M. Servín, D. Malacara-Hernández, and G. Paez, “Wavefront fitting using Gaussian functions,” *Opt. Commun.*, vol. 163, no. 4–6, pp. 259–269, May 1999.
- [27] J. M. González-Méijome, C. Villa-Collar, R. Montés-Micó, and A. Gomes, “Asphericity of the anterior human cornea with different corneal diameters,” *J. Cataract Refract. Surg.*, vol. 33, no. 3, pp. 465–473, 2007.
- [28] W. R. Davis, T. W. Raasch, G. L. Mitchell, D. O. Mutti, and K. Zadnik, “Corneal asphericity and apical curvature in children: a cross-sectional and longitudinal

- evaluation,” *Invest. Ophthalmol. Vis. Sci.*, vol. 46, no. 6, pp. 1899–1906, 2005.
- [29] B. A. J. Clark, “Mean topography of normal corneas,” *Aust. J. Optom.*, vol. 57, no. 4, pp. 107–114, 1974.
- [30] R. B. Mandell, “Mathematical model of the corneal contour,” *Br J Physiol Opt*, vol. 26, pp. 183–197, 1971.
- [31] D. P. Piñero, J. L. Alió, A. Alesón, M. E. Vergara, and M. Miranda, “Corneal volume, pachymetry, and correlation of anterior and posterior corneal shape in subclinical and different stages of clinical keratoconus,” *J. Cataract Refract. Surg.*, vol. 36, no. 5, pp. 814–825, 2010.
- [32] E. Yebra-Pimentel, J. M. González-Méijome, A. Cerviño, M. J. Giráldez, J. González-Pérez, and M. A. Parafita, “Asfericidad corneal en una población de adultos jóvenes: implicaciones clínicas,” *Arch. Soc. Esp. Oftalmol.*, vol. 79, no. 8, pp. 385–391, 2004.
- [33] W. Sun, J. W. McBride, and M. Hill, “A new approach to characterising aspheric surfaces,” *Precis. Eng.*, vol. 34, no. 1, pp. 171–179, 2010.
- [34] L. N. Trefethen and D. I. Bau, *Numerical Linear Algebra*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997.
- [35] D. Gomez-Tejada and D. M. Hernández, “A proposal to eliminate the skew ray error in corneal topography using Placido disks images,” *Proc.SPIE*, vol. 11102, p. 1110206, 2019.
- [36] D. Gómez-Tejada, Z. Malacara-Hernández, D. Malacara-Doblado, and D. Malacara-Hernández, “Zonal integration of circular Hartmann and Placido patterns with non-rotationally symmetric aberrations,” *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 37, no. 8, pp. 1381–1389, 2020.