



Tesis

***“Propiedades de un Axicón mediante propagación de
Gaussianas”***

Que para obtener el grado de
Maestro en Ciencias (Óptica)

Presenta

Francisco Joel Cervantes Lozano

Asesor:

Dr. Arquímedes Morales.

León, Guanajuato, Diciembre 2010

INDICE.

1. INTRODUCCION.	1
2. MARCO TEORICO	4
2.1 Axición.....	4
2.2 Aberraciones ópticas.....	7
2.3 Difracción de Fresnel.....	31
2.4 Teoría de la invariante gaussiana para el trazo de rayos.....	34
3. RESULTADOS	39
3.1 Diseño del axición.....	39
3.2 Aberración cromática.....	41
3.3 Aberración esférica.....	44
3.4 Aberración de coma.....	46
3.5 Aberración de astigmatismo.....	49
3.6 Aberración de curvatura de campo (Petzval.).....	51
3.7 Aberración de distorsión.....	53
3.8 Reporte general de resultados.....	55
4. CONCLUSIONES	56
5. BIBLIOGRAFIA	57

1. INTRODUCCION.

La superficie de un objeto que está iluminado externamente se comporta como si constara de un gran número de fuentes puntuales, cada una emitiendo ondas esféricas, es decir, los rayos emanan radialmente en la dirección en la que fluye la energía, o si se prefiere en la dirección del vector de Poynting. En este caso, los rayos divergen de una fuente puntual S determinada, mientras que si la onda esférica estuviese dirigida hacia un punto, los rayos serían lógicamente convergentes. Por lo general, uno se centra tan solo en una porción pequeña del frente de onda. *Un punto desde el cual una porción de onda diverge o un punto hacia el cual el segmento de onda converge, se denomina foco del haz de rayos.*

En la figura 1.1 se escoge una fuente puntual cercana a un arreglo de superficies reflectoras y refractoras que representan un *sistema óptico*. La función de un sistema óptico es recoger y remodelar una parte del frente de onda incidente a menudo con la intención esencial de formar una imagen de un objeto. Obsérvese que los sistemas reales se caracterizan por no poder recibir toda la luz emitida por una fuente luminosa, pues un sistema acepta solo un segmento del frente de onda. Como resultado siempre habrá una desviación aparente de la propagación rectilínea incluso en medios homogéneos-las ondas serán difractadas-. El grado de perfección alcanzable en la formación real de imágenes de un sistema óptico estará *limitado por la difracción*. A medida que la longitud de onda de la energía radiante disminuye en comparación con las dimensiones físicas del sistema óptico, los efectos de difracción cobran menos importancia. En el límite conceptual cuando $\lambda \rightarrow 0$, en los medios homogéneos se produce propagación rectilínea, definiéndose así el campo ideal de la óptica geométrica; La óptica física se ocupa de situaciones en la que deben tomarse en cuenta longitudes de onda diferentes de cero. En este caso, ya no sería posible observar el comportamiento que es atribuido a la naturaleza ondulatoria de la luz (por ejemplo la interferencia o la difracción). En muchas situaciones, la gran simplicidad de la aproximación de la óptica geométrica compensa abundantemente su falta de precisión. Resumiendo, *el argumento estudia la manipulación controlada de los frentes de onda (o*

rayos) por medio de la interposición de cuerpos reflectantes y/o refractantes, despreciando cualquier efecto de difracción.

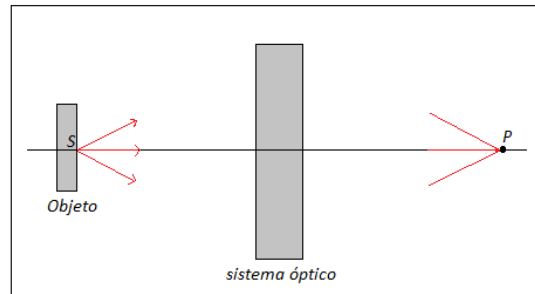


Figura.1.1 Ondas convergentes y divergentes.

Los axiomas sobre los que se construye la óptica geométrica son:

1. Las trayectorias de los rayos de luz en los medios homogéneos e isótropos son rectilíneas.
2. El rayo incidente, el refractado y la normal están sobre un mismo plano.
3. Se cumple la ley de reflexión.
4. Se cumple la ley de refracción (Ley de Snell).
5. Las trayectorias de la luz a través de distintos medios son reversibles.
6. No existe interacción entre los diferentes rayos.

Donde los cinco primeros axiomas se deducen del principio de Fermat, y el último supone ignorar el carácter ondulatorio de la luz. La óptica geométrica se encarga principalmente de la formación de imágenes por espejos y lentes, base de la construcción de instrumentos ópticos tales como microscopio y telescopios.

A lo largo de la historia se han desarrollado varios métodos para el trazo de rayos, como lo son el método *matricial* inventado por T. Smith en 1930 ^[1], el método *ynv* desarrollado por Conrady en 1910 ^[2,3], el método *Y-Y* barra desarrollado por Erwin Delano en 1963 ^[4] solo por mencionar algunos, todos estos métodos para el trazo de rayos han servido para caracterizar cualquier tipo de sistema óptico, diferenciándose entre ellos por la dificultad matemática y los límites que cada uno de ellos establece. En esta tesis también vamos a utilizar un método para el trazo de rayos, pero no va a ser ninguno de los mencionados anteriormente, nosotros vamos a utilizar un nuevo método llamado “**Fresnel-Gaussian shape invariant for optical ray tracing**” ^[5] o más simplemente “**FGSI**”; este nuevo método va a ser aplicado a una clase especial de lente o sistema óptico denominada Axición, la cual fue introducida por McLeod en 1954 ^[7].

Para esto vamos a diseñar el axición en un software de ingeniería óptica disponible comercialmente, lo cual se planteó como primer objetivo. En seguida diseñé un algoritmo matemático basado en las ecuaciones desarrolladas en el artículo “**Fresnel-Gaussian shape invariant for optical ray tracing**” ^[5] que nos permitió trazar rayos a través de dicho sistema óptico, este fue el segundo objetivo, una vez hecho esto se calcularon las aberraciones cromáticas y de Seidel (también llamadas aberraciones de tercer orden) para el axición, convirtiéndose este en el objetivo principal de esta tesis. Por último compararemos los resultados obtenidos con los obtenidos mediante el programa de diseño óptico llamado *OSLO MR*.

2. MARCO TEORICO.

2.1 Axición.

Sin duda el sistema óptico más utilizado es la lente y eso pese al hecho de que vemos el mundo a través de un par de ellas. La palabra lente proviene del latín “lentis” que significa lenteja con lo que a las lentes se les denomina así por su similitud de forma con la legumbre. Las lentes son objetos transparentes (normalmente de vidrio), limitados por dos superficies, de la que al menos una es curva, las lentes más comunes se basan en el distinto grado de refracción que experimentan los rayos de luz al incidir en puntos diferentes de la lente. En términos generales *una lente es un dispositivo refractor (es decir, una discontinuidad en el medio dominante) que reconfigura le energía emitida.* ^[6] Esto se aplica a los rayos UV, a las ondas cortas, a IR, a las microondas, radioondas e incluso a las ondas sonoras. Las lentes delgadas pueden tener cualquiera de las formas que se muestran en la figura 2.1

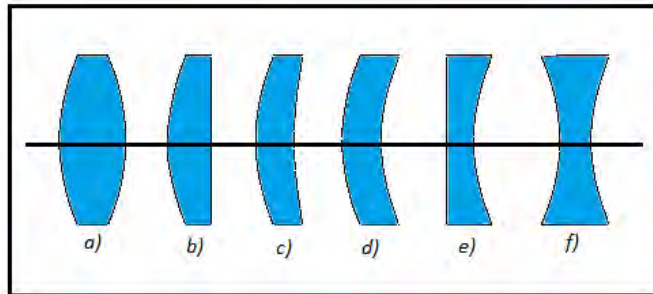


Fig. 2.1 Tipos principales de lentes a) biconvexa b) plano convexa c) convexo cóncavo d) menisco d) plano cóncava e) bicóncava.

En 1954 McLeod ^[7] introdujo un nuevo sistema óptico denominado axición y lo definió como cualquier dispositivo con simetría de revolución tal que la imagen que forma de un objeto puntual, situado sobre su eje de simetría, no es otro objeto puntual, si no un segmento de línea recta con longitud finita sobre dicho eje ^[7,8], el ejemplo más sencillo de un axición es una lente o espejo cónico (ver figura 2.2). Sin embargo, el término axición fue

utilizado para denominar otros elementos y dispositivos ópticos no convencionales, de forma que esta palabra resulto insuficiente para abarcar la gran variedad de esta clase de sistemas.

Surgió así el termino meso-óptica que sirve para describir los sistemas ópticos tales que la imagen de un punto es una distribución unidimensional, bidimensional o tridimensional finita, como, por ejemplo, segmentos de línea recta, anillos, elipses, etc. El termino meso-óptico cubre axicones (tanto refractantes como reflectantes), kinoformas (kinoforms), así como varios dispositivos compuestos en los que se incluyen elementos tradicionales formadores de imagen y holográficos, entre otros. El ejemplo más sencillo de sistema meso-óptico lo constituye una lente cilíndrica, la cual transforma un punto en una línea.

El termino axicón lo designaremos como una lente cónica plana que puede ser en general, convergente o divergente (ver figura 2.2) y está caracterizada por su ángulo α , su índice de refracción n y su diámetro transversal D .

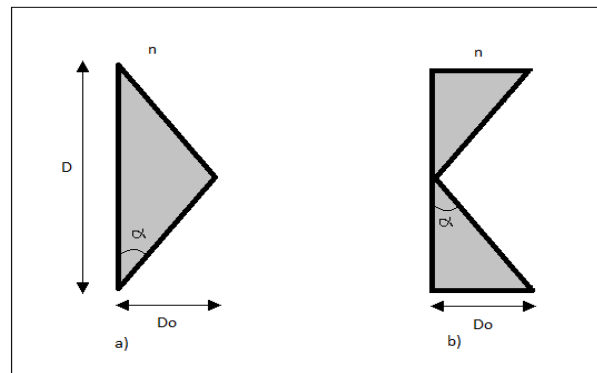


Figura 2.2. Esquema de axicón (a) convergente y (b) divergente.

Las aplicaciones de los axicones son diversas. Así, por ejemplo, se pueden utilizar como expansores de haz y en sistemas telescópicos ^[9]. También como ya dijimos anteriormente, mediante un axicón se puede obtener distribuciones lineales de intensidad cuando

iluminamos con un frente de onda plano y de intensidad constante, formándose un segmento de longitud finita (ver figura 2.3), a dicha longitud se le denomina profundidad de foco L y ha sido calculada a partir de las leyes de la óptica geométrica en función de los parámetros característicos del axicón ^[10], se tiene

$$L = \frac{D}{2(n-1)\alpha} \quad (2.1)$$

Otra importante aplicación de los axicones fue sugerida ya por McLeod en su primer artículo ^[7]. Se trata de la obtención de distribuciones anulares de intensidad, por ejemplo, en el procesado de materiales y en fotomicrolitografía. El empleo de axicones para la obtención de distribuciones anulares de intensidad es aconsejable a fin de alcanzar una alta eficiencia en la concentración de energía y evitar los posibles efectos de difracción. De hecho, cuando un haz Gaussiano colimado se propaga a través del sistema combinado lente-axicón el radio de los anillos R_0 que se forma en el plano focal de dicha lente, viene dado por,

$$R_0 \approx (n - 1)\alpha f \quad (2.2)$$

Siendo f la distancia focal paraxial de la lente convergente y α el ángulo que caracteriza al axicón. Para variar el tamaño de los mismos, bastaría utilizar una lente con distancia focal o , como sugiere Bélanger (1978) ^[11], un segundo axicón.

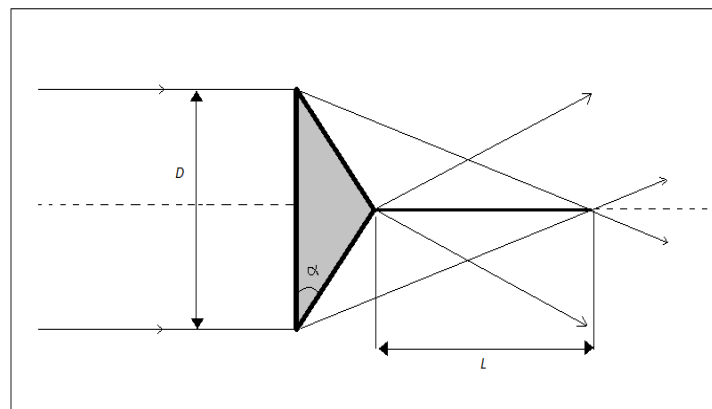


Figura 2.3. Formación de distribuciones lineales de intensidad.

Cuando el haz no está colimado, puede demostrarse que los anillos se forman en un plano donde la intensidad pico es máxima; la posición de dicho plano dependerá de la posición de la cintura Gaussiano del haz incidente.

Si realizamos un corte transversal del anillo en dicho plano ha sido demostrado teórica y experimentalmente que la distribución de intensidad se aproxima a una distribución Gaussiana ^[11].

2.2 Aberraciones ópticas.

Aberración Cromática.

Se origina debido a que la luz no es monocromática, los distintos colores de la luz tienen distintas velocidades dentro del material de las lentes y por lo tanto distinto índice de refracción ^[12], podemos resumir sus características en los siguientes puntos:

- Se debe a la variación del índice de refracción con λ .
- Como consecuencia el foco y los aumentos dependen de λ .
- Para el vidrio, $n(\lambda)$ decrece con λ en el visible, así que la distancia focal aumenta con λ .
- Su efecto es que cualquier lente simple se comporta como un prisma descomponiendo la luz en sus colores primarios y formando un pequeño espectro alrededor del foco de la lente.
- Se distinguen dos tipos de aberración cromática:
 - Axial: diferencia de foco para dos longitudes de onda ver figura 2.4 (a).
 - Lateral: diferentes ampliaciones para distintas longitudes de onda ver figura 2.4 (b).

- Los dos tipos de aberración cromática producen “bordes coloreados” pero tienen propiedades diferentes:

Aberración cromática axial:

1. Produce un halo coloreado alrededor del objeto.
2. Ocurren en cualquier posición de la imagen.
3. Mejora al disminuir la abertura.
4. El halo para un objeto enfocado tiene un solo color.

Aberración cromática lateral:

1. Solo afecta detalles tangenciales.
2. No aparece en el centro de la imagen, y aumenta hacia las esquinas.
3. No disminuye al reducir la abertura.
4. Se manifiesta en zonas desenfocadas de la imagen.

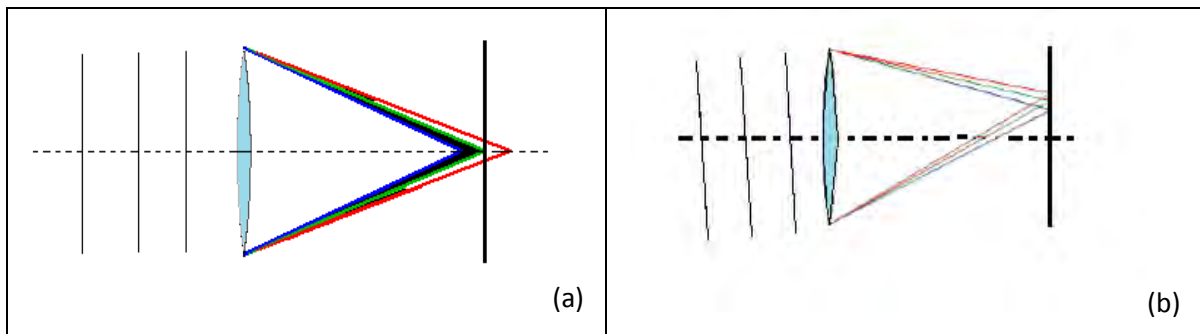


Fig. 2.4 (a) Aberración cromática axial, (b) Aberración cromática lateral.

Las expresiones para la aberración Cromática pueden ser encontrados utilizando la teoría de primer orden u óptica Gaussiana (paraxial) ^[13]. Para encontrar una expresión de la aberración cromática axial, como se ilustra en la Figura 2.5 representamos el índice de refracción de la luz roja como n_C y el índice de refracción de la luz azul por n_F , entonces escribimos la ley de Gauss para esos dos colores como

$$\frac{n'_C}{l'_C} - \frac{n_C}{l_C} = \frac{n'_C - n_C}{r} \quad (2.3)$$

$$\frac{n'_F}{l'_F} - \frac{n_F}{l_F} = \frac{n'_F - n_F}{r} \quad (2.4)$$

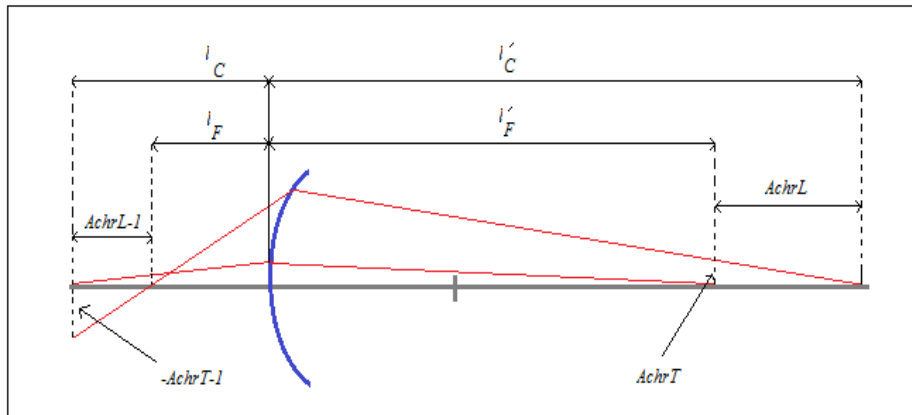


Figura 2.5. Definición del objeto y de la imagen de la Aberración Cromática.

y sustrayendo la primera expresión de la segunda, obtenemos

$$\frac{n'_C}{l'_C} - \frac{n'_F}{l'_F} - \frac{n_C}{l_C} + \frac{n_F}{l_F} = \frac{(n'_C - n'_F) - (n_C - n_F)}{r} \quad (2.5)$$

si definimos

$$\Delta n = n_F - n_C \quad (2.6)$$

y

$$\Delta n' = n'_F - n'_C \quad (2.7)$$

Obtenemos la siguiente expresión.

$$\frac{n'_C(l'_F - l'_C)}{l'_C l'_F} - \frac{n_C(l_F - l_C)}{l_C l_F} = \Delta n \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{l_F} \right] - \Delta n' \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{l'_F} \right] \quad (2.8)$$

o aproximadamente

$$\frac{n'_C(l'_F - l'_C)}{l'^2} - \frac{n_C(l_F - l_C)}{l^2} = \Delta n \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{l} \right] - \Delta n' \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{l} \right] \quad (2.9)$$

Ahora usando las relaciones $u = -y/l$, $u' = -y/l'$ y $(1/r - 1/l) = i/y$, que se pueden obtener de la ecuación $i = yc + u$ proveniente de la teoría del trazo de rayos paraxial por el método $y-un$ ^[13], y con la siguiente definición $AchrL = l'_F - l'_C$ y $AchrL_{-1} = l_F - l_C$, como en la Figura 2.5

$$n' n'^2 AchrL - n u^2 AchrL_{-1} = y n i \left[\frac{\Delta n}{n} - \frac{\Delta n'}{n'} \right] \quad (2.10)$$

Escribiendo ahora esta expresión para cada superficie en el sistema óptico, usando las relaciones de transferencia obtenemos

$$AchrL_k = AchrL_0 \left[\frac{n_1 n_1^2}{n_1 u_k^2} \right] + \sum_{i=0}^k \frac{y n i}{n_1 u_k^2} \left[\frac{\Delta n}{n} - \frac{\Delta n'}{n'} \right] \quad (2.11)$$

Donde el subíndice 0 es para el objeto, o de igual forma

$$AchrL_k = AchrL_0 \left[\frac{n_1 n_1^2}{n_1 u_k^2} \right] + \sum_{i=0}^k AchrLC \quad (2.12)$$

Donde la cantidad en el paréntesis del lado derecho de la ecuación es la amplificación longitudinal del sistema óptico después de la superficie que está siendo considerada y, $AchrLC$ es la contribución de la aberración cromática longitudinal primaria, dada por

$$AchrLC = \frac{yni}{n_1 u_k^2} \left[\frac{\Delta n}{n} - \frac{\Delta n'}{n'} \right] \quad (2.13)$$

También podemos escribir la expresión para la aberración cromática transversal primaria como

$$AchrT_k = AchrT_0 \left[\frac{n_1 u_1}{n_k u_k} \right] + \sum_{i=0}^k AchrTC \quad (2.14)$$

Donde

$$AchrTC = \frac{yni}{n_k u_k} \left[\frac{\Delta n}{n} - \frac{\Delta n'}{n'} \right] \quad (2.15)$$

Aberración de Esfericidad.

La aberración de esfericidad es la más importante de las aberraciones de Seidel o monocromáticas ya que es la única que afecta a todo el campo, incluyendo las cercanías del eje óptico ^[14]. Su nombre viene del hecho de que esta aberración se produce aun en las superficies perfectamente esféricas. La aberración de esfericidad es una desviación de los rayos que produce diversos puntos de convergencia, es decir diferentes focos, ver figura 2.6.

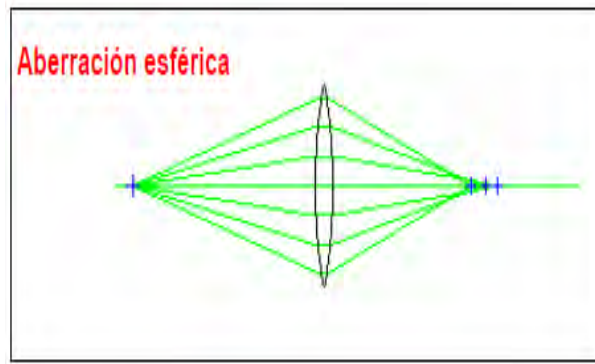


Fig. 2.6 Aberración esférica

Algunas de las características de la aberración de esfericidad son las siguientes:

- Es la única que afecta a puntos situados en el eje.
- Los rayos provenientes de un punto del eje que entran en la lente con ángulos grandes (fuera de la aproximación paraxial) no van al foco, sino cerca de él. Los rayos que inciden más hacia los bordes convergen más cerca (o más lejos) de la lente que los que entran por el eje.
- La distancia focal de los rayos periféricos (no paraxiales) dependen de su altura. Para una lente convergente la aberración esférica es positiva. Para una lente divergente la aberración esférica es negativa.
- Las imágenes de los rayos forman una imagen sobre el eje cuya longitud se denomina **aberración esférica lateral: AEL**. También se define como la diferencia entre el foco del rayo marginal y el foco Gaussiano ver figura 2.7
- El tamaño de la imagen en el foco paraxial se denomina **aberración esférica transversal: AET**. También se define como la distancia al eje del punto de incidencia del rayo marginal en el plano focal ver figura 2.7.

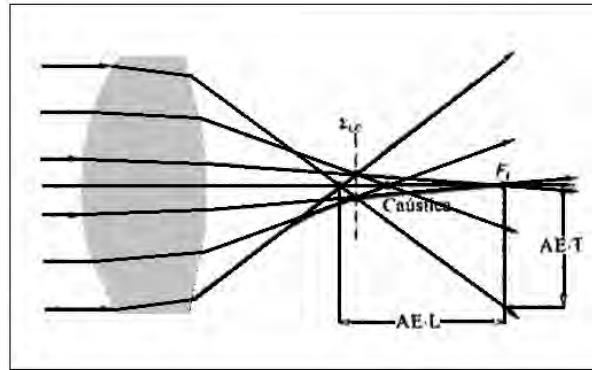


Fig. 2.7. Aberración esférica lateral y transversal.

- Circulo de minima confusión: se obtiene en la intersección de la caustica (curva envolvente de los rayos refractados) con los rayos marginales. Es la mejor imagen una mancha circular de determinado diámetro, que produce un efecto similar al desenfoque ver figura 2.8

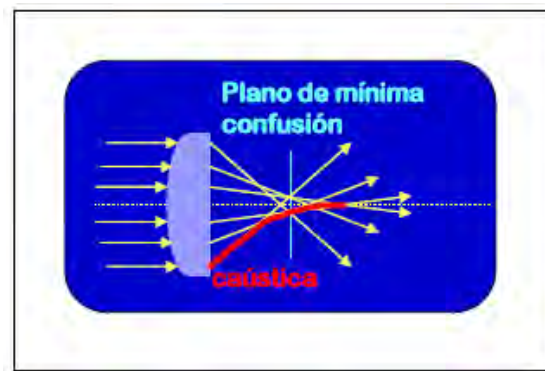


Fig. 2.8 Plano de mínima confusión y caustica.

Los valores de la aberración esférica se pueden calcular por diferentes métodos. Antes de calcular esta aberración debemos encontrar algunas expresiones para los valores de los segmentos Q y Q' definidas en la teoría del trazo de rayos meridional por el método $Q-U$ ^[15]. De las definiciones de los segmentos Q y Q' dados por las ecuaciones $\sin I = Qc +$

$\sin U$ y $Q' = (\sin I' - \sin U')/c$ y algún trabajo trigonométrico nosotros podemos encontrar que

$$\frac{Q}{r} = \sin I - \sin U = 2 \sin \left(\frac{I-U}{2} \right) \cos \left(\frac{I+U}{2} \right) \quad (2.16)$$

y

$$\frac{Q'}{r} = \sin I' - \sin U' = 2 \sin \left(\frac{I'-U'}{2} \right) \cos \left(\frac{I'+U'}{2} \right) \quad (2.17)$$

y en otra mano, el valor del segmento PA del vértice a la intersección del rayo marginal con la superficie óptica, como se muestra en la figura 2.9 y está dada por

$$PA = 2r \sin \left(\frac{I-U}{2} \right) = 2r \sin \left(\frac{I'-U'}{2} \right) \quad (2.18)$$

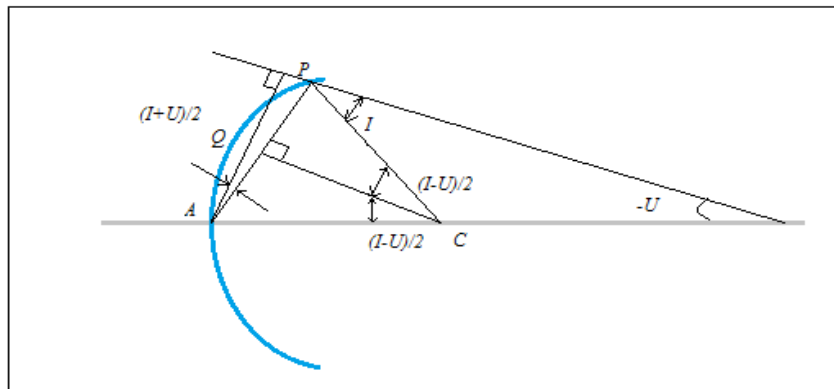


Figura 2.9 Refracción de un rayo meridional en una superficie esférica.

Por lo tanto, los valores de Q y Q' son iguales a

$$Q = r(\sin l - \sin U) = PA \cos\left(\frac{l+U}{2}\right) \quad (2.19)$$

y

$$Q' = r(\sin l' - \sin U') = PA \cos\left(\frac{l'+U'}{2}\right) \quad (2.20)$$

Procediendo entonces con el cálculo de la aberración esférica, comenzando con la definición formal, como se ilustra en la figura 2.10

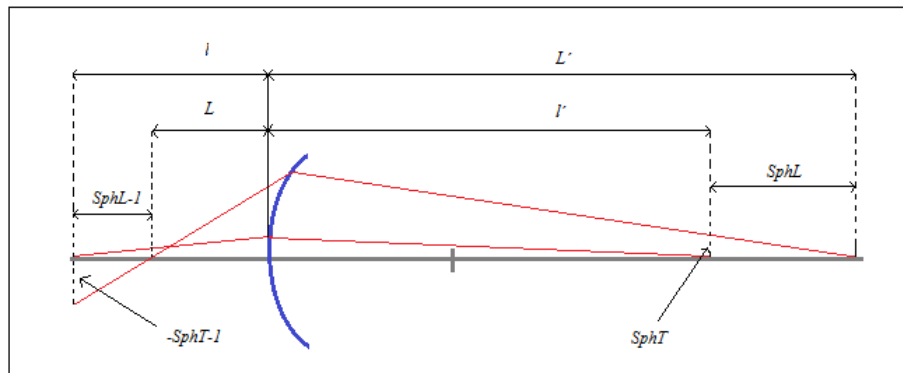


Figura 2.10 Definición de la aberración esférica longitudinal.

Entonces de la imagen la aberración esférica longitudinal es

$$SphL = L' - l' \quad (2.21)$$

y la aberración esférica en el objeto, es la aberración de la superficie anterior, dada por

$$SphL_{-1} = L - l \quad (2.22)$$

Donde el subíndice -1 es para la superficie anterior.

Aberración de Coma.

Se llama así porque la imagen de un punto es similar a un cometa. Se origina por la dependencia del aumento lateral con la excentricidad del rayo, es decir, que rayos que entran a distinta altura focalizan en distintos puntos del plano imagen ^[12], se trata de la peor aberración de todas ya que la imagen de un punto se convierte en una figura distorsionada, sin simetría esférica, que daña considerablemente su aspecto, ver figura 2.11.

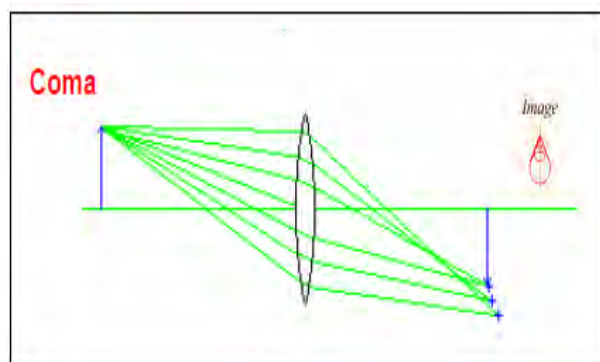


Fig. 2.11. Aberración de Coma.

A continuación la figura 2.12 a) muestra la aberración que se produce cuando una haz de rayos que procede de un punto extra-axial O es refractado por una lente, los rayos que inciden en la lente a una cierta distancia del eje óptico convergen en un círculo (círculo comático) en el plano imagen. Los haces de rayos contenidos en el plano tangencial (rayos 1,1') forman la imagen en parte del círculo comático más distante del eje óptico, mientras que los rayos obtenidos en el plano sagital (rayos 2,2') forman la imagen en la parte de dicho círculo comático más próxima al eje óptico (figura 2.12 b) los restantes haces de rayos forman imágenes de manera que completan el círculo comático.

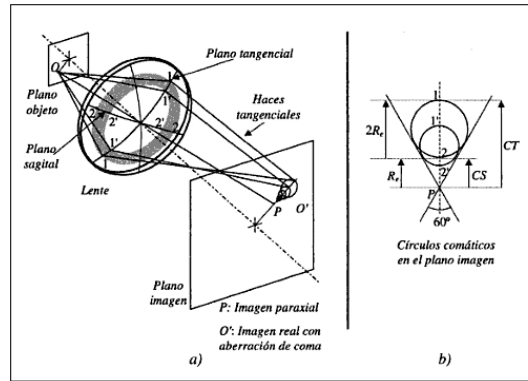


Fig. 2.12. Imagen comática de un objeto extraxial a) trayectoria de rayos b) Detalle de la imagen comático.

Algunas de sus características de la aberración comática son las siguientes:

- Cada cono de rayos que salen de un punto origen con un determinado ángulo forma una circunferencia en el plano de la lente.
- Los rayos imagen de esta circunferencia forman otra en el plano imagen, que esta desplazada respecto al punto imagen paraxial.
- Al barrer la circunferencia de la lente, se recorren dos veces la circunferencia de la imagen.
- El desplazamiento es mayor cuanto más alejado del eje está el punto origen.
- Debido a su forma, la coma produce una degradación de la imagen muy irregular.

Consideremos un sistema óptico como se muestra en la figura 2.13. la imagen marginal sagital esta en el punto S arriba del rayo principal. La imagen sagital paraxial esta sobre el rayo principal y su altura es h' la cual es calculada con el teorema de Lagrange.

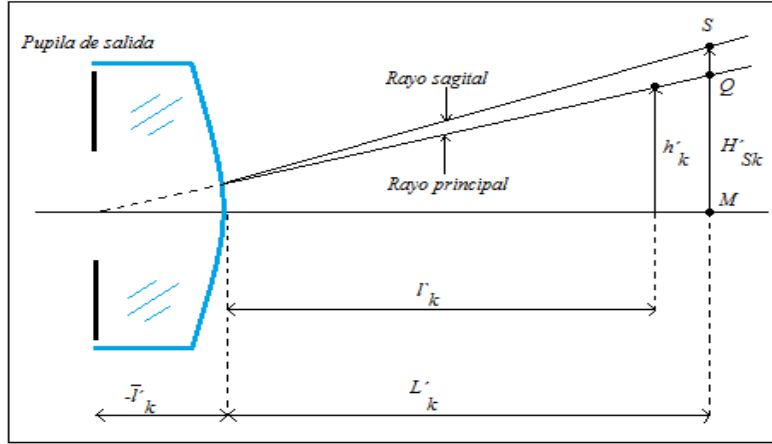


Figura 2.13 Formación de la aberración de Coma

La imagen sagital marginal H'_{Sk} está calculada con el teorema óptico del seno. La imagen sagital se debe a que la amplificación lateral de la imagen es diferente para los rayos marginal y paraxial, además debido a la aberración esférica estas dos imágenes se encuentran en diferentes planos. La coma sagital primaria, representada por $Coma_S$, está definida por la distancia lateral SQ del foco marginal sagital, al rayo principal. Por lo tanto

$$Coma_S = SQ = H'_{Sk} - QM \quad (2.23)$$

El valor de $Coma_S$ es positiva cuando el foco sagital está arriba del rayo principal. Para evaluar la coma sagital primero definimos el coeficiente OSC (*Offense against the Sine condition*) como sigue

$$OSC = \frac{H'_{Sk}}{QM} - 1 \quad (2.24)$$

Por lo tanto la coma sagital primaria es (asumiendo $QM \sim h'_k$)

$$Coma_s = OSC h'_k \quad (2.25)$$

Donde OSC es una constante para un sistema dado, una importante conclusión es que para un sistema dado la aberración de $Coma_s$ se incrementa linealmente con la altura de la imagen.

Aberración de Astigmatismo.

El astigmatismo se define como la distancia entre el foco tangencial y sagital ^[15], depende de: la distancia focal de la lente, el ángulo de los rayos y la distancia al eje, ver figura 2.14.

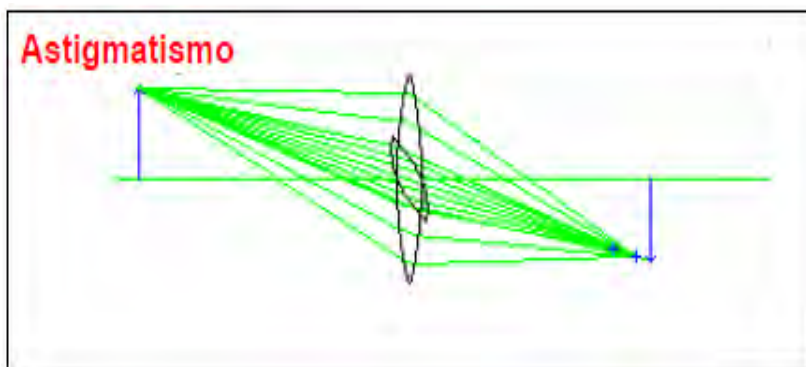


Fig. 2.14 Aberración de Astigmatismo.

Algunas características importantes de la aberración de astigmatismo son las siguientes:

- El plano de máxima asimetría llamado plano meridional (o tangencial) contiene el eje o rayo principal ver figura 2.15.

- El plano perpendicular al plano meridional que contiene el rayo principal se llama plano sagital ver figura 2.15.
- Si la lente no es simétrica, también hay astigmatismo para puntos en el eje.
- Los rayos que entran por uno u otro plano se focalizan en distintos puntos, es decir, el foco tangencial y el sagital son distintos, ver figura 2.15.
- La imagen de un punto en los focos tangencial y sagital es una línea.
- La mejor imagen se obtiene para una posición entre ambos focos y se denomina círculo de mínima confusión.
- La consecuencia de la aberración de astigmatismo no es que veamos las imágenes alargadas o ensanchadas, si no que no podemos enfocar simultáneamente líneas horizontales y verticales.

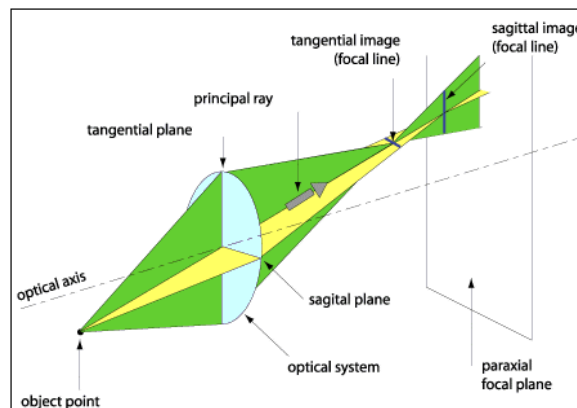


Fig. 4.15. Características principales de la aberración de Astigmatismo.

H. Coddington en 1829 ^[16] derivó dos ecuaciones para buscar las imágenes tangencial y sagital de una sola superficie refractiva. Esas dos ecuaciones son similares a las ecuaciones de Gauss y pueden ser consideradas una generalización de ellas. Hay varios posibles caminos para derivar estas ecuaciones, pero aquí nosotros presentaremos el método descrito por Kingslake (1978) ^[17].

a) Imagen tangencial

Consideremos la Figura 2.16 con una superficie esférica refractiva y dos rayos meridionales muy cercanos originados por un objeto **B** y refractados cerca de un punto **P**. esos dos rayos son diferencialmente refractados y convergen a la imagen tangencial **T**.

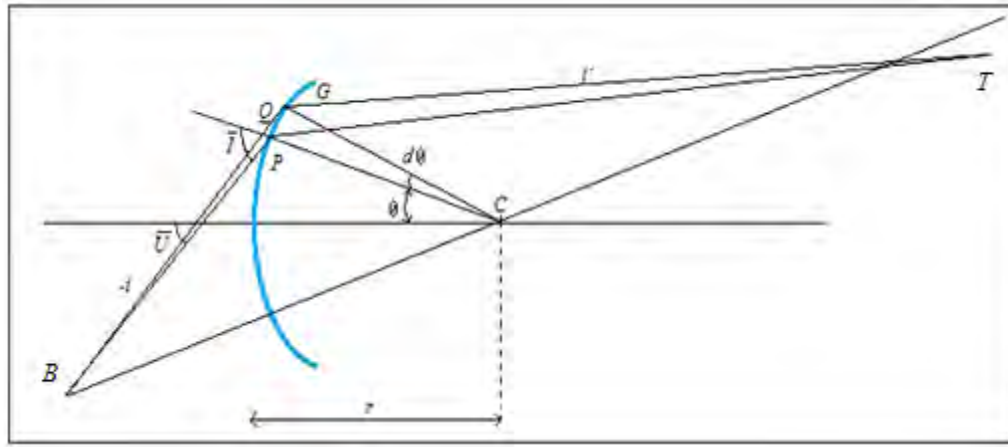


Figura 2.16 Derivación de la ecuación de Coddington para los rayos tangenciales.

Para buscar la posición de este punto de convergencia, primero definimos un ángulo central $\theta = \bar{U} + \bar{I}$ y luego diferenciarlo de la siguiente manera

$$d\theta = d\bar{U} + d\bar{I} \quad (2.26)$$

La distancia del objeto B al punto P es t. entonces, el pequeño segmento PQ es

$$PQ = t d\bar{U} = PG \cos \bar{I} = r \cos \bar{I} d\theta \quad (2.27)$$

$$PQ = t(d\theta - d\bar{I}) = r \cos \bar{I} d\theta \quad (2.28)$$

Por lo tanto podemos escribir,

$$d\bar{I} = \left(1 - \frac{r \cos \bar{I}}{t}\right) d\theta \quad (2.29)$$

y de una manera similar para el rayo refractado

$$d\bar{I}' = \left(1 - \frac{r \cos \bar{I}'}{t}\right) d\theta \quad (2.30)$$

Diferenciando la ley de refracción encontramos,

$$n \cos \bar{I} d\bar{I} = n' \cos \bar{I}' d\bar{I}' \quad (2.31)$$

Finalmente obtenemos

$$\frac{n' \cos \bar{I}'^2}{t'} - \frac{n \cos \bar{I}^2}{t} = \frac{n' \cos \bar{I}' - n \cos \bar{I}}{r} \quad (2.32)$$

Esta expresión se convierte en la ecuación de Gauss cuando la altura del objeto es cero, así que \bar{I} y \bar{I}' son cero.

b) Imagen Sagital

La ecuación correspondiente para la imagen sagital puede ser encontrada con ayuda de la figura 2.17. Primero tenemos que recordar que la imagen sagital esta sobre un eje auxiliar. Por lo tanto solo tenemos que encontrar la intersección del rayo principal refractado con un eje auxiliar.

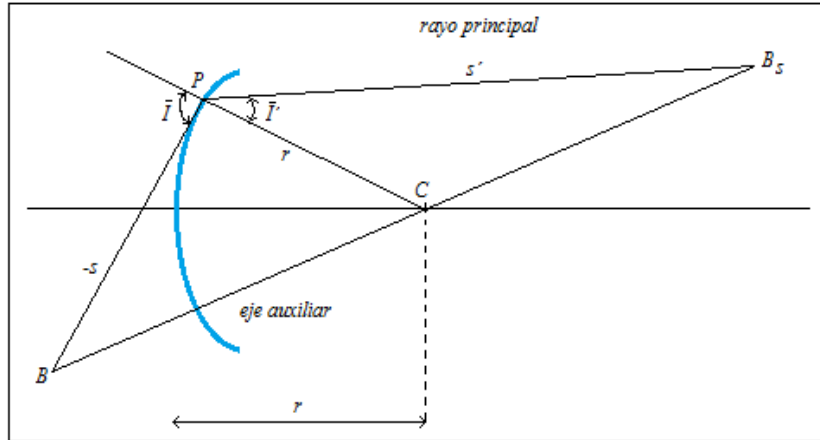


Figura 2.17. Derivación de Coddington para el rayo sagital.

Ya que el área del triángulo BPB_s es el área del triángulo BPC más el área del triángulo PCB_s , podemos escribir esas áreas como,

$$\frac{1}{2}ss' \sin(180^\circ - \bar{I} + \bar{I}') = -\frac{1}{2}sr \sin(180^\circ - \bar{I}) + \frac{1}{2}s'r \sin \bar{I}' \quad (2.33)$$

Por lo tanto

$$-ss' \sin(\bar{I} - \bar{I}') = -sr \sin \bar{I} + s'r \sin \bar{I}' \quad (2.34)$$

Después de algunos pasos algebraicos y usando la ley de refracción finalmente tenemos

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' \cos \bar{I}' - n \cos \bar{I}}{r} \quad (2.35)$$

De nuevo, esta expresión se convierte en la ecuación de Gauss cuando \bar{I} y \bar{I}' son cero. Estas ecuaciones son frecuentemente usadas para evaluar el astigmatismo de sistemas ópticos.

Aberración de Curvatura de Campo.

La curvatura de campo, también llamada curvatura de Petzval ocurre cuando la imagen de un objeto situado en un plano normal al eje óptico se forma en una superficie curva ^[15], ver figura 2.18, algunas de sus características son las siguientes:

- La imagen de un plano, es realmente una superficie esférica llamada superficie de Petzval.
- El sentido de esta curvatura dependerá de si la lente por la que pasa es positiva o negativa.
- En fotografía se soluciona en algunos casos curvando la película en la cámara en el mismo sentido que en el plano focal o con objetivos aplanáticos.
- Los objetivos macro (para objetos pequeños a corta distancia) son los que mejor corrigen esta aberración.

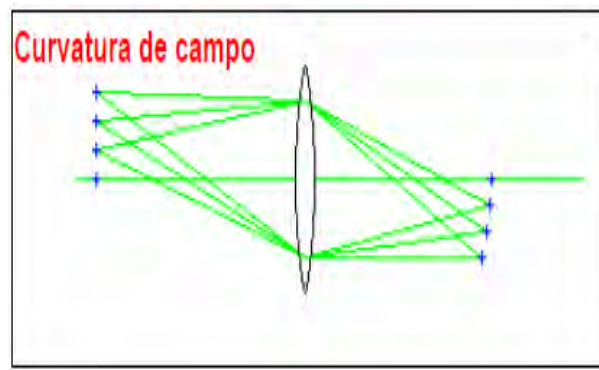


Fig. 2.18 Aberración de Curvatura de Campo.

Consideremos una superficie esférica como en la Figura. 2.19 Donde tenemos una superficie esférica refractiva con un eje auxiliar. Con una muy pequeña apertura, así que todas las aberraciones de orden primario pueden ser ignoradas, la imagen del punto **W**

sobre el eje óptico es W' . Los círculos C_1 y C_2 son concéntricos con la superficie óptica. El haz incidente está rotado sobre el centro de curvatura para mover el haz fuera del eje y preservar la simetría esférica. Entonces debido a esta simetría esférica alrededor de C , la imagen de un punto A en el círculo C_1 es A' en el círculo C_2 . La imagen de B está en el punto P .

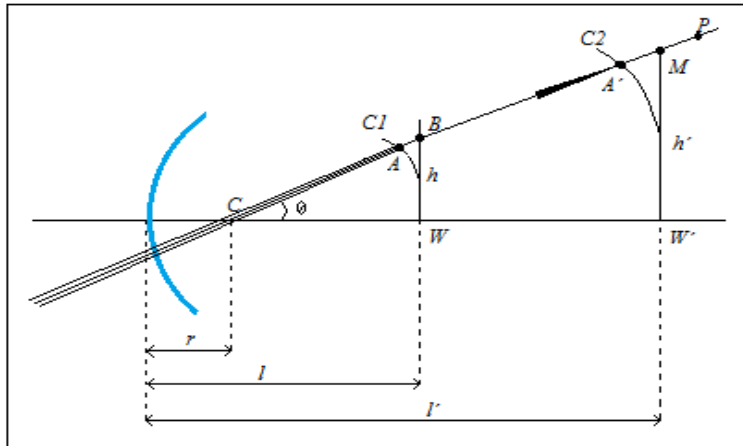


Figura 2.19 Demostración del Teorema de Petzval.

Las distancias AB y $A'P$ están relacionadas por la amplificación longitudinal del sistema, como

$$A'P = \bar{m}AB \quad (2.36)$$

Asumiendo ahora que el campo es pequeño (ángulo θ pequeño), aproximamos la sagita AB por

$$AB = \frac{h^2}{2(l-r)} \quad (2.37)$$

y similarmente

$$A'M = \frac{h'^2}{2(l'-r)} \quad (2.38)$$

De la figura 2.19, la distancia MP es

$$MP = A'P - A'M \quad (2.39)$$

Por lo tanto, usando las primeras tres ecuaciones (2.36, 2.37 y 2.38), tenemos

$$MP = \frac{h^2}{2(l-r)} \bar{m} - \frac{h^2}{2(l'-r)} \quad (2.40)$$

Pero como la amplificación longitudinal está dada por

$$\bar{m} = \frac{n'h'^2}{nh^2} \quad (2.41)$$

Entonces podemos escribir

$$MP = \frac{n'h'^2}{2n(l-r)} - \frac{h^2}{2(l'-r)} \quad (2.42)$$

Por otra parte, de las ecuaciones $\frac{i}{l-r} = \frac{-u}{r}$ y $ni = n'i'$ podemos encontrar

$$\frac{n'-n}{r} = \frac{n}{l-r} - \frac{n'}{l-r} \quad (2.43)$$

Obteniendo

$$Ptz = MP = \frac{-h^2}{2} \left(\frac{n'-n}{nr} \right) \quad (2.44)$$

Este resultado solo es válido para una superficie óptica. Para un sistema centrado de k superficies, tenemos que sumar las contribuciones de todas las superficies. Como en el caso de la aberración esférica, la contribución de la superficie j al desplazamiento longitudinal final de la imagen es el desplazamiento MP multiplicado por la amplificación longitudinal m_j del sistema óptico después de la superficie considerada. Esta amplificación longitudinal es

$$\bar{m} = \frac{n'_k h_k'^2}{n'_j h_j'^2} \quad (2.45)$$

Por lo tanto, la contribución del campo de Petzval está dada por

$$PtzC = -\bar{m}MP \quad (2.46)$$

Por tanto,

$$PtzC = -\frac{h_k^2 n'_k}{2} \left(\frac{n'-n}{nn'r} \right) \quad (2.47)$$

PtzC es la sagita de la superficie focal. Entonces el radio de curvatura es

$$\frac{1}{r_{ptz}} = -n'_k \sum_{j=1}^k \left(\frac{n'-n}{nn'r} \right) \quad (2.48)$$

Este es el *teorema de Petzval* y la superficie focal que ésta define es llamada *superficie de Petzval*. Para el caso particular de una lente delgada, tenemos

$$\frac{1}{r_{ptz}} = -\frac{1}{nf} = -\frac{P}{n} \quad (2.49)$$

Entonces, en una aproximación de tercer orden, la superficie de Petzval es esférica y tiene una curvatura que es directamente proporcional a la suma de las potencias de las lentes delgadas que forman el sistema, dividido por el índice de refracción en el vidrio. Si una superficie plana se utiliza para examinar la imagen y la imagen en el eje se centra, las imágenes fuera del eje se desenfocan, con un grado de desenfoco (tamaño de la imagen) que crece con el cuadrado de la altura de la imagen.

Aberración de Distorsión.

La distorsión es una aberración que rompe la relación de semejanza o proporcionalidad entre un objeto y su imagen ^[15]. La óptica paraxial establece un valor de la amplificación m que se mantiene constante para todos los puntos de un objeto plano. Cuando esta constancia

no se cumple de modo que el aumento lateral depende de la distancia del punto objeto al eje entonces la imagen presenta distorsión, ver figura 2.20.

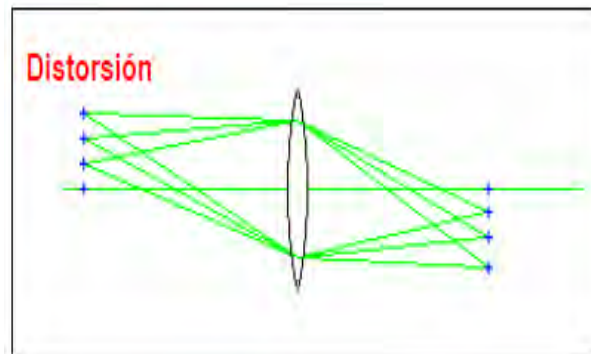


Fig. 2.20 Aberración de Distorsión.

Cuando todas las aberraciones están ausentes, la imagen de un objeto puntual está localizada en un punto llamada imagen gaussiana, si la altura del objeto es h , la altura de la imagen gaussiana es exactamente igual a mh' , donde m es la primera magnificación lateral, obtenida del teorema de Lagrange. Con referencia en la figura 2.21 ^[13], podemos ver que la aberración de coma es cero, ambas la imagen tangencial **T** y la imagen sagital **S** están sobre el rayo principal, en los puntos **U** y **Q**, respectivamente. Si no hay aberración esférica, el foco sagital marginal **S** coincide con el foco sagital paraxial **R**, por lo que el punto **Q** y el punto **R** se convierten en lo mismo. Si no hay astigmatismo, el foco sagital paraxial **R** así como el foco tangencial **T** coinciden en un solo punto **P'** sobre la superficie de Petzval.

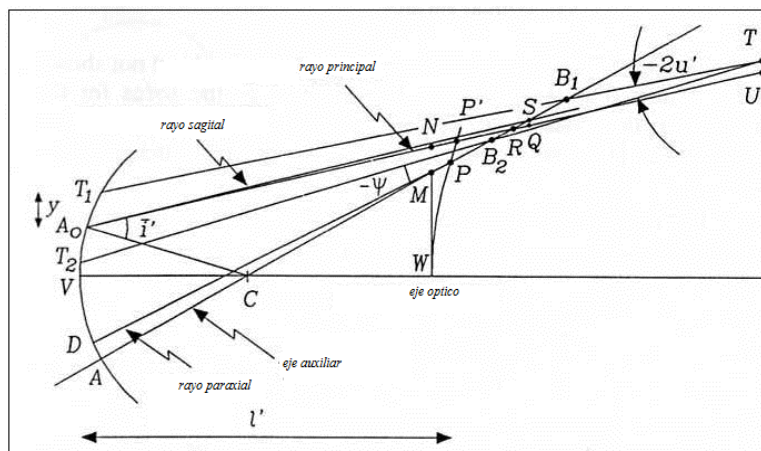


Figura 2.21 Algunos puntos y rayos para ilustrar la formación de las aberraciones primarias.

Supongamos además que no hay curvatura de Petzval. Entonces, la imagen puntual estaría en el punto **N** sobre el rayo principal. En conclusión, si todas las aberraciones que hemos estudiado están ausentes del sistema óptico, la imagen fija puede ser desviada lateralmente con respecto al punto de la imagen gaussiana puntual **M**. La aberración de distorsión se debe a un problema en la altura de la imagen real, determinada por el rayo principal, con respecto a la altura de la imagen gaussiana h' . Por lo tanto, si nosotros graficamos la altura de la imagen real, definida por la intersección del rayo principal con el plano focal gaussiano como una función de la altura h' del objeto el resultado no es una línea como se muestra en la figura 2.22 ^[13].

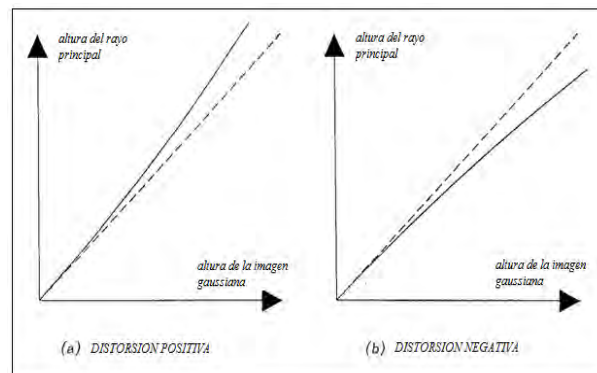


Figura 2.22. Altura del rayo principal vs altura de la imagen gaussiana en la presencia de distorsión.

La distorsión puede ser negativa o positiva. Si el cuadrado es refractado por una lente que tiene distorsión, el resultado puede ser como el que se muestra en la figura 2.22 (a) o (b). Distorsión positiva es también llamada distorsión de corsé, y distorsión negativa es llamada distorsión de barril, debido al aspecto de la imagen de un cuadrado.

La distorsión positiva ocurre cuando el rayo principal está por encima de la imagen gaussiana ideal. Consideremos de nuevo la figura 2.21, con una sola superficie refractiva con el rayo principal y el eje auxiliar. Entonces, la imagen ideal o gaussiana está en el punto **M** sobre el eje auxiliar. Entonces el valor de la distorsión es la distancia de la imagen

auxiliar **M** a la intersección **N** del rayo principal con el plano focal que contiene M. por lo tanto, observando la figura, vemos que el valor de la distorsión es

$$Dist = -MR\psi = -(PR + MP)\psi \quad (2.50)$$

Pero del uso de la ecuación $PR = SphL(\bar{l}/i)^2$ para el valor de PR y ya que MP es el valor de Ptz , el valor de la distorsión es

$$Dist = -\left[SphL\left(\frac{\bar{l}}{i}\right)^2 + Ptz \right] \psi \quad (2.51)$$

y ahora usando el valor de ψ que es $\psi = (\bar{l}/i)u'$

$$Dist = SphT\left(\frac{\bar{l}}{i}\right)^3 - Ptz\left(\frac{\bar{l}}{i}\right)u' \quad (2.52)$$

La distorsión para esta superficie también se puede escribir como

$$Dist = \mathbf{Coma}_s\left(\frac{\bar{l}}{i}\right)^2 - Ptz\left(\frac{\bar{l}}{i}\right)u' \quad (2.53)$$

Esta es la distorsión producida por una sola superficie. Como es usual, la contribución de aberración de esta superficie al astigmatismo final en un sistema completo es obtenido por la multiplicación de este resultado por la amplificación longitudinal del sistema óptico después de esta superficie, entonces nosotros tenemos

$$DistC = Coma_s C \left(\frac{l}{i}\right)^2 - Ptz \left(\frac{l}{i}\right) u'_k \quad (2.54)$$

Resulta sencillo entender la aberración de distorsión si se tiene en cuenta la aberración esférica del rayo principal. La figura 2.23 muestra la aberración esférica de un punto P situado en el centro del diafragma de apertura. Obsérvese que el aumento lateral m entre los diferentes puntos de los planos conjugados O y O' disminuye al aumentar la oblicuidad del rayo, obteniéndose la distorsión de barril. En el caso en que DA estuviera situado detrás de la lente la distorsión sería de tipo corsé.

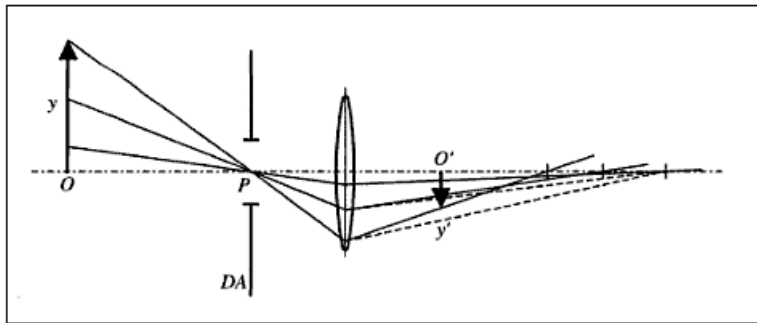


Fig. 2.23 Distorsión producida por una lente delgada.

2.3 Difracción de Fresnel.

Antes de introducir una serie de aproximaciones al principio de *Huygens - Fresnel*, el cual establece que todo punto de un frente de onda inicial puede considerarse como una fuente de ondas esféricas secundarias que se extienden en todas las direcciones con la misma velocidad, frecuencia y longitud de onda que el frente de onda del que proceden ^[18]. Esto será útil para establecer el principio en forma más explícita para el caso de coordenadas rectangulares.

Como se muestra en la figura 2.24, la apertura de difracción se supone que se encuentran en el plano (ξ, η) , y está iluminado en la dirección z positiva. Vamos a calcular el campo de ondas a través del plano (x, y) el cual es paralelo al plano (ξ, η) , y que es normal a la distancia z positiva.

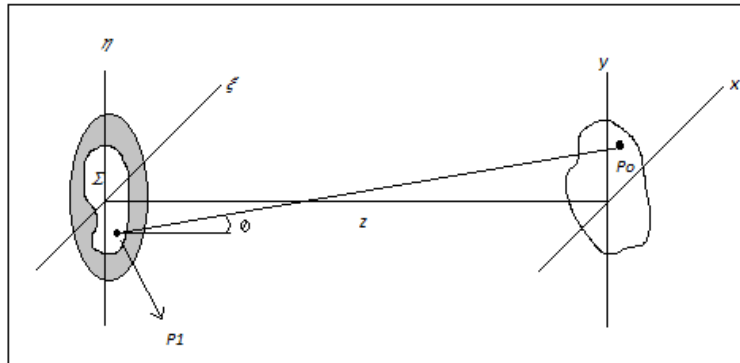


Fig.2.24 Geometría de los planos de difracción.

El eje z atraviesa ambos planos en sus orígenes de coordenadas. El principio de *Huygens-Fresnel* se establece como

$$U(P_0) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U(P_1) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \cos\theta ds \quad (2.55)$$

Donde θ es el ángulo entre la normal, la dirección normal exterior n y el vector r_{01} apuntando de P_0 a P_1 . El término $\cos\theta$ está dado exactamente por

$$\cos\theta = \frac{z}{r_{01}} \quad (2.56)$$

Y por lo tanto el principio de *Huygens–Fresnel* puede ser reescrito como

$$U(x, y) = \frac{z}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U(\xi, \eta) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}^2} d\xi d\eta \quad (2.57)$$

Donde la distancia r_{01} está dada exactamente por

$$r_{01} = \sqrt{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \quad (2.58)$$

Para reducir el principio de *Huygens–Fresnel* a una expresión más simple, introducimos aproximaciones para la distancia r_{01} entre P_1 y P_0 . Las aproximaciones están basadas sobre la expansión binomial de la raíz cuadrada de la ecuación (2.58). Dejemos que b sea un número que es menor que la unidad, y consideramos la expresión $\sqrt{1 + b}$. La expansión binomial de la raíz cuadrada está dada por

$$\sqrt{1 + b} = 1 + \frac{1}{2}b - \frac{1}{8}b^2 + \dots, \quad (2.59)$$

Donde el número de términos para una precisión dada depende de la magnitud de b .

Para aplicar la expansión binomial al problema, sacamos el factor z afuera de la expresión para r_{01} , entonces

$$r_{01} = z \sqrt{1 + \left(\frac{x-\xi}{z}\right)^2 + \left(\frac{y-\eta}{z}\right)^2} \quad (2.60)$$

Dejemos que la cantidad b en la ecuación (2.59) se forme del segundo y tercer término bajo la raíz cuadrada en la ecuación (2.60). Entonces reteniendo solo los primeros dos términos de la expansión (2.59) tenemos.

$$r_{01} \approx z \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x-\xi}{z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y-\eta}{z} \right)^2 \right] \quad (2.61)$$

La expresión resultante para el campo en (x,y) se convierte en

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) e^{i\frac{k}{2z}[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]} d\xi d\eta \quad (2.62)$$

Nos referiremos a este resultado como la *integral de difracción de Fresnel* ^[18].

2.4 Teoría de la invariante gaussiana para el trazo de rayos.

La difracción de la luz aparece de los efectos de aberturas y en fronteras de interfaces en la propagación de la luz. En la forma más simple, los bordes de las lentes, aberturas y otras componentes ópticas hacen que la luz que pasa por un sistema óptico sea dirigida fuera de los caminos indicados por la óptica de rayos. Mientras que algunos efectos de difracción prueban ser útiles, finalmente todo el desempeño óptico está limitado por la difracción, si es que hay suficiente señal y por “ruido” eléctrico u óptico, si la señal es débil.

Para el trazo de rayos de nuestro axicón vamos a utilizar la teoría “**FGSI**” ^[5], esta teoría nos permite trazar rayos a partir de sus resultados, la idea básica es propagar un haz

Gaussiano por medio de la integral de difracción de Fresnel, entonces un haz Gaussiano tiene la siguiente forma.

$$\psi_0 = A e^{i\alpha x} e^{i\beta x^2} e^{-\frac{(x-x_A)^2}{r_0^2}} e^{i\gamma(x-x_B)^2} \quad (2.63)$$

Donde A es la amplitud del haz Gaussiano (el cual puede ser complejo), α representa la inclinación del haz incidente, la fase cuadrática que involucra β es introducida para permitir un factor de desenfoque arbitrario de manera independiente, x_A y r son los parámetros correspondientes al centro espacial y al semiancho del haz Gaussiano, finalmente el término γ es el factor que incluye la curvatura Gaussiana cuya fase cuadrática está centrada en x_B .

La integral de difracción de Fresnel en una dimensión tiene la siguiente forma

$$\psi(s) = \frac{e^{ikz}}{\sqrt{i\lambda z}} \int \psi_0 e^{i\frac{\pi}{\lambda z}(x-\xi)^2} dx \quad (2.64)$$

Sustituyendo la ecuación (2.63) En la ecuación (2.64) tenemos

$$\psi(s) = A \frac{e^{ikz}}{\sqrt{i\lambda z}} \int e^{i\alpha x} e^{i\beta x^2} e^{-\frac{(x-x_A)^2}{r_0^2}} e^{i\gamma(x-x_B)^2} e^{i\frac{\pi}{\lambda z}(x-\xi)^2} dx \quad (2.65)$$

Desarrollando los cuadrados de las exponenciales correspondientes y reagrupando términos se obtiene la siguiente ecuación,

$$\Psi(s) = A \frac{e^{ikz}}{\sqrt{i\lambda z}} e^{-\frac{x_A^2}{r_0^2}} e^{i\gamma x_B^2} e^{i\frac{\pi}{\lambda z} \xi^2} \int e^{\left[i\beta - \frac{1}{r_0} + i\gamma + i\frac{\pi}{\lambda z} \right] x^2} e^{\left[i\alpha + 2\frac{x_A}{r_0} - i2\gamma x_B - i\frac{\pi}{\lambda z} 2\xi \right] x} dx \quad (2.66)$$

Factorizamos π en la primera exponencial y $-i2\pi$ en la segunda tenemos,

$$\Psi(s) = A \frac{e^{ikz}}{\sqrt{i\lambda z}} e^{-\frac{x_A^2}{r_0^2}} e^{i\gamma x_B^2} e^{i\frac{\pi}{\lambda z} \xi^2} \int e^{-\pi \left[\frac{-i\beta r_0^2 \pi + \pi}{r_0^2 \pi^2} - \frac{i\gamma \lambda z + i\pi}{\lambda z \pi} \right] x^2} e^{-i2\pi \left[-\frac{\alpha}{2\pi} - \frac{x_A}{\pi r_0^2} - \frac{\gamma x_B}{\pi} + \frac{\xi}{\lambda z} \right] x} dx \quad (2.67)$$

$$\Psi(s) = A \frac{e^{ikz}}{\sqrt{i\lambda z}} e^{-\frac{x_A^2}{r_0^2}} e^{i\gamma x_B^2} e^{i\frac{\pi}{\lambda z} \xi^2} \int e^{-\pi \left[\frac{\lambda z - i(\lambda z \beta r_0^2 + \lambda z \gamma r_0^2 - \pi r_0^2)}{\lambda z \pi r_0^2} \right] x^2} e^{-i2\pi \left[-\frac{\alpha}{2\pi} + \frac{i x_A}{\pi r_0^2} - \frac{\gamma x_B}{\pi} + \frac{\xi}{\lambda z} \right] x} dx \quad (2.68)$$

Simplificando la ecuación (2.68) podemos ver que la integral toma la siguiente forma

$$\Psi(s) = A \frac{e^{ikz}}{\sqrt{i\lambda z}} e^{-\frac{x_A^2}{r_0^2}} e^{i\gamma x_B^2} e^{i\frac{\pi}{\lambda z} \xi^2} F \left\{ e^{-\pi \left[\frac{\lambda z - i(\lambda z \beta r_0^2 + \lambda z \gamma r_0^2 - \pi r_0^2)}{\lambda z \pi r_0^2} \right] x^2} \right\}_{u = +\frac{i x_A}{\pi r_0^2} + \frac{\gamma x_B}{\pi} + \frac{\xi}{\lambda z} - \frac{\alpha}{2\pi}} \quad (2.69)$$

entonces esta última ecuación es la definición de la transformada de Fourier, cuyo resultado es,

$$\Psi(s) = A \frac{e^{ikz}}{\sqrt{i\lambda z}} e^{-\frac{x_A^2}{r_0^2}} e^{i\gamma x_B^2} e^{i\frac{\pi}{\lambda z} \xi^2} \sqrt{\frac{\pi r_0^2 \lambda z}{\lambda z - i r_0^2 [\lambda z (\beta + \gamma) + \pi]}} e^{-\pi \left[\frac{\pi r_0^2 \lambda z}{\lambda z - i r_0^2 [\lambda z (\beta + \gamma) + \pi]} \right] \left[\frac{\xi}{\lambda z} + \frac{\gamma x_B}{\pi} + \frac{i x_A}{\pi r_0^2} - \frac{\alpha}{2\pi} \right]^2} \quad (2.70)$$

esta es la solución general de la integral, por lo que debemos proceder a separar la parte real e imaginaria de la misma, quedándonos la parte real de la siguiente forma

$$Re[\Psi(s)] = A \frac{e^{ikz}}{\sqrt{i\lambda z}} \sqrt{\frac{\pi r_0^2 \lambda z}{\lambda z - i r_0^2 [\lambda z (\beta + \gamma) + \pi]}} e^{-\frac{\pi^2 r_0^2}{z^2 \lambda^2 + r_0^4 [\lambda z (\beta + \gamma) + \pi]^2} [\xi - \xi_A]^2} \quad (2.71)$$

con

$$\xi_A = x_A + \frac{\alpha \lambda z}{2\pi} - \frac{\gamma x_B \lambda z}{\pi} + \frac{(\beta + \gamma) \lambda z x_A}{\pi} \quad (2.72)$$

La parte imaginaria de la solución tiene la siguiente forma

$$Img[\Psi(s)] = e^{i\gamma x_B^2} e^{i\frac{\pi}{\lambda z} \xi^2} e^{-i\frac{\pi^2 r_0^4 [\lambda z (\beta + \gamma) + \pi]}{\lambda z [\lambda^2 z^2 + r_0^4 [\lambda z (\beta + \gamma) + \pi]^2]} (\xi - \xi_B)^2} e^{-i\frac{\lambda z x_A^2}{r_0^4 [\lambda z (\beta + \gamma) + \pi]}} \quad (2.73)$$

En resumen podemos expresar las condiciones iniciales y finales como sigue

$$\Psi_{inicial} = A e^{i\alpha x} e^{i\beta x^2} e^{-\frac{(x-x_A)^2}{r_0^2}} e^{i\gamma (x-x_B)^2} \quad (2.74)$$

y

$$\Psi_{final} = A' e^{i\alpha' \xi} e^{i\beta' \xi^2} e^{-\frac{(\xi - \xi_A)^2}{(r')^2}} e^{i\gamma' (\xi - \xi_B)^2} \quad (2.75)$$

Para la distribución de amplitud en planos paralelos uno paralelo al anterior tenemos que a una distancia z la función está dada por

$$\Psi_{n+1} = A_{n+1} e^{i\alpha_{n+1} \xi} e^{i\beta_{n+1} \xi^2} e^{-\frac{(\xi - \xi_{A_{n+1}})^2}{r_{n+1}^2}} e^{i\gamma_{n+1} (\xi - \xi_{B_{n+1}})^2} \quad (2.76)$$

Con las constantes definidas de la siguiente forma

$$A = A \frac{e^{ikz}}{\sqrt{i\lambda z}} \sqrt{\frac{\pi r_n^2 \lambda z}{\lambda z - i r_n^4 [\lambda z (\beta_n + \gamma_n) + \pi]}} e^{i \gamma_n x_{Bn}^2} e^{-i \frac{\lambda z x_{An}^2}{r_n^4 [\lambda z (\beta_n + \gamma_n) + \pi]}} \quad (2.77)$$

$$r_{n+1}^2 = \frac{z^2 \lambda^2 + r_n^4 [\lambda z (\beta_n + \gamma_n) + \pi]^2}{\pi^2 r_n^2} \quad (2.78)$$

$$\gamma_{n+1} = - \frac{\pi^2 r_n^4 [\lambda z (\beta_n + \gamma_n) + \pi]}{\lambda z [\lambda^2 z^2 + r_n^4 [\lambda z (\beta_n + \gamma_n) + \pi]^2]} \quad (2.79)$$

$$\xi_{A_{n+1}} = x_{A_n} + \frac{\alpha_n \lambda z}{2\pi} - \frac{\gamma_n x_{B_n} \lambda z}{\pi} + \frac{(\beta_n + \gamma_n) \lambda z x_{A_n}}{\pi} \quad (2.80)$$

$$\xi_{B_{n+1}} = \frac{\alpha_n \lambda z}{2\pi} - \frac{\gamma_n \lambda z x_{B_n}}{\pi} + \frac{\lambda^2 z^2 x_A}{\pi r_n^4 [\lambda z (\beta_n + \gamma_n) + \pi]} \quad (2.81)$$

$$\beta'_{n+1} = \frac{\pi}{\lambda z} \quad (2.82)$$

$$\alpha'_{n+1} = 0 \quad (2.83)$$

El conjunto de ecuaciones (2.77-2.83) corresponden a cálculos exactos y pueden ser aplicadas en general. Esas ecuaciones representan un conjunto de ecuaciones recursivas que sirven a nuestro propósito ya que nos permiten trazar rayos en un sistema óptico.

3. RESULTADOS.

3.1 Diseño del axicón.

El axicón que se eligió para el desarrollo de esta tesis fue una lente cónica plana convergente y sus características fueron: un ángulo $\alpha = 45^\circ$, un diámetro de 0.02 m y un índice de refracción de 1.5168 correspondiente al material que se eligió para el diseño de la lente, que en este caso fue *BK7*. El axicón fue diseñado de manera teórica por medio del software de ingeniería *MATCAD MR*. En la figura 3.1 se reporta el resultado final obtenido para el diseño del axicón y su comparación con el software comercial de diseño óptico *OSLO MR.*, en ambos casos las lentes tienen las mismas características.

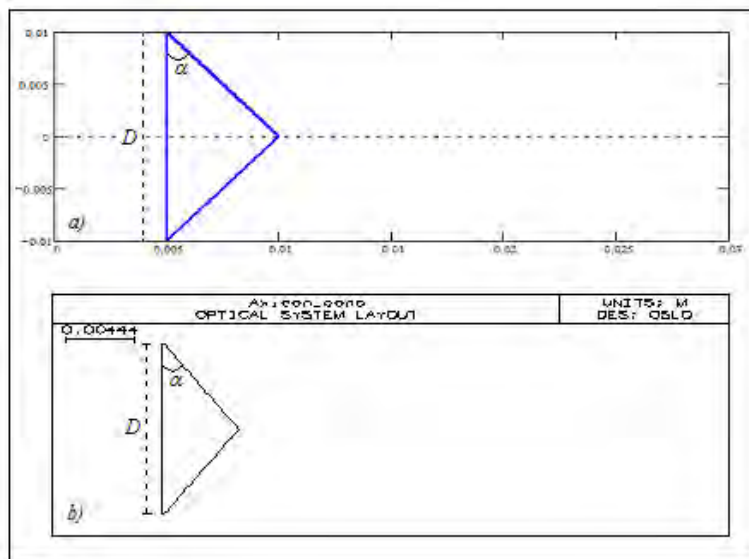


Figura 3.1 Comparación del diseño del axicón con dos diferentes softwares, *MATHCAD MR.* en el inciso (a) y *OSLO MR.* en el inciso (b), en ambos casos el axicón tiene las mismas dimensiones.

En la figura 3.2 se muestra la ficha de datos técnicos a considerar para la fabricación real del axicón.

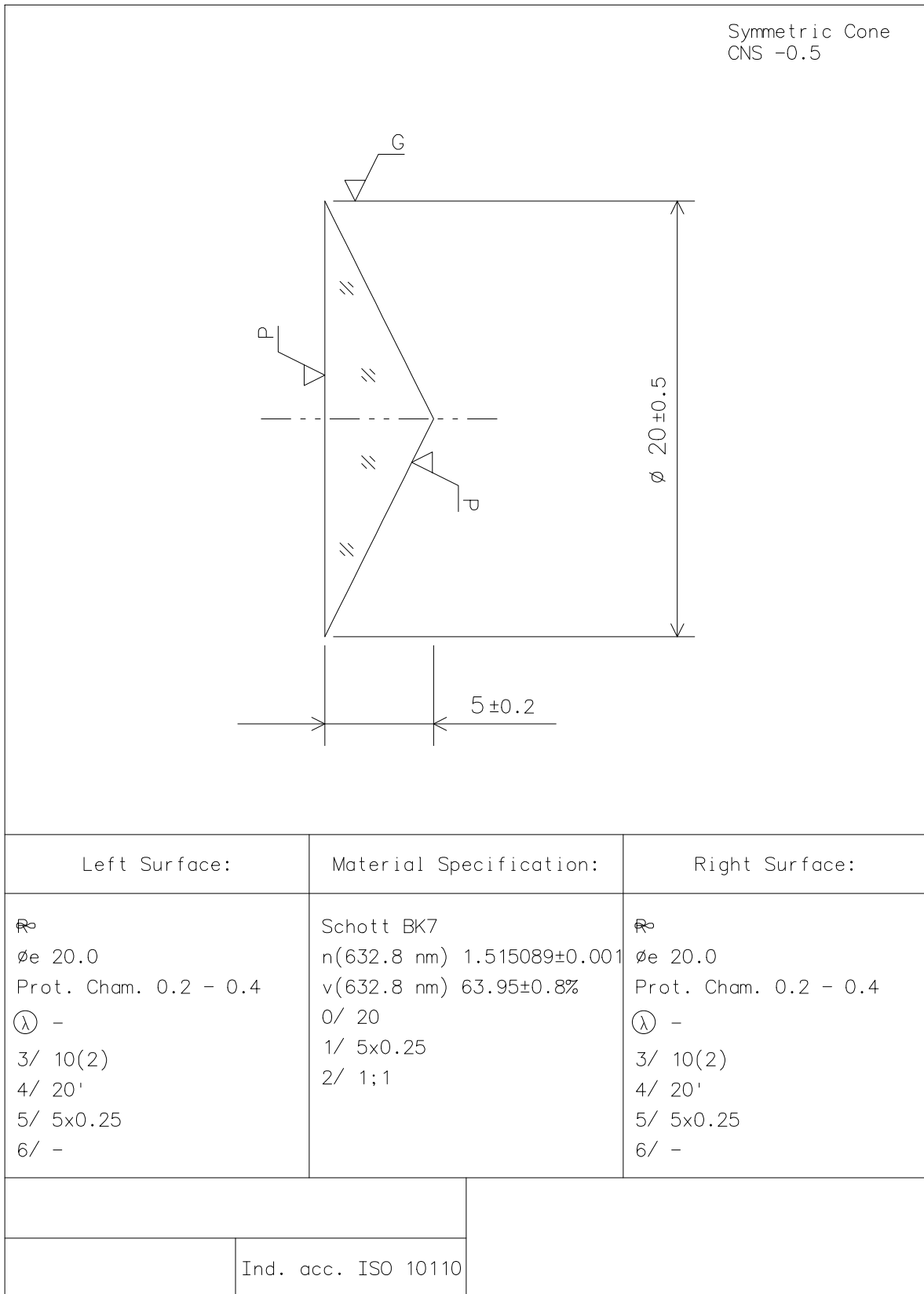


Figura 3.2 Plano de datos para la fabricación física del axicón.

3.2 Aberración cromática.

En este apartado reportamos los resultados obtenidos para la aberración cromática a partir del trazo de rayos obtenidos por el método de la “FGSI”^[5]. En la figura 3.3 se puede ver el caso en que el haz de luz blanca llega al axicón y como se descompone en los diferentes colores que la conforman.

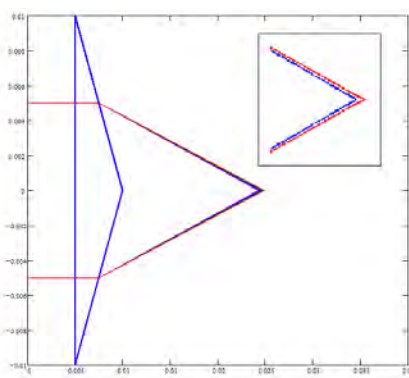


Figura 3.3 Aberración cromática axial del axicón

Los colores de los rayos aquí trazados fueron tomados del catalogo Shott^[19-21] para el material BK7, sus correspondientes valores en color, longitud de onda, índice de refracción y fuente de la luz se observan en la tabla de la figura 3.4.

Color	Longitud de onda (nm)	índice	Fuente de la luz
violeta	404.66	1.53024	Hg
azul	435.84	1.52668	Hg
azul	486.13	1.52283	H
verde	546.07	1.51872	Hg
amarillo	589.3	1.51673	Na
rojo	656.27	1.51432	H

Figura 3.4 Tabla de los colores utilizados para calcular la aberración cromática

En la figura 3.5 se reporta una grafica donde se observa cómo se comporta el índice de refracción con respecto a la longitud de onda, estos resultados coinciden con las gráficas para el catalogo Shott.

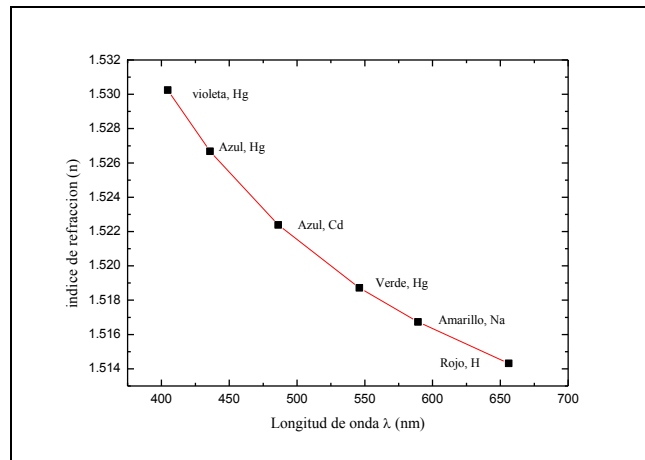


Figura 3.5 Grafica del índice de refracción en función de la longitud de onda para el material BK7

La gráfica de la figura 3.5 dice que conforme va creciendo la longitud de onda el índice de refracción va disminuyendo, como se puede ver en la gráfica 3.5 para el color violeta, cuya fuente de luz es el mercurio con una longitud de onda de 404.66 nm le corresponde un índice de refracción de 1.53024, así como para el color rojo cuya fuente de luz es el Hidrogeno con una longitud de onda de 656.27 nm, le corresponde un índice de refracción de 1.51432 ^[20].

Esto quiere decir que el foco para el color azul está más cerca del vértice de la lente y a su vez el foco de color rojo se encuentra más lejos del vértice de la lente, por lo que se procedió a medir las distancias focales de los diferentes colores que utilizamos dados en la tabla de la figura 3.4, los resultados obtenidos se pueden ver en la gráfica de la figura 3.6.

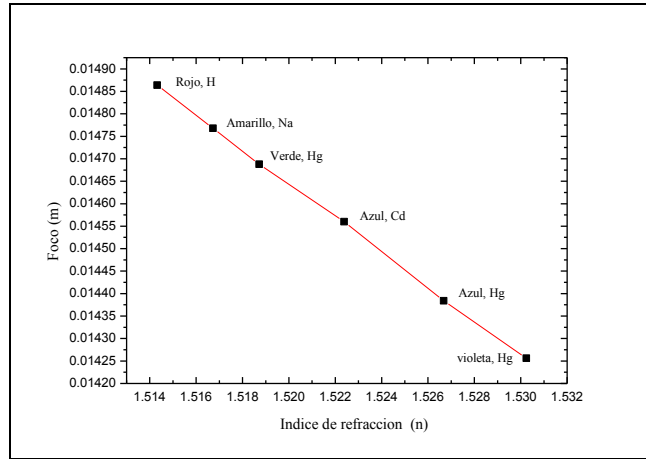


Figura 3.6 Gráfica de las distancias focales en función del índice de refracción

En la figura 3.7 se reporta la tabla de aberraciones del axicón, el procedimiento consistió en variar el radio del haz; para cada uno de estos radios se calculó la aberración cromática axial, es decir, la posición del foco del color rojo menos el foco del color azul, estos valores están señalados en la tabla de la figura 3.4 con color azul para cada fuente de luz utilizada. En la figura 3.8 se reporta el comportamiento de la aberración axial en función del radio del haz, los datos para realizar esta gráfica están reportados en la tabla de la figura 3.7.

radio del haz (m)	foco color rojo (m)	foco color azul (m)	Aberración cromática Axial (m)
1.00E-03	0.01298	0.01291	6.40E-05
0.0018	0.01536	0.01523	1.28E-04
0.0025	0.01744	0.01726	1.76E-04
0.003	0.01891	0.0187	2.08E-04
0.004	0.02189	0.02162	2.72E-04
0.005	0.02486	0.02453	3.36E-04
0.0055	0.02635	0.02598	3.68E-04
0.0065	0.02933	0.0289	4.32E-04
0.007	0.0308	0.03034	4.64E-04
0.008	0.03378	0.03325	5.28E-04
0.009	0.03675	0.03616	5.92E-04

Figura 3.7 Tabla de datos de la aberración cromática axial.

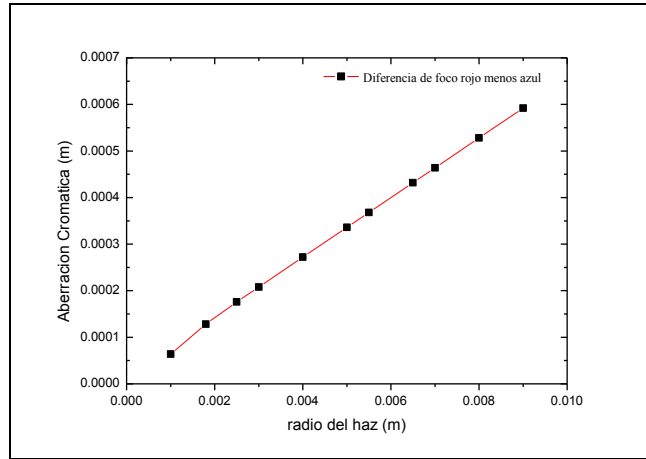


Figura 3.8 Gráfica de la aberración cromática axial en función del radio del haz

3.3 Aberración Esférica

Como ya se menciona en el capítulo dos, la aberración esférica lateral se define como la diferencia de focos del rayo marginal y paraxial. El trazo de rayos por el método de la “FGSI” [5] para el axicón se muestra en la figura 3.9.

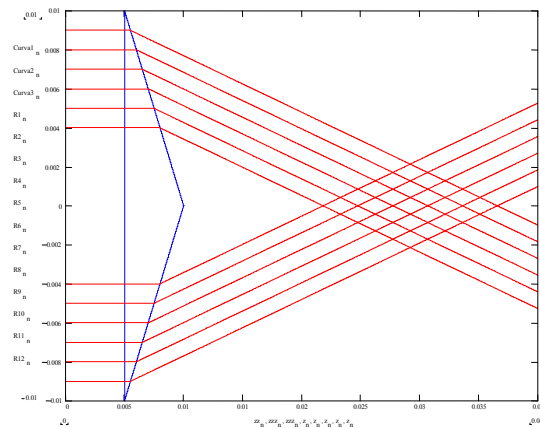


Figura 3.9 Trazo de rayos para el cálculo de la aberración esférica.

Para esta aberración se tomo como rayo paraxial al rayo que tenía un radio de 0.001 m, el procedimiento consistió en ir variando el radio del haz desde 0.002 m hasta 0.009 m, a

todos estos rayos se les considero como rayos marginales. En la figura 3.10 se reporta la tabla de datos que fueron utilizados para dicha aberración.

Radio del haz (m)	foco marginal (m)	foco paraxial (m)	Aberración Esf. lateral (m)	Aberración Esf. transversal (m)
1.00E-03	0.01294	0.01294	0	0
0.002	0.0159	0.01294	0.00296	8.59E-04
0.003	0.01886	0.01294	0.00592	0.00171
0.004	0.02182	0.01294	0.00888	0.00257
0.005	0.02478	0.01294	0.01184	0.00342
0.006	0.02772	0.01294	0.01478	0.00428
0.007	0.03068	0.01294	0.01774	0.00514
0.008	0.03362	0.01294	0.02068	0.00599
0.009	0.03658	0.01294	0.02364	0.00685

Figura 3.10 Tabla de datos utilizados para el cálculo de la aberración esférica lateral y transversal.

La figura 3.11 muestra el comportamiento de la aberración esférica lateral en función del radio del haz,

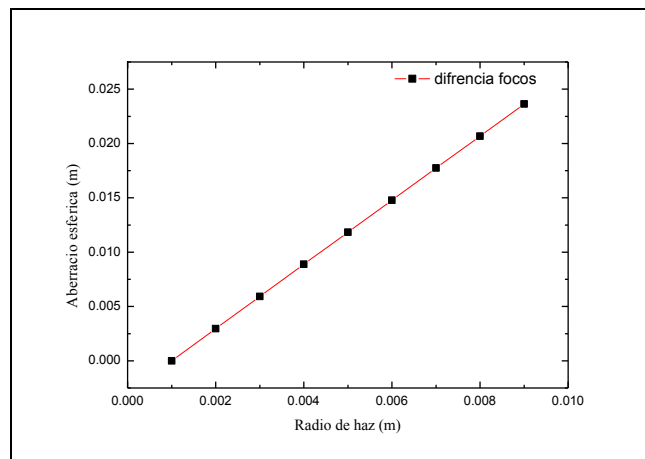


Figura 3.11 Gráfica de la aberración esférica lateral en función del radio del haz.

La figura 3.12 muestra el comportamiento de la aberración esférica transversal en función del radio del haz.

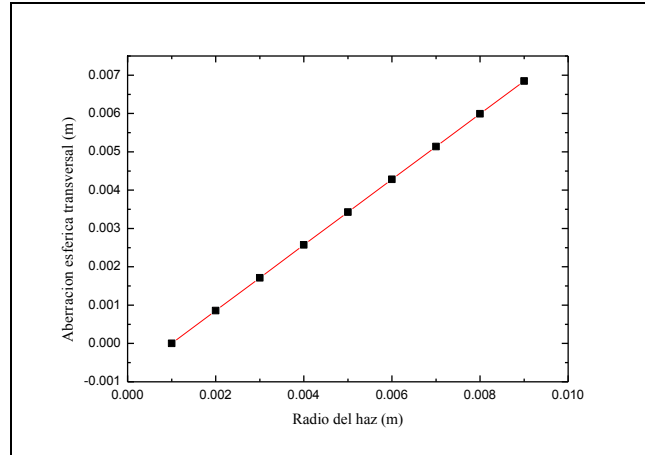


Figura 3.12 Gráfica de la aberración esférica transversal en función del radio del haz.

Se observa que la tendencia de las dos tipos de aberraciones esféricas se comportan de manera lineal, para poder predecir esta aberración se tendría que hacer un ajuste lineal, y con los datos obtenidos por el ajuste y el radio del haz podríamos calcular los dos tipos de aberraciones en cualquier punto del eje óptico.

3.4 Aberración de Coma.

La aberración de coma en un sistema óptico se refiere a la aberración inherente a determinados sistemas ópticos, debida a algunos defectos de diseño o imperfecciones en las lentes u otros componentes, lo que resulta en fuentes puntuales fuera de eje. Para el caso del axicón en la figura 3.13 se observa el trazo de rayos a partir del método “*FGSI*”^[5]

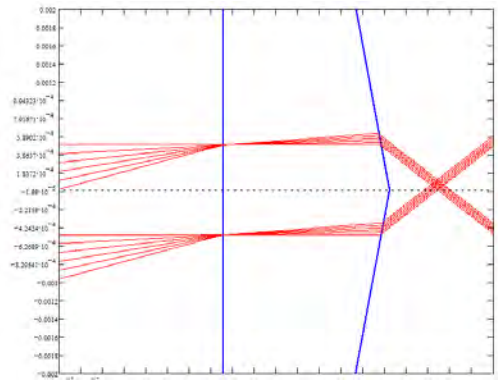


Figura 3.13. Trazo de rayos a partir de la “FGSI” para la aberración de Coma.

En la figura 3.14 se observa una gráfica donde se reporta la amplificación de las distancias focales debido a las diferentes inclinaciones del haz de luz.

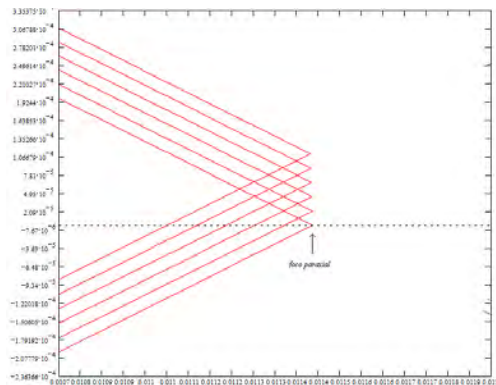


Figura 3.14. Aumento de la figura 3.13, se muestran los diferentes focos de los rayos que incidieron con una inclinación respecto al foco paraxial debido a la aberración de coma.

Para comenzar el cálculo vamos a utilizar luz monocromática correspondiente a un láser de He-Ne con una longitud de onda de $632 \times 10^{-9} m$, el índice de refracción correspondiente al material BK7 con que fue construido el Axición tiene el valor de 1.5168. Empezamos por trazar un par de rayos paraxiales con un radio de $500 \mu m$ a partir del eje óptico, es decir la altura del rayo es de $500 \mu m$, por lo que el diámetro del haz de luz es de $1 mm$, el haz tiene

una inclinación de cero grados, por lo tanto estos rayos son paralelos al eje óptico, el foco calculado para este rayo va a ser nuestro punto de referencia, el siguiente paso consistió en trazar rayos con diferentes ángulos de inclinación que cumplan con las siguientes condiciones, *a)* que tengan 1 mm de diámetro y *b)* que sus respectivos extremos del haz pasen por 500 μm y -500 μm con respecto al eje óptico, como se ve en la fig. 3.15.

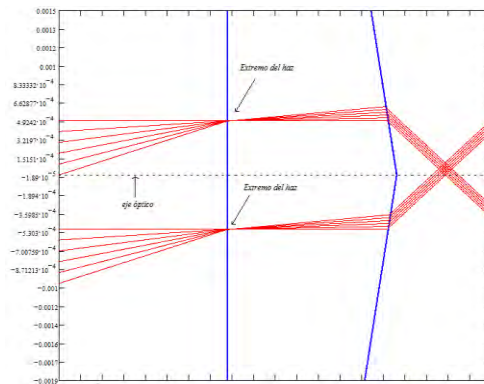


Figura 3.15. Gráfica donde se muestra los puntos por donde pasan todos los rayos.

Ya con el trazo de rayos calculado se procedió a medir varios parámetros, como lo son el foco y la amplificación, también se reporta el grado de inclinación de cada haz, en la figura 3.16 se reportan estos parámetros.

<i>inclinación (°)</i>	<i>foco (m)</i>	<i>amplificación (m)</i>
0	0.00644	0
1.14	0.00642	2.55E-05
2.29	0.00641	5.23E-05
3.43	0.00639	7.80E-05
4.57	0.00638	1.04E-04
5.71	0.00636	1.35E-04

Figura 3.16. Datos obtenidos de la aberración de coma.

En la Fig. 3.17 se reporta la gráfica de los parámetros de la tabla de la tabla 3.16, donde se gráfico la distancia focal contra la amplificación, también se observa en la misma gráfica el grado de inclinación correspondiente para dicho foco.

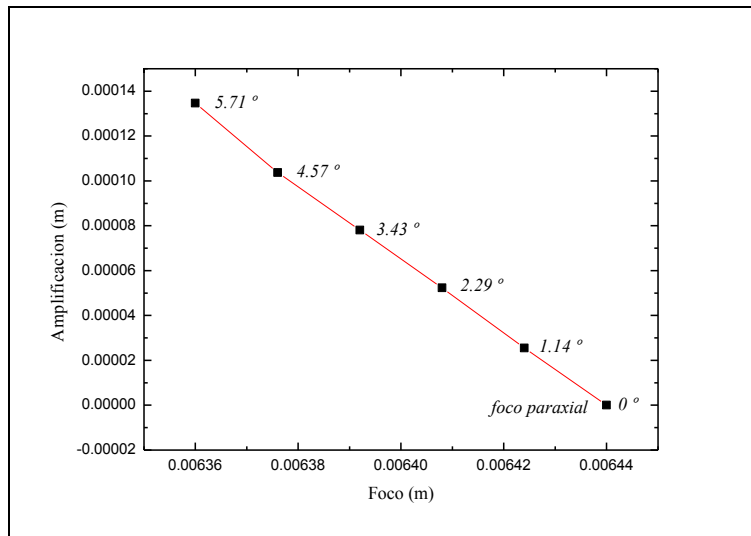


Figura 3.17. Gráfica de la distancia focal vs la amplificación.

Se puede observar de la gráfica de la figura 3.17 que la amplificación se mantiene de manera constante, cuyo valor promedio es $2.62827E-5 m$. Haciendo uso de la definición de aberración de coma, es decir la diferencia del rayo sagital, que en este caso corresponde al rayo con una inclinación de 5.71° y el rayo paraxial con una inclinación de 0° , calculamos la magnitud del valor correspondiente de la aberración de coma, cuyo valor es $1.35E-04 m$.

3.5 Aberración Astigmatismo.

Para el cálculo de la aberración de astigmatismo se utilizó luz monocromática de un láser He-Ne con una longitud de onda de $632 \times 10^{-9} m$, el índice de refracción fue el correspondiente al material BK7 es decir 1.5168, en este caso el radio del haz corresponde a

5 mm, por lo tanto el haz tiene un diámetro de 1 cm, el ángulo de incidencia con respecto al eje óptico correspondió a 8° para los casos en el que los rayos se encuentran en el plano sagital y tangencial respectivamente. En la figura 3.17 observan tres imágenes de cómo se ve la aberración de astigmatismo con dos diferentes programas, el inciso *a)* y *b)* fueron diseñados en el programa de diseño óptico *OSLO MR.*, en el caso del primero se pueden ver los rayos sagitales y tangenciales en una imagen 3D y en el inciso *b)* se puede ver la imagen en el plano *xz* correspondiente al plano sagital; el inciso *c)* fue diseñado y programado con el software de ingeniería *MATHCAD MR.* y se encuentra en el mismo plano *xz*, el axicón en ambos casos tiene las mismas dimensiones y el trazo de rayos tiene las mismas características, solo diferenciándose en que en el inciso *c)* el trazo de rayos se hizo mediante el método de la “*FGSI*”^[5].

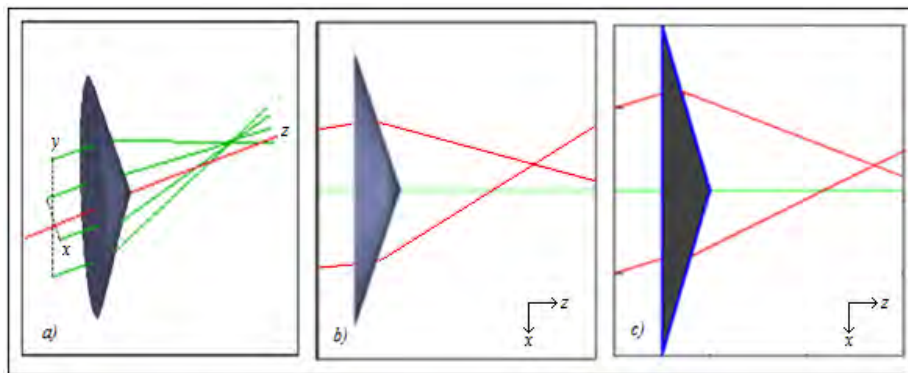


Figura 3.18. Aberración de astigmatismo vista en el software de diseño óptico *OSLO MR.* para el caso del inciso *a)* y *b)* y en el software de ingeniería *MATHCAD MR.* para el caso del inciso *c)*.

En la figura 3.19 se muestra la tabla con los diferentes parámetros calculados a partir del trazo de rayos, se reporta el foco encontrado en el plano sagital correspondiente a la columna del foco *xz*, y el foco tangencial correspondiente al plano tangencial, es decir a la columna del foco *yz*; en ambos casos se reporta la amplificación correspondiente a la imagen en cada plano.

radio de haz (m)	inclinación de haz (°)	foco xz (m)	foco yz (m)	amplificación (m)
0.01	8	0.0246533	0.0246667	0.000854942 (xz)
0.01	8	\	\	0.000851081 (yz)

Figura 3.19. Tabla de datos obtenidos de la aberración de astigmatismo.

Como se reportó en el capítulo dos de esta tesis, la aberración de astigmatismo se definió como la diferencia de foco de los rayos producidos en el plano tangencial y sagital respectivamente, por lo tanto de la tabla podemos decir que la magnitud de la aberración de astigmatismo corresponde a $1.34 \times 10^{-5} m$.

3.6 Aberración de Campo

En la figura 3.20 se muestra un gráfico de cómo se da la aberración de campo, se ve que está originada por la diferencia del foco paraxial de un haz de luz que incide de forma paralela al eje óptico sobre la superficie refractora y el foco originado por un haz de luz que incide con cierta inclinación después de pasar por la superficie refractora

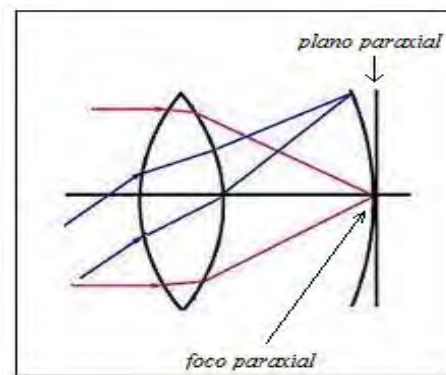


Figura 3.20 Diagrama de la aberración de campo.

Para el cálculo de esta aberración vamos a utilizar luz monocromática de un laser He-Ne con una longitud de onda de $632 \times 10^{-9} m$ y un índice de refracción de 1.5168 correspondiente al material de la lente que fue BK7, el radio del haz fue de $500 \mu m$. En la figura 3.21 se puede ver una imagen de esta aberración utilizando método de la “FGSI” [5].

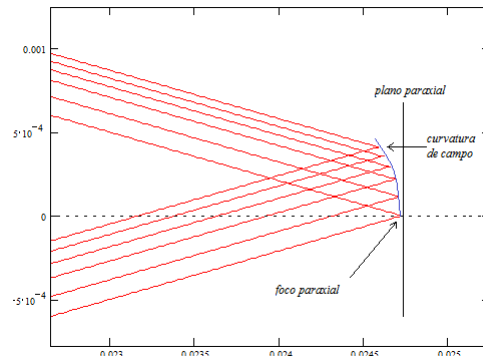


Figura 3.21 Trazo de rayos para el cálculo de la aberración de campo.

En la figura 3.22 se reportan los datos obtenidos para esta aberración, es decir las inclinaciones de los diferentes haces, el foco, la amplificación y la magnitud de las respectivas diferencias de los focos marginales con respecto al foco paraxial al que llamaremos aberración de campo.

inclinación (°)	foco (m)	amplificación (m)	aberración de campo (m)
0	0.00644	0	0
1.14	0.00642	2.55E-05	2E-05
2.29	0.00641	5.23E-05	3E-05
3.43	0.00639	7.80E-05	5E-05
4.57	0.00638	1.04E-04	6E-05
5.71	0.00636	1.35E-04	8E-05

Figura 3.22 Datos obtenidos para la curvatura de Campo.

En la figura 3.23 se reporta una gráfica doble y; donde el eje vertical de lado izquierdo muestra la amplificación para los diferentes focos obtenidos como resultado del trazo de rayos; y en el eje vertical del lado derecho tenemos la magnitud de la aberración de campo, que como ya se había mencionado fueron el resultado de la diferencia del foco paraxial con el marginal.

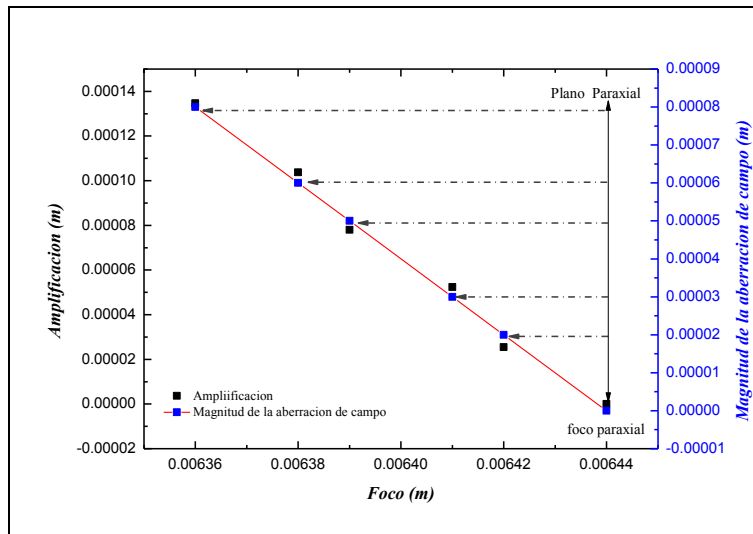


Figura 3.23. Gráfica de los datos obtenidos de la tabla de la figura 3.21.

Se puede deducir de la gráfica que la tendencia de la aberración de campo para los parámetros de entrada como los son la longitud de onda, el ángulo de inclinación del haz, el radio del haz y el índice de refracción del material se comporta de forma lineal.

3.7 Aberración Distorsión.

Para esta aberración comenzaremos por decir que estamos considerando al axicón como una lente delgada, debido a que el espesor de la misma es de 5 mm. La longitud de onda utilizada es $632 \times 10^{-9} \text{ m}$ correspondiente a la del un laser He-Ne, el índice de refracción

utilizado es 1.5168 correspondiente al material BK7; el radio del haz de luz fue de 500 μm , por lo tanto el diámetro del haz corresponde a 1 mm. y el ángulo de inclinación con respecto al eje óptico es de 5.71°.

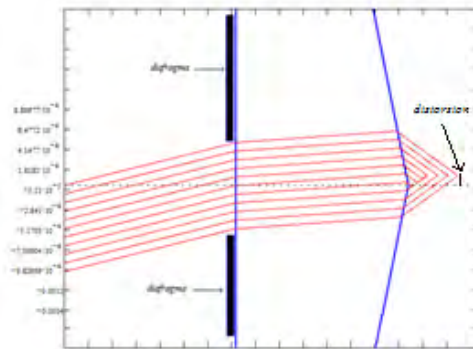


Figura 3.24. Diagrama de la aberración de distorsión.

Esta tipo de aberración tiene una fuerte dependencia de la posición del diafragma, por lo tanto la aberración de corsé y la aberración de barril van a depender de si el diafragma se ubica físicamente a la derecha, o la izquierda de la lente, pero no sobre la lente. En nuestro caso se decidió ubicar el diafragma sobre la lente como se ve en la figura 3.24 por lo tanto todo el haz de luz puede pasar sin ninguna restricción a través del axicón, esto implica que todos los rayos que ayudan a caracterizar la lente, como lo son el principal, marginal, etc. no tienen restricción alguna. Esto implica asimismo que las pupilas de entrada y salida se corresponden con los planos principales, hay que tener en cuenta que el rayo principal es ahora un rayo que pasa por el punto principal.

Un sistema de lentes delgadas tendrá **distorsión cero** si su centro óptico coincide con el dentro del diafragma de apertura ^[1]. Esto no quiere decir que el axicón no produzca aberración de distorsión, pues para que esta se haga presente solo es necesario modificar la posición del diafragma, presentándose así la distorsión de barril o de corsé.

3.9 Reporte General de Resultados.

En este apartado vamos a reportar las aberraciones calculadas por el programa de diseño óptico *OSLO MR.* para un axicón con las mismas características del axicón que diseñe en *MATHCAD MR.* En la figura 3.25 se reporta la tabla de resultados para dicho sistema, las abreviaturas para las diferentes aberraciones son las siguientes, *SA3* para la aberración esférica, *CMA3* para la aberración de coma, *AST3* para la aberración de astigmatismo, *PTZ3* para la curvatura de campo (Petzval) y *DIS3* para la aberración de distorsión.

SEIDEL ABERRATIONS

MÉTODO	SA3(m)	CMA3(m)	AST3(m)	PTZ3(m)	DIS3(m)
<i>OSLO MR.</i>	--	-6.3724E-38	--	--	--
<i>FGSI</i>	0.00685	1.35E-04	1.34E-5	8E-05	0

Figura 3.25. Tabla de resultados para las aberraciones del axicón con el software de diseño óptico *OSLO MR.* y la comparación con el método “*FGSI*”^[5].

Se puede ver en la tabla que los valores para las aberraciones *SA3*, *AST3*, *PTZ3* y *DIS3* son nulos en el método utilizado por el software *OSLO MR.*, esto no quiere decir que sean cero, sino que los criterios que establece este programa para el cálculo de las aberraciones no se pueden aplicar de manera general a cualquier tipo de sistema óptico que se diseñe en él, también se observa que el único valor reportado en la tabla es para la aberración de coma que tiene un exponente de -38, como ya sabemos esto es prácticamente cero y ningún sistema en la vida real se puede diseñar con tal grado de precisión.

Esto denota una diferencia a la hora de calcular aberraciones para un sistema óptico utilizando el método de la “*FGSI*”^[5] pues en cada caso se aplico la definición de las aberraciones correspondientes para el axicón. Por lo tanto utilizando la “*FGSI*”^[5] fue posible calcular las aberraciones las cuales están reportadas en este capítulo.

4. CONCLUSIONES.

En esta sección presentamos las conclusiones a las que se llegó a partir de los resultados presentados previamente en la sección anterior.

- Se diseñó un axicón con el software de uso comercial para el área de ingeniería, tomando en cuenta las variables que lo caracterizan, como los son el ángulo, el diámetro y el índice de refracción.
- Se aplicó el método de la invariante gaussiana “*FGSI*” a un sistema óptico, (que para nuestro caso fue un axicón), en la parte correspondiente al trazo de rayos.
- A partir del trazo de rayos se pudieron calcular las aberraciones de Seidel o de tercer orden, junto con la aberración cromática.
- Se compararon los resultados obtenidos por el método de la “*FGSI*”^[5] y el programa de diseño óptico *OSLO MR*.

Es importante mencionar que el método “**Fresnel-Gaussian shape invariant for optical ray tracing**” se puede aplicar a cualquier tipo de sistema óptico sin restricción alguna, el ejemplo más claro de esto es la aplicación del método para la caracterización de un axicón, que en la vida real es una lente difícil de diseñar, siendo este método una potente herramienta al poder simular un sistema óptico y a su vez poder caracterizarlo. Como parte complementaria de este trabajo queda calcular el patrón de difracción para el axicón, quedando esta parte pendiente para un trabajo futuro debido al tiempo y los alcances que se querían lograr para esta tesis.

5. BIBLIOGRAFIA.

- [1] Eugene Hetch, Óptica, Adison Wesley, 2002.
- [2] Conrady, A.E., Applied Optics and Optical Design, Part I, Dover Publ., New York., 1957.
- [3] Conrady, A.E., Applied Optics and Optical Design, Part II, Dover Publ., New York., 1960.
- [4] E. Delano Appl. Opt. V2, p1251, 1963.
- [5] Cywiak M “Fresnel-Gaussian shape invariant for optical ray tracing” Optics express, 17, 10564-10572 (2009)
- [6] Daniel Malacara, Óptica Básica, Fondo de cultura Económica. 2004
- [7] J. II. McLeod, “The axicon: a new type of optical element,” J. Opt. Soc. Am., 44, 592-597 (1954).
- [8] J. 11. McLeod, “Axicons and their uses,” J. Opt. Soc. Ant, 50, 166-169 (1960).
- [9] L. M. Soroko, “Axicons and meso-optical imaging devices,” en Progress in Optics, Capítulo II (Elsevier, Nueva York, 1989).
- [10] M. Rioux, It. Tremblay y P.-A. Bélanger, “Linear, annular and radial focusing with axicons and applications to laser machining,” Appl. Opt., 17, 1532-1536 (1978).
- [11] P.-A. Bélanger y M. Rioux, “Ring pattern of a lens-axicon doublet illuminated by a Gaussian beam,” Appl. Opt., 17, 1080-1086 (1978).
- [12] María Sagrario Millán, Óptica Geométrica, Jaume Escofet, Elisabet Pérez, Editorial Ariel, 2004.
- [13] Daniel Malacara, Zacarías Malacara, “*Handbook of optical design*”, 2nd Edition-Academic exchanges

- [14] Toraldo Di Francia, G., “On the image Sharpness in the central field of a System Presenting Third- and Fifth-Order Spherical Aberration”, *J. Opt. Soc. Am.*, 43, 827-835 (1953).
- [15] Daniel Malacara ,*Óptica Básica*, Fondo de cultura Económica. 2004
- [16] H. Coddington, *A System of Optics* in two volumes. Limkid and Marshal, London.
- [17] Kingslake, R., “Lens Design” in *Applied Optics and Optical Engineering*, R. Kingslake Ed., Vol. III, Chap. 1, Academic Press, San Diego, 1965.
- [18] Joseph W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, Roberts & Company, Third Edition.
- [19] Data Sheets Optical Glass” SHOTT, 2007
- [20] Allen Nussbaum, *Optical System Design*, editorial Prentice Hall PTR
- [21] <http://refractiveindex.info/?group=GLASSES&material=BK7>