

## TEMA VII

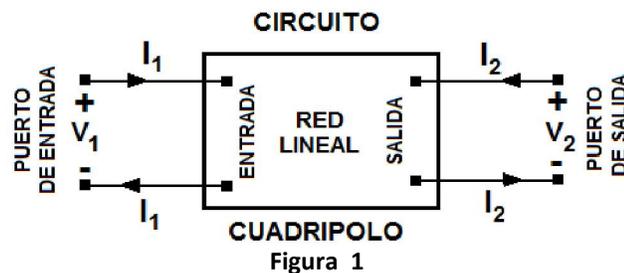
## RED DE DOS PUERTOS - CUADRIPOLOS

## 7.1. INTRODUCCIÓN.

En Temas precedentes se ha puesto el énfasis en el análisis del funcionamiento 'interno' de redes, es decir, el aspecto fundamental del análisis era la determinación de magnitudes de interés en distintos puntos, sin embargo, en numerosos casos prácticos lo que se tiene mayor importancia es caracterizar el circuito desde un punto de vista 'externo', es decir, con respecto a su relación con elementos ajenos al propio circuito. Es esta segunda perspectiva la que se aborda en este Tema, de acuerdo con ella, el circuito es tratado como un cuadripolo que se inserta entre un generador y una carga. Por lo que, el circuito de cuadripolo es tratado como una caja negra con dos puertas (cuatro terminales) de conexión al exterior, cuyo comportamiento eléctrico del circuito, es descrito en función de las tensiones y corrientes en las puertas, que se relacionan entre sí mediante un juego de parámetros característicos para conocer que ocurre cuando se alimenta con una señal un par de terminales (puerto de entrada) y luego de recorrer el circuito se le extrae por otro par de terminales (puerto de salida).

El interés del estudio de la teoría de cuadripolos, redes bipuerta, estriba en el hecho de que cualquier red eléctrica bilateral lineal, activa o pasiva, se puede representar por una red de cuatro terminales y estando esta teoría totalmente desarrollada, pueden aplicarse sus resultados al estudio de los componentes de circuitos electrónicos, especialmente a los transistores. Todos los dispositivos electrónicos, tales como BJT, FET y Diodos semiconductores son no lineales, sin embargo, bajo condiciones de señales de pequeña amplitud, estos dispositivos no lineales pueden ser aproximados adecuadamente a dispositivos lineales.

En la Fig. 1, se muestra el cuadripolo básico, compuesto por Dos Puertos, Entrada y Salida, de bornes hacia afuera, se puede trabajar sin conocer la estructura interior, mediante dos ecuaciones (una por puerta), importante el convenio de signos; variables circuitales de los puertos positivos tal y como se definen en la figura 1, en el que se indican los sentidos de referencia de las tensiones y corrientes.



En esta parte, se describen algunos de los aspectos más relevantes del formalismo matemático adecuado para el tratamiento de cuadripolos que satisfagan las condiciones que se indican a continuación:

- El Cuadripolo no contiene fuentes independientes de energía (Cuadripolo pasivo), pero puede contener fuentes dependientes (como en los circuitos equivalentes de dispositivos electrónicos).
- En ausencia de excitación externa no hay energía almacenada en el Cuadripolo.
- La corriente que sale por una puerta es igual a la que entra en la misma.
- Las conexiones externas deben hacerse al puerto de entrada o al puerto de salida. No se permiten conexiones externas entre los puertos.

- Un Cuadripolo puede analizarse en Regímenes Permanentes Senoidales, generalizable al dominio de Laplace, continuo, o caracterizadas por ecuaciones Integro-diferenciales lineales de coeficientes constantes.

## 7.2. PARÁMETROS CARACTERÍSTICOS DE CUADRIPOLOS.

Un cuadripolo queda definido por un conjunto de cuatro parámetros, denominados parámetros característicos, que relacionan las corrientes y tensiones de entrada y salida, las más utilizadas son las mostradas en la tabla de la figura 2.

DENOMINACIÓN	ECUACIONES	NOTACIÓN MATRICIAL
IMPEDANCIA	$V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2$ $V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2$	$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$
ADMITANCIA	$I_1 = Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2$ $I_2 = Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2$	$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$
HÍBRIDOS 'h'	$V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2$ $I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2$	$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$
HÍBRIDOS 'g'	$I_1 = g_{11} V_1 + g_{12} I_2$ $V_2 = g_{21} V_1 + g_{22} I_2$	$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$
TRANSMISIÓN DIRECTOS	$V_1 = A V_2 - B I_2$ $I_1 = C V_2 - D I_2$	$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$
TRANSMISIÓN INVERSOS	$V_2 = a V_1 - b I_1$ $I_2 = c V_1 - d I_1$	$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{bmatrix}$

Figura 2

Obsérvese que se ha utilizado una nomenclatura que engloba los casos de régimen permanente continuo o senoidal; es decir, cuando se trata de caracterizar el cuadripolo en continua, las corrientes y tensiones indicadas son las reales ó instantáneas; en régimen senoidal permanente, los mismos símbolos denotan fasores. Análogamente, en continua los parámetros definen ganancias, resistencias o conductancias, mientras que en régimen senoidal permanente, los mismos parámetros corresponden a ganancias, impedancias o admitancias.

### 7.3. SIGNIFICADO CIRCUITAL DE LOS PARÁMETROS CARACTERÍSTICOS.

Los parámetros característicos de un cuadripolo poseen un claro significado circuitual como se deduce a partir del teorema de Superposición. Ver tabla en Figura 3:

PARÁMETRO	CONDICIÓN MATEMÁTICA	SIGNIFICADO ELÉCTRICO CIRCUITAL
$Z_{11}$ $Z_i$	$\left(\frac{V_1}{I_1}\right)_{I_2=0}$	Impedancia de entrada con salida en circuito abierto ( i de input)
$Z_{12}$ $Z_r$	$\left(\frac{V_1}{I_2}\right)_{I_1=0}$	Impedancia de transferencia inversa con entrada en circuito abierto ( r de reversa)
$Z_{21}$ $Z_f$	$\left(\frac{V_2}{I_1}\right)_{I_2=0}$	Impedancia de transferencia directa con salida en circuito abierto ( f de forward)
$Z_{22}$ $Z_o$	$\left(\frac{V_2}{I_2}\right)_{I_1=0}$	Impedancia de salida con la entrada en circuito abierto ( o de output)
$Y_{11}$ $Y_i$	$\left(\frac{I_1}{V_1}\right)_{V_2=0}$	Admitancia de entrada con salida en corto circuito ( i de input)
$Y_{12}$ $Y_r$	$\left(\frac{I_1}{V_2}\right)_{V_1=0}$	Admitancia de transferencia inversa con entrada en corto circuito ( r de reversa)
$Y_{21}$ $Y_f$	$\left(\frac{I_2}{V_1}\right)_{V_2=0}$	Admitancia de transferencia directa con salida en corto circuito ( f de forward)
$Y_{22}$ $Y_o$	$\left(\frac{I_2}{V_2}\right)_{V_1=0}$	Admitancia de salida con la entrada en corto circuito ( o de output)
$h_{12}$		Ganancia inversa de Tensión con entrada en circuito abierto ( r de

$h_r$	$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)_{I_1=0}$	reversa)
$h_{21}$ $h_f$	$\left(\frac{I_2}{I_1}\right)_{V_2=0}$	Ganancia directa de corriente con salida en corto circuito (f de forward)
$h_{22}$ $h_o$	$\left(\frac{I_2}{V_2}\right)_{I_1=0}$	Admitancia de salida con la entrada en circuito abierto (o de output)
$g_{11}$ $g_i$	$\left(\frac{I_1}{V_1}\right)_{I_2=0}$	Admitancia de entrada con salida en circuito abierto (i de input)
$g_{12}$ $g_r$	$\left(\frac{I_1}{I_2}\right)_{V_1=0}$	Ganancia inversa de corriente con la entrada en cortocircuito (r de reversa)
$g_{21}$ $g_f$	$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)_{I_2=0}$	Ganancia directa de voltaje con la salida en circuito abierto (f de forward)
$g_{22}$ $g_o$	$\left(\frac{V_2}{I_2}\right)_{V_1=0}$	Impedancia de salida con la entrada en corto circuito abierto (o de output)
A	$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)_{I_2=0}$	Ganancia inversa de tensión con salida en circuito abierto (i de input)
B	$\left(-\frac{V_1}{I_2}\right)_{V_2=0}$	Impedancia de transferencia inversa con salida en corto circuito (r de reversa)
C	$\left(\frac{I_1}{V_2}\right)_{I_2=0}$	Admitancia de transferencia directa con salida en circuito abierto (f de forward)
D	$\left(-\frac{I_1}{I_2}\right)_{V_2=0}$	Ganancia de inversa de corriente con la salida en corto circuito (o de output)

a	$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)_{I_1=0}$	Ganancia directa de tensión con la entrada en circuito abierto (i de input)
b	$\left(\frac{V_2}{I_1}\right)_{V_1=0}$	Impedancia de transferencia inversa con la entrada en corto circuito (r de reversa)
c	$\left(-\frac{I_2}{V_1}\right)_{I_1=0}$	Admitancia de transferencia directa con la entrada en circuito abierto (f de forward)
d	$\left(-\frac{I_2}{I_1}\right)_{V_1=0}$	Ganancia directa de corriente con la entrada en corto circuito (o de output)

Figura 3

#### 7.4. REPRESENTACIÓN CIRCUITAL DE LOS PARÁMETROS CARACTERÍSTICOS.

Los parámetros característicos, también pueden obtenerse realizando medidas reales sobre el circuito, con señales alternas suficientemente pequeñas. El procedimiento es montar el circuito, excitándolo con las fuentes independientes y midiendo las variables dependientes, de la forma que se indica en las siguientes figuras (circuitos de definición y medición de los diferentes parámetros):

##### 7.4.1. PARÁMETROS EN CIRCUITO ABIERTO, 'Z'.

Elegiendo como variables independientes a  $I_1$  e  $I_2$ , esto es, circuitos excitados por fuentes de corriente independientes, los circuitos del cuadripolo podrían expresarse de la siguiente forma:

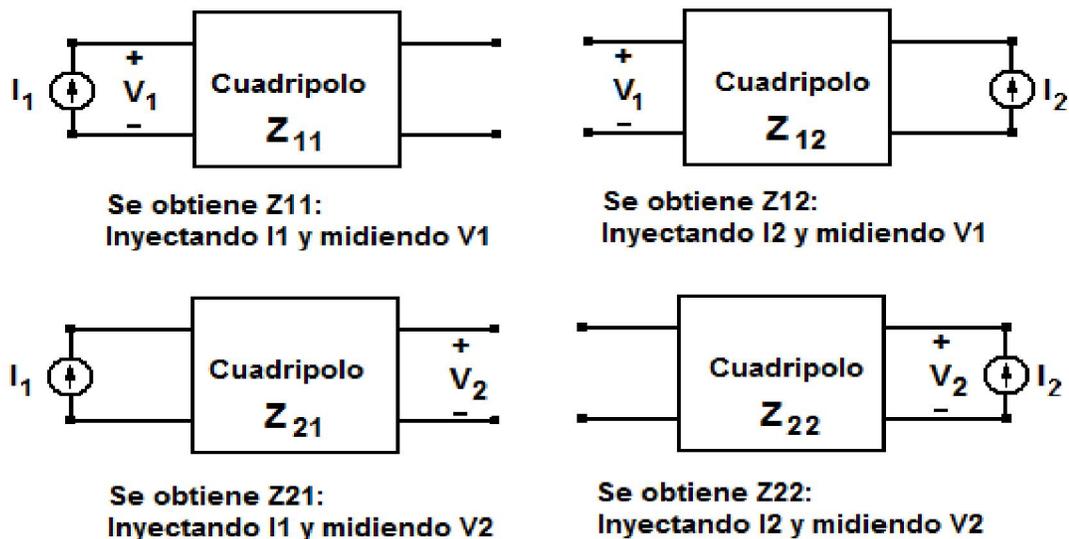


Figura 4

La ecuación matricial característica de este parámetro, Figura 2, puede representarse mediante el teorema de Thevenin, con dos fuentes de tensión, denominado circuito 'V', de la siguiente forma:

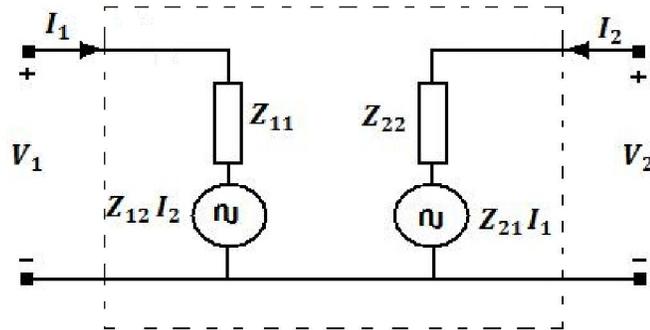


Figura 5

$$V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \dots\dots\dots (1)$$

$$V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \dots\dots\dots (2)$$

En ecuación (2), sumamos y restamos  $Z_{12} I_1$ , vale decir:

$$V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 + (Z_{12} - Z_{12}) I_1$$

$$V_2 = Z_{12} I_1 + Z_{22} I_2 + (Z_{21} - Z_{12}) I_1 \dots\dots\dots (3)$$

La ecuación (3), nos permite representar el circuito de la figura 5, por el siguiente circuito equivalente, denominado equivalente 'T' con una sola fuente tensión dependiente, ver Figura 6:

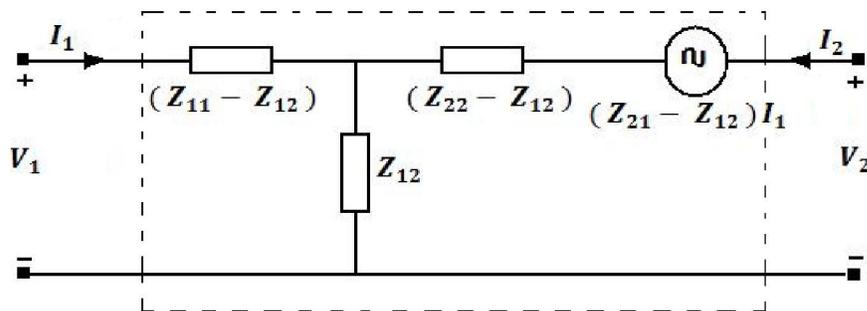


Figura 6

**7.4.2. PARÁMETROS EN CORTO CIRCUITO, 'Y'.**

Eligiendo las diferencias de voltaje  $V_1$  y  $V_2$ , en la entrada de cada puerto, como variables independientes, es decir, el circuito es excitados por fuentes de voltate independientes, los circuitos del cuadripolo para este parámetro, podrían expresarse de la siguiente forma:

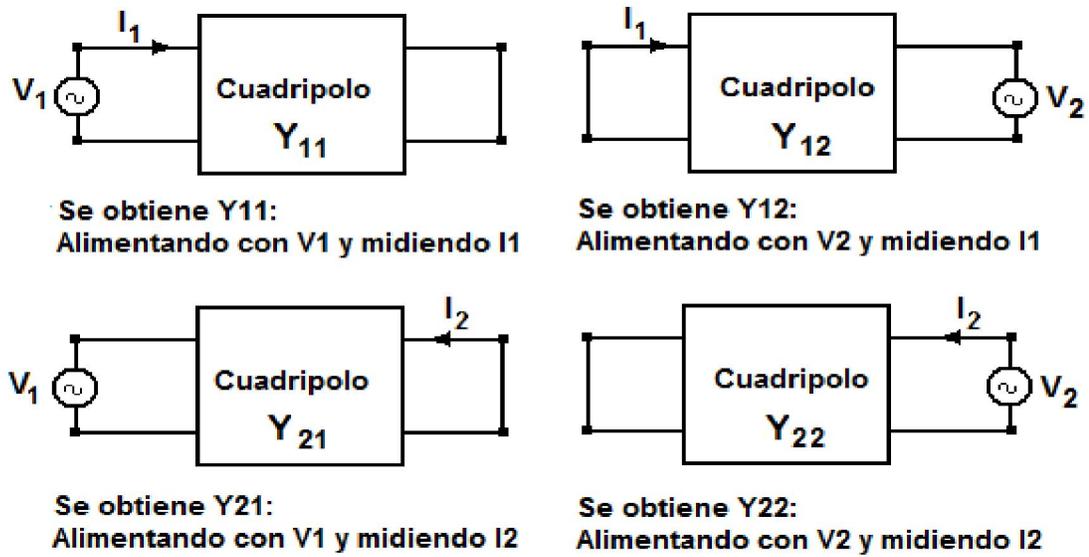


Figura 7

La ecuación matricial característica de este parámetro, Figura 2, puede representarse mediante el teorema de Norton, con dos fuentes de corriente, de la siguiente forma:

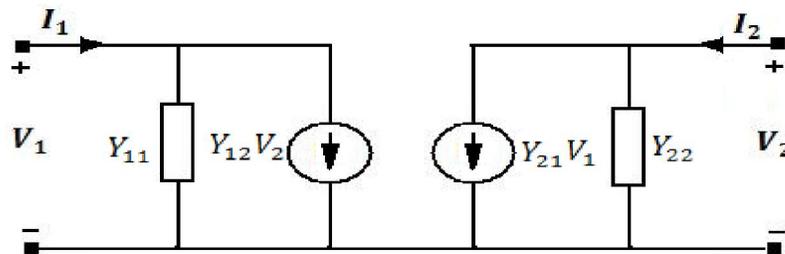


Figura 8

$$I_1 = Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2 \dots\dots\dots (4)$$

$$I_2 = Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2 \dots\dots\dots (5)$$

En ecuación (5), sumamos y restamos  $Y_{12} V_1$ , vale decir:

$$I_2 = Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2 + Y_{12} V_1 - Y_{12} V_1$$

$$I_2 = Y_{12} V_1 + Y_{22} V_2 + (Y_{21} - Y_{12}) V_1 \dots\dots\dots (6)$$

La ecuación (6), nos permite representar el circuito de la figura 8, por el siguiente circuito equivalente, denominado equivalente 'π' con una sola fuente de corriente dependiente, ver Figura 9:

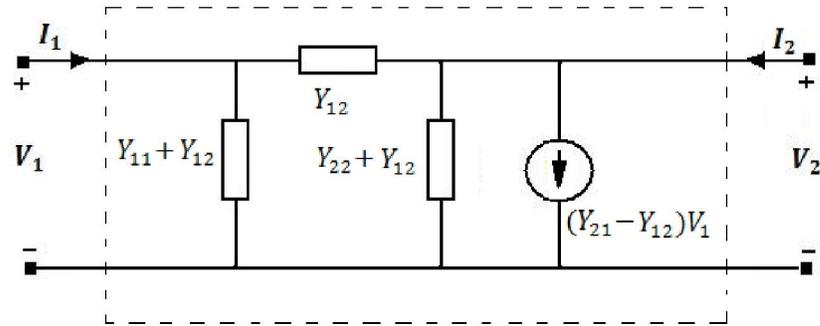


Figura 9

**7.4.3. PARÁMETROS HÍBRIDOS 'h':**

Eligiendo como variables dependientes la tensión de entrada,  $V_1$ , en el puerto de entrada y la corriente,  $I_2$ , en el puerto de salida, es decir, el puerto de entrada es excitado por una fuente de corriente independiente y el puerto de salida es excitado por una fuente de voltaje independiente, los circuitos del cuadripolo para este parámetro, podrían expresarse de la siguiente forma:

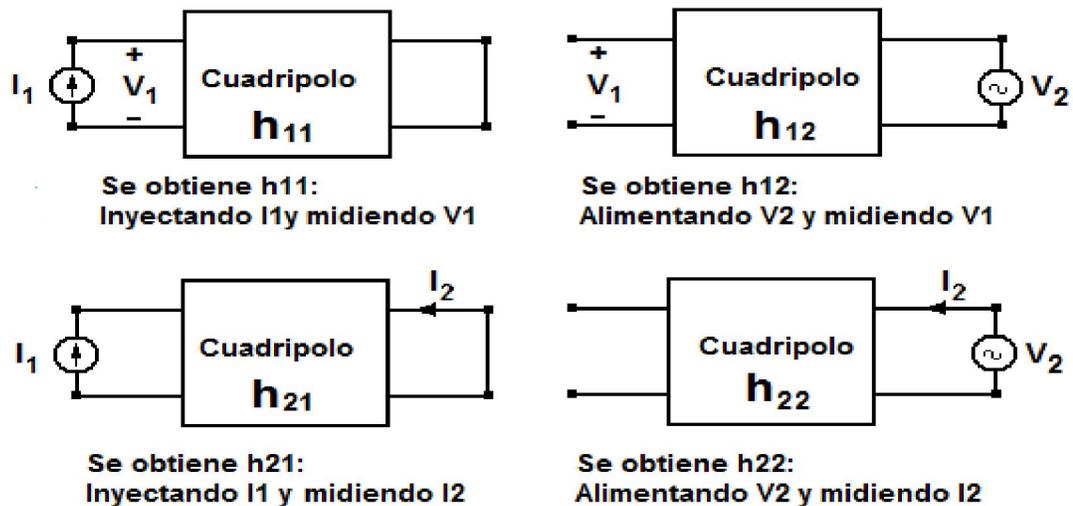


Figura 10

La ecuación matricial característica de este parámetro, Figura 2, puede representarse por la combinación de los teoremas de Thevenin y Norton, es decir, el puerto de entrada, por el teorema de thevenin y el puerto de salida, por el teorema de Norton, con dos fuentes, una de tensión y otra de corriente, se obtiene el modelo híbrido cuyo circuito equivalente es el siguiente, ver Figura:

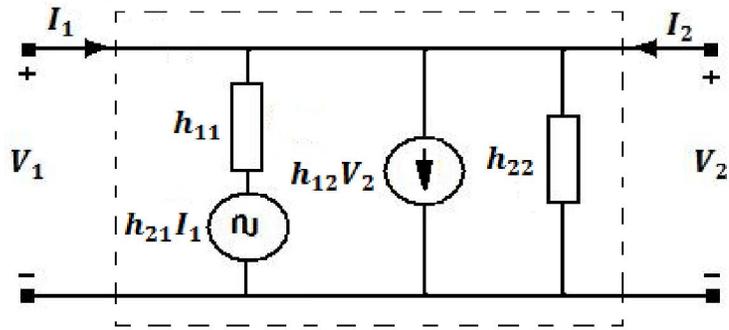


Figura 11

**7.4.4. PARÁMETROS HÍBRIDOS 'g':**

Eligiendo como variables dependientes la corriente de entrada,  $I_1$ , en el puerto de entrada y la tensión,  $V_2$ , en el puerto de salida, es decir, el puerto de entrada es excitado por una fuente de tensión independiente y el puerto de salida es excitado por una fuente de corriente independiente, los circuitos del cuadripolo para este parámetro, podrían expresarse de la siguiente forma, ver Figura 12:

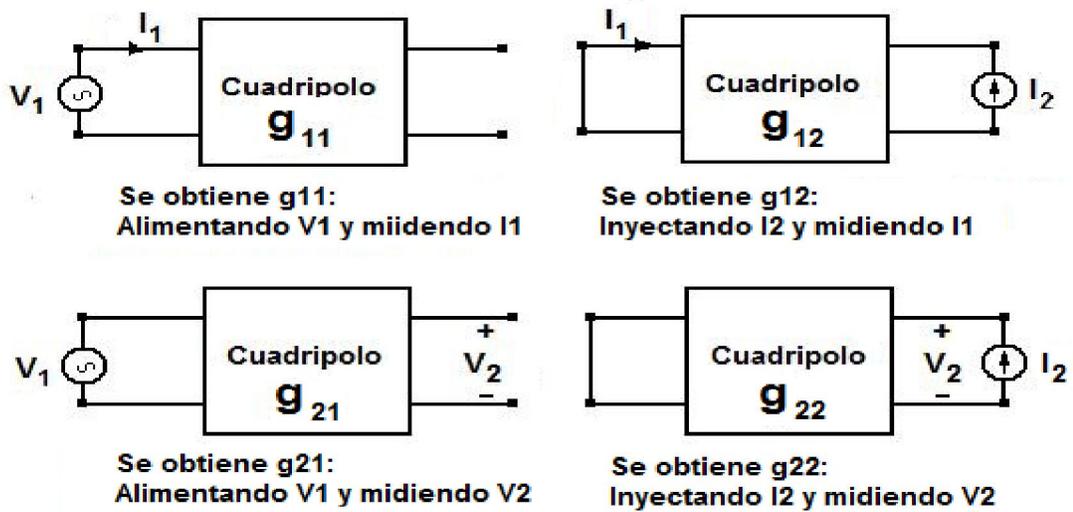


Figura 12

La ecuación matricial característica de este parámetro, Figura 2, puede representarse por la combinación de los teoremas de Norton y Thevenin, es decir, el puerto de entrada, por el teorema de Norton y el puerto de salida, por el teorema de Thevenin, con dos fuentes, una de corriente y otra de tensión, se obtiene el modelo híbrido cuyo circuito equivalente es el siguiente, ver Figura 13:

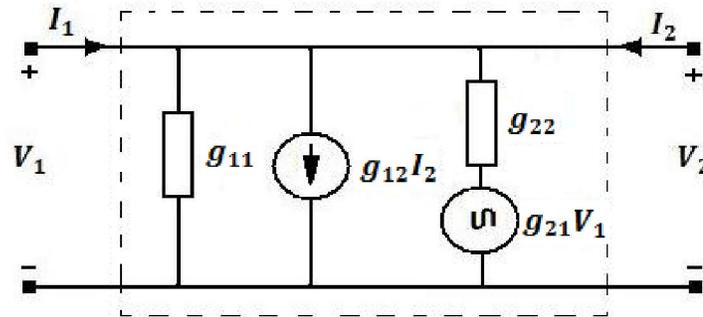


Figura 13

## 7.5. CLASIFICACIÓN DE CUADRIPOLOS.

Los cuadripolos pueden clasificarse en dos grupos:

### 7.5.1. CUADRIPOLOS ACTIVOS:

Son aquellos cuadripolos, que incluyen elementos tales que la potencia entregada a la carga puede ser mayor que la excitación entregada a la entrada, es decir, poseen fuentes dependientes ( las fuentes independientes, supondrían nuevas variables a tener en consideración ).

### 7.5.2. CUADRIPOLOS PASIVOS:

Son aquellos cuadripolos, que incluyen elementos tales que la potencia entregada a la carga puede ser menor o igual que la excitación entregada a la entrada. No incluyen generadores dependientes, sólo parámetros resistivos, capacitivos e inductivos.

## 7.6. RECIPROCIDAD Y SIMETRÍA EN CUADRIPOLOS.

### 7.6.1. CUADRIPOLO RECÍPROCO.

Un cuadripolo es recíproco cuando, conectado a sus puertos un generador de tensión y un amperímetro ideales (con resistencias internas despreciables), el intercambio de las posiciones del generador y del amperímetro, no producen ninguna alteración en el valor de la corriente que marca este último. La condición de reciprocidad puede ser definida también, de forma análoga, haciendo referencia a un generador de corriente y un voltímetro ideales.

En un cuadripolo recíproco, los diferentes parámetros característicos ( Z, Y, h, g y transmisión), verifican o cumplen ciertas relaciones, es decir:

$$Z_{12} = Z_{21}$$

$$Y_{12} = Y_{21}$$

$$h_{12} = -h_{21}$$

$$g_{12} = -g_{21}$$

$$AD - BC = 1$$

..... (7)

En conclusión, suficiente es encontrar tres parámetros en un cuadripolo recíproco.

**7.6.2. CUADRIPOLO SIMÉTRICO.**

En un cuadripolo simétrico, es indiferente conectar el generador y la carga en cualquiera de sus puertos y los diferentes parámetros característicos ( Z, Y, h, g y transmisión), verifican o cumplen ciertas relaciones, es decir:

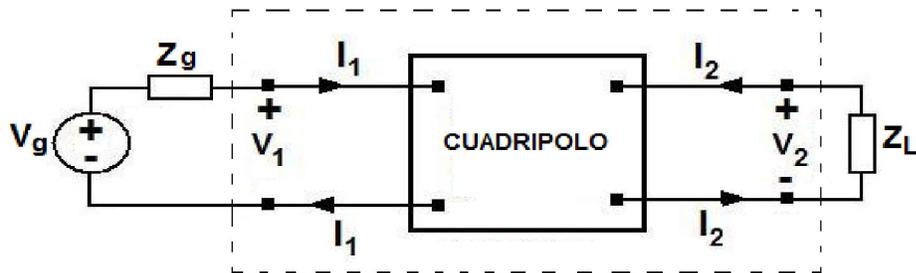
$$\begin{aligned}
 Z_{11} &= Z_{22} \\
 Y_{11} &= Y_{22} \\
 h_{11} h_{22} - h_{12} h_{21} &= 1 \\
 g_{11} g_{22} - g_{12} g_{21} &= 1 \\
 a &= d
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Por consiguiente, en un cuadripolo simétrico, es suficiente determinar dos parámetros.

Se puede concluir, que un cuadripolo recíproco, es simétrico cuando el intercambio de las posiciones de sus puertos, entrada y salida, no producen ninguna alteración en las corrientes y tensiones de las mismas.

**7.7. INSERCIÓN DE UN CUADRIPOLO EN UN CIRCUITO.**

El comportamiento de un cuadripolo en un circuito queda completamente caracterizado por un sistema de cuatro ecuaciones, a partir del cual es posible obtener cualquier función que se desee. Ver circuito Figura 14:



**Figura 14**

Las ecuaciones adicionales a cualquier tipo de parámetros de cuadripolo son las siguientes:

$$V_g = Z_g I_1 + V_1 \tag{9}$$

$$V_1 = V_g - Z_g I_1 \tag{10}$$

$$V_2 = -I_2 Z_L \tag{11}$$

Para referirnos a la figura 14, es habitual utilizar determinadas figuras de mérito del circuito completo, cuadripolo insertado en un circuito. ( Generador, Impedancia de Entrada, Cuadripolo y Carga ). Por ejemplo, si el cuadripolo está definido para los parámetros de Impedancia, Z, (podría estar definido para cualquier otro tipo de parámetro), podemos puntualizar los siguientes parámetros eléctricos involucrados:

Escribiendo las anteriores ecuaciones de parámetro a circuito abierto:

$$V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \tag{1}$$

$$V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \dots\dots\dots (2)$$

Reemplazando ecuación (11) en (2):

$$-I_2 Z_L = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \dots\dots\dots (12)$$

$$I_2 = \left( \frac{-Z_{21}}{Z_{22} + Z_L} \right) I_1 \dots\dots\dots (13)$$

Ecuación (12) en (1):

$$V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 = Z_{11} I_1 + Z_{12} \left( \frac{-Z_{21}}{Z_{22} + Z_L} \right) I_1$$

**La Impedancia de Entrada:**

$$Z_i = \frac{V_1}{I_1} = Z_{11} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z_{22} + Z_L} \dots\dots\dots (14)$$

Ecuación (10) en (1):

$$V_g - Z_g I_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2$$

$$I_1 = \frac{V_g - I_2 Z_{12}}{Z_{11} + Z_g} \dots\dots\dots (15)$$

Reemplazando ecuación (15) en (12):

$$-I_2 Z_L = Z_{21} \frac{V_g - I_2 Z_{12}}{Z_{11} + Z_g} + Z_{22} I_2$$

$$\frac{V_g Z_{21}}{Z_{11} + Z_g} - \frac{I_2 Z_{21} Z_{12}}{Z_{11} + Z_g} + Z_{22} I_2 + I_2 Z_L = 0$$

$$\frac{V_g Z_{21}}{Z_{11} + Z_g} = \left( \frac{Z_{21} Z_{12}}{Z_{11} + Z_g} + Z_{22} + Z_L \right) I_2$$

**La Corriente de Salida:**

$$I_2 = \frac{V_g Z_{21}}{Z_{12} Z_{21} - (Z_{22} + Z_L)(Z_{11} + Z_g)} \dots\dots\dots (16)$$

De ecuación (12):

$$-I_2 Z_L = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2$$

$$0 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 + I_2 Z_L = Z_{21} I_1 + (Z_{22} + Z_L) I_2$$

**La Ganancia de Corriente:**

$$\frac{I_2}{I_1} = - \frac{Z_{21}}{(Z_{22} + Z_L)} \dots\dots\dots (17)$$

De ecuación (12):

$$\begin{aligned}
 -I_2 Z_L &= Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \\
 0 &= Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 + I_2 Z_L = Z_{21} I_1 + (Z_{22} + Z_L) I_2 \\
 I_2 &= - \frac{Z_{21}}{Z_{22} + Z_L} I_1 \dots\dots\dots (18)
 \end{aligned}$$

Reemplazando ecuación (18) en ecuación (1):

$$\begin{aligned}
 V_1 &= Z_{11} I_1 + Z_{12} \left( - \frac{Z_{21}}{Z_{22} + Z_L} I_1 \right) \\
 V_1 &= Z_{11} I_1 - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z_{22} + Z_L} I_1 \rightarrow \{ (Z_{22} + Z_L) Z_{11} - Z_{12} Z_{21} \} I_1 = (Z_{22} + Z_L) V_1 \\
 I_1 &= \frac{(Z_{22} + Z_L) V_1}{(Z_{22} + Z_L) Z_{11} - Z_{12} Z_{21}} \dots\dots\dots (19)
 \end{aligned}$$

Ecuación (19) en (18):

$$\begin{aligned}
 I_2 &= - \frac{Z_{21}}{Z_{22} + Z_L} \frac{(Z_{22} + Z_L) V_1}{(Z_{22} + Z_L) Z_{11} - Z_{12} Z_{21}} \\
 I_2 &= - \frac{Z_{21} V_1}{(Z_{22} + Z_L) Z_{11} - Z_{12} Z_{21}} \dots\dots\dots (20)
 \end{aligned}$$

Reemplazando ecuaciones (19) y (20), en ecuación (2):

$$\begin{aligned}
 V_2 &= \frac{(Z_{22} + Z_L) Z_{21} V_1}{(Z_{22} + Z_L) Z_{11} - Z_{12} Z_{21}} - \frac{Z_{22} Z_{21} V_1}{(Z_{22} + Z_L) Z_{11} - Z_{12} Z_{21}} \\
 V_2 &= \frac{(Z_{22} Z_{21} V_1 + Z_{21} V_1 Z_L) - Z_{22} Z_{21} V_1}{(Z_{22} + Z_L) Z_{11} - Z_{12} Z_{21}} \\
 V_2 &= \frac{Z_{21} V_1 Z_L}{(Z_{22} + Z_L) Z_{11} - Z_{12} Z_{21}}
 \end{aligned}$$

**La Ganancia de Tensión:**

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_{21} Z_L}{(Z_{22} + Z_L) Z_{11} - Z_{12} Z_{21}} \dots\dots\dots (21)$$

Para la tensión de Thévenin en el puerto de salida, analizamos ecuaciones (12) y (2), haciendo  $I_2 = 0$ :

$$\begin{aligned}
 V_1 &= Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \dots\dots\dots (1) \\
 V_2 &= Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \dots\dots\dots (2)
 \end{aligned}$$

Reemplazando ecuación (10) en ecuación (1):

$$V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} * 0 = V_g - Z_g I_1 \rightarrow Z_{11} I_1 - V_g + Z_g I_1 = 0$$

$$I_1 = \frac{V_g}{Z_{11} + Z_g} \dots\dots\dots (22)$$

Reemplazando ecuación (22) en ecuación (2), previamente haciendo  $I_2 = 0$ :

$$V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} * 0 = Z_{21} I_1 = Z_{21} \frac{V_g}{Z_{11} + Z_g}$$

La Tensión de Thevenin:

$$V_2 = V_{th} = \frac{Z_{21} V_g}{Z_{11} + Z_g} \quad (\text{V}) \dots\dots\dots (23)$$

La Corriente de Norton, para  $V_2 = 0$ , según ecuación (2) y (1) :

$$V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 = 0$$

$$I_1 = - \frac{Z_{22}}{Z_{21}} I_2$$

$$V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 = - \frac{Z_{11} Z_{22}}{Z_{21}} I_2 + Z_{12} I_2 = V_g + Z_g \frac{Z_{22}}{Z_{21}} I_2$$

$$- Z_{11} Z_{22} I_2 + Z_{12} Z_{21} I_2 = Z_{21} V_g + Z_g Z_{22} I_2$$

$$(Z_{12} Z_{21} - Z_{11} Z_{22}) I_2 + I_2 = Z_{21} V_g + Z_g Z_{22} I_2$$

$$(Z_{12} Z_{21} - Z_{11} Z_{22} - Z_g Z_{22}) I_2 = Z_{21} V_g$$

$$I_2 = - \frac{Z_{21} V_g}{Z_{12} Z_{21} - Z_{11} Z_{22} - Z_g Z_{22}}$$

La corriente en el puerto de salida, tomando en cuenta que  $I_N = -I_2$

$$I_N = \frac{Z_{21} V_g}{Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21} + Z_g Z_{22}} \dots\dots\dots (24)$$

La impedancia de Thévenin:

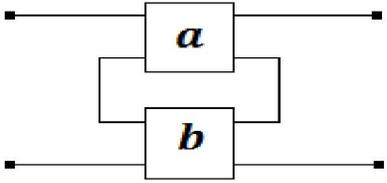
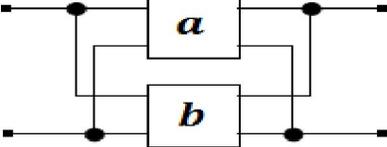
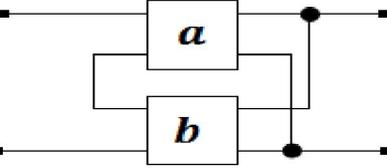
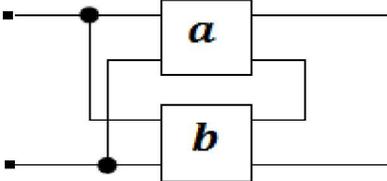
$$Z_{th} = \frac{V_{th}}{I_N} = \frac{\frac{Z_{21} V_g}{Z_{11} + Z_g}}{\frac{Z_{21} V_g}{Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21} + Z_g Z_{22}}}$$

$$Z_{th} = \frac{V_{th}}{I_N} = \frac{Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21} + Z_g Z_{22}}{Z_{11} + Z_g} \dots\dots\dots (25)$$

**7.8. CONEXIÓN DE CUADRIPOLOS.**

Cuando dos cuadripolos se conectan entre sí, los parámetros del circuito combinado se obtienen al sumar directamente los parámetros de dos puertos de los circuitos originales ( $Z_{ij}$ ,  $Y_{ij}$ ,  $h_{ij}$ ,  $g_{ij}$  y Transmisión), siempre que la variable independiente sea común a los dos puertos y que la interconexión no cambie los conjuntos de parámetros. En otras palabras, la adición directa de los parámetros correspondientes se permite, si la corriente que entra a un terminal por un puerto tiene el mismo valor que la corriente que sale del terminal del mismo puerto.

Vamos a realizar este proceso, en las cinco posibilidades que tenemos, es decir, parámetros  $Z_{ij}$ ,  $Y_{ij}$ ,  $h_{ij}$ ,  $g_{ij}$  y Transmisión, ver tabla figura 15:

TIPO DE CONEXIÓN	REPRESENTACIÓN CIRCUITAL	CÁLCULO DE PARÁMETROS
SERIE		$[Z_e] = [Z_a] + [Z_b]$ Condición Brune satisfecho
PARALELO		$[Y_e] = [Y_a] + [Y_b]$ Condición Brune satisfecho
SERIE - PARALELO		$[h_e] = [h_a] + [h_b]$ Condición Brune satisfecho
PARALELO - SERIE		$[g_e] = [g_a] + [g_b]$ Condición Brune satisfecho

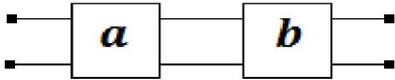
<b>CASCADA</b>		$[ABCD]_e = [ABCD]_a \times [ABCD]_b$ Condición Brune satisfecho
----------------	---	---

Figura 15

El Cálculo de Parámetros, de la tabla, Figura 15, se justificará a continuación:

7.8.1. CONEXIÓN SERIE.

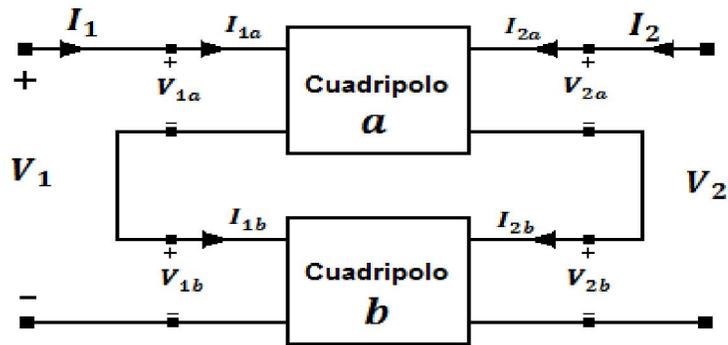


Figura 16

Del circuito serie de la Figura 16, para la tensión, podemos escribir:

$$V_1 = V_{1a} + V_{1b} \dots\dots\dots (12)$$

$$V_2 = V_{2a} + V_{2b} \dots\dots\dots (13)$$

Las ecuaciones de cada quadripolo:

$$V_{1a} = Z_{11a} I_{1a} + Z_{12a} I_{2a} \dots\dots\dots (14)$$

$$V_{2a} = Z_{21a} I_{1a} + Z_{22a} I_{2a} \dots\dots\dots (15)$$

$$V_{1b} = Z_{11b} I_{1b} + Z_{12b} I_{2b} \dots\dots\dots (16)$$

$$V_{2b} = Z_{21b} I_{1b} + Z_{22b} I_{2b} \dots\dots\dots (17)$$

Reemplazando ecuaciones (14) y (16) en ecuación (12):

$$V_1 = V_{1a} + V_{1b}$$

$$V_1 = Z_{11a} I_{1a} + Z_{12a} I_{2a} + Z_{11b} I_{1b} + Z_{12b} I_{2b} \dots\dots\dots (18)$$

Del circuito serie de la Figura 16, para la corriente, podemos escribir:

$$I_{1a} = I_{1b} = I_1 \dots\dots\dots (19)$$

$$I_{2a} = I_{2b} = I_2 \dots\dots\dots (20)$$

Reemplazando ecuaciones (19) y (20) en ecuación (18):

$$V_1 = Z_{11a} I_{1a} + Z_{12a} I_{2a} + Z_{11b} I_{1b} + Z_{12b} I_{2b}$$

$$V_1 = (Z_{11a} + Z_{11b}) I_1 + (Z_{12a} + Z_{12b}) I_2 \dots\dots\dots (21)$$

Reemplazando ecuaciones (15) y (17) en ecuación (13):

$$V_2 = V_{2a} + V_{2b}$$

$$V_2 = Z_{21a} I_{1a} + Z_{22a} I_{2a} + Z_{21b} I_{1b} + Z_{22b} I_{2b} \dots\dots\dots (22)$$

Reemplazando ecuaciones (19) y (20) en ecuación (22):

$$V_2 = Z_{21a} I_{1a} + Z_{22a} I_{2a} + Z_{21b} I_{1b} + Z_{22b} I_{2b}$$

$$V_2 = (Z_{21a} + Z_{21b}) I_1 + (Z_{22a} + Z_{22b}) I_2 \dots\dots\dots (23)$$

Comparando ecuación (21) con ecuación generalizada (1) y ecuación (23) con ecuación generalizada (2), podemos concluir la equivalencia de parámetros:

$$Z_{11} = Z_{11a} + Z_{11b}$$

$$Z_{12} = Z_{12a} + Z_{12b}$$

$$Z_{21} = Z_{21a} + Z_{21b}$$

$$Z_{22} = Z_{22a} + Z_{22b}$$

La impedancia generalizada, la podemos escribir del siguiente modo:

$$[Z_e] = [Z_a] + [Z_b] \quad (A)$$

7.8.2. CONEXIÓN PARALELO.

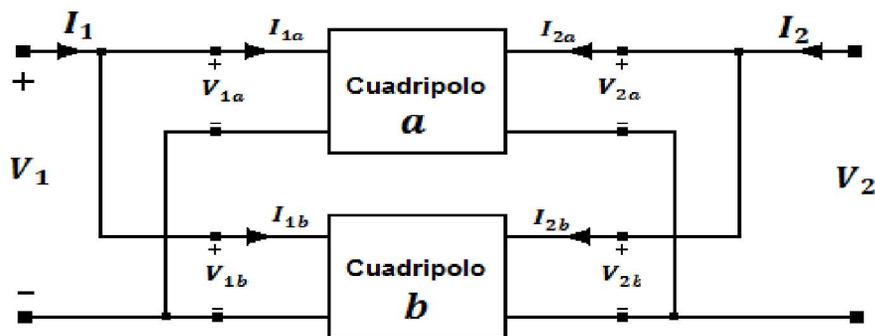


Figura 17

Del circuito paralelo de la Figura 17, podemos escribir:

$$I_1 = I_{1a} + I_{1b} \dots\dots\dots (24)$$

$$I_2 = I_{2a} + I_{2b} \dots\dots\dots (25)$$

$$V_{1a} = V_{1b} = V_1 \dots\dots\dots (26)$$

$$V_{2a} = V_{2b} = V_2 \dots\dots\dots (27)$$

La ecuación matricial de cada cuadripolo de la Figura 17:

$$\begin{bmatrix} I_{1a} \\ I_{2a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11a} & Y_{12a} \\ Y_{21a} & Y_{22a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1a} \\ V_{2a} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (28)$$

$$\begin{bmatrix} I_{1b} \\ I_{2b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11b} & Y_{12b} \\ Y_{21b} & Y_{22b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1b} \\ V_{2b} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (29)$$

La ecuación matricial generalizada de los Parámetros a cortocircuito ‘Y’:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (30)$$

Reemplazando ecuaciones (24), (25) y ecuaciones (28) y (29) en ecuación generalizada (30):

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{1a} \\ I_{2a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{1b} \\ I_{2b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11a} & Y_{12a} \\ Y_{21a} & Y_{22a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1a} \\ V_{2a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{11b} & Y_{12b} \\ Y_{21b} & Y_{22b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1b} \\ V_{2b} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (31)$$

Reemplazando ecuaciones (26) y (27) en ecuación (31):

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{1a} \\ I_{2a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{1b} \\ I_{2b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11a} & Y_{12a} \\ Y_{21a} & Y_{22a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{11b} & Y_{12b} \\ Y_{21b} & Y_{22b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \left[ \begin{bmatrix} Y_{11a} & Y_{12a} \\ Y_{21a} & Y_{22a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{11b} & Y_{12b} \\ Y_{21b} & Y_{22b} \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (Y_{11a} + Y_{11b}) & (Y_{12a} + Y_{12b}) \\ (Y_{21a} + Y_{21b}) & (Y_{22a} + Y_{22b}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (32)$$

Igualando ecuación (32) con la ecuación generalizada de parámetros ‘Y’, ecuación (30):

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (Y_{11a} + Y_{11b}) & (Y_{12a} + Y_{12b}) \\ (Y_{21a} + Y_{21b}) & (Y_{22a} + Y_{22b}) \end{bmatrix}$$

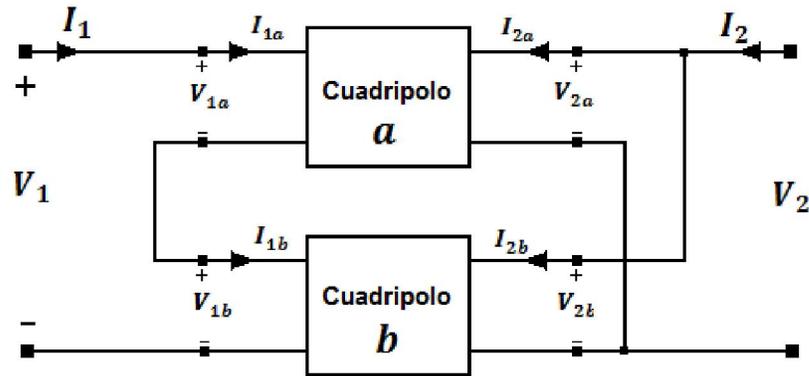
Por lo que podemos escribir:

$$\begin{aligned} Y_{11} &= Y_{11a} + Y_{11b} \\ Y_{12} &= Y_{12a} + Y_{12b} \\ Y_{21} &= Y_{21a} + Y_{21b} \\ Y_{22} &= Y_{22a} + Y_{22b} \end{aligned}$$

La admitancia generalizada, la podemos escribir del siguiente modo:

$$[Y_e] = [Y_a] + [Y_b] \quad (B)$$

**7.8.3. CONEXIÓN SERIE - PARALELO.**



**Figura 18**

Del circuito serie - paralelo de la Figura 18, podemos escribir:

$$V_1 = V_{1a} + V_{1b} \dots\dots\dots (33)$$

$$I_{1a} = I_{1b} = I_1 \dots\dots\dots (34)$$

$$I_2 = I_{2a} + I_{2b} \dots\dots\dots (35)$$

$$V_{2a} = V_{2b} = V_2 \dots\dots\dots (36)$$

$$V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2 \quad \dots\dots\dots(37)$$

$$I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2 \quad \dots\dots\dots (38)$$

Las ecuaciones de cada cuadripolo en el circuito serie – paralelo, de la Figura 18:

$$V_{1a} = h_{11a} I_{1a} + h_{12a} V_{2a} \quad \dots\dots\dots(39)$$

$$I_{2a} = h_{21a} I_{1a} + h_{22a} V_{2a} \quad \dots\dots\dots (40)$$

$$V_{1b} = h_{11b} I_{1b} + h_{12b} V_{2b} \quad \dots\dots\dots(41)$$

$$I_{2b} = h_{21b} I_{1b} + h_{22b} V_{2b} \quad \dots\dots\dots (42)$$

Reemplazando ecuaciones (39) y (41), en ecuación (33):

$$V_1 = V_{1a} + V_{1b} = h_{11a} I_{1a} + h_{12a} V_{2a} + h_{11b} I_{1b} + h_{12b} V_{2b} \quad \dots\dots\dots (43)$$

Reemplazando ecuaciones (34) y (36), en ecuación (43), luego:

$$V_1 = V_{1a} + V_{1b} = (h_{11a} + h_{11b}) I_1 + (h_{12a} + h_{12b}) V_2$$

$$V_1 = (h_{11a} + h_{11b}) I_1 + (h_{12a} + h_{12b}) V_2 \quad \dots\dots\dots (44)$$

Reemplazando ecuaciones (40) y (42), en ecuación (35):

$$I_2 = I_{2a} + I_{2b} = h_{21a} I_{1a} + h_{22a} V_{2a} + h_{21b} I_{1b} + h_{22b} V_{2b} \quad \dots\dots\dots (45)$$

Reemplazando ecuaciones (34) y (36), en ecuación (45), luego:

$$I_2 = I_{2a} + I_{2b} = (h_{21a} + h_{21b}) I_1 + (h_{22a} + h_{22b}) V_2$$

$$I_2 = (h_{21a} + h_{21b}) I_1 + (h_{22a} + h_{22b}) V_2 \quad \dots\dots\dots (46)$$

Comparando ecuaciones (44) con (37) y (46) con (38), podemos concluir:

$$h_{11} = h_{11a} + h_{11b}$$

$$h_{12} = h_{12a} + h_{12b}$$

$$h_{21} = h_{21a} + h_{21b}$$

$$h_{22} = h_{22a} + h_{22b}$$

La ecuación matricial generalizada de parámetros híbridos ‘h’, la podemos escribir del siguiente modo:

$$[h_e] = [h_a] + [h_b] \quad (C)$$

7.8.4. CONEXIÓN PARALELO - SERIE.

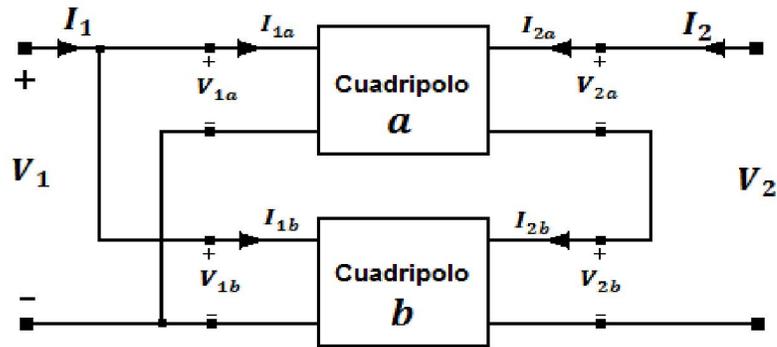


Figura 19

Del circuito paralelo - serie de la Figura 19, podemos escribir:

$$V_{1a} = V_{1b} = V_1 \dots\dots\dots (47)$$

$$I_1 = I_{1a} + I_{1b} \dots\dots\dots (48)$$

$$I_{2a} = I_{2b} = I_2 \dots\dots\dots (49)$$

$$V_2 = V_{2a} + V_{2b} \dots\dots\dots (50)$$

$$I_1 = g_{11} V_1 + g_{12} I_2 \dots\dots\dots (51)$$

$$V_2 = g_{21} V_1 + g_{22} I_2 \dots\dots\dots (52)$$

La ecuación matricial generalizada de los Parámetros Híbridos ‘g’:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (53)$$

La ecuación matricial de cada cuadripolo de la Figura 19:

$$\begin{bmatrix} I_{1a} \\ V_{2a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11a} & g_{12a} \\ g_{21a} & g_{22a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1a} \\ I_{2a} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (54)$$

$$\begin{bmatrix} I_{1b} \\ V_{2b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11b} & g_{12b} \\ g_{21b} & g_{22b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1b} \\ I_{2b} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (55)$$

Ecuación matricial (48), (50), (54) y (55) en ecuación matricial (53):

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{1a} \\ V_{2a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{1b} \\ V_{2b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11a} & g_{12a} \\ g_{21a} & g_{22a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1a} \\ I_{2a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{11b} & g_{12b} \\ g_{21b} & g_{22b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1b} \\ I_{2b} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (56)$$

Ecuación matricial (47) y (49), en ecuación matricial (56):

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11a} & g_{12a} \\ g_{21a} & g_{22a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{11b} & g_{12b} \\ g_{21b} & g_{22b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} g_{11a} & g_{12a} \\ g_{21a} & g_{22a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{11b} & g_{12b} \\ g_{21b} & g_{22b} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11a} + g_{11b} & g_{12a} + g_{12b} \\ g_{21a} + g_{21b} & g_{22a} + g_{22b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (57)$$

Igualando ecuaciones matriciales (53) y (57), podemos concluir, que los parámetros equivalentes son:

$$\begin{aligned} g_{11} &= g_{11a} + g_{11b} \\ g_{12} &= g_{12a} + g_{12b} \\ g_{21} &= g_{21a} + g_{21b} \\ g_{22} &= g_{22a} + g_{22b} \end{aligned}$$

La ecuación matricial generalizada de parámetros híbridos ‘g’, la podemos escribir del siguiente modo:

$$[g_e] = [g_a] + [g_b] \quad (D)$$

**7.8.5. CONEXIÓN CASCADA.**

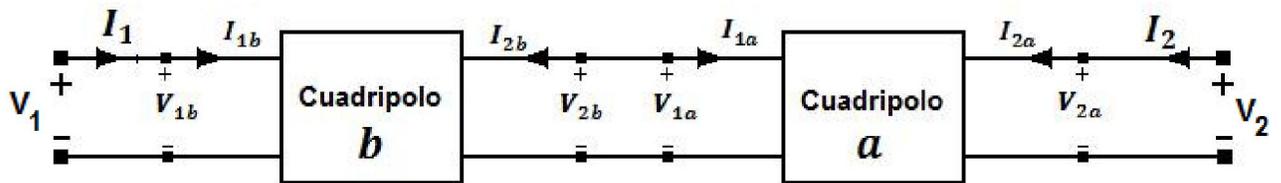


Figura 20

Del circuito en cascada de la Figura 20, podemos escribir:

$$V_{1b} = V_1 \dots\dots\dots (58)$$

$$I_1 = I_{1b} \dots\dots\dots (59)$$

$$I_{1a} = -I_{2b} \dots\dots\dots (60)$$

$$V_{1a} = V_{2b} \dots\dots\dots (61)$$

$$I_2 = I_{2a} \dots\dots\dots (62)$$

$$V_{2a} = V_2 \dots\dots\dots (63)$$

La ecuación generalizada de parámetros de transmisión directos:

$$V_1 = A V_2 - B I_2 \dots\dots\dots(64)$$

$$I_1 = C V_2 - D I_2 \dots\dots\dots(65)$$

La ecuación generalizada de parámetros de transmisión directos de cada cuadripolo de la figura 20 es la siguiente:

$$V_{1a} = A_a V_{2a} - B_a I_{2a} \dots\dots\dots(66)$$

$$I_{1a} = C_a V_{2a} - D_a I_{2a} \dots\dots\dots(67)$$

$$V_{1b} = A_b V_{2b} - B_b I_{2b} \dots\dots\dots(68)$$

$$I_{1b} = C_b V_{2b} - D_b I_{2b} \dots\dots\dots(69)$$

De ecuaciones (58) y (68), (59) y (69):

$$V_1 = A_b V_{2b} - B_b I_{2b} \dots\dots\dots (70)$$

$$I_1 = C_b V_{2b} - D_b I_{2b} \dots\dots\dots (71)$$

Ecuación (60) y (61), en ecuaciones (70) y (71):

$$V_1 = A_b V_{1a} + B_b I_{1a} \dots\dots\dots (72)$$

$$I_1 = C_b V_{1a} + D_b I_{1a} \dots\dots\dots(73)$$

Ecuaciones (66) y (67) en ecuaciones (72) y (73):

$$V_1 = A_b (A_a V_{2a} - B_a I_{2a}) + B_b (C_a V_{2a} - D_a I_{2a})$$

$$I_1 = C_b (A_a V_{2a} - B_a I_{2a}) + D_b (C_a V_{2a} - D_a I_{2a})$$

$$V_1 = (A_b A_a V_{2a} - A_b B_a I_{2a}) + (B_b C_a V_{2a} - B_b D_a I_{2a})$$

$$I_1 = (C_b A_a V_{2a} - C_b B_a I_{2a}) + (D_b C_a V_{2a} - D_b D_a I_{2a})$$

$$V_1 = (A_b A_a + B_b C_a) V_{2a} - (A_b B_a + B_b D_a) I_{2a} \dots\dots\dots (74)$$

$$I_1 = (C_b A_a + D_b C_a) V_{2a} - (C_b B_a + D_b D_a) I_{2a} \dots\dots\dots (75)$$

Ecuaciones (62) y (63) en ecuaciones (74) y (75):

$$V_1 = (A_b A_a + B_b C_a) V_2 - (A_b B_a + B_b D_a) I_2 \dots\dots\dots (76)$$

$$I_1 = (C_b A_a + D_b C_a) V_2 - (C_b B_a + D_b D_a) I_2 \dots\dots\dots (77)$$

Igualando ecuaciones (76) con (64) y (77) con (65):

$$A = A_b A_a + B_b C_a$$

$$B = -(A_b B_a + B_b D_a)$$

$$C = C_b A_a + D_b C_a$$

$$D = -(C_b B_a + D_b D_a)$$

En forma general la equivalencia de parámetros de transmisión directos será:

$$[ABCD]_e = [ABCD]_a \times [ABCD]_b \quad (E)$$

### 7.8.6. TEST DE 'BRUNE '.

La prueba ' Brune 'se realizará para cada conexión con criterios característicos a la conexión de cuadripolos, a saber:

#### 7.8.6.1. CONEXIÓN SERIE.

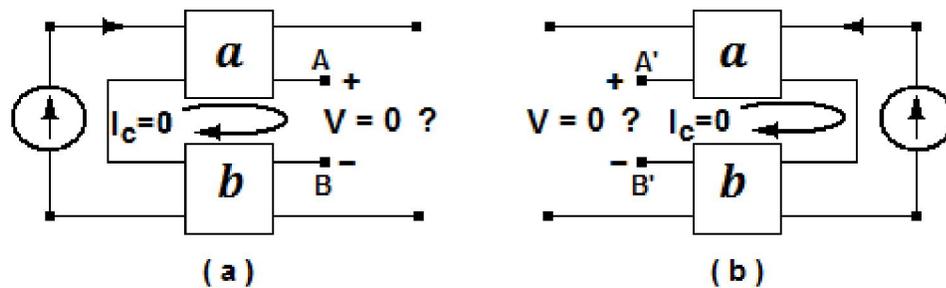


Figura 21

El Test de Brune, consiste en superar dos pruebas:

#### 1<sup>ra</sup>. PRUEBA.

Dejar abierto el puerto 2 y al puerto 1 interconectar en serie una fuente de corriente, tal cual se indica en la Figura 21 (a), ahora, si la tensión entre A y B es cero ( $V=0$ ), entonces ha superado la primera prueba.

#### 2<sup>ra</sup>. PRUEBA.

Dejar abierto el puerto 1 y al puerto 2 interconectar en serie una fuente de corriente, tal cual se indica en la Figura 21 (b), ahora, si la tensión entre A' y B' es cero ( $V=0$ ), entonces se ha superado la segunda prueba.

Si superan ambas pruebas, entonces se puede asegurar que  $I_c$  es cero.

**7.8.6.2. CONEXIÓN PARALELO.**

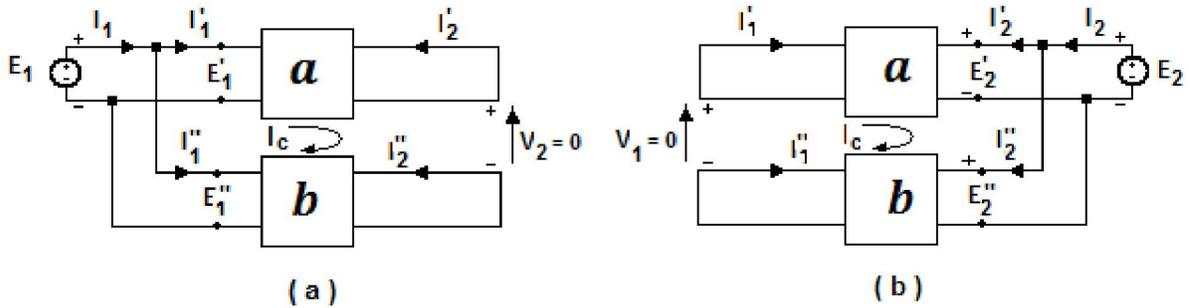


Figura 22

El Test de Brune, consiste en superar dos pruebas:

**1<sup>ra</sup>. PRUEBA.**

Cortocircuitar el puerto 2, en forma independiente, ver Figura 22 (a), y al puerto 1 interconectar en paralelo una fuente de tensión, tal cual se indica en la Figura 22 (a), ahora, si la tensión  $V_2 = 0$ , entonces se ha superado la primera prueba.

**2<sup>ra</sup>. PRUEBA.**

Cortocircuitar el puerto 1, en forma independiente, ver Figura 22 (b), y al puerto 2 interconectar en paralelo una fuente de tensión, tal cual se indica en la Figura 22 (b), ahora, si la tensión  $V_1 = 0$ , entonces se ha superado la segunda prueba.

Si superan ambas pruebas, entonces se puede asegurar que  $I_c$  es cero.

**7.8.6.3. CONEXIÓN SERIE - PARALELO.**

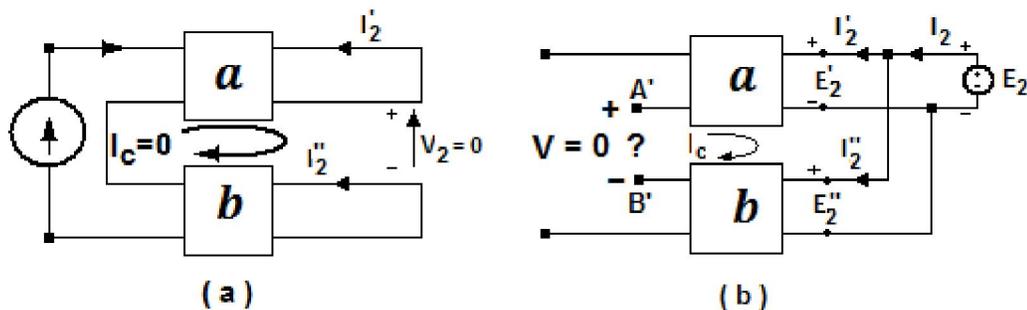


Figura 23

El Test de Brune, consiste en superar dos pruebas:

**1<sup>ra</sup>. PRUEBA.**

Excitar el puerto 1 con una fuente de corriente y Cortocircuitar el puerto 2, en forma independiente, ver Figura 23 (a), ahora, si la tensión  $V_2 = 0$ , entonces se ha superado la primera prueba.

**2<sup>ra</sup>. PRUEBA.**

Excitar el puerto 2 con una fuente de tensión y mantener el puerto 2 en circuito abierto, ver Figura 23 (b), ahora, si la tensión  $V_2 = 0$ , entonces se ha superado la segunda prueba.

Si superan ambas pruebas, entonces se puede asegurar que  $I_c$  es cero.

**7.8.6.4. CONEXIÓN PARALELO - SERIE.**

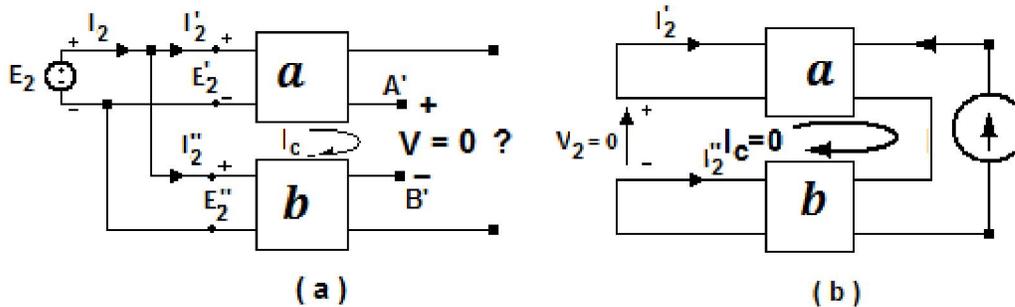


Figura 24

El Test de Brune, consiste en superar dos pruebas:

**1<sup>ra</sup>. PRUEBA.**

Excitar el puerto 1 con una fuente de tensión y mantener en Circuito Abierto el puerto 2, ver Figura 24 (a), ahora, si la tensión  $V_2 = 0$ , entonces se ha superado la primera prueba.

**2<sup>ra</sup>. PRUEBA.**

Excitar el puerto 2 con una fuente de corriente y cortocircuitar el puerto 2, en forma independiente, ver Figura 24 (b), ahora, si la tensión  $V_2 = 0$ , entonces se ha superado la segunda prueba.

Si superan ambas pruebas, entonces se puede asegurar que  $I_c$  es cero.

**7.9. RELACIÓN ENTRE PARÁMETROS.**

Los seis tipos de parámetros (Impedancia, Admitancia, Híbridos directos, Híbridos inversos, Transmisión directos y Transmisión inversos), se relacionan entre sí, mediante una fórmula de transformación mostrada en la Tabla de la Figura 25; sin embargo realizaremos a continuación algunas equivalencias de algunos de los parámetros:

**7.9.1. RELACIÓN ENTRE PARÁMETROS 'Z' EN FUNCIÓN DE 'h'.**

La ecuación característica de parámetros 'h':

$$V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2 \dots\dots\dots(37)$$

$$I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2 \quad \dots\dots\dots (38)$$

De ecuaciones (37) y (38), despejamos  $I_1$ :

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_1 & h_{12} \\ I_2 & h_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix}} = \frac{h_{22}V_1 - h_{12} I_2}{\Delta_h} = \frac{h_{22}V_1}{\Delta_h} - \frac{h_{12} I_2}{\Delta_h}$$

$$I_1 = \frac{h_{22}V_1}{\Delta_h} - \frac{h_{12} I_2}{\Delta_h}$$

$$\frac{h_{22}V_1}{\Delta_h} = I_1 + \frac{h_{12} I_2}{\Delta_h}$$

$$V_1 = \frac{\Delta_h}{h_{22}} I_1 + \frac{h_{12}}{h_{22}} I_2 \quad \dots\dots\dots (78)$$

De ecuaciones (37) y (38), despejamos  $V_2$ :

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} h_{11} & V_1 \\ h_{21} & I_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix}} = \frac{h_{11}I_2 - h_{21} V_1}{\Delta_h} = \frac{h_{11}I_2}{\Delta_h} - \frac{h_{21} V_1}{\Delta_h}$$

$$V_2 = \frac{h_{11}I_2}{\Delta_h} - \frac{h_{21} V_1}{\Delta_h}$$

$$\frac{h_{11}I_2}{\Delta_h} = V_2 + \frac{h_{21}}{\Delta_h} V_1 = V_2 + \frac{h_{21}}{\Delta_h} \left( \frac{\Delta_h}{h_{22}} I_1 + \frac{h_{12}}{h_{22}} I_2 \right)$$

$$0 = V_2 + \frac{h_{21}}{\Delta_h} \left( \frac{\Delta_h}{h_{22}} I_1 + \frac{h_{12}}{h_{22}} I_2 \right) - \frac{h_{11}}{\Delta_h} I_2$$

$$-V_2 = \left( \frac{h_{21}}{h_{22}} I_1 + \frac{h_{12} h_{21}}{\Delta_h h_{22}} I_2 \right) - \frac{h_{11}}{\Delta_h} I_2$$

$$-V_2 = \frac{h_{21}}{h_{22}} I_1 + \frac{h_{12} h_{21}}{\Delta_h h_{22}} I_2 - \frac{h_{11}}{\Delta_h} I_2$$

$$\begin{aligned}
 -V_2 &= \frac{h_{21}}{h_{22}} I_1 + \left( \frac{h_{12} h_{21} - h_{11} h_{22}}{\Delta_h h_{22}} \right) I_2 \\
 -V_2 &= \frac{h_{21}}{h_{22}} I_1 + \left( \frac{-\Delta_h}{\Delta_h h_{22}} \right) I_2 \\
 V_2 &= -\frac{h_{21}}{h_{22}} I_1 + \frac{1}{h_{22}} I_2 \dots\dots\dots (79)
 \end{aligned}$$

La ecuación generalizada de los parámetros 'Z':

$$V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \dots\dots\dots (1)$$

$$V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \dots\dots\dots (2)$$

Igualando ecuaciones (78) con (1) y (79) con (2) concluimos que los parámetros 'Z' en función de 'h' son:

$$Z_{11} = \frac{\Delta_h}{h_{22}}$$

$$Z_{12} = \frac{h_{12}}{h_{22}}$$

$$Z_{21} = -\frac{h_{21}}{h_{22}}$$

$$Z_{22} = \frac{1}{h_{22}}$$

**7.9.2. RELACIÓN ENTRE PARÁMETROS 'Y' EN FUNCIÓN DE 'Z'.**

La ecuación generalizada de parámetros 'Z':

$$V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \dots\dots\dots (1)$$

$$V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \dots\dots\dots (2)$$

De ecuaciones (1) y (2), despejamos  $I_1$  e  $I_2$ :

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_1 & Z_{12} \\ V_2 & Z_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix}} = \frac{Z_{22}V_1 - Z_{12} V_2}{Z_{11}Z_{22} - Z_{21}Z_{12}} = \frac{Z_{22}V_1}{\Delta_h} - \frac{Z_{12} V_2}{\Delta_h}$$

$$I_1 = \frac{Z_{22}}{\Delta_h} V_1 - \frac{Z_{12}}{\Delta_h} V_2 \dots\dots\dots (80)$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} Z_{11} & V_1 \\ Z_{21} & V_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix}} = \frac{Z_{11}V_2 - Z_{21}V_1}{Z_{11}Z_{22} - Z_{21}Z_{12}} = \frac{Z_{11}V_2}{\Delta_h} - \frac{Z_{21}V_1}{\Delta_h}$$

$$I_2 = \frac{Z_{11}}{\Delta_h} V_2 - \frac{Z_{21}}{\Delta_h} V_1$$

$$I_2 = - \frac{Z_{21}}{\Delta_h} V_1 + \frac{Z_{11}}{\Delta_h} V_2 \dots\dots\dots (81)$$

La ecuación generalizada de los parámetros 'Y':

$$I_1 = Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2 \dots\dots\dots (4)$$

$$I_2 = Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2 \dots\dots\dots (5)$$

Igualando ecuaciones (80) con (4) y (81) con (5), concluimos que los parámetros 'Y' en función de 'Z' son:

$$Y_{11} = \frac{Z_{22}}{\Delta_h}$$

$$Y_{12} = - \frac{Z_{12}}{\Delta_h}$$

$$Y_{21} = - \frac{Z_{21}}{\Delta_h}$$

$$Y_{22} = \frac{Z_{11}}{\Delta_h}$$

### 7.9.3. RELACIÓN ENTRE PARÁMETROS 'g' EN FUNCIÓN DE 'Y'.

La ecuación generalizada de parámetros 'Y':

$$I_1 = Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2 \dots\dots\dots (4)$$

$$I_2 = Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2 \dots\dots\dots (5)$$

De ecuaciones (4) y (5), despejamos  $V_1$  y  $V_2$ :

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} I_1 & Y_{12} \\ I_2 & Y_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{vmatrix}} = \frac{Y_{22}I_1 - Y_{12} I_2}{Y_{11}Y_{22} - Y_{21}Y_{12}} = \frac{Y_{22}I_1}{\Delta_h} - \frac{Y_{12} I_2}{\Delta_h}$$

$$V_1 = \frac{Y_{22}I_1}{\Delta_Y} - \frac{Y_{12} I_2}{\Delta_Y}$$

$$\frac{Y_{22}I_1}{\Delta_Y} = V_1 + \frac{Y_{12} I_2}{\Delta_Y}$$

$$I_1 = \frac{\Delta_Y}{Y_{22}} V_1 + \frac{Y_{12}}{Y_{22}} I_2 \dots\dots\dots (82)$$

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} Y_{11} & I_1 \\ Y_{21} & I_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{vmatrix}} = \frac{Y_{11}I_2 - Y_{21} I_1}{Y_{11}Y_{22} - Y_{21}Y_{12}} = \frac{Y_{11}I_2}{\Delta_h} - \frac{Y_{21} I_1}{\Delta_h}$$

$$V_2 = \frac{Y_{11}I_2}{\Delta_Y} - \frac{Y_{21} I_1}{\Delta_Y}$$

$$V_2 = \frac{Y_{11}}{\Delta_Y} I_2 - \frac{Y_{21}}{\Delta_Y} I_1 \dots\dots\dots (83)$$

Reemplazando ecuación (82) en (83):

$$V_2 = \frac{Y_{11}}{\Delta_Y} I_2 - \frac{Y_{21}}{\Delta_Y} \left( \frac{\Delta_Y}{Y_{22}} V_1 + \frac{Y_{12}}{Y_{22}} I_2 \right)$$

$$V_2 = \frac{Y_{11}}{\Delta_Y} I_2 - \frac{Y_{21}}{Y_{22}} V_1 - \frac{Y_{21} Y_{12}}{\Delta_h Y_{22}} I_2$$

$$V_2 = \frac{Y_{22} Y_{11} - Y_{21} Y_{12}}{\Delta_Y Y_{22}} I_2 - \frac{Y_{21}}{Y_{22}} V_1$$

$$V_2 = - \frac{Y_{21}}{Y_{22}} V_1 + \frac{1}{Y_{22}} I_2 \dots\dots\dots (84)$$

La ecuación generalizada de parámetros 'Y':

$$I_1 = g_{11} V_1 + g_{12} I_2 \dots\dots\dots (85)$$

$$V_2 = g_{21} V_1 + g_{22} I_2 \dots\dots\dots (86)$$

Igualando ecuaciones (82) con (84) y (84) con (86), concluimos que los parámetros 'g' en función de 'Y' son:

$$g_{11} = \frac{\Delta_h}{Y_{22}}$$

$$g_{12} = \frac{Y_{12}}{Y_{22}}$$

$$g_{21} = -\frac{Y_{21}}{Y_{22}}$$

$$g_{22} = \frac{1}{Y_{22}}$$

#### 7.9.4. RELACIÓN ENTRE PARÁMETROS DE TRANSMISIÓN DIRECTA EN FUNCIÓN DE 'h'.

La ecuación generalizada de los parámetros Híbridos directos 'h':

$$V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2 \dots\dots\dots(37)$$

$$I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2 \dots\dots\dots (38)$$

De ecuaciones (37) y (38), despejamos  $V_2$  e  $I_1$ :

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} h_{11} & V_1 \\ h_{21} & I_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix}} = \frac{h_{11}I_2 - h_{21} V_1}{h_{11} h_{22} - h_{12} h_{21}} = \frac{h_{11}I_2}{\Delta_h} - \frac{h_{21} V_1}{\Delta_h}$$

$$V_2 = \frac{h_{11}}{\Delta_h} I_2 - \frac{h_{21}}{\Delta_h} V_1$$

$$\frac{h_{21}}{\Delta_h} V_1 = -V_2 + \frac{h_{11}}{\Delta_h} I_2$$

$$V_1 = -\frac{\Delta_h}{h_{21}} V_2 + \frac{h_{11}}{h_{21}} I_2 \dots\dots\dots (87)$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_1 & h_{12} \\ I_2 & h_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix}} = \frac{h_{22}V_1 - h_{12}I_2}{h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}} = \frac{h_{22}V_1}{\Delta_h} - \frac{h_{12}I_2}{\Delta_h}$$

$$I_1 = \frac{h_{22}}{\Delta_h} V_1 - \frac{h_{12}}{\Delta_h} I_2 \dots\dots\dots (88)$$

Reemplazando ecuación (87) en (88):

$$I_1 = \frac{h_{22}}{\Delta_h} \left( -\frac{\Delta_h}{h_{21}} V_2 + \frac{h_{11}}{h_{21}} I_2 \right) - \frac{h_{12}}{\Delta_h} I_2$$

$$I_1 = -\frac{h_{22}}{h_{21}} V_2 + \frac{h_{22}h_{11}}{\Delta_h h_{21}} I_2 - \frac{h_{12}}{\Delta_h} I_2$$

$$I_1 = -\frac{h_{22}}{h_{21}} V_2 + \frac{h_{22}h_{11} - h_{12}h_{21}}{\Delta_h h_{21}} I_2$$

$$I_1 = -\frac{h_{22}}{h_{21}} V_2 + \frac{1}{h_{21}} I_2 \dots\dots\dots (89)$$

Igualando ecuaciones (88) con (64) y (89) con (65), concluimos que los parámetros de transmisión directos 'ABCD' en función de 'h' son:

$$V_1 = A V_2 - B I_2 \dots\dots\dots(64)$$

$$I_1 = C V_2 - D I_2 \dots\dots\dots(65)$$

$$A = -\frac{\Delta_h}{h_{21}}$$

$$B = -\frac{h_{11}}{h_{21}}$$

$$C = -\frac{h_{22}}{h_{21}}$$

$$D = -\frac{1}{h_{21}}$$

La Tabla de conversión de parámetros de dos puertos, se muestra en la Figura 25

	Z	Z	Y	Y	h	h	g	G	AB	CD	A'B'	C'D'
Z	$Z_{11}$	$Z_{12}$	$\frac{Y_{22}}{\Delta_Y}$	$-\frac{Y_{12}}{\Delta_Y}$	$\frac{\Delta_h}{h_{22}}$	$\frac{h_{12}}{h_{22}}$	$\frac{1}{g_{11}}$	$-\frac{g_{12}}{g_{11}}$	$\frac{A}{C}$	$\frac{\Delta_T}{C}$	$\frac{d}{c}$	$\frac{1}{c}$
Z	$Z_{21}$	$Z_{22}$	$-\frac{Y_{21}}{\Delta_Y}$	$\frac{Y_{11}}{\Delta_Y}$	$-\frac{h_{21}}{h_{22}}$	$\frac{1}{h_{22}}$	$\frac{g_{21}}{g_{11}}$	$\frac{\Delta_g}{g_{11}}$	$\frac{1}{C}$	$\frac{D}{C}$	$\frac{\Delta_{T'}}{c}$	$\frac{a}{c}$
Y	$\frac{Z_{22}}{\Delta_Z}$	$\frac{Z_{12}}{\Delta_Z}$	$Y_{11}$	$Y_{12}$	$\frac{1}{h_{11}}$	$-\frac{h_{12}}{h_{11}}$	$\frac{\Delta_g}{g_{22}}$	$\frac{g_{12}}{g_{22}}$	$\frac{D}{B}$	$-\frac{\Delta_T}{B}$	$\frac{a}{b}$	$-\frac{1}{b}$
Y	$\frac{Z_{12}}{\Delta_Z}$	$\frac{Z_{11}}{\Delta_Z}$	$Y_{21}$	$Y_{22}$	$\frac{h_{21}}{h_{11}}$	$\frac{\Delta_h}{h_{11}}$	$-\frac{g_{21}}{g_{22}}$	$\frac{1}{g_{22}}$	$-\frac{1}{B}$	$\frac{A}{B}$	$-\frac{\Delta_{T'}}{b}$	$\frac{d}{b}$
h	$\frac{\Delta_Z}{Z_{22}}$	$\frac{Z_{12}}{Z_{22}}$	$\frac{1}{Y_{11}}$	$-\frac{Y_{12}}{Y_{11}}$	$h_{11}$	$h_{12}$	$\frac{g_{22}}{\Delta_g}$	$-\frac{g_{12}}{\Delta_g}$	$\frac{B}{D}$	$\frac{\Delta_T}{D}$	$\frac{b}{a}$	$\frac{1}{a}$
h	$-\frac{Z_{21}}{Z_{22}}$	$\frac{1}{Z_{22}}$	$-\frac{Y_{21}}{Y_{11}}$	$\frac{\Delta_Y}{Y_{11}}$	$h_{21}$	$h_{22}$	$-\frac{g_{21}}{\Delta_g}$	$\frac{g_{11}}{\Delta_g}$	$-\frac{1}{D}$	$\frac{C}{D}$	$\frac{\Delta_{T'}}{a}$	$\frac{c}{a}$
g	$\frac{1}{Z_{11}}$	$-\frac{Z_{12}}{Z_{11}}$	$\frac{\Delta_Y}{Y_{22}}$	$\frac{Y_{12}}{Y_{22}}$	$\frac{h_{22}}{\Delta_h}$	$-\frac{h_{12}}{\Delta_h}$	$g_{11}$	$g_{12}$	$\frac{C}{A}$	$-\frac{\Delta_T}{A}$	$\frac{c}{d}$	$-\frac{1}{d}$
g	$\frac{Z_{21}}{Z_{11}}$	$\frac{\Delta_Z}{Z_{11}}$	$-\frac{Y_{22}}{Y_{21}}$	$\frac{1}{Y_{22}}$	$-\frac{h_{21}}{\Delta_h}$	$\frac{h_{11}}{\Delta_h}$	$g_{21}$	$g_{22}$	$\frac{1}{A}$	$\frac{B}{A}$	$\frac{\Delta_{T'}}{d}$	$\frac{b}{d}$
ABCD	$\frac{Z_{11}}{Z_{21}}$	$\frac{\Delta_Z}{Z_{21}}$	$-\frac{Y_{22}}{Y_{21}}$	$-\frac{1}{Y_{21}}$	$\frac{\Delta_h}{h_{21}}$	$-\frac{h_{11}}{h_{21}}$	$\frac{1}{g_{21}}$	$\frac{g_{22}}{g_{21}}$	A	B	$\frac{d}{a}$	$\frac{b}{a}$
ABCD	$\frac{1}{Z_{21}}$	$\frac{Z_{22}}{Z_{21}}$	$-\frac{\Delta_Y}{Y_{21}}$	$-\frac{Y_{11}}{Y_{21}}$	$-\frac{h_{22}}{h_{21}}$	$-\frac{1}{h_{21}}$	$\frac{g_{11}}{g_{21}}$	$\frac{\Delta_g}{g_{21}}$	C	D	$\frac{c}{a}$	$\frac{a}{a}$
A'B'C'D'	$\frac{Z_{22}}{Z_{12}}$	$\frac{\Delta_Z}{Z_{12}}$	$-\frac{Y_{11}}{Y_{12}}$	$-\frac{1}{Y_{12}}$	$\frac{1}{h_{12}}$	$\frac{h_{11}}{h_{12}}$	$-\frac{\Delta_g}{g_{12}}$	$-\frac{g_{22}}{g_{12}}$	$\frac{D}{\Delta_T}$	$\frac{B}{\Delta_T}$	A'	B'
A'B'C'D'	$\frac{1}{Z_{12}}$	$\frac{Z_{11}}{Z_{12}}$	$-\frac{\Delta_Y}{Y_{12}}$	$-\frac{Y_{22}}{Y_{12}}$	$\frac{h_{22}}{h_{12}}$	$\frac{\Delta_h}{h_{12}}$	$-\frac{g_{11}}{g_{12}}$	$-\frac{1}{g_{12}}$	$\frac{C}{\Delta_T}$	$\frac{A}{\Delta_T}$	C'	D'

Figura 25

EJEMPLO 1.

En la red de celosía simétrica de la Figura E-1, determinar los parámetros de Transmisión directos.

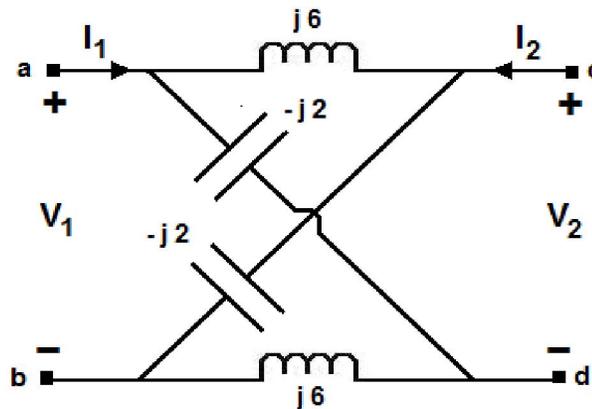


Figura E-1.1

La ecuación característica de los parámetros de Transmisión directos:

$$V_1 = A V_2 - B I_2 \dots\dots(64)$$

$$I_1 = C V_2 - D I_2 \dots\dots(65)$$

Haciendo girar los terminales 'b-d' del cuadripolo, obtenemos, los dos circuitos de la Figura E-2 (a) y (b) :

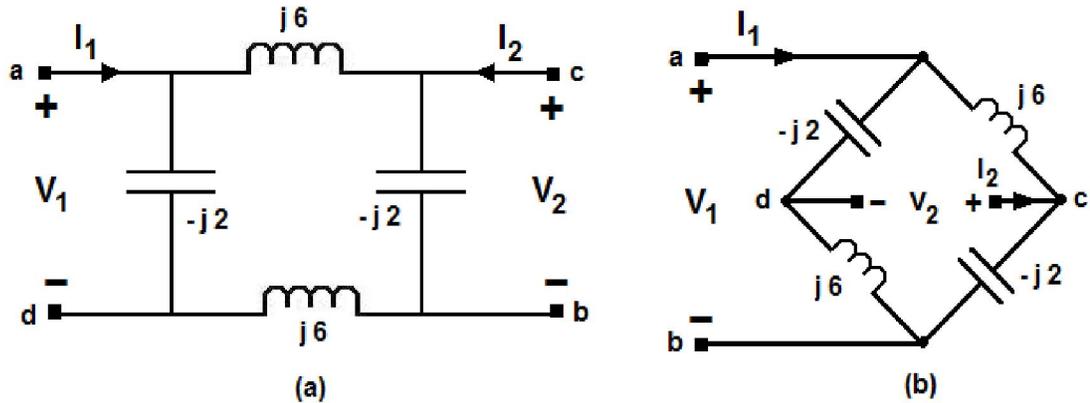


Figura E-1.2

Los parámetros a circuito abierto del puerto secundario son:

$$A = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)_{I_2=0} \quad C = \left(\frac{I_1}{V_2}\right)_{I_2=0} \dots\dots\dots (1.1)$$

En el circuito de la figura E-2 (b), podemos encontrar la relación de ganancia de voltaje, A, del siguiente modo:

La impedancia equivalente del circuito (b):

$$Z_{eq} = \frac{(j6 - j2)(j6 - j2)}{(j6 - j2) + (j6 - j2)} = j2 \ (\Omega)$$

La tensión  $V_1$ :

$$V_1 = I_1 Z_{eq}$$

$$V_1 = j2 I_1 \dots\dots\dots (1.2)$$

La tensión  $V_2$ , se debe obtener en función de  $I_1$ , aplicando mallas o divisor de tensión, se hará por las dos formas:

Por Divisor de Tensión, la caída, primero, en el condensador y segundo, en la bobina de cualquier rama y reemplazando en ellas la ecuación (1.1), se tendrá:

$$V_c = (-j2) \frac{V_1}{(j6 - j2)}$$

$$V_c = -\frac{V_1}{2} = -\frac{j2 I_1}{2}$$

$$V_c = -j I_1 \dots\dots\dots(1.3)$$

$$V_L = (j6) \frac{V_1}{(j6 - j2)}$$

$$V_L = \frac{3 V_1}{2} = \frac{j 2 * 3 I_1}{2}$$

$$V_L = j 3 I_1 \dots\dots\dots(1.4)$$

De la malla 'i', 'a-c-d', de la Figura se puede escribir:

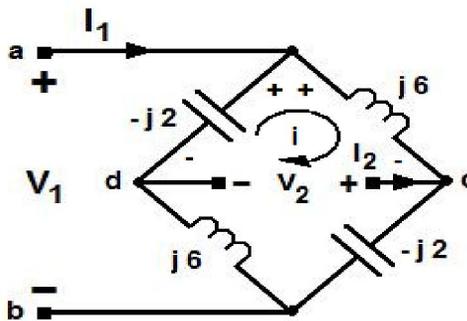


Figura E-1.3

$$-j I_1 + V_2 = j 3 I_1$$

$$V_2 = j 3 I_1 + j I_1$$

$$V_2 = j 4 I_1 \dots\dots\dots (1.5)$$

En el Circuito de la Figura E-1.3, podemos concluir, que al ser las dos ramas en paralelo, iguales , entonces la corriente circulante por cada rama es  $\frac{1}{2} I_1$  , luego, en base a la malla 'i', podemos escribir:

$$(-j2) \frac{I_1}{2} + V_2 = (j6) \frac{I_1}{2}$$

$$V_2 = j 3 I_1 + j I_1$$

$$V_2 = j 4 I_1 \dots\dots\dots (1.6)$$

Dividiendo, ecuaciones (1.2) y (1.5) o (1.6), obtenemos el parámetro 'A':

$$A = \left( \frac{V_1}{V_2} \right)_{I_2=0} = \frac{j2 I_1}{j4 I_1}$$

$$A = \frac{1}{2} \dots\dots\dots (1.7)$$

En el circuito de la figura E-2 (b), podemos encontrar la relación de Admitancia de transferencia directa, C, con sólo reemplazar (1.4) o (1.5) en (1.1):

$$C = \left( \frac{I_1}{V_2} \right)_{I_2=0} = \frac{I_1}{j4 I_1} = \frac{1}{j4} \quad (S) \dots\dots\dots (1.8)$$

Los parámetros a corto circuito del puerto secundario son:

$$-B = \left( \frac{V_1}{I_2} \right)_{V_2=0} \quad -D = \left( \frac{I_1}{I_2} \right)_{V_2=0} \dots\dots\dots (1.9)$$

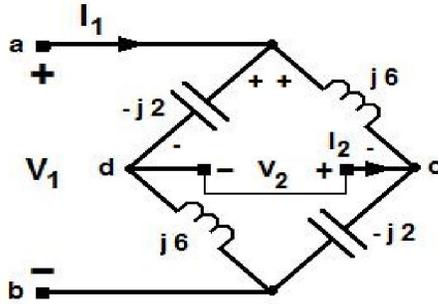


Figura E-1.4

La corriente  $I_2$ , Figura E-1.4, se puede encontrar aplicando divisor de corriente, del siguiente modo:

Por Divisor de Corriente, la corriente, primero, en el condensador y segundo, en la bobina, obtendremos:

$$I_c = (j6) \frac{I_1}{(j6 - j2)}$$

$$I_c = \frac{3I_1}{2} \dots\dots\dots(1.10)$$

$$I_L = (-j2) \frac{I_1}{(j6 - j2)}$$

$$I_L = -\frac{I_1}{2} \dots\dots\dots(1.11)$$

Escribiendo la ecuación de corrientes en el nodo 'c', tendremos:

$$I_L + I_2 = I_c$$

$$I_2 = \frac{3I_1}{2} - \left(-\frac{I_1}{2}\right)$$

$$I_2 = \frac{3I_1}{2} + \frac{I_1}{2} = 2 I_1 \dots\dots\dots (1.12)$$

De ecuaciones (1.9) y (1.12), la Ganancia de Corriente, parámetro 'D', será:

$$-D = \left( \frac{I_1}{I_2} \right)_{V_2=0} = \frac{I_1}{2 I_1} = \frac{1}{2}$$

$$D = -\frac{1}{2} \dots\dots\dots (1.13)$$

El parámetro de impedancia de transferencia inversa, se determinará, sólo con aplicar ecuaciones (1.2), (1.9) y (1.12):

$$-B = \left( \frac{V_1}{I_2} \right)_{V_2=0} = \frac{j 2 I_1}{2 I_1} = j$$

$$B = -j \ (\Omega) \dots\dots\dots(1.14)$$

**EJEMPLO 2.**

En el Cuadripolo de la Figura E-2.1, Determinar:

- a. La función de transferencia  $\frac{V_2}{V_g}$ , en función de los parámetros de Admitancia,  $Z_g$  y  $Z_L$ .
- b. El valor de  $Z_L$ , necesario para obtener la máxima transferencia de potencia en función de los parámetros de transmisión y  $Z_g$ .
- c. La ganancia de Corriente  $\frac{I_2}{I_1}$  en función de los parámetros híbridos 'h' y  $Z_L$ .

SOLUCIÓN.

a.

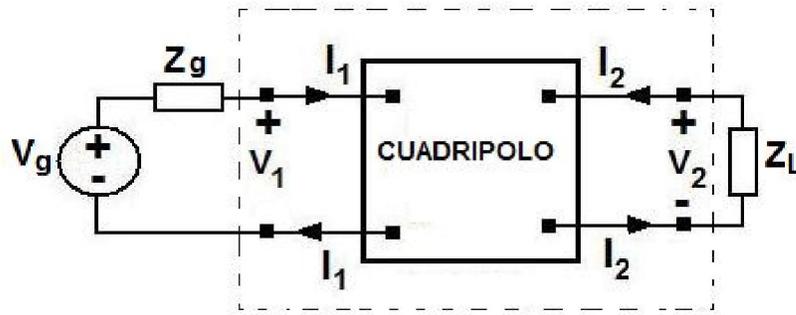


Figura E-2.1

La ecuación generalizada de los parámetros de cortocircuito, 'Y' y las ecuaciones de cuadripolo insertado en un circuito:

$$I_1 = Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2 \dots\dots\dots (4)$$

$$I_2 = Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2 \dots\dots\dots (5)$$

$$V_1 = \frac{I_2 - Y_{22} V_2}{Y_{21}} \dots\dots\dots (2.1)$$

$$V_g = Z_g I_1 + V_1 \dots\dots\dots (9)$$

$$V_2 = -I_2 Z_L \dots\dots\dots (11)$$

Reemplazando en ecuación (9), ecuaciones (4), (2.2) y (2.1), luego:

$$V_g = Z_g (Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2) + \frac{I_2 - Y_{22} V_2}{Y_{21}}$$

$$V_g = Z_g Y_{11} \left( \frac{I_2 - Y_{22} V_2}{Y_{21}} \right) + Z_g Y_{12} V_2 + \frac{I_2 - Y_{22} V_2}{Y_{21}}$$

$$V_g = \frac{Z_g Y_{11} I_2 - Z_g Y_{22} Y_{11} V_2 + Z_g Y_{12} Y_{21} V_2 + I_2 - Y_{22} V_2}{Y_{21}}$$

$$V_g = \frac{Z_g Y_{11} I_2 - Z_g Y_{22} Y_{11} V_2 + Z_g Y_{12} Y_{21} V_2 + I_2 - Y_{22} V_2}{Y_{21}}$$

$$V_g = \left( \frac{Z_g Y_{11} + 1}{Y_{21}} \right) I_2 + \left( \frac{Z_g Y_{12} Y_{21} - Z_g Y_{22} Y_{11} - Y_{22}}{Y_{21}} \right) V_2$$

$$V_g = \left( \frac{Z_g Y_{11} + 1}{Y_{21}} \right) \left( -\frac{V_2}{Z_L} \right) + \left( \frac{Z_g Y_{12} Y_{21} - Z_g Y_{22} Y_{11} - Y_{22}}{Y_{21}} \right) V_2$$

$$V_g = \left( \frac{Z_g Z_L Y_{12} Y_{21} - Z_g Z_L Y_{11} Y_{22} - Y_{22} Z_L - Z_g Y_{11} - 1}{Z_L Y_{21}} \right) V_2$$

$$V_g = \left( \frac{Z_g Z_L Y_{12} Y_{21} - [Y_{22} Z_L (Z_g Y_{11} + 1)(Z_g Y_{11} + 1)]}{Z_L Y_{21}} \right) V_2$$

$$V_g = \left( \frac{Z_g Z_L Y_{12} Y_{21} - [(Z_g Y_{11} + 1)(Z_L Y_{22} + 1)]}{Z_L Y_{21}} \right) V_2$$

La Función de Transferencia  $\frac{V_2}{V_g}$ , será:

$$\frac{V_2}{V_g} = \frac{Z_L Y_{21}}{Z_g Z_L Y_{12} Y_{21} - [(Z_g Y_{11} + 1)(Z_L Y_{22} + 1)]} \dots\dots\dots (2.3)$$

b. Los parámetros de Transmisión serán:

$$V_1 = A V_2 - B I_2 \dots\dots\dots(64)$$

$$I_1 = C V_2 - D I_2 \dots\dots\dots(65)$$

Para encontrar la máxima transferencia de potencia de la impedancia  $Z_L$ , debemos encontrar  $Z_{th}$  :

$$Z_{th} = \frac{V_{th}}{I_N} \dots\dots\dots (2.4)$$

La tensión de Thévenin en terminales del puerto 2, para  $I_2 = 0$ , según ecuaciones (64), (65) y (9), será:

$$V_1 = A V_2 = V_g - Z_g I_1 \dots\dots\dots (2.5)$$

$$I_1 = C V_2 \dots\dots\dots (2.6)$$

Reemplazando Ecuación (2.6) en ecuación (2.5):

$$A V_2 = V_g - Z_g I_1 = V_g - Z_g C V_2$$

$$V_g = (A + Z_g C) V_2$$

$$V_2 = \frac{V_g}{A + Z_g C}$$

$$V_2 = V_{th} = \frac{V_g}{A + Z_g C} \dots\dots\dots (2.7)$$

La corriente de Norton en terminales del puerto 2, para  $V_2 = 0$ , según ecuaciones (64), (65) y (9), será:

$$V_1 = -B I_2 = V_g - Z_g I_1 \dots\dots\dots (2.8)$$

$$I_1 = -D I_2 \dots\dots\dots (2.9)$$

Reemplazando ecuación (2.9) en ecuación (2.8):

$$-B I_2 = V_g - Z_g I_1 = V_g - Z_g (-D I_2)$$

$$I_2 = \frac{-V_g}{B + Z_g D} = -I_N$$

$$I_N = \frac{V_g}{B + Z_g D} \dots\dots\dots (2.10)$$

La Impedancia de Thévenin estará dada por la ecuación (2.4), en ella reemplazamos ecuaciones (2.7) y (2.10), luego:

$$Z_{th} = \frac{V_{th}}{I_N} = \frac{\frac{V_g}{A + Z_g C}}{\frac{V_g}{B + Z_g D}} = \frac{B + Z_g D}{A + Z_g C}$$

$$Z_{th} = \frac{B + Z_g D}{A + Z_g C} \quad (\Omega) \dots\dots\dots (2.11)$$

c. La ecuación generalizada de parámetros a cortocircuito, denominados, Híbridos 'h':

$$V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2 \dots\dots\dots (37)$$

$$I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2 \dots\dots\dots (38)$$

$$V_1 = V_g - Z_g I_1 \dots\dots\dots (10)$$

$$V_2 = -I_2 Z_L \dots\dots\dots (11)$$

Reemplazando ecuación (11) en ecuación (38):

$$I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} (-I_2 Z_L)$$

$$I_2 = h_{21} I_1 - h_{22} I_2 Z_L$$

$$I_2 + h_{22} Z_L I_2 = h_{21} I_1$$

La ganancia de corrientes  $\frac{I_2}{I_1}$ , será:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{h_{21}}{1+h_{22} Z_L} \dots\dots\dots (2.12)$$

$$I_2 = \frac{h_{21}}{1+h_{22} Z_L} I_1 \dots\dots\dots (2.13)$$

La ganancia también la podemos determinar del siguiente modo, reemplazando ecuación (10) y (11), en ecuación (37):

$$V_1 = h_{11} I_1 - h_{12} I_2 Z_L = V_g - Z_g I_1$$

$$h_{11} I_1 + Z_g I_1 - h_{12} I_2 Z_L = V_g$$

$$(h_{11} + Z_g) I_1 - h_{12} Z_L I_2 = V_g \dots\dots\dots (2.14)$$

Reemplazando ecuación (2.13), en ecuación (2.14):

$$(h_{11} + Z_g) I_1 - h_{12} Z_L \left( \frac{h_{21}}{1+h_{22} Z_L} \right) I_1 = V_g$$

$$(h_{11} + Z_g) (1 + h_{22} Z_L) - h_{12} h_{21} Z_L I_1$$

$$I_1 = \frac{(1+h_{22} Z_L) V_g}{(h_{11} + Z_g) (1+h_{22} Z_L) - h_{12} h_{21} Z_L} \dots\dots\dots (2.15)$$

Reemplazando ecuación (2.15) en (2.13):

$$I_2 = \frac{h_{21}}{1+h_{22} Z_L} \left[ \frac{(1+h_{22} Z_L) V_g}{(h_{11} + Z_g) (1+h_{22} Z_L) - h_{12} h_{21} Z_L} \right]$$

$$I_2 = \left[ \frac{h_{21} V_g}{(h_{11} + Z_g) (1+h_{22} Z_L) - h_{12} h_{21} Z_L} \right] \dots\dots\dots (2.16)$$

La ganancia de corriente será:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\left[ \frac{h_{21} V_g}{(h_{11} + Z_g) (1+h_{22} Z_L) - h_{12} h_{21} Z_L} \right]}{\frac{(1+h_{22} Z_L) V_g}{(h_{11} + Z_g) (1+h_{22} Z_L) - h_{12} h_{21} Z_L}}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{h_{21} V_g \left[ (h_{11} + Z_g) (1+h_{22} Z_L) - h_{12} h_{21} Z_L \right]}{(1+h_{22} Z_L) V_g \left[ (h_{11} + Z_g) (1+h_{22} Z_L) - h_{12} h_{21} Z_L \right]}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{h_{21}}{1+h_{22} Z_L} \dots\dots\dots (2.17)$$

**EJEMPLO 3.**

Dos cuadripolos iguales se asocian en paralelo y se cierran a la entrada con un generador de 20 V e impedancia interna  $Z_g = 1 - j (\Omega)$ , a la salida con una carga de impedancia  $Z_L = 1 - j (\Omega)$ . Se supone que la corriente de circulación entre los cuadripolos es nula. Si la matriz de parámetros de transmisión directa de cada cuadripolo es:

$$T = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule:

- Los parámetros de transmisión del cuadripolo equivalente.
- La potencia recibida por  $Z_L$ .

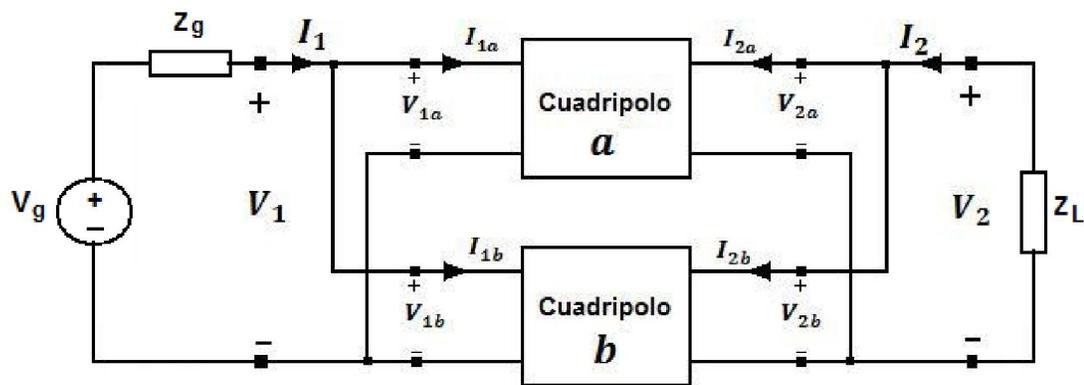


Figura E-3.1

- Los cuadripolos 'a' y 'b', son iguales, vale decir que:

$$A_a = A_b = 5$$

$$B_a = B_b = 2$$

$$C_a = C_b = 2$$

$$D_a = D_b = 1$$

El próximo paso es transformar estos parámetros, de ambos cuadripolos, en parámetros de cortocircuito, 'Y' y aplicar las propiedades de interconexión de cuadripolos, para encontrar los parámetros de admitancia equivalente y a partir de ellos, transformar nuevamente a parámetros de Transmisión directa:

De Tabla de conversión de parámetros, Figura 23:

$$Y_{11} = \frac{D}{B} = \frac{1}{2} \quad (\text{s})$$

$$Y_{12} = -\frac{AD-BC}{B} = -\frac{1}{2} \quad (\text{s})$$

$$Y_{21} = -\frac{1}{B} = -\frac{1}{2} \quad (\text{s})$$

$$Y_{22} = \frac{A}{B} = \frac{5}{2} \quad (\text{s})$$

$$Y_{11a} = Y_{11b} = \frac{1}{2} \quad (\text{s})$$

$$Y_{12a} = Y_{12b} = -\frac{1}{2} \quad (\text{s})$$

$$Y_{21a} = Y_{21b} = -\frac{1}{2} \quad (\text{s})$$

$$Y_{22a} = Y_{22b} = \frac{5}{2} \quad (\text{s})$$

Los parámetros de la Admitancia equivalente:

$$Y_{11eqa-b} = Y_{11a} + Y_{11b} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$Y_{12eqa-b} = Y_{12a} + Y_{12b} = -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = -1$$

$$Y_{21eqa-b} = Y_{21a} + Y_{21b} = -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = -1$$

$$Y_{22eq a-b} = Y_{22a} + Y_{22b} = \frac{5}{2} + \frac{5}{2} = 5$$

La matriz de parámetros en cortocircuito, admitancias 'Y', son

$$Y_{eq} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3.1)$$

Transformando la ecuación matricial de parámetros de cortocircuito, 'Y', a parámetros de transmisión directos (3.1), con ayuda de la tabla de conversión de Parámetros de la figura 25:

$$A = -\frac{Y_{22}}{Y_{21}} ; B = -\frac{1}{Y_{21}} ; C = -\frac{\Delta Y}{Y_{21}} ; D = -\frac{Y_{11}}{Y_{21}}$$

$$A = 5 ; B = 1 (\Omega) ; C = 4 (S) ; D = 1$$

$$ABCD_{eq} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3.2)$$

b. La potencia recibida por  $Z_L$  :

La ecuación característica de los parámetros de transmisión directos e insertados en un circuito son:

$$V_1 = AV_2 - BI_2 \dots\dots\dots(64)$$

$$I_1 = C V_2 - D I_2 \dots\dots\dots(65)$$

$$V_1 = V_g - Z_g I_1 \dots\dots\dots(10)$$

$$V_2 = -I_2 Z_L \dots\dots\dots (11)$$

Reemplazando en ecuación (64), ecuaciones (65), (10) y (11):

$$V_g - Z_g I_1 = A V_2 - B I_2$$

$$V_g - Z_g (C V_2 - D I_2) = A V_2 - B I_2$$

$$V_g - Z_g C V_2 + Z_g D I_2 = A V_2 - B I_2$$

$$V_g - Z_g C (-I_2 Z_L) + Z_g D I_2 = A (-I_2 Z_L) - B I_2$$

$$V_g + Z_g C Z_L I_2 + Z_g D I_2 = -A I_2 Z_L - B I_2$$

$$V_g = (-A Z_L - B - Z_g D - C Z_g Z_L) I_2$$

$$I_2 = \frac{-V_g}{A Z_L + B + Z_g D + C Z_g Z_L}$$

Reemplazando sus valores:

$$I_2 = \frac{-20}{5(1-j) + 1 + (1-j) + 4(1-j)(1-j)}$$

$$I_2 = 1.277 \angle -116.57^\circ \text{ (A)} \dots\dots\dots (3.3)$$

Reemplazando ecuación (3.3), en ecuación (11):

$$V_2 = -I_2 Z_L = I_2 \sqrt{2} \angle -45^\circ = 1.277 \angle -116.57^\circ \sqrt{2} \angle -45^\circ = 1.8 \angle -161.57^\circ \text{ (V)}$$

$$V_2 = 1.8 \angle -161.57^\circ \text{ (V)} \dots\dots\dots (3.4)$$

La Potencia de los cuadripolos en  $Z_L$  será:

$$S = V_2 I_2^* = 1.8 \angle -161.57^\circ \cdot 1.277 \angle 116.57^\circ = 2.29 \angle -45^\circ \text{ (VA)}$$

$$S = 1.62 \text{ (W)} - j 1.62 \text{ (VAR)}$$

$$P = 1.62 \text{ (W)}$$

$$Q = -1.62 \text{ (VAR)}$$

La Potencia que suministra cada cuadripolon a la impedancia de carga,  $Z_L$  será:

$$S = 0.81 \text{ (W)} - j 0.81 \text{ (VAR)}$$

$$P = 0.81 \text{ (W)}$$

$$Q = -0.81 \text{ (VAR)}$$

**EJEMPLO 4.**

El cuadripolo mostrado en la Figura E-4.1, se asocia con otro igual tal cual muestra la Figura E-4.1

. Determine:

- La potencia disipada en  $Z_L$ .
- La potencia puesta en juego por  $V_{g1}$  y  $V_{g2}$ .

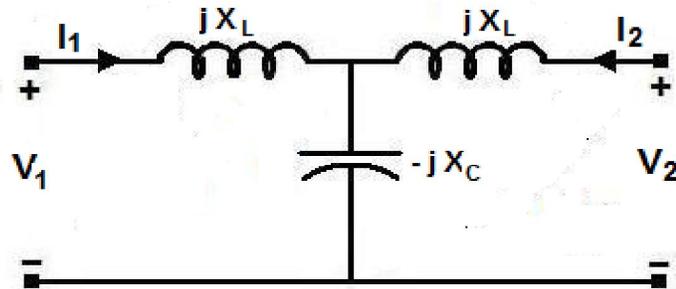


Figura E-4.1

$$X_L = 2; X_C = 6; Z_L = Z_{g1} = Z_{g2} = 9 + j4; V_{g1} = V_{g2} = 3/\underline{0^\circ}$$

Parámetros para  $V_2 = 0$ :

$$Y_{11} = \left( \frac{I_1}{V_1} \right)_{V_2=0}; \quad Y_{21} = \left( \frac{I_2}{V_1} \right)_{V_2=0}$$

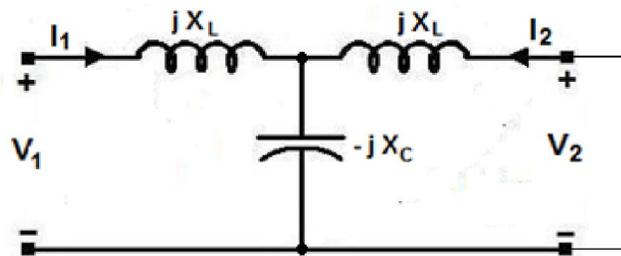


Figura E-4.2

Haciendo mallas en el puerto 1:

$$V_1 = jX_L I_1 + \frac{jX_L (-jX_C)}{jX_L - jX_C} I_1$$

$$V_1 = jX_L I_1 + \frac{X_L X_C}{jX_L - jX_C} I_1$$

Reemplazando valores:

$$V_1 = j2 I_1 + \frac{2 * 6}{j2 - j6} I_1 = j2 I_1 + \frac{12}{-j4} I_1 = j5 I_1$$

La Admitancia de entrada:

$$Y_{11} = \frac{I_1}{V_1} = \frac{1}{j5} \text{ (S)} \dots\dots\dots (4.1)$$

Por Divisor de Corriente:

Corriente en la Bobina:

$$I_{XL} = \frac{-jX_C}{jX_L - jX_C} I_1 \dots\dots\dots (4.2)$$

$$I_{XL} = -I_2 \dots\dots\dots (4.3)$$

Reemplazando ecuación (4.3) y (4.1), en ecuación (4.2):

$$I_{XL} = \frac{-jX_C}{jX_L - jX_C} I_1 = -I_2$$

$$\frac{jX_C}{jX_L - jX_C} \frac{1}{j5} V_1 = I_2$$

Reemplazando Valores:

$$\frac{j(-6)}{j2 - j6} \frac{1}{j5} V_1 = I_2$$

La admitancia de transferencia directa:

$$Y_{21} = \frac{I_2}{V_1} = \frac{3}{j10} \text{ (S)} \dots\dots\dots (4.4)$$

Los parámetros para  $V_1 = 0$ :

$$Y_{12} = \left( \frac{I_1}{V_2} \right)_{V_1=0} \quad Y_{22} = \left( \frac{I_2}{V_2} \right)_{V_1=0}$$

El circuito de la Figura E-4.3, es el característico para analizar los parámetros de admitancia propios de  $V_1 = 0$ :

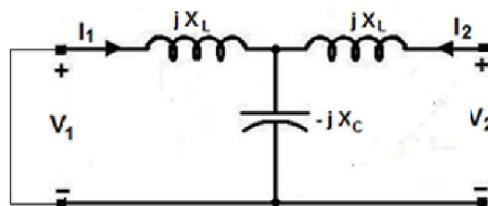


Figura E-4.3

Haciendo mallas en el puerto 2:

$$V_2 = j X_L I_2 + \frac{j X_L (-j X_C)}{j X_L - j X_C} I_2$$

$$V_2 = j X_L I_2 + \frac{X_L X_C}{j X_L - j X_C} I_2$$

Reemplazando Valores:

$$V_2 = \left( j 2 - \frac{12}{j 4} \right) I_2 = \left( j 2 - \frac{3}{j} \right) I_2 = (j 2 + j 3) I_2 = j 5 I_2$$

La admitancia de salida:

$$Y_{22} = \frac{I_2}{V_2} = \frac{1}{j 5} \quad \text{(S)} \dots\dots\dots (4.5)$$

Por Divisor de Corriente:

Corriente en la Bobina:

$$I_{XL} = \frac{-j X_C}{j X_L - j X_C} I_2 \dots\dots\dots (4.6)$$

$$I_{XL} = -I_1 \dots\dots\dots (4.7)$$

Reemplazando ecuación (4.7) y (4.5), en ecuación (4.6):

$$I_{XL} = \frac{-j X_C}{j X_L - j X_C} I_2 = -I_1$$

$$\frac{j X_C}{j X_L - j X_C} \frac{1}{j 5} V_2 = I_1$$

Reemplazando Valores:

$$\frac{j (-6)}{j 2 - j 6} \frac{1}{j 5} V_2 = I_1$$

La admitancia de transferencia inversa:

$$Y_{12} = \frac{I_1}{V_2} = \frac{3}{j 10} \dots\dots\dots (4.8)$$

Los parámetros de admitancia característicos del circuito E-4.1, son:

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{j 5} & \frac{3}{j 10} \\ \frac{3}{j 10} & \frac{1}{j 5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \angle -90^\circ & 0.3 \angle -90^\circ \\ 0.3 \angle -90^\circ & 0.2 \angle -90^\circ \end{bmatrix}$$

a) La potencia disipada por Z:

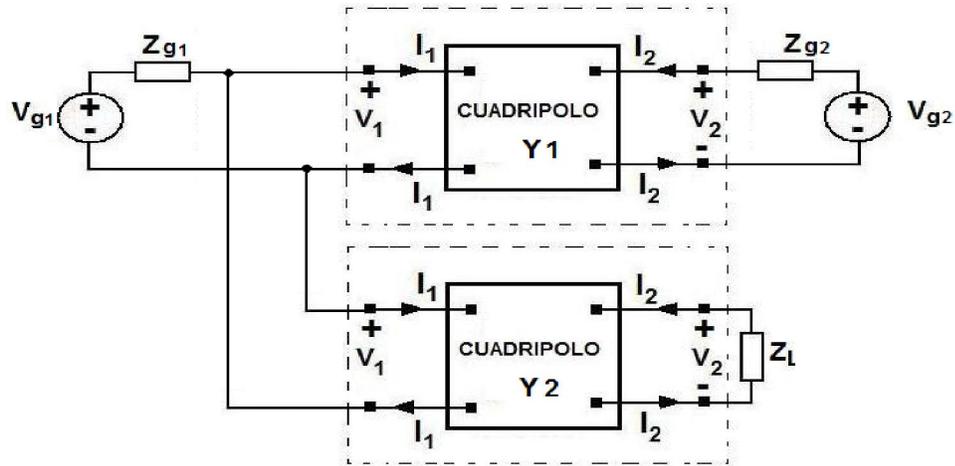


Figura E-4.4

Las ecuaciones involucradas en el circuito de la figura E-4.4, son:

$$I_1 = Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2 \dots\dots\dots (4)$$

$$I_2 = Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2 \dots\dots\dots (5)$$

Ecuaciones, cuyos parámetros son conocidos.

$$V_{g1} = Z_{g1} I_1 + V_1 \dots\dots\dots (9)$$

En nuestro caso debemos reemplazar  $I_1$  por  $2 I_1$ , por lo que podemos escribir:

$$V_{g1} = 2 Z_{g1} I_1 + V_1 \dots\dots\dots (4.1)$$

$$V_1 = V_{g1} - 2 Z_{g1} I_1 \dots\dots\dots (4.2)$$

$$V_2 = -I_2 Z_L \dots\dots\dots (11)$$

Reemplazando ecuaciones (4.1) y (11), en (4):

$$I_1 = Y_{11} (V_{g1} - 2 Z_{g1} I_1) + Y_{12} (-I_2 Z_L)$$

$$I_1 = Y_{11} V_{g1} - 2 Y_{11} Z_{g1} I_1 - Y_{12} I_2 Z_L$$

$$I_1 + 2 Y_{11} Z_{g1} I_1 = Y_{11} V_{g1} - Y_{12} I_2 Z_L$$

$$(1 + 2 Y_{11} Z_{g1}) I_1 = Y_{11} V_{g1} - Y_{12} I_2 Z_L$$

$$I_1 = \frac{Y_{11} V_{g1} - Y_{12} I_2 Z_L}{1 + 2 Y_{11} Z_{g1}} \dots\dots\dots (4.3)$$

Reemplazando ecuaciones (4.1) y (11), en (5):

$$I_2 = Y_{21} (V_{g1} - 2 Z_{g1} I_1) + Y_{22} (-I_2 Z_L)$$

$$I_2 = Y_{21} V_{g1} - 2 Z_{g1} Y_{21} I_1 - Y_{22} I_2 Z_L \dots \dots \dots (4.4)$$

Reemplazando ecuación (4.3) en (4.4)

$$I_2 = Y_{21} V_{g1} - Y_{22} I_2 Z_L - 2 Z_{g1} Y_{21} \left( \frac{Y_{11} V_{g1} - Y_{12} I_2 Z_L}{1 + 2 Y_{11} Z_{g1}} \right)$$

$$I_2 = Y_{21} V_{g1} - Y_{22} Z_L I_2 - \frac{2 Z_{g1} Y_{21} Y_{11} V_{g1}}{1 + 2 Y_{11} Z_{g1}} + \frac{2 Z_{g1} Y_{21} Y_{12} Z_L I_2}{1 + 2 Y_{11} Z_{g1}}$$

$$I_2 + Y_{22} Z_L I_2 - \frac{2 Z_{g1} Y_{21} Y_{12} Z_L I_2}{1 + 2 Y_{11} Z_{g1}} = Y_{21} V_{g1} - \frac{2 Z_{g1} Y_{21} Y_{11} V_{g1}}{1 + 2 Y_{11} Z_{g1}}$$

$$\left( \frac{(1 + Y_{22} Z_L)(1 + 2 Y_{11} Z_{g1}) - 2 Z_{g1} Y_{21} Y_{12} Z_L}{1 + 2 Y_{11} Z_{g1}} \right) I_2 = \frac{Y_{21} V_{g1}(1 + 2 Y_{11} Z_{g1})}{1 + 2 Y_{11} Z_{g1}} - \frac{2 Z_{g1} Y_{21} Y_{11} V_{g1}}{1 + 2 Y_{11} Z_{g1}}$$

$$[(1 + Y_{22} Z_L)(1 + 2 Y_{11} Z_{g1}) - 2 Z_{g1} Y_{21} Y_{12} Z_L] I_2 = Y_{21} V_{g1}(1 + 2 Y_{11} Z_{g1}) - 2 Z_{g1} Y_{21} Y_{11} V_{g1}$$

$$[(1 + Y_{22} Z_L)(1 + 2 Y_{11} Z_{g1}) - 2 Z_{g1} Y_{21} Y_{12} Z_L] I_2 = Y_{21} V_{g1}$$

$$(1 + 2 Y_{11} Z_{g1} + Y_{22} Z_L + 2 Z_{g1} Z_L \Delta Y) I_2 = Y_{21} V_{g1}$$

$$I_2 = \frac{Y_{21} V_{g1}}{1 + 2 Y_{11} Z_{g1} + Y_{22} Z_L + 2 Z_{g1} Z_L \Delta Y} \dots \dots \dots (4.5)$$

Ecuación (4.5), en ecuación (11):

$$V_2 = - \left( \frac{Z_L Y_{21} V_{g1}}{1 + 2 Y_{11} Z_{g1} + Y_{22} Z_L + 2 Z_{g1} Z_L \Delta Y} \right) \dots \dots \dots (4.6)$$

La Potencia en la impedancia  $Z_L$ , será:

$$S = V_2 * I_2'$$

Donde:  $I_2' = -I_2$ , luego:

$$S = - \left( \frac{Z_L Y_{21} V_{g1}}{1 + 2 Y_{11} Z_{g1} + Y_{22} Z_L + 2 Z_{g1} Z_L \Delta Y} \right) * \left( - \frac{Y_{21} V_{g1}}{1 + 2 Y_{11} Z_{g1} + Y_{22} Z_L + 2 Z_{g1} Z_L \Delta Y} \right)$$

