



---

b  
UNIVERSITÄT  
BERN

# ***Physik 2***

## ***Elektrizität und Magnetismus***

Skript zur Vorlesung von  
Prof. Thomas Stocker

2023

Physikalisches Institut, Universität Bern



## Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2. Elektrostatik</b>	<b>3</b>
2.1 Die elektrische Ladung	3
2.2 Das Coulomb Gesetz	4
2.3 Das elektrische Feld	6
2.4 Der Satz von Gauss	8
2.5 Elektrische Felder einfacher Anordnungen	11
2.6 Das elektrostatische Potential	15
2.7 Kondensatoren, Kapazität	20
2.8 Elektrischer Dipol	27
2.9 Materie im elektrischen Feld	31
<b>3. Elektrische Ströme</b>	<b>36</b>
3.1 Strom und Kontinuitätsgleichung	36
3.2 Leitfähigkeit und Ohmsches Gesetz	38
3.3 Die Leistung des elektrischen Stromes	39
3.4 Stromkreise und Netzwerke	40
3.5 Charakteristiken elektrischer Leiter	44
3.6 Mechanismen der elektrischen Leitung	45
3.7 Spannungs- und Stromquellen (ohne Induktion)	57
<b>4. Magnetismus</b>	<b>63</b>
4.1 Charakterisierung magnetischer Felder	63
4.2 Kraft auf bewegte elektrische Ladungen	65
4.3 Erzeugung magnetischer Felder	70
4.4 Magnetisches Moment	77
4.5 Elektromagnetische Induktion	80
4.6 Materie im magnetischen Feld	91
4.7 Wichtige Beziehungen elektrischer und magnetischer Größen	99
<b>5. Wechselspannungen und Wechselströme</b>	<b>100</b>
5.1 Sinusförmige Wechselspannungen	100
5.2 Kapazitäten und Induktivitäten bei Ein- und Ausschaltvorgängen	101
5.3 Kapazitäten und Induktivitäten in Wechselstromkreisen	103
5.4 Widerstandswerte in komplexer Darstellung, Impedanz	106
5.5 Kombinationen Ohmscher, kapazitiver und induktiver Elemente	108
5.6 Leistung im Wechselstromkreis	113
5.7 Der elektrische Schwingkreis	115
5.8 Transformatoren	117
5.9 Mehrphasiger Wechselstrom (Drehstrom)	119
5.10 Aktive Elemente	120
5.11 Messinstrumente und Motoren	126

<b>6.</b>	<b>Elektromagnetische Wellen</b>	<b>131</b>
6.1	Zeitlich variable elektrische Felder (Verschiebungsstrom)	131
6.2	Anschauliche Begründung für elektromagnetische Wellen	132
6.3	Zusammenfassung der Ergebnisse der allgemeinen Wellenlehre	133
6.4	Bereitstellung bisheriger Ergebnisse der Elektrodynamik	134
6.5	Herleitung der Gleichung für elektromagnetische Wellen	135
6.6	Eigenschaften ebener, elektromagnetischer Wellen	138
6.7	Energiedichte, Intensität und Impuls elektromagnetischer Wellen	141
6.8	Reflexion der elektromagnetischen Welle an einer Leiterebene	142
6.9	Quellen elektromagnetischer Wellen	144
6.10	Elektromagnetische Wellen in Materie	146
6.11	Elektromagnetische Wellen im Hohlleiter	148
6.12	Elektromagnetische Wellen im Hohlraumresonator	152
6.13	Das Spektrum elektromagnetischer Wellen	155

**Weiterführende Lehrbücher:**

Tipler, P.A., G. Mosca, J. Wagner, 2019: ***Physik für Wissenschaftler und Ingenieure (8. Auflage)***, Springer Verlag, 1468 pp., doi: 10.1007/978-3-662-58281-7  
Umfassendes Lehrbuch über den gesamten Stoff der Physik 1 und 2 mit vielen Aufgaben.

Meschede, D., 2015: ***Gehrtsen Physik (25. Auflage)***. Springer Verlag, 1052. pp. doi: 10.1007/978-3-662-45977-5  
Umfassendes und tiefgehendes Lehrbuch über den gesamten Stoff der Physik 1 und 2 mit vielen interessanten Aufgaben.

Bergmann, L., C. Schaefer, 2006, ***Lehrbuch der Experimentalphysik: Elektromagnetismus (9. überarbeitete Auflage)***, de Gruyter, 976 pp.  
Enthält ausführliche Beschreibungen aller im Unterricht vorgeführten Experimente. Band 2 der achtbändigen Reihe *Lehrbuch der Experimentalphysik*.

Känzig, W., 1995, ***Elektrizität und Magnetismus, Physik II, 1. Teil*** (Vorlesung gehalten an der ETH Zürich 1977/78, 5. durchgesehene Auflage), vdf Hochschulverlag 264 pp. doi: 10.3218/3680-0 (Open Access).  
Wunderbares, handgeschriebenes Vorlesungsskript, das ich selbst als Student an der ETH 1980 ausführlich durchgearbeitet und genossen habe.

Feynman, R.P., R. B. Leighton, M. Sands, 2010, ***The Feynman Lectures on Physics, The New Millennium Edition, Volume II: Mainly Electromagnetism and Matter***, (first published 1964), Basic Books, 566 pp.  
Top Lehrbuch auf höchstem Niveau. Stand 1964, aber aktuell betreffend der physikalischen Grundlagen, mit vielen überraschenden Erklärungen à la Feynman. Geht weit über den Stoff dieser Vorlesung hinaus und schult das physikalische Denken.



## 1. EINLEITUNG

Erkenntnisse über die Elektrostatik gehen bis ins Altertum zurück, als Thales von Milet um 550 v.Chr. Experimente mit Reibungselektrizität an Bernstein durchführte. Erst mit der Verfügbarkeit von Batterien (Galvani, Volta) konnten aber auch elektrische Ströme erzeugt werden. Oersted erkannte 1820 den Zusammenhang zwischen elektrischen Strömen und dem Magnetismus. Dann kam die Entwicklung der Elektrizitätslehre sehr schnell voran. Faraday formulierte 1831 das Induktionsgesetz und James Clerk Maxwell gelang es 1864, noch 24 Jahre vor der Entdeckung elektromagnetischer Wellen, alle Grundgesetze der Elektrodynamik in **vier Maxwell Gleichungen in Differentialform** zusammenzufassen:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \rho_{\text{el}} \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (1.2)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j} + \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.4)$$

Die Differentialoperatoren Divergenz  $\operatorname{div} (\vec{\nabla} \cdot)$ , und Rotation  $\operatorname{rot} (\vec{\nabla} \times)$ , auf einen Vektor  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  angewendet, sind wie folgt definiert:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z} \quad \operatorname{rot} \vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{a} = \left( \frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z}, \frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x}, \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right).$$

Äquivalent zu (1.1)-(1.4) sind die **vier Maxwell Gleichungen in Integralform**:

$$\iint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \iiint_V \rho_{\text{el}} \cdot dV \quad (1.5)$$

$$\iint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (1.6)$$

$$\int_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (1.7)$$

$$\int_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} + \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{d}{dt} \iint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad (1.8)$$

wobei  $\partial V$  die Oberfläche des Volumens  $V$ , und  $\partial A$  den Rand der Fläche  $A$  bezeichnen. Volumenintegrale  $\iiint dV$  und Flächenintegrale  $\iint dA$  werden oft in Kurzform geschrieben:  $\int dV$  und  $\int dA$ .

**Einige wichtige Konstanten:**

Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$2.99792458 \cdot 10^8$	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
Elementarladung	e	$1.602176634 \cdot 10^{-19}$	A·s
Elektrische Feldkonstante	$\epsilon_0$	$8.854188 \cdot 10^{-12}$	$\text{A} \cdot \text{s} \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$
Magnetische Feldkonstante	$\mu_0$	$1.256637 \cdot 10^{-6}$	$\text{V} \cdot \text{s} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$
Ruhemasse des Elektrons	$m_e$	$9.1093837015 \cdot 10^{-31}$	kg
Planck'sches Wirkungsquantum	h	$6.62607015 \cdot 10^{-34}$	J·s
Boltzmann-Konstante	k	$1.380649 \cdot 10^{-23}$	$\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$
Avogadro-Konstante	$N_A$	$6.02214076 \cdot 10^{23}$	$\text{mol}^{-1}$
Normtemperatur	$T_0$	273.15	K
Gravitationskonstante	G	$6.67430 \cdot 10^{-11}$	$\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$

**Größen, Bezeichnungen, Einheiten:**

	Zeichen	Einheit	Name	SI-Einheiten
elektrischer Strom	I	A	Ampère	[Grundeinheit]
elektrische Ladung	Q	C	Coulomb	$C = \text{A} \cdot \text{s}$
elektrischer Widerstand	R	$\Omega$	Ohm	$\Omega = \text{V} \cdot \text{A}^{-1}$
Kapazität	C	F	Farad	$F = \text{A} \cdot \text{s} \cdot \text{V}^{-1}$
Induktivität	L	H	Henry	$H = \text{V} \cdot \text{s} \cdot \text{A}^{-1}$
Magnetische Induktion	B	T	Tesla	$T = \text{V} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$
H-Feld	H			$\text{A} \cdot \text{m}^{-1}$

**Allgemeine Hinweise:****Experimente:**

Demonstrationsexperimente, die in der Vorlesung gezeigt werden, sind in solchen Kästen kurz beschrieben.

$$U = R \cdot I$$

wichtige Formeln sind eingerahmt

Hauptsächlich für Studierende der Physik: \_\_\_\_\_

Herleitungen und vertiefende Betrachtungen für Studierende der Physik sind so eingefasst.

Hauptsächlich für Studierende der Physik

## 2. ELEKTROSTATIK

### 2.1 Die elektrische Ladung

Nach Reiben von verschiedenen Materialien aneinander wird festgestellt, dass diese Materialien eine Kraft auf andere Körper ausüben. Somit haben diese Materialien bei gleich bleibender Temperatur und Volumen ihre Eigenschaften verändert. Man nennt diese neue Eigenschaft *elektrische Ladung*.

#### Reibungselektrizität:

Durch Reiben zweier unterschiedlicher, isolierender Materialien (PVC-Stab/Katzenfell oder Glas-Stab/Seide) wird eine neue Eigenschaft dieser Materialien sichtbar, deren Vorhandensein sich als Kraftwirkung an einem Elektroskop äussert. Diese Grösse wird *Ladung* genannt und erscheint in zwei Formen, die sich durch die Richtung der Kraft unterscheiden.

G.C. Lichtenberg hat ihnen willkürlich die Namen *positive Ladung* und *negative Ladung* gegeben, mit der Definition:

- Ein Kunstharzstab (oder Bernstein) mit Fell gerieben, lädt sich *negativ* auf;
- Ein Glasstab mit Leder oder Seide gerieben, lädt sich *positiv* auf.

#### Ladungsanzeige auf dem Elektrometer:

Das Elektrometer besteht aus einem Metallstab, an dem drehbar und leitend eine Metallnadel befestigt ist. Ladungen auf dem Stab verteilen sich auf Stab und Nadel und erzeugen eine Auslenkung der Nadel, da sich die Ladungen bevorzugt zu den Spitzen hin verschieben. Somit wird eine abstossende Kraft zwischen Nadelenden und Stab erzeugt. Die Auslenkung ist proportional zur Ladung.

Ladungen lassen sich trennen und rekombinieren. Werden die Vorzeichen berücksichtigt, so ist die Summe der elektrischen Ladungen in einem abgeschlossenen System konstant. Das ist die *Erhaltung der elektrischen Ladung*.

Die Einheit der el. Ladung im SI-System ist Coulomb [C] oder Ampèresekunde [A·s]:

$$1 \text{ Coulomb} = 1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s} \quad (2.1)$$

Die Träger der elektrischen Ladung sind Elementarteilchen, hauptsächlich Elektronen und Protonen. Sie tragen je eine Elementarladung entgegengesetzten Vorzeichens. Die wichtigsten Elementarteilchen im Atom sind:

	Masse	elektrische Ladung q
Elektron	$9.1093837015 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$	$q = -e = -1.602176634 \cdot 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s}$
Proton	$1.67262192369 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$	$q = e = +1.602176634 \cdot 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s}$
Neutron	$1.67492749804 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$	$q = 0 \text{ (neutral)}$

Die meisten in der Natur beobachteten Ladungen sind Vielfache der Elementarladung  $e$ . Unter speziellen Bedingungen können sich mehrere Elektronen in einem kollektiven Quantenzustand zu einem Quasiteilchen mit einer elektrischen Ladung von  $\frac{1}{3} \cdot e$  vereinen. Die Ladungen  $\pm \frac{1}{3} \cdot e$  und  $\pm \frac{2}{3} \cdot e$  der Quarks sind nicht als individuelle Ladung beobachtbar.

## 2.2 Das Coulomb Gesetz

Eine wichtige Eigenschaft von Ladungen ist, dass sich ungleichnamige Ladungen anziehen, gleichnamige aber abstossen.

### Coulombwaage:

Eine Metallkugel ist drehbar an einem Torsionsfaden aufgehängt; ihre Auslenkung ist proportional zur wirkenden Kraft und wird durch einen Lichtstrahl angezeigt. Eine zweite Metallkugel befindet sich in grossem Abstand von der ersten Metallkugel. Auf beide Kugeln wird dieselbe Ladung gebracht. Bei der Annäherung der beiden Kugeln wird eine Auslenkung beobachtet: die Kugeln stossen sich ab. Die Halbierung des Abstandes der beiden Kugeln vervierfacht die Auslenkung. Die Verdoppelung der Ladung auf der einen Kugel verdoppelt die Auslenkung.

Aus diesem Experiment folgt:

- Die Kraft zwischen zwei Punktladungen hat die Richtung ihrer Verbindungslinie (analog zur Gravitation);
- Die Kraft zwischen zwei Punktladungen  $Q_1$  und  $Q_2$  ist proportional zum Produkt  $Q_1 \cdot Q_2$  (Versuch mit Coulombwaage);
- Die Kraft zwischen zwei Punktladungen  $Q_1$  und  $Q_2$  ist proportional zu  $1/r^2$ , wobei  $r$  der Abstand der beiden Ladungen ist.

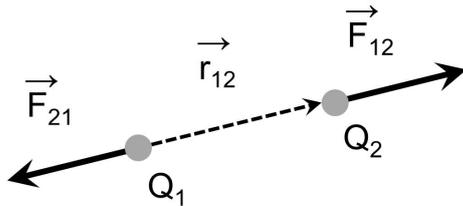
Genauere Messungen erlauben es, die Proportionalitätskonstante zu bestimmen. Das Coulomb Gesetz lautet dann in SI-Einheiten:

$$|\vec{F}| = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \quad (2.2)$$

wobei  $\epsilon_0$  die *elektrische Feldkonstante* ist:  $\epsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}}$ .

In der Vektorschreibweise lautet das Coulomb Gesetz:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} = -\vec{F}_{21} \quad (2.3)$$



**Figur 2.1:** Kraftwirkung zwischen zwei gleichnamigen Ladungen  $Q_1$  und  $Q_2$ .

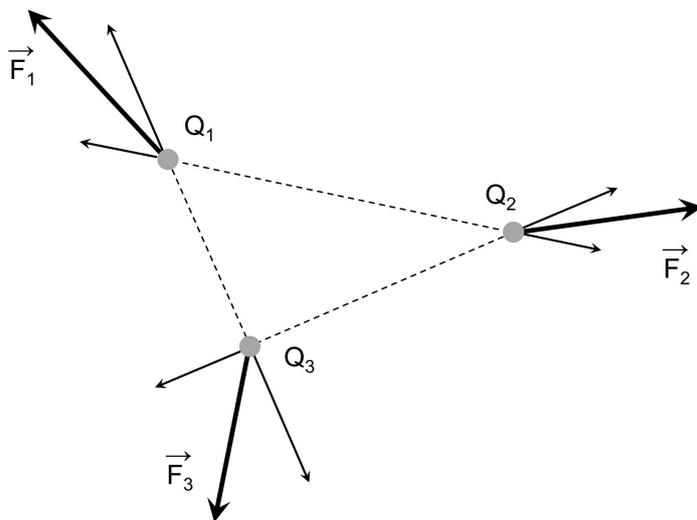
Ein Vergleich des Coulomb Gesetzes mit dem Gravitationsgesetz zeigt eine formale Ähnlichkeit. Beide Kräfte sind proportional zu  $1/r^2$  und proportional zum Produkt der felderzeugenden Größen (Masse, bzw. Ladung). Die Proportionalitätskonstante ist aber sehr verschieden. Eine Berechnung der beiden Kraftbeträge zwischen einem Proton und einem Elektron ergibt:

$$\left| \vec{F}_{\text{Coul}} \right| = \frac{(1.6 \cdot 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s})^2}{4 \cdot \pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}}} \cdot \frac{1}{r^2} = 2.3 \cdot 10^{-28} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \frac{1}{r^2} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \left| \vec{F}_{\text{Grav}} \right| &= 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot \frac{1}{r^2} \\ &= 1.01 \cdot 10^{-67} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \frac{1}{r^2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Die Coulombkraft zwischen Elektron und Proton ist somit fast 39 Größenordnungen grösser als die Gravitationskraft. Natürlich ist es etwas willkürlich, dass wir gerade ein Elektron und ein Proton wählten. Zwischen Proton und Antiproton, wäre der Unterschied z.B. drei Größenordnungen kleiner. Trotzdem eignet sich das Beispiel, die Kopplungskräfte der beiden wichtigsten Wechselwirkungen der makroskopischen Physik zu veranschaulichen.

Das Coulomb Gesetz ist additiv, d.h. es lässt sich auf Kräfte zwischen mehr als zwei Ladungen erweitern:



**Figur 2.2:** Kräfte und Resultierende auf drei gleichnamige Ladungen.

Das Coulomb Gesetz formuliert für mehrere Punktladungen lautet:

$$\vec{F}_k = \sum_{i,i \neq k} \vec{F}_{ik} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \sum_{i,i \neq k} \frac{Q_i \cdot Q_k}{(r_{ik})^3} \cdot \vec{r}_{ik} \quad (2.6)$$

Dabei ist  $\vec{F}_k$  die gesamte Coulombkraft, die auf die Ladung  $Q_k$  wirkt. Folgendes ist zu beachten: Das Coulomb Gesetz lässt sich, im Unterschied zum Gravitationsgesetz, nicht ohne weiteres auf ausgedehnte Kugeln anwenden. Ladungsverschiebungen, bzw. induzierte Ladungen in Materialien erfordert eine genauere Betrachtung (Beispiel: Spiegelladung).

### 2.3 Das elektrische Feld

Der Feldbegriff ist zentral in der Physik. In der Elektrostatik wird er exemplarisch eingeführt und seine Bedeutung erläutert.

Wir betrachten eine Ladung  $Q$  und eine Probeladung  $q$ , wobei  $Q$  fix im Raum steht und  $q$  sich in variablem Abstand  $r$  von  $Q$  befindet. Das Coulomb Gesetz (2.2) erlaubt die Berechnung der Kraft  $\vec{F}_{\text{Coul}}$ , die  $Q$  auf die Probeladung  $q$  ausübt (bzw. nach *actio = reactio*,  $q$  auf  $Q$ ). Hätten wir  $q$  anderswo im Raum placiert, so würde wiederum eine Kraft, allerdings nun mit anderer Richtung und Betrag, auf  $q$  wirken. *Überall* im Raum wirkt also eine Kraft  $\vec{F}_{\text{Coul}}(\vec{r})$  auf die Probeladung  $q$ , die durch die Ladung  $Q$  verursacht ist, deren Wirkung jedoch erst durch das Einbringen der Probeladung messbar wird. Betrag und Richtung der Kraft hängen gemäss (2.2) vom Ort und vom Produkt  $Q \cdot q$  ab. Im Raum herrscht also ein *Kraftfeld*, das man dadurch beschreiben kann, dass man jedem Punkt des Raumes eine vektorielle Grösse zuordnet. Allgemein wird dies als *Vektorfeld* bezeichnet.

Durch Division der Coulomb Kraft  $\vec{F}_{\text{Coul}}$  durch die Probeladung  $q$  erhält man einen Vektor, der nur noch von der Lage und der feldverursachenden Ladung  $Q$  abhängt. Diese Grösse bezeichnet man als *elektrisches Feld*. Die allgemeine Definition lautet

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{q} \cdot \vec{F}_{\text{Coul}}(\vec{r}) \quad (2.7)$$

Am Ort  $\vec{r}$  hängt  $\vec{E}$  einzig von  $Q$  ab:  $Q$  erzeugt ein elektrisches Feld. In (2.7) müsste korrekt  $\lim_{q \rightarrow 0}$  gebildet werden, da die Probeladung  $q$  ebenfalls ein elektrisches Feld erzeugt. Die Masseneinheit des elektrischen Feldes ist Kraft pro Ladung bzw. Volt pro Meter:

$$[E] = \frac{N}{C} = \frac{N}{A \cdot s} = \frac{W \cdot s}{m \cdot A \cdot s} = \frac{V \cdot A \cdot s}{m \cdot A \cdot s} = \frac{V}{m} .$$

Falls sich am Ort  $\vec{r}_1$  eine Punktladung  $Q_1$  befindet, beträgt das elektrische Feld am Ort  $\vec{r}$ :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q_1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} .$$

Befindet sich die Punktladung  $Q_1$  im Ursprung des Koordinatensystems, ergibt sich für den Betrag der elektrischen Feldstärke

$$E(r) = \frac{Q_1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \quad (2.8)$$

Da sich Vektoren addieren, addieren sich auch die elektrischen Felder verschiedener Ladungen. Eine beliebige Verteilung von  $N$  elektrischen Punktladungen  $Q_i$  an den Orten  $\vec{r}_i$  im Raum erzeugt ein resultierendes elektrisches Feld, das gegeben ist durch

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \quad (2.9)$$

Für eine kontinuierliche Ladungsverteilung im Raum, die durch die Ladungsdichte  $\rho_{el}(\vec{r})$  in einem Volumen  $V$  beschrieben ist, gilt schliesslich

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_V \rho_{el}(\vec{r}') \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot dV' \quad , \quad (dV' = \text{Volumenelement}) \quad (2.10)$$

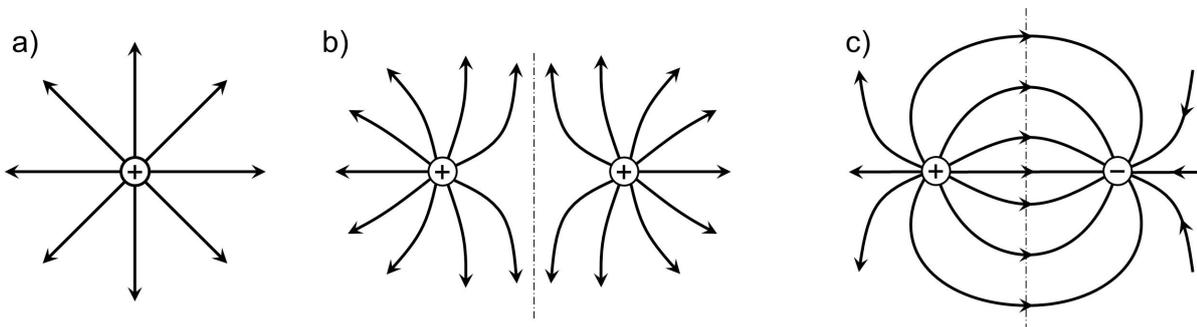
wobei  $Q = \int_V \rho_{el}(\vec{r}') \cdot dV'$  die gesamte im Volumen  $V$  eingeschlossene Ladung ist.

Zur Darstellung elektrischer Felder werden *elektrische Feldlinien* verwendet. Es sind Kurven, deren Tangenten in jedem Punkt des Raumes mit der lokalen Richtung des elektrischen Feldes übereinstimmen. Die Dichte der Feldlinien an einem Ort ist proportional zum Betrag der Feldstärke am entsprechenden Ort. Feldlinien beginnen bei positiven und enden bei negativen elektrischen Ladungen. Positive (negative) Ladungen werden deshalb auch als Quellen (Senken) des elektrischen Feldes bezeichnet. In der Elektrostatik gibt es keine geschlossenen Feldlinien, d.h. das Feld ist wirbelfrei.

#### Elektrische Feldlinien 1:

An einer kleinen Metallplatte ist ein Bündel Papierstreifen befestigt. Wird durch die Influenzmaschine Ladung auf die Platte gebracht, so erzeugt diese ein elektrisches Feld. Die Papierstreifen richten sich aufgrund der induzierten Polarisation (siehe später) entlang den Feldlinien aus (Monopolfeld). Auf eine zweite Platte wird die gleiche bzw. entgegengesetzte Ladung gebracht: die elektrischen Felder überlagern sich.

Beispiele:



**Figur 2.3:** Feldlinien für eine positive Punktladung (a), zwischen zwei gleichen positiven Punktladungen (b), und zwischen einer positiven und einer negativen Punktladung gleichen Betrags (c).

#### Elektrische Feldlinien 2:

Eine Person steht auf einem isolierten Podest und ist in Kontakt mit einem Van-de-Graaff-Generator, durch den Ladungen an die Extremitäten transportiert werden. Die Ladungen erzeugen ein elektrisches Feld. Haare richten sich entlang den Feldlinien aus.

#### Elektrische Feldlinien 3:

Elektrische Felder werden im Raum zwischen Metallformen, auf denen sich Ladungen befinden, erzeugt. Längliche Kunstfasern, die auf eine Glasplatte gestreut werden, richten sich durch induzierte Polarisation (siehe später) parallel zu den elektrischen Feldlinien aus. Feldlinien stehen senkrecht auf leitenden Flächen.

## 2.4 Der Satz von Gauss

Richtung und Dichte der elektrischen Feldlinien beschreiben vollständig das elektrische Feld. Eine wichtige Rechengröße eines Vektorfeldes ist der *Feldfluss*. Man kann sich vorstellen, dass elektrische Feldlinien von positiven Ladungen (Quellen) zu negativen Ladungen (Senken) "fließen" (Fig. 2.3). Der Feldfluss gibt im wesentlichen an, wie viele Feldlinien eine vorgegebene Fläche durchstossen.

Der *elektrische Feldfluss*  $\Phi_E$  durch die Fläche A ist wie folgt definiert:

$$\Phi_E = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad (2.11)$$

Die Fläche A kann offen sein oder ein Volumen umfassen, d.h. geschlossen sein. Im Gegensatz zum elektrischen Feld, das lokale Information enthält, ist der Fluss immer eine Größe, die ein endliches Gebiet charakterisiert – es wird ja über die Fläche A integriert.

Für ein infinitesimales Flächenelement  $d\vec{A}$  gilt:

$$d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{A} = |\vec{E}| \cdot |d\vec{A}| \cdot \cos \alpha \quad (\text{mit Zwischenwinkel } \alpha) \quad (2.12)$$

Das Flächenelement ist ein Vektor, dessen Betrag die Grösse der Fläche ist und dessen Richtung senkrecht zur Fläche (= Normalenvektor) zeigt. Bei der Berechnung des Flusses muss die Richtung, mit welcher die Feldlinien die infinitesimale Fläche durchstossen, berücksichtigt werden. Fließen die Feldlinien entlang dem Flächenelement (also Feldlinien senkrecht zum Normalenvektor, d.h.  $\alpha = 90^\circ$ ), so "fließt" nichts durch, also  $d\Phi_E = 0$ .

Bevor auf den Satz von Gauss eingegangen wird, sollen zwei anschauliche und qualitative Überlegungen zum Feldfluss erfolgen:

- Da alle elektrischen Feldlinien ihren Ursprung in einer positiven Ladung haben und in einer negativen enden, ist der Fluss durch eine Fläche, welche eine Punktladung vollständig umhüllt, konstant und unabhängig von der Grösse und Form der Umhüllung. Solange die eingeschlossene Ladung konstant bleibt, stossen immer gleich viele Feldlinien durch die Umhüllung.
- Der elektrische Fluss, der aus einer beliebigen ein Volumen umschliessenden Fläche hervorquillt, muss demnach proportional zur eingeschlossenen Ladung sein.
- Der elektrische Fluss durch eine beliebige in sich geschlossene Fläche ist null, falls die Fläche keine Ladung umschliesst, oder die resultierende Ladung 0 ist. Die Anzahl der eintretenden und austretenden elektrischen Feldlinien ist dann gleich.

Für die formale Behandlung wählen wir zunächst eine Punktladung  $Q$  im Ursprung. Das elektrische Feld im Abstand  $r$ , sowie der elektrische Feldfluss durch eine Kugeloberfläche  $A$ , in deren Zentrum die Ladung  $Q$  ist, sind gegeben durch:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (2.13)$$

$$\Phi_E = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_A \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \underbrace{\int dA}_{\text{Oberfläche der Kugel}} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (2.14)$$

Der Fluss hängt also, wie vermutet, einzig von der eingeschlossenen Ladung ab, und ist proportional zu dieser! Ladungen ausserhalb der Kugel, die ebenfalls zum elektrischen Feld beitragen, sind für den Fluss nicht relevant (Punkt 3 oben).

Gleichung (2.14) lässt sich nun auf mehrere Ladungen, auf beliebige Ladungsverteilungen und auf beliebige geschlossene Flächen verallgemeinern. Es gilt dann der **Satz von Gauss**:

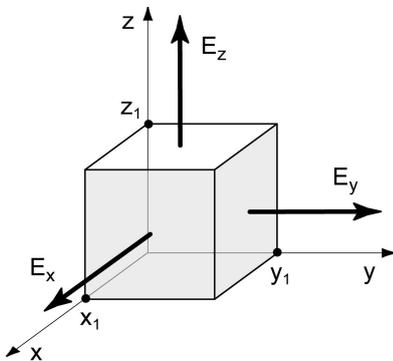
$$\Phi_E(\text{durch } A) = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \sum_{\text{in } A} Q \quad (2.15)$$

Der elektrische Feldfluss durch eine geschlossene Fläche ist gleich der eingeschlossenen Ladung dividiert durch die elektrische Feldkonstante  $\epsilon_0$ . Das entspricht der ersten Maxwell Gleichung in *integraler Form* für das Vakuum, wie sie in 1.5 schon angegeben wurde.

Hauptsächlich für Studierende der Physik:

Den Übergang von der integralen Form (2.15) zur lokalen Form illustrieren wir anhand der Betrachtung des elektrischen Feldflusses durch eine geschlossene Fläche  $A$ . Da die Form der geschlossenen Fläche irrelevant ist, wählen wir einen Würfel, der vom Ursprung eines Koordinatensystems bis zum Punkt  $(x_1, y_1, z_1)$  aufgespannt wird (Fig. 2.4). Aus (2.15) folgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \sum_{\text{in } A} Q &= \Phi_E = \iint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \iint dy \cdot dz \cdot E_x(x_1, y, z) - \iint dy \cdot dz \cdot E_x(0, y, z) \\ &\quad + \iint dx \cdot dz \cdot E_y(x, y_1, z) - \iint dx \cdot dz \cdot E_y(x, 0, z) \\ &\quad + \iint dx \cdot dy \cdot E_z(x, y, z_1) - \iint dx \cdot dy \cdot E_z(x, y, 0) \\ &= \iint dy \cdot dz \cdot \underbrace{(E_x(x_1, y, z) - E_x(0, y, z))}_{=\int_0^{x_1} dx \frac{\partial E_x}{\partial x}} + \iint dx \cdot dz \cdot \underbrace{(E_y(x, y_1, z) - E_y(x, 0, z))}_{=\int_0^{y_1} dy \frac{\partial E_y}{\partial y}} + \dots \\ &= \iiint dx \cdot dy \cdot dz \cdot \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = \iiint dx \cdot dy \cdot dz \cdot \text{div } \vec{E} \quad . \end{aligned}$$



Figur 2.4: Würfel im elektrischen Feld

Auch die eingeschlossene Ladung kann als Volumenintegral ausgedrückt werden, indem man die Ladungsdichte verwendet:

$$\sum_{\text{in } A} Q = \iiint dx \cdot dy \cdot dz \cdot \rho_{\text{el}} \quad ,$$

und somit

$$\iiint dx \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{\rho_{\text{el}}}{\epsilon_0} = \iiint dx \cdot dy \cdot dz \cdot \text{div } \vec{E}$$

Die Wahl des Würfels ist beliebig. Somit muss die Gleichheit auch für die Integranden gelten:

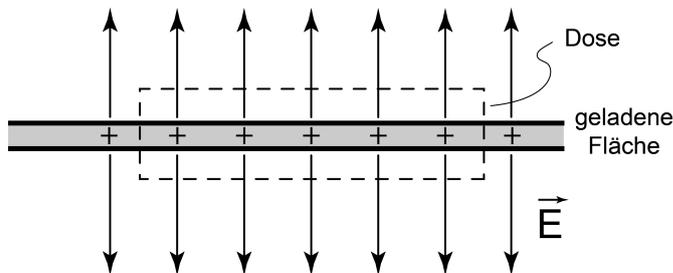
$$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \rho_{\text{el}} \quad (2.16)$$

Dies entspricht der 1. Maxwell Gleichung in *differentieller Form* für das Vakuum, die bereits in (1.1) vorgestellt wurde. *Positive* Ladungsdichte erzeugt ein *divergierendes* elektrisches Feld (Feldlinien divergieren, Fig. 2.3a).

## 2.5 Elektrische Felder einfacher Anordnungen

### 2.5.1 Elektrisches Feld einer geladenen Fläche

Eine ebene, unendlich ausgedehnte Fläche trage die Flächen-Ladungsdichte  $\sigma_{\text{el}} = \frac{Q}{A}$ . Wie gross ist die elektrische Feldstärke auf der Fläche?



**Figur 2.5:** Elektrisch positiv geladene Fläche und zugehöriges elektrisches Feld  $E$ . Die Dose (gestrichelt) mit Deckfläche  $A$  schliesst die Ladung  $Q$  ein.

Der Satz von Gauss liefert einen Zusammenhang zwischen Ladung und elektrischer Feldstärke. Wir denken uns eine Dose (gestrichelt in Fig. 2.5), mit welcher wir einen Teil der Ladung auf der Fläche einschliessen. Die Dose ist so gewählt, dass wir die Symmetrie des Problems ausnützen. Die Feldlinien fliessen senkrecht durch Grund- und Deckfläche  $A$  der Dose, jedoch nicht durch den Mantel. Somit lautet der Satz von Gauss für die Dose:

$$2 \cdot |\vec{E}| \cdot A = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{A \cdot \sigma_{\text{el}}}{\epsilon_0}, \quad \text{also} \quad |\vec{E}| = \frac{\sigma_{\text{el}}}{2 \cdot \epsilon_0} . \quad (2.17)$$

### 2.5.2 Elektrisches Feld eines geladenen geraden Drahts

Ein unendlich langer dünner Draht trage die Linien-Ladungsdichte  $\zeta_{\text{el}} = Q/\ell$ . Gesucht ist das elektrische Feld im Abstand  $r$ . Wiederum machen wir vom Satz von Gauss Gebrauch und wählen eine dem Problem angepasste geschlossene Fläche. Aus Symmetriegründen ist offensichtlich, dass das Feld axialsymmetrisch sein muss. Wir wählen als Dose einen Zylinder der Höhe  $\ell$  entlang des Drahtes. Die eingeschlossene Ladung ist:

$$Q = \ell \cdot \zeta_{\text{el}} .$$

Der Satz von Gauss über die Dose mit Radius  $r$  und Mantelfläche  $2 \cdot \pi \cdot r \cdot \ell$  ergibt:

$$|\vec{E}(r)| \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \ell = \frac{\ell \cdot \zeta_{\text{el}}}{\epsilon_0}, \quad \text{also} \quad |\vec{E}(r)| = \frac{\zeta_{\text{el}}}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r} .$$

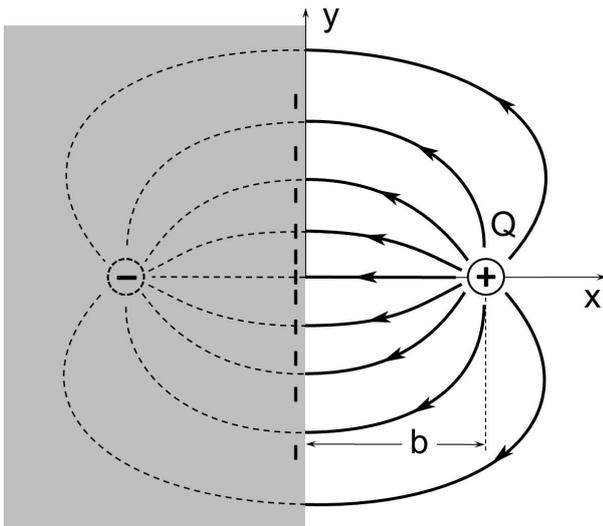
Falls ein Draht mit endlichem Radius  $a$  betrachtet wird, kann die Ladungsdichte als Ladung/Fläche angegeben werden:  $\sigma_{\text{el}} = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot \ell \cdot a}$ . Somit ergibt sich

$$|\vec{E}(r)| = \frac{a \cdot \sigma_{\text{el}}}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} . \quad (2.18)$$

### 2.5.3 Elektrisches Feld einer Punktladung nahe einer Leiterplatte (Spiegelladung)

Eine positive Punktladung  $Q$  befindet sich im Abstand  $b$  einer elektrischen Leiterebene wie in Fig. 2.6 gezeigt. Durch das elektrische Feld der positiven Ladung werden negative Ladungsträger in der Platte angezogen und verschoben. Es entsteht eine induzierte negative Ladungsverteilung auf der Platte, deren Gesamtbetrag gleich gross ist wie die felderzeugende positive Ladung. Diese *induzierten Ladungen* in der Platte verschieben sich solange, bis die Summe der auf die Ladungsträger einwirkenden Kräfte Null ist. Dann verschwindet die parallele Komponente der elektrischen Feldstärke auf der Platte. Das heisst: alle Feldlinien, die von  $Q$  ausgehen, enden *senkrecht* auf der Leiterebene.

Zur Berechnung des elektrischen Feldes kann man die Metalloberfläche durch eine *Spiegelladung*  $-Q$  im Abstand  $2 \cdot b$  ersetzen. Das durch das Ladungspaar entstehende E-Feld ist rechts der Symmetrieachse identisch mit dem gesuchten Feld. Die Feldlinien stehen senkrecht auf der Symmetrieachse und erfüllen somit die Bedingung an der Metalloberfläche an jedem Ort. Damit ist der Feldverlauf auf der rechten Seite des Leiters analog zu jenem eines Dipols, bei dem die negative Ladung im Abstand  $2 \cdot b$  von der positiven entfernt wäre (Begriff der Spiegelladung).



**Figur 2.6:** Elektrisches Feld einer positiven Ladung  $Q$  im Abstand  $b$  zu einem leitenden Halbraum (grau). Die positive Ladung induziert eine negative Flächenladungsdichte auf der Metalloberfläche. Das resultierende elektrische Feld ist identisch zu einem Feld, das durch die Ladung  $Q$  und die Spiegelladung  $-Q$  erzeugt wird.

Es soll nun mit der Methode der Spiegelladung das elektrische Feld und die induzierte Ladungsverteilung auf der Metalloberfläche berechnet werden. Unter Verwendung der Methode der Spiegelladung erhalten wir:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left( \frac{\vec{r} - \vec{b}}{|\vec{r} - \vec{b}|^3} - \frac{\vec{r} + \vec{b}}{|\vec{r} + \vec{b}|^3} \right), \quad (2.19)$$

wobei  $\vec{b}$  vom Ursprung auf die Ladung  $+Q$  zeigt. Mit dem Satz von Gauss kann man auch die Verteilung der induzierten elektrischen Ladungsdichte auf der Metalloberfläche berechnen :

$$\sigma_{el}(y) = -\frac{Q}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{b}{(y^2 + b^2)^{3/2}}.$$

Hauptsächlich für Studierende der Physik:

Warum funktioniert die Methode der Spiegelladung?

Nach (2.22) gilt  $\vec{E} = -\text{grad}\phi$ , und nach dem Satz von Gauss somit  $\text{div}(\text{grad}\phi) = -\rho_{\text{el}} / \epsilon_0$ . Dies ist die *Poissongleichung*, eine lineare partielle Differentialgleichung, die eine eindeutige Lösung hat. Die Ladungsdichte  $\rho_{\text{el}}(\vec{x})$  im rechten Halbraum ist gegeben, das Potential  $\phi(\vec{x})$  ist gesucht. Hat man eine Lösung gefunden, die die Randbedingungen (Feldlinien stehen senkrecht auf der Leiterplatte) erfüllt, ist dies die einzig mögliche.

*Challenge:* Die Ladung  $Q$  in b (Fig. 2.6) habe die Masse  $m$  und sei zunächst in Ruhe. Es wirkt die Kraft  $F$ , die die Masse  $m$  Richtung Platte beschleunigt. Berechnen Sie die Flugdauer, bis die Ladung auf der Platte aufschlägt.

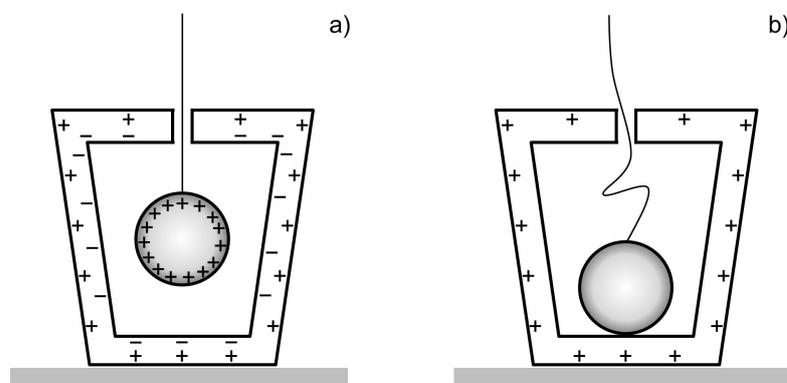
Hauptsächlich für Studierende der Physik

### 2.5.4 Elektrisches Feld im Innern einer leitenden, geschlossenen Fläche (Faradaykäfig)

#### Geladene Kugel in geschlossenem Metallkessel:

Eine isoliert aufgehängte, positiv geladene Kugel, die mit einem Elektrometer verbunden ist, befindet sich im Innern eines geschlossenen Leiters. Durch Influenz sammeln sich auf der Innenseite des leitenden Kessels ebenso viel negative, auf der Aussenseite ebensoviel positive Ladung, wie auf der Kugel ist. Nun wird die geladene Kugel mit dem leitenden Kessel in Berührung gebracht. Das Elektrometer zeigt an, dass keine Ladung mehr auf der Kugel ist, da die positive Ladung der Kugel die induzierte negative Ladung auf der Innenseite des Kessels neutralisiert hat. Übrig bleibt die ursprünglich induzierte positive Ladung auf der Aussenseite.

Eine geladene Kugel wird in einen metallenen Kessel mit Deckel eingeschlossen (Fig. 2.7). Nach dem Kontakt der geladenen Kugel mit dem Kessel bleibt die induzierte positive Ladung an der Aussenwand übrig. Man sagt (unpräzise), die Ladung sei von der Kugel an die Aussenwand *abgeflossen*. Im Innern der geschlossenen Fläche verschwindet nun das elektrische Feld, da sich keine Ladungen mehr im Innern befinden.



**Figur 2.7:** (a) Eine in einem Metallgefäß frei hängende, positiv geladene Kugel erzeugt an der inneren Oberfläche eine negative Influenzladung. (b) Nach Berührung neutralisiert sich die positive Ladung der Kugel mit der negativen Influenzladung. Übrig bleibt die positive Influenzladung aussen.

Diese Beobachtung kann man mit dem Coulomb Gesetz verstehen. Da sich die Ladungsträger voneinander abstossen, verschieben sie sich so lange im leitenden Körper bis die resultierende Kraft minimal ist. Auf einem geladenen leitenden Körper sammeln sich die Ladungsträger also auf der *äusseren* Oberfläche an.

Diese einfache Beobachtung ist der Ausgangspunkt für wichtige technische Anwendungen.

#### **Ladungslöffel:**

Ein fast geschlossenes Metallgefäss ist an ein Elektrometer angeschlossen. Eine isolierte Kugel wird nun geladen, indem sie auf ein Potential von 10 kV gebracht wird. Die Ladung kann auf das Metallgefäss nur dann übertragen werden, wenn die Kugel mit dem Gefäss an seiner Innenseite in Kontakt gebracht wird und so die Ladung "abfließt". Berührt man an der äusseren Oberfläche, kann keine Ladung übertragen werden, da sich dort bereits gleichnamige Ladung befindet.

#### **Van-de-Graaff-Generator:**

Der Van-de-Graaff-Generator beruht auf dem Prinzip des Ladungslöffels. Auf einem Gummiband (Isolator) wird durch Reibung Ladung aufgebracht und in das Innere einer leitenden Hohlkugel transportiert. Dort "fließt" die Ladung durch einen Kontakt auf die Innenseite der Hohlkugel ab. So können sehr hohe Spannungen von einigen  $10^5\text{V}$  erzeugt werden.

Eine geschlossene Leiterfläche schirmt also ein äusseres elektrisches Feld ab, das heisst der Raum innerhalb der geschlossenen Fläche ist feldfrei. Der Beweis kann mit dem Satz von Gauss erbracht werden: da im inneren keine Ladung vorhanden ist, verschwindet der elektrische Feldfluss für jede beliebige geschlossene Fläche *innerhalb* der Leiterfläche. Also gilt dort  $\vec{E} = 0$ .

#### **Faradaykäfig:**

Ein Käfig aus Metallgitter schirmt in sehr guter Näherung äussere elektrische Felder ab (siehe Fig. 2.7b). Der Käfig wird auf ein hohes Potential gebracht. Dies wird durch an den Flächen befestigte Papierstreifen sichtbar gemacht, die sich senkrecht zu den Aussenflächen richten, im Innern jedoch nicht ausgerichtet sind.

Das Prinzip der Anordnung in Fig. 2.7a kann zum experimentellen Nachweis der Gültigkeit des Gesetzes von Coulomb, und somit von Satz von Gauss, verwendet werden. Eine leitende Kugel wird in eine äussere Kugel eingeschlossen und über ein sehr empfindliches Ampèremeter mit der Innenseite der äusseren Kugel verbunden. Nun wird die äussere Kugel geladen und entladen. Falls das Coulomb Gesetz gilt, so fließt zu keinem Zeitpunkt ein Strom zwischen der äusseren zur inneren Kugel. Nach heutiger Erkenntnis weicht der Exponent in der r-Abhängigkeit im Coulomb Gesetz nicht mehr als  $6 \cdot 10^{-17}$  vom Wert 2 ab.

## 2.6 Das elektrostatische Potential

Falls eine elektrische Ladung in einem elektrischen Feld verschoben wird, muss mechanische Arbeit verrichtet werden, oder es wird Arbeit gewonnen. Somit können wir die Arbeit berechnen, um eine Probeladung  $q$  im elektrischen Feld  $\vec{E}$  von A nach B zu verschieben:

$$W_{A \rightarrow B} = - \int_A^B \vec{F}(s) \cdot d\vec{s} = - \int_A^B q \cdot \vec{E}(s) \cdot d\vec{s} = -q \cdot \int_A^B \vec{E}(s) \cdot d\vec{s} \quad .$$

Als einfachsten Fall betrachten wir das elektrische Feld einer Punktladung (Fig. 2.8). Der Integrationsweg kann in einen radialen und einen azimuthalen Teil zerlegt werden. Dies gilt auch infinitesimal. Wir gehen nun von A nach B entweder via C oder via D. Dabei gilt:

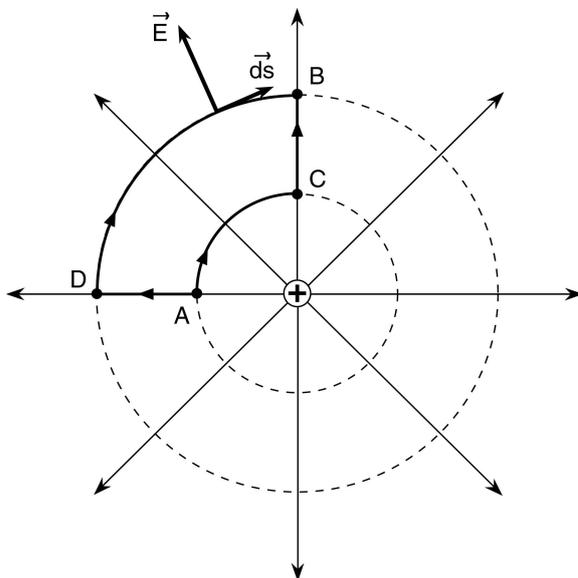
$$W_{A \rightarrow B} = W_{A \rightarrow D} + W_{D \rightarrow B} = W_{A \rightarrow D} \quad ,$$

$$\tilde{W}_{A \rightarrow B} = W_{A \rightarrow C} + W_{C \rightarrow B} = W_{C \rightarrow B} \quad .$$

Die Arbeit auf den azimuthalen Wegstrecken DB und AC ist null, da dort  $\vec{E} \perp d\vec{s}$ . Der Betrag der elektrischen Feldstärke  $\vec{E}$  hängt nur vom Abstand von der Punktladung ab. Daher gilt  $W_{A \rightarrow D} = W_{C \rightarrow B}$ . Somit folgt unmittelbar  $W_{A \rightarrow B} = \tilde{W}_{A \rightarrow B}$ , das heisst, dass die Arbeit im elektrischen Feld **unabhängig vom gewählten Weg ist**. Kraftfelder, die diese Bedingung erfüllen, sind *konservative Kraftfelder*. Da aufgrund der Integrationsregeln  $W_{A \rightarrow B} = -W_{B \rightarrow A}$  gilt, folgt

$$W_{A \rightarrow C} + W_{C \rightarrow B} + W_{B \rightarrow D} + W_{D \rightarrow A} = -q \cdot \int_{ACBDA} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad .$$

Die Arbeit, eine Ladung im elektrischen Feld auf einem *in sich geschlossenen Weg* zu verschieben, ist Null. Das elektrische Feld ist somit ein *konservatives Kraftfeld*. Eine äquivalente Aussage ist, dass das elektrische Feld wirbelfrei ist, d.h. es gibt keine geschlossenen elektrische Feldlinien in der Elektrostatik, sondern sie gehen von positiven Ladungen aus und münden in negativen Ladungen.



**Figur 2.8:** Eine Probeladung wird im E-Feld, das durch die positive Ladung verursacht wird, auf verschiedenen Wegen von A nach B verschoben.

Die Arbeit ist proportional zur verschobenen Ladung und nur abhängig von den gewählten Anfangs- und Endpunkten des Wegs, jedoch unabhängig vom Weg. Eine entsprechende Grösse, die nur noch vom elektrischen Feld abhängt, erhält man durch Division durch  $q$ . Diese Grösse wird **elektrostatisches Potential** genannt. Es ist wie folgt definiert:

*Das elektrostatische Potential  $\varphi(\vec{r})$  in irgend einem Punkt  $\vec{r}$  in Bezug auf einen willkürlichen, aber fest gewählten Referenzpunkt, ist der Quotient aus der Arbeit  $W$ , die gegen die elektrische Feldkraft aufgewendet werden muss, um eine Probeladung  $q$  vom Referenzpunkt an die Stelle  $\vec{r}$  zu bringen, und der Ladung  $q$ .*

In Formeln lautet die Definition des elektrostatischen Potentials:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{W_{\text{Ref} \rightarrow \vec{r}}}{q} = -\frac{1}{q} \cdot \int_{\text{Ref}}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\int_{\text{Ref}}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (2.20)$$

Die Potentialdifferenz zwischen zwei bestimmten Orten  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$  nennt man **Spannung**:

$$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1) \quad (2.21)$$

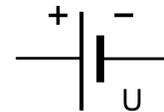
Die Arbeit, um die Ladung  $q$  von  $\vec{r}_1$  nach  $\vec{r}_2$  zu verschieben, beträgt:

$$W(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = q \cdot (\varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1)) = q \cdot U(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

Die Spannung  $U(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$  hängt nicht von der Wahl des Referenzpunkts ab.

Die Einheit des Potentials und der elektrischen Spannung ist Volt:  $[U] = V = \frac{J}{C} = \frac{W}{A}$

Das Symbol der elektrischen Spannungsquelle im Leiterkreis ist:



Das Potential hat gegenüber dem elektrischen Feld verschiedene Vorteile:

- das elektrische Potential ist ein skalares Feld, d.h. an einem beliebigen Punkt des Raumes ist das Potential durch einen Wert bestimmt, und kann deshalb einfach graphisch dargestellt werden,
- das elektrische Potential erlaubt die Berechnung der Arbeit bei der Verschiebung von Ladungen auf einfachste Weise,

- das elektrische Feld lässt sich durch Gradientenbildung aus der Potentialverteilung berechnen:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad } \varphi(\vec{r}) = -\nabla \varphi(\vec{r}) = -\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right), \quad (2.22)$$

- im ladungsfreien Raum erfüllt das Potential  $\varphi(\vec{r})$  aufgrund von (1.1) die *Laplace-Gleichung*:

$$\Delta \varphi(\vec{r}) = \nabla^2 \varphi(\vec{r}) = \text{div grad } \varphi(\vec{r}) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad . \quad (2.23)$$

Durch das elektrostatische Potential kann auch die *potentielle Energie* einer elektrischen Ladung  $q$  an der Stelle  $\vec{r}$  definiert werden:

$$E_{\text{pot}}(q, \vec{r}) = q \cdot \varphi(\vec{r}) \quad (2.24)$$

Somit schliessen wir, dass positive Ladungen bei der Verschiebung von Orten hohen Potentials zu Orten niedrigen Potentials potentielle Energie abgeben. Salopp gesagt:

*Positive Ladungen bewegen sich vom hohen zum tiefen elektrostatischen Potential; negative Ladungen bewegen sich vom tiefen zum hohen elektrostatischen Potential.*

### a) Potential einer Punktladung:

Wir berechnen nun das Potential einer Punktladung  $Q$ , die sich im Ursprung des Koordinatensystems befindet, als Funktion des Abstandes  $r$ . Es gilt:

$$|\vec{E}| = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \varphi(r) = - \int_{\text{Ref}}^r \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_{\text{Ref}}^r \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{s^2} \cdot ds \quad ,$$

wobei der Weg radial gewählt wurde (alle azimutalen Beiträge verschwinden wegen  $\vec{E} \perp d\vec{s}$ ). Als günstiger Referenzpunkt bietet sich  $r = \infty$  an, da dort die elektrische Feldstärke der Punktladung  $Q$  verschwindet.

Also folgt:

$$\varphi(r) = - \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_{\infty}^r \frac{1}{s^2} \cdot ds = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{s} \Big|_{\infty}^r = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \quad (2.25)$$

Die graphische Darstellung des elektrostatischen Potentials erfolgt in 3 Dimensionen durch Flächen, auf denen  $\varphi$  konstant ist. Alle geometrischen Orte, wo das elektrostatische Potential denselben Wert hat, bilden zusammen eine *Äquipotentialfläche*. Die Verschiebung einer Ladung auf einer Potentialfläche erfordert keine Arbeit. Daraus folgt auch, dass die Feldlinien

des elektrischen Feldes immer senkrecht zu den Äquipotentialflächen stehen ( $\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$ , mit  $d\vec{s}$  parallel zur Potentialfläche, und somit  $dW = 0$ ). Äquivalente Aussage:  $\vec{E} = -\nabla\varphi$ .

Im Falle von (2.25) sind die Äquipotentialflächen konzentrische Kugelflächen.

Ein enger Abstand benachbarter Potentialflächen entspricht einer hohen elektrischen Feldstärke ( $\vec{E} = -\nabla\varphi$ ), ein weiter Abstand einer niedrigen Feldstärke. Die Oberfläche eines elektrischen Leiters ist in der Elektrostatik eine Äquipotentialfläche. Feldlinien stehen somit senkrecht auf ideal leitenden Flächen.

**b) Potential eines geladenen geraden Drahts endlicher Dicke:**

$$\text{Mit (2.18): } \varphi(r) = - \int_{\text{Ref}}^r \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_{\text{Ref}}^r E \cdot ds = - \frac{a \cdot \sigma_{\text{el}}}{\epsilon_0} \cdot \int_a^r \frac{ds}{s} = - \frac{a \cdot \sigma_{\text{el}}}{\epsilon_0} \cdot \ln \frac{r}{a} \quad (2.26)$$

- a    Radius des Drahtes
- $\sigma_{\text{el}}$     Oberflächenladungsdichte
- r    Abstand vom Mittelpunkt des Drahtquerschnitts

Referenzpunkt für das Potential ist die Drahtoberfläche  $\varphi(a) = 0$ .

**c) Potential einer Ladung im Abstand b einer leitenden Platte:**

$$\text{Mit (2.25): } \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left( \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{b}|} + \frac{-Q}{|\vec{r} + \vec{b}|} \right)$$

- Q    Ladung
- $\vec{b}$     Ortsvektor der Position der Ladung Q

Hier wurde wiederum die Methode der Spiegelladung verwendet (siehe Fig. 2.6). Der Referenzpunkt für das Potential ist der Lotpunkt der Ladung auf der Platte  $\varphi(\vec{r} = 0) = 0$ .

Hauptsächlich für Studierende der Physik: \_\_\_\_\_

**d) Potential in der Nähe eines geladenen Gitters:**

Eine interessante Anwendung ist der Faraday-Käfig, der aus einem würfelförmigen Gitter gebildet wird. Wir betrachten eine Gitterfläche, die aus unendlich langen Drähten besteht, die mit identischer Oberflächenladung (d.h. alle auf demselben Potential) je im Abstand a auf der x-Achse aufgereiht sind und parallel zur z-Achse stehen. Die Drähte befinden sich an den Stellen  $(x, y) = (k \cdot a, 0)$  mit  $k \in \mathbb{Z}$ . Dieses Gitter bildet eine Deckfläche des Faraday-Käfigs.

Wir bestimmen nun das elektrostatische Potential  $\varphi(x, y)$ , das die elektrischen Ladungen des Gitters im Raum verursachen. Da sonst keine Ladungen im Raum sind, gilt nach (2.23)  $\nabla^2\varphi(x, y) = 0$ . Mit Hilfe der Separation der Variablen können wir einen allgemeinen Lösungsansatz für die *Laplace Gleichung* probieren, wobei dieser aus Symmetriegründen in der  $x$ -Richtung die Periodizität des Gitters aufweisen muss:

$$\varphi(x, y) = c + E_0 \cdot y + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k(y) \cdot \cos \frac{2\pi k}{a} x \quad ,$$

mit  $c$  und  $E_0$  beliebig und konstant, und  $\tilde{a}_k(y)$  sind noch zu bestimmende Koeffizientenfunktionen. Das Potential  $\varphi(x, y)$  muss die Laplace Gleichung überall im Raum erfüllen:

$$\nabla^2\varphi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{d^2\tilde{a}_k}{dy^2} - \tilde{a}_k(y) \cdot \left(\frac{2\pi k}{a}\right)^2 \right) \cdot \cos \frac{2\pi k}{a} x = 0 \quad .$$

Da dies insbesondere für alle  $x$  gilt, muss der Ausdruck in der grossen Klammer für jedes  $k$  verschwinden. Damit die Lösung in  $y > 0$  beschränkt bleibt, müssen alle Koeffizienten  $\tilde{a}_k(y)$  in positiver  $y$ -Richtung exponentiell abklingen:

$$\tilde{a}_k(y) = a_k \cdot e^{-(2\pi k/a)y} \quad , y > 0 \quad .$$

Das Potential  $\varphi(x, y)$  ist also nur in der Nähe des Gitters "kompliziert". Unmittelbar beim einzelnen Draht ist das Potential durch (2.26) gegeben. Die Koeffizienten  $a_k$  sind durch die Oberflächenladung, bzw. das Potential auf dem einzelnen Draht bestimmt. Das ist aber eine lange Rechnung, die hier nicht durchgeführt wird. Entfernt vom Gitter, im Abstand von einigen  $a/2\pi k$ , ist das Potential von der einfachen Form  $\varphi(x, y) = c + E_0 \cdot y$ . Das elektrische Feld  $\vec{E}$  ist somit

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = (0, -E_0, 0) \quad .$$

Weit weg vom Gitter ist das elektrische Feld also konstant. Wir stellen nun, parallel zum ersten Gitter, ein zweites Gitter mit derselben Oberflächenladung bei  $y = b \gg a$  hin. Das Potential kann nun im Bereich  $0 < y < b$  durch Superposition wie folgt geschrieben werden:

$$\varphi_{\text{tot}}(x, y) = \varphi(x, y) + \varphi(x, b-y) = \varphi_0 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot (e^{-\pi b/a})^k \cdot \cos \frac{2\pi k}{a} x \cdot \cosh \frac{2\pi k}{a} \left(y - \frac{b}{2}\right) \quad ,$$

mit der Konstanten  $\varphi_0$ . Alle Summanden klingen schnell mit Potenzen von  $e^{-\pi b/a}$  ab. Je grösser der Faraday-Käfig und je näher die Drähte beieinander stehen, desto grösser ist  $b/a$  und desto besser ist die Näherung  $\varphi_{\text{tot}}(x, y) \approx \varphi_0$  im Raum zwischen den beiden Gittern. Das elektrische Feld ist deshalb dort in sehr guter Näherung

$$\vec{E} = -\nabla\varphi_{\text{tot}} \approx -\nabla\varphi_0 = (0, 0, 0) \quad .$$

## 2. Kondensatoren, Kapazität

### 2.7.1 Die Kapazität

Tragen zwei Metallkugeln, die leitend miteinander verbunden sind, dieselbe Ladung? Wir haben bereits bei der Metallplatte in der Nähe einer Punktladung gesehen, dass wegen der Influenz die Ladungsverteilung auf einer Äquipotentialfläche ortsabhängig sein kann.

Eine Kugel mit Radius  $r_1$  trage die Ladung  $Q_1$ . Das Potential auf der Kugeloberfläche bezüglich einem unendlich weit entfernten Referenzpunkt beträgt:

$$\varphi(r_1) = -\int_{\infty}^{r_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{Q_1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_{\infty}^{r_1} \frac{1}{s^2} \cdot ds = \frac{Q_1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_1} \quad (2.27)$$

Zwei leitend verbundene Kugeln mit unterschiedlichem Radius und Ladung bilden eine einzige Potentialfläche. Dies ist dann erfüllt, falls  $Q_1 / r_1 = Q_2 / r_2$ . Grössere Kugeln tragen bei gleichem Potential also mehr Ladung. Man sagt, sie haben eine grössere *Kapazität*.

Die Proportionalitätskonstante zwischen Ladung und Potentialdifferenz  $U$  nennt man Kapazität:

$$Q = C \cdot U$$
(2.28)

Die Einheit der Kapazität ist ein Farad  $[C] = C \cdot V^{-1} = F = A \cdot s \cdot V^{-1}$

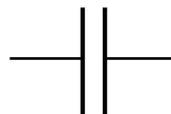
Eine isolierte Kugel mit Radius  $r$  hat somit gegenüber dem Unendlichen eine Kapazität von:

$$C = 4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r \quad (2.29)$$

Es ist bemerkenswert, dass die Kapazität eine *rein geometrische* Grösse ist.

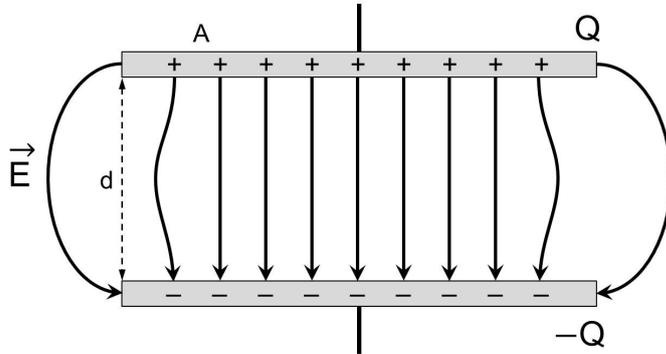
Grössere Kapazitäten erreicht man, indem zwei Leiter in einen geringen Abstand voneinander gebracht und unterschiedlich aufgeladen werden. Eine solche Anordnung wird Kondensator genannt. Der einfachste Kondensator ist ein Plattenkondensator, der aus zwei parallelen Leiterplatten besteht.

Das Symbol des Kondensators im Leiterkreis ist:



### a) Der Plattenkondensator

Gegeben sind zwei parallele Leiterplatten der Fläche  $A$  im Abstand  $d$  voneinander ( $d \ll A$ ), wie in Fig. 2.9 dargestellt. Um die Kapazität dieser Anordnung zu berechnen, müssen wir die Ladung auf den Platten, sowie die Spannung zwischen den Platten kennen. Wir nehmen an, die Ladung auf der Platte sei  $Q$ , und wir vernachlässigen Randeffekte.



**Figur 2.9:** Kondensator (Plattenfläche  $A$  im Abstand  $d$ ) mit Ladung  $Q$  und Linien des elektrischen Feldes  $E$ . Im Innern der Platten ist das elektrische Feld nahezu homogen.

Anwendung des Satzes von Gauss (Dosenmethode) ergibt die elektrische Feldstärke

$$|\vec{E}| = \frac{1}{A} \cdot \frac{Q}{\epsilon_0} \quad . \quad (2.30)$$

Die elektrische Feldstärke ist konstant im Raum zwischen den Platten. Das ist eine Näherung, denn an den Plattenenden ist das Feld inhomogen.

Die Potentialdifferenz zwischen den Platten ist nach (2.18) und (2.19) gegeben durch

$$U = \varphi(\text{obere Platte}) - \varphi(\text{untere Platte}) = - \int_{\text{Ref}}^{\text{oben}} \vec{E} \cdot d\vec{s} - \left( - \int_{\text{Ref}}^{\text{unten}} \vec{E} \cdot d\vec{s} \right) = \int_{\text{oben}}^{\text{unten}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot d \quad .$$

Somit erhalten wir für die Kapazität des Plattenkondensators

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_0 \cdot A}{d} \quad (2.31)$$

wiederum eine rein geometrische Grösse.

#### Plattenkondensator:

Zwei Messingplatten werden in geringem Abstand gegenüber einander aufgestellt, und eine Ladung wird auf eine Platte gebracht. Die Spannung zwischen den beiden Platten reduziert sich bei konstanter Ladung, falls der Abstand verkleinert wird. Die Platten können bei kleinerem Abstand dieselbe Ladung bei kleinerer Spannung "halten". Somit haben sie bei kleinerem Abstand eine grössere Kapazität.

### b) Der Kugelkondensator

Gegeben sind zwei konzentrische, leitende Hohlkugeln mit  $r_2 > r_1$ . Durch Anwendung des Satz von Gauss im Zwischenraum der konzentrischen Kugeln, und Integration des elektrischen Feldes zur Berechnung der Spannung, kann man zeigen, dass

$$U(r_1, r_2) = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_1 \cdot r_2}$$

$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{r_1 \cdot r_2}{r_2 - r_1} \quad (2.32)$$

Falls nur eine Kugel vorhanden ist, geht  $r_2 \rightarrow \infty$  und wir erhalten aus (2.32)  $C = 4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_1$  in Übereinstimmung mit (2.29).

### c) Der Zylinderkondensator

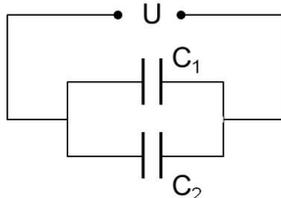
Zwei leitende Zylinderflächen der Länge  $L$  sind konzentrisch ineinander gestellt. Der innere Zylinder habe den Radius  $r_1$ , der äussere  $r_2$ . Anwendung des Satzes von Gauss im Zwischenraum ergibt die elektrische Feldstärke. Daraus erhält man durch Integration die Potentialdifferenz und somit die Kapazität eines Zylinderkondensators:

$$C = \frac{Q}{U} = 2\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{L}{\ln(r_2 / r_1)}$$

## 2.7.2 Schaltungen von Kondensatoren

### a) Parallelschaltung

Bei der Parallelschaltung liegen zwei Kondensatoren an derselben Spannung. Die Ladungen an den beiden Polen der zwei Kondensatoren addieren sich:



$$Q_1 = C_1 \cdot U$$

$$Q_2 = C_2 \cdot U$$

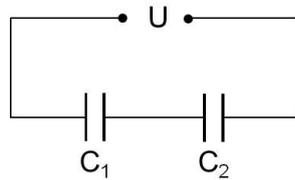
$$Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2) \cdot U = C \cdot U$$

Parallelschaltung von zwei Kondensatoren:	$C = C_1 + C_2$	(2.33)
---	-----------------	--------

Bei der Parallelschaltung addieren sich die Kapazitäten zur Ersatzkapazität.

**b) Serieschaltung**

Da zwischen zwei in Serie geschalteten Kondensatoren keine Ladung gebracht werden kann, gilt  $-Q_1 + Q_2 = 0$ . Die Spannungen über den Kondensatoren addieren sich:



$$Q_1 = Q_2 = Q$$

$$U_1 = \frac{Q}{C_1} \quad U_2 = \frac{Q}{C_2}$$

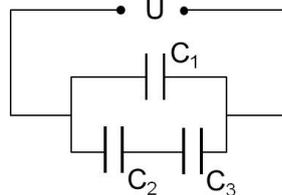
$$U = U_1 + U_2 = Q \cdot \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = Q \cdot \frac{1}{C}$$

Serieschaltung von zwei Kondensatoren:  $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$  (2.34)

Bei der Serieschaltung addieren sich die reziproken Werte der Kapazitäten zur reziproken Ersatzkapazität.

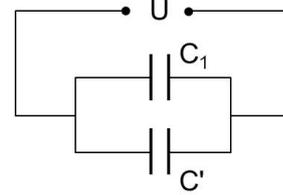
**c) Kombinationen von Parallel- und Serieschaltungen (Beispiele)**

Schaltung:



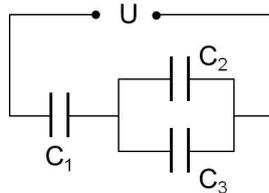
$$C' = \frac{C_2 \cdot C_3}{C_2 + C_3}$$

Ersatzschaltung:



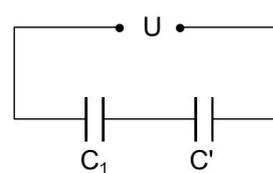
$$C = C_1 + C' = C_1 + \frac{C_2 \cdot C_3}{C_2 + C_3}$$

Schaltung:



$$C' = C_2 + C_3$$

Ersatzschaltung:



$$C = \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C'} \right)^{-1} = \frac{C_1 \cdot C'}{C_1 + C'} = \frac{C_1 \cdot (C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3}$$

### 2.7.3 Im elektrischen Feld gespeicherte Energie

#### Entladung von Kondensatoren:

An einen Kondensator (3.3 F) wird eine Spannung (5.5 V) angelegt. Danach werden die Pole des Kondensators über eine Glühbirne verbunden. Die Birne leuchtet mit monoton abnehmender Intensität für einige Sekunden.

#### Entladung von Kondensatoren:

Ein Kondensator mit  $C = 2 \mu\text{F}$  wird mit  $U = 3200 \text{ V}$  aufgeladen. Danach werden die Pole im Gas-Strahl eines Bunsenbrenners in Kontakt gebracht. Der Funke, der bei diesem Kurzschluss entsteht, entzündet eine Flamme.

Aus diesen Versuchen schliessen wir, dass der Kondensator Energie speichern kann.

#### a) Die im geladenen Kondensator gespeicherte Energie:

Die Arbeit, um eine kleine Ladung  $\Delta Q$  von der einen Platte des Kondensators durch das E-Feld auf die andere Platte zu verschieben (Plattenabstand  $d$ ), ist gegeben durch:

$$\Delta W = (E \cdot \Delta Q) \cdot d = U \cdot \Delta Q = \frac{Q}{C} \cdot \Delta Q$$

und infinitesimal

$$dW = \frac{Q}{C} \cdot dQ \quad (2.35)$$

Die gesamte Arbeit, die benötigt wird, um einen ungeladenen Kondensator auf die Ladung  $Q$  aufzuladen, wird somit durch Integration von (2.35) berechnet:

$$W = E_{\text{pot}} = \int_0^Q \frac{Q'}{C} \cdot dQ' = \frac{1}{2 \cdot C} \cdot Q^2 = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2 \quad (2.36)$$

#### b) Postulat: Diese Energie steckt allgemein im elektrischen Feld

Die Energiedichte im materiefreien Raum zwischen den Platten eines Kondensators ist demnach:

$$w_{\text{el}} = \frac{E_{\text{pot}}}{\text{Volumen}} = \frac{C \cdot U^2}{2 \cdot A \cdot d} = \frac{\epsilon_0 \cdot A \cdot (E \cdot d)^2}{d \cdot 2 \cdot A \cdot d} = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}^2 \quad (2.37)$$

Es wird erst am Ende dieser Vorlesung gezeigt, dass dieser Ausdruck nicht nur für einen Plattenkondensator, sondern für das Vakuum ganz allgemein stimmt.

### c) Kraft auf eine geladene Kondensatorplatte

Die Energie im Kondensator mit Abstand  $x$  zwischen den Platten ist gegeben durch:

$$W = \frac{Q^2}{2 \cdot C} = \frac{Q^2 \cdot x}{2 \cdot \epsilon_0 \cdot A} \quad .$$

Bei einer infinitesimalen Veränderung des Abstands der Platten,  $dx$ , verändert sich die Energie um

$$dW = \frac{Q^2}{2 \cdot \epsilon_0 \cdot A} \cdot dx = F \cdot dx \quad .$$

Die Energieänderung erfolgt durch eine Kraft, die Arbeit entlang dem Weg  $dx$  verrichtet, also

$$F = \frac{Q^2}{2 \cdot \epsilon_0 \cdot A} = \frac{C^2 \cdot U^2}{2 \cdot \epsilon_0 \cdot A} = \frac{\epsilon_0 \cdot A}{2 \cdot d^2} \cdot U^2 \quad . \quad (2.38)$$

Die Platten eines Plattenkondensators ziehen sich an. Die Anziehungskraft ist proportional zum Quadrat der Spannung zwischen den Platten.

#### Thomsonwaage:

Zwei Platten werden in geringem Abstand ( $d = 6.5 \text{ mm}$ ) übereinander gestellt. Die obere Platte bildet die eine Schale einer Balkenwaage. In der anderen Schale befindet sich eine Masse. Im Gleichgewicht muss eine Spannung von  $2.1 \text{ kV}$  angelegt werden. Auflegen einer zusätzlichen Masse erfordert eine Spannung von  $3.7 \text{ kV}$ . Damit kann die elektrische Spannung direkt mit einer mechanischen Grösse in Verbindung gebracht werden und die elektrische Feldkonstante  $\epsilon_0$  bestimmt werden.

## 2.7.4 Bewegte geladene Teilchen im elektrischen Feld

### a) Beschleunigung von Elektronen und Ionen aus der Ruhelage

In einem Potential wirkt auf Elektronen eine Kraft  $\vec{F} = -(-e) \cdot \nabla \phi$ . Zwischen zwei Punkten wird die potentielle Energie des Elektrons im elektrischen Feld in kinetische Energie umgewandelt. Falls die elektrische Ladung  $Q$  zu Beginn in Ruhe war, gilt

$$E_{\text{kin}} = \frac{m \cdot v^2}{2} = \Delta E_{\text{pot}} = Q \cdot U \quad (2.39)$$

Anwendungen: Elektronenröhre, Röntgenröhre, Massenspektrometer, usw.

### b) Ablenkung bewegter geladener Teilchen

Ein Teilchen mit Ladung  $Q$  und Masse  $m$  bewege sich in  $x$ -Richtung mit Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$ . Diese wird erreicht durch Beschleunigung in einem Potential  $U_B$ . Es herrsche ein homogenes  $E$ -Feld in  $y$ -Richtung, das z.B. durch einen Plattenkondensator erzeugt wird, an dem die Spannung  $U$  liegt.

Die Bahnkurve des Elektrons kann durch Integration der auftretenden Beschleunigungskomponenten bestimmt werden:

	x-Komponente	y-Komponente
Kraft	$F_x = 0$	$F_y = Q \cdot E_y$
Beschleunigung	$a_x = 0$	$a_y = \frac{Q \cdot E_y}{m}$
Geschwindigkeit	$v_x = v_0$	$v_y = \frac{Q \cdot E_y}{m} \cdot t$
Ort	$x(t) = v_0 \cdot t$	$y(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q \cdot E_y}{m} \cdot t^2$

Die Koordinaten  $x$  und  $y$  der Ladung  $Q$  sind als Funktion der Zeit gegeben,  $x(t)$  und  $y(t)$ . Durch Elimination der Zeit erhalten wir die Bahnkurve  $y(x)$ :

$$y(x) = \frac{Q \cdot E_y}{2 \cdot m \cdot v_0^2} \cdot x^2 = \frac{Q \cdot E_y}{4 \cdot Q \cdot U_B} \cdot x^2 = \frac{U}{4 \cdot d \cdot U_B} \cdot x^2 = \frac{x^2}{4 \cdot d \cdot U_B} \cdot U \quad (2.40)$$

Das Elektron beschreibt eine Parabelbahn, deren Krümmung durch die Stärke des elektrischen Feldes (Plattenspannung) und die Anfangsgeschwindigkeit des Elektrons, also die Beschleunigungsspannung, gegeben ist. (2.40) zeigt, dass für eine gegebene Strecke  $x$  die vertikale Auslenkung  $y$  des Elektrons proportional zur angelegten elektrischen Feldstärke, bzw. Spannung, ist. Bei konstanter Beschleunigungsspannung  $U_B$  ist die Auslenkung  $y$  nur von der Spannung  $U$  abhängig. Das ist das Prinzip des Kathodenstrahloszillographen.

#### Kathodenstrahlröhre:

In einem evakuierten Kolben befindet sich ein Heizdraht, aus dem Elektronen austreten und in einem elektrischen Feld beschleunigt werden. Die Elektronen treten in das homogene Feld eines Plattenkondensators ein und werden abgelenkt. Die Flugbahn wird sichtbar gemacht, indem die Elektronen entlang einer mit fluoreszierendem Material beschichteten Platte fliegen. Da das Kraftfeld konstant ist, sind die Bahnkurven Parabeln.

Dank der kleinen Masse ( $9 \cdot 10^{-31}$  kg) lassen sich Elektronen fast trägheitsfrei ablenken. Damit können sehr schnell ändernde Signale dargestellt werden.

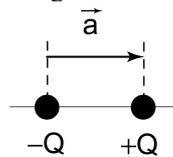
Anwendungen: Braun'sche Röhre, Kathodenstrahloszillograph, Fernsehbildschirm

## 2.8 Elektrischer Dipol

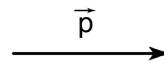
### 2.8.1 Definitionen

In der Natur treten freie Ladungen viel weniger häufig auf als permanente Ladungen oder induzierte Ladungsverschiebungen in ungeladenen Materialien. Die elementarste Form einer Ladungsverschiebung wird durch den *elektrischen Dipol* beschrieben. Er besteht idealisiert aus zwei Punktladungen mit entgegengesetztem Vorzeichen  $Q$  und  $-Q$ , die im Abstand  $a$  voneinander entfernt sind. Der Verbindungsvektor  $\vec{a}$  zeigt von der negativen zur positiven Punktladung.

Anordnung Punktladungen:



Darstellung als Vektor:



Man definiert den Vektor

$$\vec{p} = Q \cdot \vec{a} \quad (2.41)$$

und bezeichnet  $\vec{p}$  als *elektrisches Dipolmoment*.

Achtung: In der Chemie wird meist das umgekehrte Vorzeichen benutzt!

In der Natur können viele Systeme, von Molekülen bis TV Antennen, als elektrische Dipole erklärt werden. Aus diesem Grunde wird ihm hier ein separates Kapitel gewidmet.

Hauptsächlich für Studierende der Physik:

### 2.8.2 Potential und elektrisches Feld um einen elektrischen Dipol

Zur Berechnung des Potentials des Dipols am Ort  $\vec{r}$  legen wir den Ursprung der Koordinatensystems in die Mitte des Ladungspaares, das den Dipol bildet.

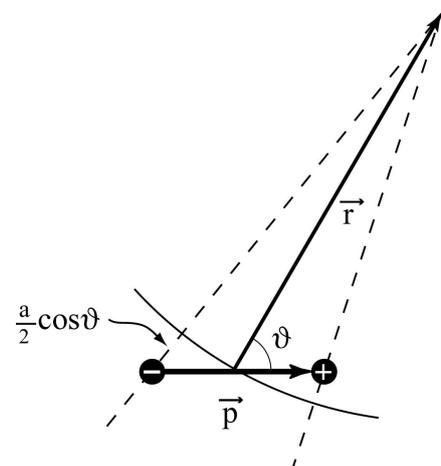
Das Potential der positiven (negativen) Ladung am Ort  $\vec{r}$  ist gemäss Fig. 2.10 in erster Näherung

$$\varphi_{\pm}(\vec{r}) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{\pm Q}{r \mp \frac{a}{2} \cdot \cos \vartheta}$$

Die Potentiale überlagern sich. Also gilt am Ort  $\vec{r}$ :

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi_+(\vec{r}) + \varphi_-(\vec{r})$$

womit



Figur 2.10: Dipol und Bezeichnungen

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left( \frac{Q}{r - \frac{1}{2} \mathbf{a} \cdot \cos \vartheta} - \frac{Q}{r + \frac{1}{2} \mathbf{a} \cdot \cos \vartheta} \right) \approx \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot \mathbf{a} \cdot \cos \vartheta}{r^2} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{r}}}{r^3} \quad (2.42)$$

wobei wir  $Q \cdot \mathbf{a} = \mathbf{p}$  und  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} \cdot \cos \vartheta = \vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{r}}$  verwendet haben.

Das Potential einer Punktladung nimmt mit  $r^{-1}$  ab, während das Potential des Dipols um eine Potenz in  $r$  schneller abnimmt ( $r^{-2}$ ). Aus dem Potential berechnet man durch Bildung des Gradienten das elektrische Feld des Dipols. Dabei verwenden wir  $\nabla(r^3) = 3 \cdot r^2 \cdot \vec{\mathbf{r}} / |\vec{\mathbf{r}}|$  und erhalten

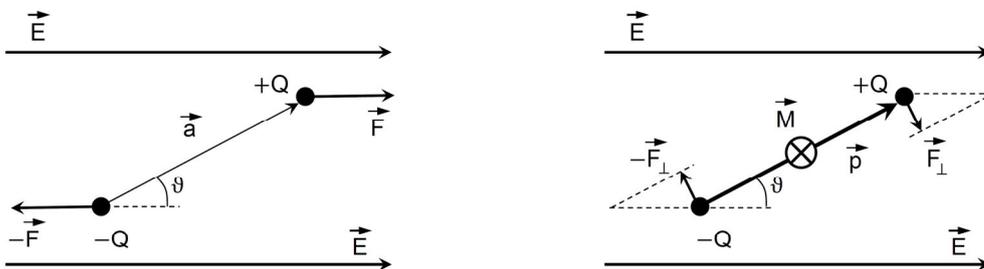
$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = -\text{grad } \varphi(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{3 \cdot (\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{r}}) \cdot \vec{\mathbf{r}} - (\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{r}}) \cdot \vec{\mathbf{p}}}{r^5} \quad (2.43)$$

Das elektrische Feld einer Punktladung nimmt mit  $r^{-2}$  ab, während das elektrische Feld des Dipols um eine Potenz in  $r$  schneller abnimmt ( $r^{-3}$ ).

*Hauptsächlich für Studierende der Physik*

### 2.8.3 Drehmoment auf einen Dipol in einem äusseren homogenen elektrischen Feld

Auf einen Dipol wirkt im homogenen äusseren elektrischen Feld ein Kräftepaar, das ein mechanisches Drehmoment verursacht und den Dipol entlang der Feldlinien ausrichtet.



**Figur 2.11:** Im homogenen E-Feld wirkt auf einen elektrischen Dipol ein Kräftepaar.

Das resultierende mechanische Drehmoment bezüglich dem Mittelpunkt ist gegeben durch:

$$\vec{\mathbf{M}} = \frac{1}{2} \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{F}} + (-\frac{1}{2} \vec{\mathbf{a}}) \times (-\vec{\mathbf{F}}) = \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{a}} \times (Q \cdot \vec{\mathbf{E}}) = (Q \cdot \vec{\mathbf{a}}) \times \vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{p}} \times \vec{\mathbf{E}}$$

$$\vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{p}} \times \vec{\mathbf{E}} \quad (2.44)$$

Dabei haben wir die in der Mechanik (Physik 1) eingeführte Definition des mechanischen Drehmoments verwendet. Der Betrag des mechanischen Drehmoments ist

$$|\vec{\mathbf{M}}| = |\vec{\mathbf{p}}| \cdot |\vec{\mathbf{E}}| \cdot \sin \vartheta, \quad (2.45)$$

wobei  $\vartheta$  den Winkel zwischen  $\vec{\mathbf{p}}$  und  $\vec{\mathbf{E}}$  bezeichnet.

**Drehmoment auf einen elektrischen Dipol:**

Eine Hantel besteht aus zwei Metallkugeln, die isoliert verbunden sind. Die Hantel ist drehbar in einem Plattenkondensator aufgehängt, der auf konstanter Spannung gehalten wird. Die Hantelenden werden mit je einer Platte in Kontakt gebracht, wodurch sie entgegengesetzt aufgeladen werden. Die Hantel wird zu einem elektrischen Dipol, auf den im elektrischen Feld ein Drehmoment wirkt. Die Hantelenden bewegen sich nun zu den gegenüberliegenden Platten, wo eine Umladung stattfindet. Das Drehmoment ändert somit die Richtung. Durch die periodische Bewegung der Hantel entsteht ein Ladungstransport.

Das Drehen eines Dipols im äusseren elektrischen Feld erfordert Arbeit, wenn der Dipol aus der Feldrichtung gedreht wird. Somit kann eine potentielle Energie definiert werden. Die Arbeit, die verrichtet wird, um einen elektrischen Dipol von einer Referenzposition (Winkel Ref.) auf einen Winkel  $\vartheta$  zu drehen, ist

$$W = - \int_{\text{Ref}}^{\vartheta} \vec{M} \cdot d\vec{\vartheta}' = \int_{\text{Ref}}^{\vartheta} |\vec{p}| \cdot |\vec{E}| \cdot \sin \vartheta' \cdot d\vartheta' = - |\vec{p}| \cdot |\vec{E}| \cdot \cos \vartheta \Big|_{\text{Ref}}^{\vartheta} . \quad (2.46)$$

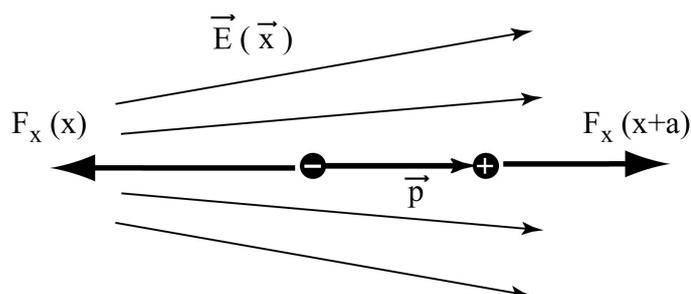
Die Arbeit muss entgegen dem Drehmoment verrichtet werden. Es ist zu beachten, dass die Vektoren  $\vec{M}$  und  $d\vec{\vartheta}'$  entgegengesetzt gerichtet sind, somit hebt sich das erste Vorzeichen auf. Üblicherweise wird als Referenz die Richtung des Dipols senkrecht zum Feld, also  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  gewählt. In der Vektorschreibweise beträgt die potentielle Energie bezüglich dieser Referenz:

$$E_{\text{pot}} = - \vec{p} \cdot \vec{E} \quad (2.47)$$

Im stabilen Gleichgewicht zeigt der Dipol in Richtung des elektrischen Feldes, da dort das absolute Minimum von  $E_{\text{pot}}$  erreicht wird.

**2.8.4 Dipol in einem inhomogenen äusseren elektrischen Feld**

Ein Dipol befindet sich in einem ortsabhängigen inhomogenen E-Feld. Auf den Dipol wirkt zunächst, wie im homogenen Feld, ein Drehmoment, das den Dipol ausrichtet. Im inhomogenen Feld wirkt nun aber zusätzlich noch eine resultierende Kraft.



**Figur 2.12:** Kraftkomponenten auf einen im inhomogenen elektrischen Feld ausgerichteten Dipol.

Vereinfacht betrachten wir nur die Kraftkomponente in  $x$ -Richtung. Dann wirken auf die beiden Ladungen im inhomogenen Feld entgegengesetzte, unterschiedlich grosse Kräfte, die eine Resultierende haben:

$$F_{x,\text{res}} = F_x(x) + F_x(x+a) = -Q \cdot E_x(x) + Q \cdot E_x(x+a) \quad .$$

Da  $a$  sehr klein ist, gilt näherungsweise  $E_x(x+a) = E_x(x) + a \cdot \frac{\partial E_x}{\partial x}$ , und somit

$$F_{x,\text{res}} = Q \cdot (E_x(x) + a \cdot \frac{\partial E_x}{\partial x} - E_x(x)) = p_x \cdot \frac{\partial E_x}{\partial x}$$

Der Dipol wird also in Richtung der grösseren Feldstärke gezogen.

#### **Zündholz im inhomogenen E-Feld:**

Ein Zündholzstäbchen hängt etwas verdreht an einem Faden zwischen einer Metallkugel und einer Leiterplatte, an denen eine Potentialdifferenz angelegt ist und somit ein inhomogenes elektrisches Feld vorliegt. Wird die Spannung erhöht, so richtet sich das Stäbchen zunächst zum Feld aus (Drehmoment), und wird dann zur Kugel hin angezogen (resultierende Kraft).

Hauptsächlich für Studierende der Physik: \_\_\_\_\_

In drei Dimensionen ist die resultierende Kraft im inhomogenen elektrischen Feld gegeben durch

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} \quad . \quad (2.48)$$

\_\_\_\_\_ Hauptsächlich für Studierende der Physik

### **2.8.5 Induzierte elektrische Dipole**

Ein äusseres elektrisches Feld übt eine Kraft aus auf die Ladungsträger (Elektronen) in einem Material und verschiebt diese. Nach klassischer Betrachtung können wir uns vorstellen, dass die Ladungswolken um die Atome ein wenig verschoben werden, bis die Coulomb-Kräfte, die die Elektronenwolke beim Atom halten, dies verhindern.

Wenn der Ladungsschwerpunkt der Elektronenwolke gegenüber dem Atom verschoben ist, entsteht ein elektrischer Dipol. Für diese Verschiebung ist eine Kraft von einem äusseren E-Feld notwendig, die die rücktreibende Coulomb-Kraft kompensiert. Die rücktreibende Kraft ist in erster Näherung linear abhängig von der Verschiebung, formal also identisch zu einer Federkraft. Im Gleichgewicht kompensiert diese "Federkraft" die Kraft vom äusseren E-Feld:

$$Q \cdot \vec{E} + \vec{F}_{\text{Feder}} = Q \cdot \vec{E} - f \cdot \vec{a} = 0 \quad , \quad (2.49)$$

wobei  $f$  die "Federkonstante" bedeutet. Das induzierte elektrische Dipolmoment ist dann

$$\vec{p}_{\text{ind}} = Q \cdot \vec{a} = \frac{Q^2}{f} \cdot \vec{E} = \alpha \cdot \vec{E} \quad . \quad (2.50)$$

Da das äussere E-Feld die Ladungen verschiebt und so den Dipol erzeugt, bezeichnet man dies als **induziertes Dipolmoment**. (2.50) zeigt, dass das Dipolmoment proportional zum äusseren Feld ist. Je weiter die "Feder" bei gegebener Kraft auslenkt (also je kleiner die "Federkonstante"  $f$  ist), desto grösser ist das Dipolmoment.  $\alpha$  wird deshalb *Polarisierbarkeit* genannt. Die Polarisierbarkeit ist eine Materialeigenschaft.

#### Papierschnitzel und geladener PVC-Stab:

Ein PVC-Stab wird durch Reiben mit dem Katzenfell aufgeladen. Das inhomogene E-Feld des Stabes ist am Stabende am stärksten. Das Feld induziert Dipolmomente in den Papierschnitzeln, die dann gemäss (2.48) zum Stabende gezogen werden.

## 2.9 Materie im elektrischen Feld

#### Plattenkondensator und verschiedene Dielektrika:

Der Plattenkondensator wird durch eine Spannungsquelle aufgeladen. Die Spannungsquelle wird nun entfernt; die Ladung auf dem Kondensator bleibt also konstant. Das Einschieben verschiedener Materialien (Aluminium, Plexiglas, Wasser) reduziert die Potentialdifferenz zwischen den Platten. Die Kapazität wird also erhöht.

### 2.9.1 Induzierte Ladung und dielektrische Verschiebung

Schiebt man einen Isolator zwischen die mit der Ladung  $Q$  geladenen Flächen eines Plattenkondensators, sinkt die Spannung über dem Kondensator. Um die gleiche Ladung zu halten, wird also weniger Spannung benötigt, das heisst, dass nach (2.28) die Kapazität erhöht ist.

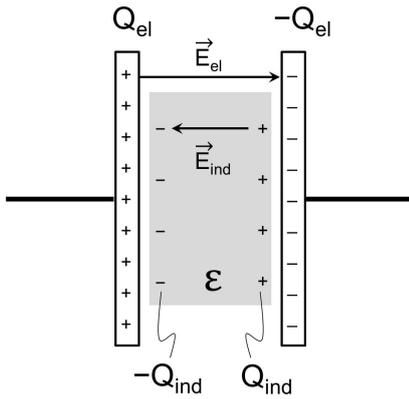
Man definiert nun die **Dielektrizitätskonstante**  $\varepsilon$  eines Materials gemäss:

$$\varepsilon = \frac{C_{\text{Material}}}{C_{\text{Vakuum}}} \quad . \quad (2.51)$$

Ein vollständig mit Material ausgefüllter Plattenkondensator hat also die Kapazität:

$$C = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d} \quad . \quad (2.52)$$

Mit der elektrischen Spannung  $U$  wird bei gegebener Ladung  $Q$  auf den Kondensatorplatten auch das elektrische Feld zwischen den Kondensatorplatten und damit der Feldfluss reduziert.



**Figur 2.13:** Ein Isolatormaterial (grau) wird im elektrischen Feld des Plattenkondensators polarisiert. Verschiebbare (freie) Ladungen befinden sich auf den Kondensatorplatten, induzierte Ladungen an den Oberflächen des Materials im Kondensator. Die induzierte Ladungsverteilung reduziert das elektrische Feld.

Der Feldfluss kann nach dem Satz von Gauss aber nur reduziert sein, falls die resultierende Ladung im eingeschlossenen Gebiet (z.B. eine Platte), ebenfalls kleiner geworden ist. Wir folgern also, wie gezeigt in Fig. 2.13, dass an den Oberflächen des Isolators eine von der Polarisierbarkeit abhängige Anzahl entgegengesetzter Ladungsträger auftreten. Diese schwächen das elektrische Feld.

Wir bezeichnen nun die zusätzliche Oberflächenladung des Isolators, die induzierte Ladung, mit  $Q_{\text{ind}}$ . Somit befindet sich bei der Platte links insgesamt die Ladung  $Q_{\text{tot}} = Q_{\text{el}} - Q_{\text{ind}}$ , bzw.  $-Q_{\text{tot}}$  bei der rechten Platte.

Es ist die resultierende Gesamtladung  $Q_{\text{tot}}$ , die das elektrische Feld, und somit die Potentialdifferenz verursacht. Also, nach (2.30)

$$U = \left| \vec{E} \right| \cdot d = \frac{Q_{\text{tot}}}{A \cdot \epsilon_0} \cdot d = \frac{Q_{\text{el}}}{C_{\text{Material}}} = \frac{Q_{\text{el}}}{\epsilon \cdot C_{\text{Vakuum}}}$$

$$Q_{\text{tot}} = Q_{\text{el}} \cdot \frac{A \cdot \epsilon_0}{d \cdot \epsilon \cdot C_{\text{Vakuum}}} = Q_{\text{el}} \cdot \frac{A \cdot \epsilon_0 \cdot d}{d \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot A} = \frac{Q_{\text{el}}}{\epsilon} .$$

Die induzierte Ladung beträgt somit

$$Q_{\text{ind}} = Q_{\text{el}} - Q_{\text{tot}} = Q_{\text{el}} \cdot \left( 1 - \frac{1}{\epsilon} \right) . \quad (2.53)$$

Je grösser die Dielektrizitätskonstante ist, desto grösser ist  $Q_{\text{ind}}$  und die daraus folgende Abschwächung des elektrischen Feldes. Die induzierte Oberflächenladung auf dem Isolator ist im Gegensatz zur Ladung auf der Kondensatorplatte nicht frei verschiebbar.

Hauptsächlich für Studierende der Physik (bis Seite 34):

Elektrische Felder in Gebieten, wo Materialien vorhanden sind, verursachen immer induzierte Ladungen, wie in Fig. 2.13 exemplarisch gezeigt. Die Berechnung von E-Feldern wird somit schwieriger, da alle Ladungen zu den Feldern beitragen. Eine rechnerische Vereinfachung wird durch die Einführung eines neuen Feldes ermöglicht.

Betrachten wir den Satz von Gauss in einem Volumen  $V$ , das verschiebbare und induzierte Ladungen enthält:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} \cdot dV = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot Q_{\text{tot}} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot (Q_{\text{cl}} - Q_{\text{ind}}) = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot Q_{\text{cl}} - \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) \cdot Q_{\text{cl}} = \frac{1}{\epsilon \cdot \epsilon_0} \cdot Q_{\text{cl}}$$

Wir führen nun ein neues Feld ein, die **dielektrische Verschiebungsdichte**  $\vec{D}$ :

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E} \quad (2.54)$$

Somit vereinfacht sich der Satz von Gauss wie folgt:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{D} \cdot dV = Q_{\text{cl}} \quad (2.55)$$

bei der Berechnung des D-Feldes müssen nun nur noch die *verschiebbaren* Ladungen berücksichtigt werden.

Das fundamentale, physikalisch relevante elektrische Feld bleibt aber das E-Feld. Für dieses müssen *alle Ladungen* berücksichtigt werden.

Das D-Feld ist nichts anderes als eine praktische Rechengröße. Die Feldlinien des D-Feldes beginnen bei frei verschiebbaren positiven Ladungen und enden bei frei verschiebbaren negativen Ladungen. Mit der dielektrischen Verschiebung können wir die erste Maxwell Gleichung (siehe 1.1 und 2.16) in einer Form schreiben, die auch für den Raum mit Materie gilt:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \operatorname{div} \vec{D} = \rho_{\text{el}} = \rho_{\text{tot}} - \rho_{\text{ind}} \quad (2.56)$$

### 2.9.2 Atomistische Deutung der Dielektrizität

Die Polarisation im Isolator erfolgt durch das Ausrichten permanenter Dipole im elektrischen Feld, oder durch induzierte Dipole. Wir haben nun zwei Beschreibungen aus unterschiedlichen Betrachtungsweisen, deren Zusammenhang wir darstellen wollen.

atomar:	$\vec{p} = \alpha \cdot \vec{E}$	Materialbeschreibung: Polarisierbarkeit
makroskopisch:	$C_{\text{mat}} = \epsilon \cdot C_{\text{Vac}}$	Materialbeschreibung: Dielektrizitätskonstante

Für ein kleines Volumenelement (Dose) der Fläche  $\vec{A}$  und der Höhe  $\Delta \vec{l}$  (wobei der Flächen- und der Längensvektor in Richtung des elektrischen Feldes zeigen) beträgt die induzierte Oberflächenladung auf  $\vec{A}$ :

$$Q_{\text{ind}} = Q_{\text{cl}} \cdot \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) = \left| \vec{D} \right| \cdot \left| \vec{A} \right| \cdot \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \quad .$$

Das Dipolmoment  $|\vec{p}|$  des infinitesimalen Quaders mit Volumen  $\Delta V = A \cdot \Delta \ell$  beträgt:

$$\Delta \vec{p} = Q_{\text{ind}} \cdot \Delta \vec{\ell} \rightarrow |\Delta \vec{p}| = |\vec{D}| \cdot \Delta V \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} .$$

Als *Polarisation* eines Materials wird die Dipolmomentendichte definiert:

$$\vec{P} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta V} = \vec{D} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} \cdot (\varepsilon - 1) \rightarrow \vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P} . \quad (2.57)$$

Ist in einem Dielektrikum die Anzahl atomarer Dipolmomente pro Volumen  $n$  und das mittlere Dipolmoment jedes Dipols in Feldrichtung  $\vec{p}$ , dann gilt:

$$\vec{P} = n \cdot \vec{p} .$$

Bei induzierten Dipolen ist  $\vec{p} = \alpha \cdot \vec{E}$ , also  $\vec{P} = n \cdot \alpha \cdot \vec{E}$ . Der Vergleich mit (2.57) liefert

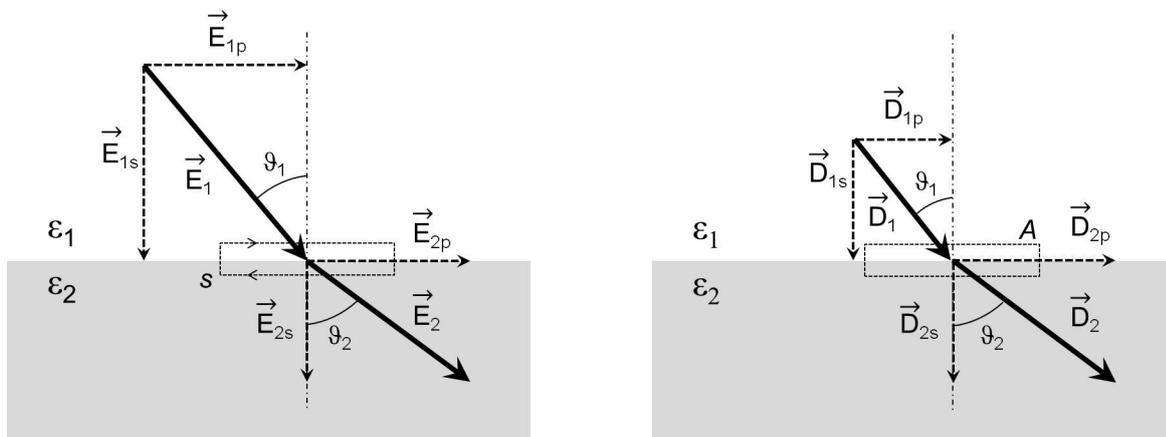
$$(\varepsilon - 1) \cdot \varepsilon_0 = n \cdot \alpha = \frac{N_A \cdot \rho}{M} \cdot \alpha ,$$

wobei  $N_A$  die Avogadro-Zahl, und  $M$  die Molmasse und  $\rho$  die Dichte des Materials ist. Damit haben wir eine Verknüpfung zwischen den phänomenologischen (makroskopischen) und atomaren Grössen hergestellt.

Bei permanenten atomaren elektrischen Dipolen (z.B. Wasser) ist die Verknüpfung wegen der Richtungsquantisierung komplexer.

### 2.9.3 Verhalten von Feldlinien an Grenzflächen

Treffen Linien des elektrischen Feldes  $\vec{E}$  und der dielektrischen Verschiebungsdichte  $\vec{D}$  senkrecht auf eine Grenzfläche Vakuum - Isolator (oder von zwei verschiedenen Isolatoren), so ändert sich  $\vec{E}$  sprunghaft, da unterschiedliche Polarisationsladungen auftreten.  $\vec{D}$  ist jedoch definitionsgemäss stetig.



**Figur 2.14:** Links: Lage der E-Feld Vektoren und ihrer Komponenten bei der Kontaktfläche zwischen Dielektrikum 1 (oben) und Dielektrikum 2 (unten). Rechts: Dasselbe für das D-Feld.

Interessanter ist die Situation, wenn die Feldlinien unter einem beliebigen Winkel auf die Grenzfläche zweier ungeladener Dielektrika treffen (Fig. 2.14). Die folgenden Aussagen sollen geprüft werden:

- Die Normalkomponente von  $\vec{E}$  ändert sprunghaft, die von  $\vec{D}$  ist stetig (bleibt konstant).
- Die Tangentialkomponente von  $\vec{E}$  ist stetig, jene von  $\vec{D}$  ändert sprunghaft.

Zur Herleitung der Stetigkeitsbedingungen verwenden wir den Satz von Gauss über eine den Materialübergang umschliessende Dose der Deckfläche A (Fig. 2.14, rechts):

$$\int_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{el} = 0 \quad (2.58)$$

Da das E-Feld konservativ ist, gilt für einen geschlossenen Weg s, der den Materialübergang umfährt (fig. 2.14, links):

$$\int_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (2.59)$$

Somit können wir für die einzelnen Komponenten des E und des D-Feldes folgende Bedingungen herleiten:

$$\text{E-Feld, parallel:} \quad 0 = \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = E_{1p} \cdot s - E_{2p} \cdot s \quad \rightarrow \quad E_{1p} = E_{2p}$$

$$\text{E-Feld, senkrecht:} \quad 0 = \int \vec{D} \cdot d\vec{A} = -\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0 \cdot E_{1s} \cdot A + \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_0 \cdot E_{2s} \cdot A \quad \rightarrow \quad \varepsilon_1 \cdot E_{1s} = \varepsilon_2 \cdot E_{2s}$$

$$\text{D-Feld, senkrecht:} \quad 0 = \int \vec{D} \cdot d\vec{A} = -D_{1s} \cdot A + D_{2s} \cdot A \quad \rightarrow \quad D_{1s} = D_{2s}$$

$$\text{D-Feld, parallel:} \quad 0 = \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0} D_{1p} \cdot s - \frac{1}{\varepsilon_2 \cdot \varepsilon_0} D_{2p} \cdot s \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\varepsilon_1} \cdot D_{1p} = \frac{1}{\varepsilon_2} \cdot D_{2p}$$

An einer Grenze zwischen zwei ungeladenen Dielektrika sind die Parallelkomponenten des E-Feldes und die Normalkomponenten des D-Feldes stetig. Aus diesen Stetigkeitsbedingungen folgt, dass die Feldvektoren E und D beim Materialübergang die Richtung ändern:

$$\frac{\tan \vartheta_1}{\tan \vartheta_2} = \frac{E_{1p} \cdot E_{2s}}{E_{1s} \cdot E_{2p}} = \frac{D_{1p} \cdot D_{2s}}{D_{1s} \cdot D_{2p}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \quad (2.60)$$

Wird (2.60) auf eine elektromagnetische Welle angewendet, die auf eine dielektrische Grenzfläche trifft, resultiert das *Brechungsgesetz von Snellius*.

### 3 ELEKTRISCHE STRÖME

#### 3.1 Strom und Kontinuitätsgleichung

Bisher wurden nur Ladungen betrachtet, die sich an einem bestimmten Punkt im Raum befinden. Ladungen können aber, wie der Versuch mit dem Ladungslöffel und die Polarisation gezeigt hatten, transportiert werden. Bewegte elektrische Ladungen bilden elektrische Ströme. Elektrische Ströme können in Leitern, Halbleitern, Flüssigkeiten (Elektrolyte), in Gasen und im Vakuum (Kathodenstrahlröhre) fließen.

Die *elektrische Stromstärke* ist die pro Zeiteinheit transportierte elektrische Ladung und ist wie folgt definiert:

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (3.1)$$

Die SI-Basiseinheit der elektrischen Stromstärke ist das Ampère [A]. 1 Ampère ist die Stärke eines zeitlich konstanten elektrischen Stromes, der durch zwei im Vakuum parallel im Abstand 1 m voneinander angeordnete, geradlinige, unendlich lange Leiter von vernachlässigbar kleinem, kreisförmigem Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern pro Meter Leiterlänge die Kraft  $2 \cdot 10^{-7}$  N hervorruft.

#### Kraftwirkung paralleler elektrischer Ströme:

Durch zwei lose, nebeneinander aufgehängte Drähte fließt je ein elektrischer Strom in derselben Richtung. Die bewegten Ladungen in beiden Leitern verursachen eine anziehende Kraft zwischen den beiden Drähten.

Falls der Ladungstransport durch einzelne Ladungsträger der Ladung  $q$  und der Dichte  $n$  (Anzahl Ladungsträger pro Volumeneinheit) mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  und durch die Fläche  $\vec{A}$  erfolgt, gilt:

$$I = n \cdot q \cdot \vec{v} \cdot \vec{A} = \rho_{el} \cdot \vec{v} \cdot \vec{A} \quad , \quad (3.2)$$

wobei  $\rho_{el}$  die Ladungsdichte (Ladung pro Volumeneinheit) bezeichnet. Die Fläche wird durch den Vektor  $\vec{A}$  beschrieben, dessen Richtung normal zur Fläche ist und dessen Betrag der Fläche entspricht.

Nun kann die *elektrische Stromdichte* wie folgt definiert werden:

$$\vec{j} = \rho_{el} \cdot \vec{v} \quad . \quad (3.3)$$

Der allgemeine Zusammenhang zwischen Stromstärke und Stromdichte lautet

$$I = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} . \quad (3.4)$$

Falls  $\vec{A}$  eine geschlossene Fläche ist, fordert die Erhaltung der Ladung innerhalb des umschlossenen Volumens  $V$ , dass der Abfluss von Ladungsträgern durch die geschlossene Fläche  $A$  gleich der zeitlichen Abnahme der Gesamtladung in  $V$  ist:

$$\frac{dQ}{dt} = - \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} . \quad (3.5)$$

Dabei muss die korrekte Wahl des Vorzeichens beachtet werden. Der Vektor des Flächenelements der geschlossenen Fläche  $A$  zeigt gemäss Konvention nach aussen. Somit führt  $\vec{j} \cdot d\vec{A} > 0$  zu einer Abnahme der Ladung innerhalb von  $A$ .

Die Ladung kann als Integral über das Volumen  $V$  geschrieben werden:  $Q = \int_V \rho_{el} \cdot dV$ , woraus folgt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho_{el} \cdot dV = - \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = - \int_V \operatorname{div} \vec{j} \cdot dV . \quad (3.6)$$

Dabei wurde der mathematische Satz von Gauss für das Vektorfeld  $\vec{j}$  verwendet. Beachte dass  $V$  und  $A$  konstant und fest im Raum sind. Daher wird in (3.6) die partielle Ableitung  $\partial / \partial t$  verwendet. Da nun das Volumen  $V$  beliebig ist, gilt

$$\frac{\partial \rho_{el}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0 \quad (3.7)$$

(3.6) ist die **Kontinuitätsgleichung** der elektrischen Ladung und stellt die lokale Form der Ladungserhaltung dar.

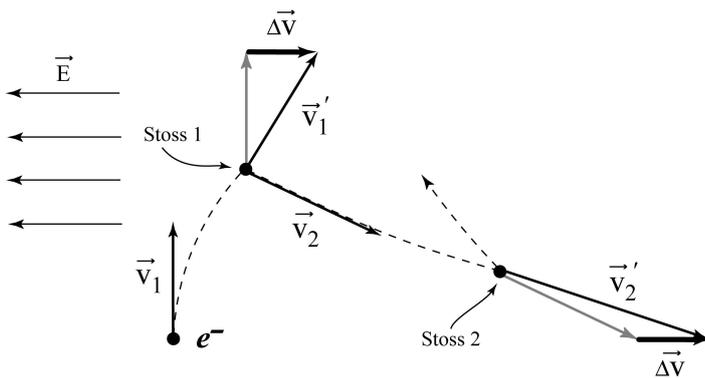
### 3.2 Leitfähigkeit und Ohmsches Gesetz

In Gasen, Flüssigkeiten und Festkörpern liegen eine oder mehrere Sorten von Ladungsträgern vor. Daneben sind auch neutrale Teilchen vorhanden, die am Ladungstransport nicht beteiligt sind. Im thermodynamischen Gleichgewicht gilt für alle frei beweglichen Teilchen (Gase, Flüssigkeiten) gilt:

$$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} \cdot \overline{v^2} = \frac{3}{2} \cdot k \cdot T \quad \overline{v} = 0 \quad . \quad (3.8)$$

Neben der thermodynamischen Bewegung werden Ladungen auch durch ein äusseres elektrisches Feld beschleunigt. Positive Ladungsträger bewegen sich in Richtung des elektrischen Feldes, negative entgegengesetzt dazu. Diese Driftgeschwindigkeit ist sehr klein gegenüber der Wärmebewegung. Da die Teilchen dauernd Impuls und Energie durch Stösse am Gitter (im Festkörper) oder untereinander (in Gasen und Flüssigkeiten) übertragen, resultiert nicht eine beschleunigte, sondern eine näherungsweise gleichförmige Bewegung.

Die makroskopische Wirkung dieser Bewegung soll nun etwas näher, in heuristischer Weise, untersucht werden. Die elektrische Leitung kann jedoch grundsätzlich nur durch halbklassische (Festkörperphysik), bzw. quantenmechanische (Quantenphysik) Betrachtungen physikalisch korrekt verstanden werden.



**Figur 3.1:** Durch Stösse veränderte Flugbahn (gestrichelt) eines Elektrons im äusseren E-Feld. Die Kraft, die das E-Feld auf das Elektron ausübt, krümmt die Flugbahn zwischen den Stößen.

Die mittlere freie Flugzeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stößen sei  $\tau$ . Dann beträgt nach dem 2. Satz von Newton die mittlere Impulsänderung:

$$m \cdot \Delta \vec{v} = \vec{F} \cdot \tau = q \cdot \vec{E} \cdot \tau \quad .$$

Nach jedem Stoss nimmt das Elektron wieder eine neue Anfangsgeschwindigkeit und Richtung an. Im zeitlichen Mittel heben sich die von den Stößen verursachten Geschwindigkeitsänderungen auf. Damit ist  $\Delta \vec{v}$  gerade die mittlere Driftgeschwindigkeit. Wegen der kurzen mittleren freien Flugzeit des Ladungsträgers gilt  $\Delta v \ll v$ . Zum Beispiel beträgt die mittlere freie Flugzeit eines Elektrons in Cu ca.  $2.5 \cdot 10^{-14}$  s.

Bei verschiedenen Sorten  $i$  von Ladungsträgern erhalten wir für die Stromdichte:

$$\vec{j} = \sum_i n_i \cdot q_i \cdot \Delta \vec{v}_i = \left( \sum_i \frac{n_i \cdot \tau_i \cdot q_i^2}{m_i} \right) \cdot \vec{E} = \sigma \cdot \vec{E} \quad . \quad (3.9)$$

Die Stromdichte ist also proportional zum äusseren elektrischen Feld. Mit der *spezifischen Leitfähigkeit*  $\sigma$  lautet das *Ohmsche Gesetz* in lokaler Form:

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E} = -\sigma \cdot \text{grad}\varphi = -\sigma \cdot \nabla\varphi . \quad (3.10)$$

Es beschreibt den Ladungstransport in Gasen, Flüssigkeiten und Festkörpern (obwohl dort die Teilchen nicht frei beweglich sind) in guter Näherung, wenn  $\tau$  sehr klein ist.

Besonders interessiert ein wichtiger Spezialfall des Ohmschen Gesetzes, falls die Ladung durch einen Leiter der Länge  $\ell$  mit konstanter Querschnittsfläche  $A$  fliesst:

$$I = \int \vec{j} \cdot d\vec{A} = \sigma \cdot E \cdot A = \frac{\sigma \cdot A}{\ell} \cdot U = \frac{1}{R} \cdot U .$$

$U = R \cdot I$	Ohmsches Gesetz	(3.11)
-----------------	-----------------	--------

Die Einheit von  $R$  ist  $[R] = \text{Ohm} = \Omega = \text{V} \cdot \text{A}^{-1}$  mit dem Symbol



Es werden folgende Bezeichnungen und Masseinheiten verwendet:

elektrischer Leitwert	$R^{-1}$	$[R^{-1}] = \text{S} = \text{Siemens} = \text{A} \cdot \text{V}^{-1}$
spezifische elektrische Leitfähigkeit	$\sigma$	$[\sigma] = \text{S} \cdot \text{m}^{-1}$
spezifischer elektrischer Widerstand	$\sigma^{-1} = \rho_{\text{Wid}}$	$[\rho_{\text{Wid}}] = \Omega \cdot \text{m}$

### 3.3 Die Leistung des elektrischen Stromes

#### Kurzschluss:

Ein dünner Eisendraht wird über 25 V kurzgeschlossen. Dieser erhitzt sich und verglüht.

Durchfliesst ein Strom  $I$  einen Leiter, über dem die Spannung  $U$  liegt, so geht während der Zeit  $\Delta t$  die elektrostatische Energie

$$\Delta E_{\text{pot}} = U \cdot \Delta Q = U \cdot I \cdot \Delta t \quad (3.12)$$

verloren. Dementsprechend beträgt die elektrische Verlustleistung allgemein:

$$P = \frac{\Delta E_{\text{pot}}}{\Delta t} = U \cdot I . \quad (3.13)$$

Falls es sich beim Leiter um einen Ohmschen Widerstand handelt, gilt

$P = U \cdot I = \frac{U^2}{R} = R \cdot I^2$	(3.14)
---	--------

### 3.4 Stromkreise und Netzwerke

#### 3.4.1 Kirchhoff'sche Regeln

Die technische Stromrichtung ist positiv definiert in Richtung der Bewegung der positiven Ladungsträger. Da in einem metallischen Leiter die am Ladungstransport beteiligten Teilchen Elektronen sind, ist die technische Stromrichtung dem physikalischen Ladungstransport entgegengesetzt.

Im Stromkreis fließt der technische Strom immer vom Plus-Pol ( $\varphi_+$ ) zum Minus-Pol ( $\varphi_-$ ) eines passiven Elementes, das heisst von Orten hohen Potentials zu Orten tiefen Potentials.

Aus der Ladungserhaltung und der Wegunabhängigkeit der Arbeit im elektrischen Feld (konservatives Kraftfeld) folgen zwei praktische Regeln für elektrische Netzwerke, die vor allem in der Elektrotechnik verwendet werden.

**Erste Kirchhoff'sche Regel (Knotenregel):** In einem Knoten oder Verzweigungspunkt kommen mehrere elektrische Leiter zusammen. Die Summe der zu- und wegfließenden Ströme  $I_k$  in einem solchen Knoten ist Null. Dabei werden die zufließenden Ströme positiv, die wegfließenden Ströme negativ gezählt:

$$\sum_k I_k = 0 . \quad (3.15)$$

Die Knotenregel folgt aus der Ladungserhaltung. Im Knoten kann weder elektrische Ladung erzeugt noch vernichtet werden. Im Knoten kann auch keine Ladung gespeichert werden.

**Zweite Kirchhoff'sche Regel (Maschenregel):** Die Gesamtspannung längs einer geschlossenen Schlaufe (Masche) einer Schaltung ist Null. Das heisst die Summe aller Spannungsabfälle  $U_i$  an den einzelnen Elementen in einer Schlaufe ist Null:

$$\sum_i U_i = 0 . \quad (3.16)$$

Dabei müssen sämtliche Spannungsabfälle in technischer Stromrichtung berücksichtigt werden, also alle stromdurchflossenen Widerstände und eingebauten Spannungsquellen, inklusive ihrer inneren Widerstände.

Potentialdifferenzen sind in Richtung des technischen Stroms zu rechnen. In technischer Stromrichtung fällt die Spannung über einem Ohmschen Widerstand um  $R \cdot I$  ab.

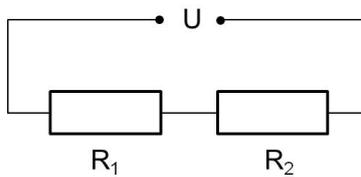
Bei Spannungsquellen ist  $U$  die Potentialdifferenz zwischen dem + und dem --Pol, also  $U = \varphi_+ - \varphi_-$ . Der technische Strom (positive "Ladungsträger") fließt vom Ort höheren Potentials zum Ort tieferen Potentials.

### 3.4.2 Anwendungen: Kombinationen von Widerständen

Der elektrische Widerstand der leitenden Drähte sei hier vernachlässigt.

#### a) Serieschaltung:

Bei der Serieschaltung (auch als Reihenschaltung bezeichnet) sind Widerstände nacheinander geschaltet, das heisst es fließt der *gleiche* Strom  $I$  durch alle Widerstände. Hier wird die Maschenregel verwendet. Über jedem Ohmschen Widerstand  $R_i$  sinkt die Spannung in Stromrichtung um  $U_i = R_i \cdot I$ . Also gilt nach der Maschenregel:



$$U - R_1 \cdot I - R_2 \cdot I = 0 \quad \text{2. Kirchhoff'sche Regel}$$

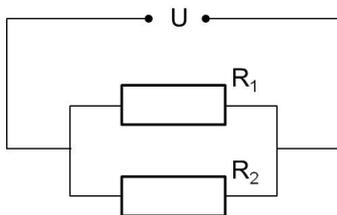
$$U = (R_1 + R_2) \cdot I = R \cdot I$$

Serieschaltung von zwei Widerständen:  $R = R_1 + R_2$

Bei der Serieschaltung addieren sich die Widerstände zum Ersatzwiderstand.

#### b) Parallelschaltung

An allen parallel geschalteten Widerständen liegt die gleiche Spannung  $U$  (Äquipotentialfläche). Hier wird die Knotenregel beim linken Verzweigungspunkt der Widerstände angewendet.



$$I - I_1 - I_2 = 0 \quad \text{1. Kirchhoff'sche Regel}$$

$$\frac{U}{R} - \frac{U}{R_1} - \frac{U}{R_2} = 0$$

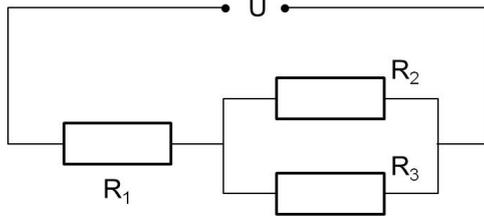
Parallelschaltung von zwei Widerständen:  $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

Bei der Parallelschaltung addieren sich die reziproken Werte der Widerstände zum reziproken Ersatzwiderstand.

### c) Kombinationen von Parallel- und Reihenschaltungen (zwei Beispiele)

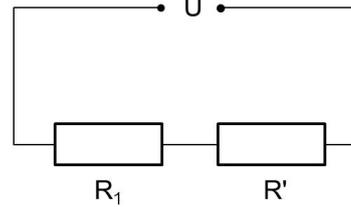
Zur Bestimmung des Gesamtwiderstands ersetzt man einzelne parallel- bzw. seriegelochaltete Elemente schrittweise.

Schaltung:



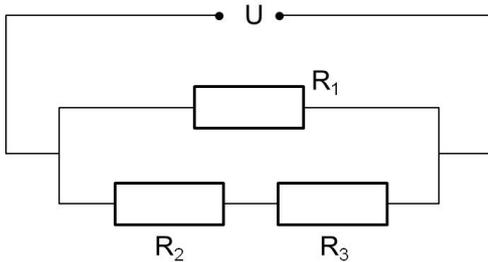
$$R' = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}$$

Ersatzschema:



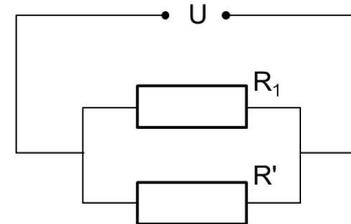
$$R = R_1 + R' = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}$$

Schaltung:



$$R' = R_2 + R_3$$

Ersatzschema:



$$R = \frac{R_1 \cdot R'}{R_1 + R'} = \frac{R_1 \cdot (R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

### d) Innenwiderstand

Es ist zu beachten, dass Spannungsquellen und Messinstrumente einen Innenwiderstand  $R_i$  haben, das heisst, die Verschiebung von Ladung im Innern der Geräte erfolgt nicht verlustfrei.

Bei Spannungsquellen und Strommessgeräten wünscht man einen kleinen Innenwiderstand. Je grösser der Innenwiderstand  $R_i$  einer Spannungsquelle ist, desto kleiner ist die maximale Leistung, die diese Spannungsquelle an einem Gerät (= äusserer Widerstand  $R$ ) erbringen kann.

Die Klemmenspannung einer Spannungsquelle sei  $U_0$ . Wenn ein Strom fliesst, sinkt die Spannung wegen dem Innenwiderstand um  $R_i \cdot I$ , also:

$$U_0 - R_i \cdot I = R \cdot I$$

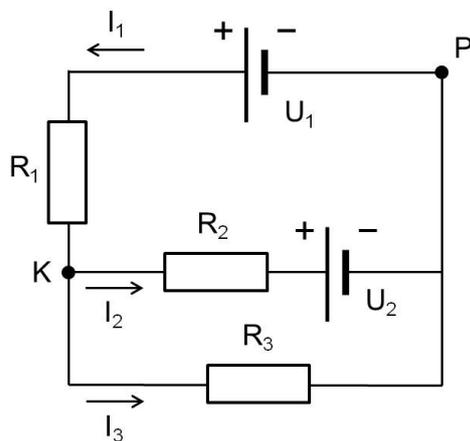
Leistung über R:  $P = R \cdot I^2 = \frac{R}{(R + R_i)^2} \cdot U_0^2$

maximale Leistung:  $P_{\max} = \frac{1}{4 \cdot R_i} \cdot U_0^2$

Bei Spannungsmessgeräten, welche parallel zu den bestehenden Stromkreisen geschaltet werden, wünscht man einen möglichst grossen Innenwiderstand, da sie annähernd stromfrei messen sollten.

### 3.4.3 Beispiel eines verzweigten Netzwerks mit mehreren Spannungsquellen

Gegeben ist ein Netzwerk, das aus Ohmschen Widerständen und Spannungsquellen besteht (Fig. 3.2). Hier werden die beiden Kirchhoff'schen Regeln angewendet, um die Ströme durch die einzelnen Leiterelemente zu berechnen. Die Richtungen der Ströme müssen zunächst willkürlich festgelegt werden. Die berechneten Ströme, inklusive ihre Vorzeichen ergeben dann die tatsächliche Richtung.



**Figur 3.2:** Netzwerk mit Widerständen  $R_1 = 20 \Omega$ ,  $R_2 = 8 \Omega$ ,  $R_3 = 10 \Omega$ , Spannungsquellen  $U_1 = 16 \text{ V}$ ,  $U_2 = 8 \text{ V}$ , Stromstärken  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ , und einem Referenzpunkt P und einem Knoten K.

Aus der Anwendung der Knotenregel in K erhalten wir unter Berücksichtigung der zu- und abfliessenden Ströme:

$$\text{am Knoten K:} \quad I_1 - I_2 - I_3 = 0 \quad .$$

Die Masche wird in Richtung der eingezeichneten technischen Stromrichtungen umfahren (hier im Gegenuhrzeigersinn). Der Startpunkt P, dem das Potential 0 zugeordnet wird, kann beliebig gewählt werden. Die Maschenregel, angewendet auf die obere Schlaufe, sowie auf die grosse Schlaufe, und unter Berücksichtigung der Orientierung der dazwischengeschalteten zweiten Spannungsquelle  $U_2$ , ergibt:

$$\text{obere Schlaufe:} \quad U_1 - R_1 \cdot I_1 - R_2 \cdot I_2 - U_2 = 0 \quad ,$$

$$\text{grosse Schlaufe:} \quad U_1 - R_1 \cdot I_1 - R_3 \cdot I_3 = 0 \quad .$$

Somit haben wir drei Gleichungen für die drei unbekanntnen Stromstärken  $I_1$ ,  $I_2$ , und  $I_3$ .

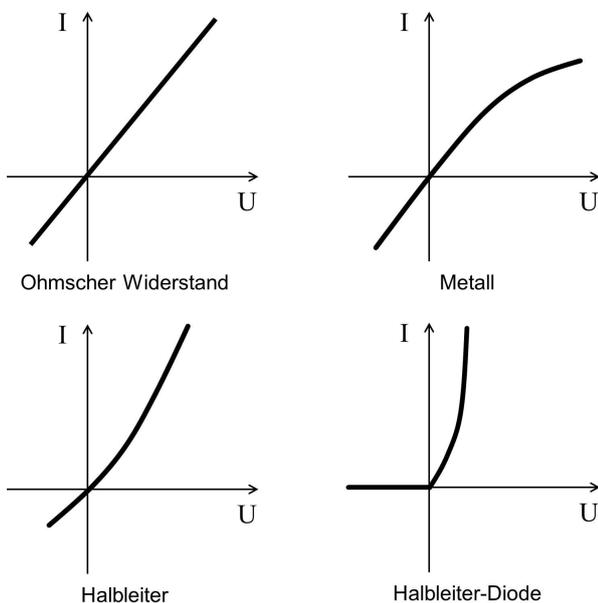
Die Lösung ist  $I_1 = 0.473 \text{ A}$ ,  $I_2 = -0.182 \text{ A}$ ,  $I_3 = 0.655 \text{ A}$ . Beachte das Vorzeichen von  $I_2$ .

### 3.5 Charakteristiken elektrischer Leiter

Aus dem Ohmschen Gesetz folgt, dass der Widerstand  $R$  unabhängig von der angelegten Spannung  $U$  ist. Das würde nach dem mikroskopischen Modell (3.9) bedeuten, dass die Ladungsträgerdichte und die Zeit zwischen zwei Stößen mit neutralen Atomen oder dem Gitter des Festkörpers von Spannung und Stromstärke unabhängig sind. Dies ist eine Idealisierung, die nur in bestimmten Materialien zulässig ist.

Im Allgemeinen trifft das Ohmsche Gesetz nicht zu, da elektrischer Strom Arbeit leistet, falls ein Widerstand vorliegt (siehe 3.14). Die Wirkung dieser Arbeit ist messbar als Änderung der Temperatur, womit die Materialeigenschaften des Leiters verändert werden.

Beim Metall nimmt der Widerstand mit zunehmender Spannung (zunehmender Temperatur!) zu, da die Bewegung der Elektronen durch die verstärkte thermische Bewegung (Abnahme der mittleren freien Flugzeit  $\tau$  in 3.9) behindert wird.



**Figur 3.3:** Strom-Spannungscharakteristik eines Ohmschen Widerstandes, eines Metalls, eines Halbleiters und einer Halbleiterdiode.

#### Charakteristik elektrischer Leiter:

Ein Widerstand, eine Kohlefadenlampe, und eine normale Glühlampe (Wolframdraht) werden unter langsam veränderlicher Spannung betrieben. Stromstärke und Spannung werden aufgezeichnet. Bei der Glühlampe nimmt die Stromstärke bei grösserer Spannung schwächer zu, bei der Kohlefadenlampe dagegen stärker.

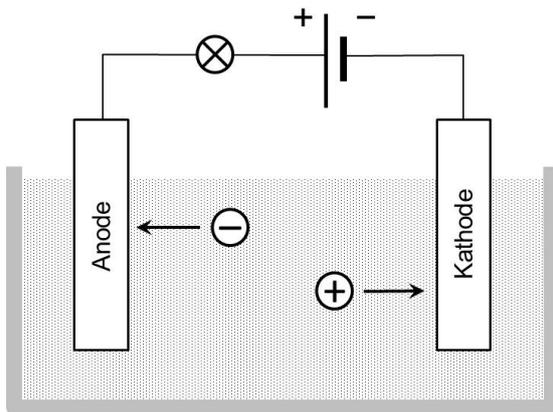
Der Widerstand des Halbleiters nimmt bei zunehmender Spannung (zunehmende Temperatur) ab, da bei höherer Temperatur mehr Ladungsträger am Transport teilnehmen. Die Bändertheorie der elektrischen Leitung, die im nächsten Kapitel behandelt wird, kann dieses Verhalten qualitativ erklären.

Es gibt aber auch Materialien (Metalle), bei denen  $R$  über einen weiten Bereich näherungsweise unabhängig von  $U$  ist, es handelt sich dann um so genannte Ohmsche Widerstände. Das Verhalten von elektrischen Zweipolen lässt sich am besten durch die Strom-Spannungscharakteristik beschreiben (Fig. 3.3).

### 3.6 Mechanismen der elektrischen Leitung

#### 3.6.1 Elektrolytische Leitfähigkeit

Elektrolyte sind Schmelzen und Lösungen mit positiven und negativen Ionen. Hier soll nur der vereinfachte Fall von stark verdünnten Lösungen kurz behandelt werden. Als Beispiel wählen wir eine HCl Lösung ( $H^+$  : Kation;  $Cl^-$  : Anion).



**Figur 3.4:** Ein Plattenkondensator befindet sich in einem Elektrolytbad und ist an eine Spannungsquelle, verbunden mit einer Glühlampe, angeschlossen.

Die Elektroden sind parallele Metallplatten, die an eine Spannungsquelle angeschlossen sind. Zwischen den Elektroden herrscht ein näherungsweise homogenes E-Feld (Fig. 3.4). Das elektrische Feld weist von der positiven Anode zur negativen Kathode. Im E-Feld wandern die Anionen zur Anode und die Kationen zur Kathode.

#### **Elektrolytische Leitung:**

Die Platten eines Plattenkondensators sind mit einer Glühlampe und einer Spannungsquelle (220 V) verbunden und werden in destilliertes Wasser eingetaucht. Es fließt kein Strom. Nach der Beigabe von 2 Tropfen HCl beginnt die Lampe nach ca. 20 Sekunden zu leuchten. Der Strom fließt: die Charakteristik zeigt dass die Stromstärke proportional zur Spannung ist (Ohmsches Gesetz). Eine weitere Zugabe von HCl erhöht die Stromstärke.

- Die elektrolytisch an der Kathode abgeschiedene Masse  $m$  ist der transportierten elektrischen Ladung  $Q$  proportional:  $m = A \cdot Q$ ; der Proportionalitätsfaktor  $A$  wird elektrochemisches Äquivalent genannt und hat die Einheit:  $kg \cdot A^{-1} \cdot s^{-1}$
- Die von gleichen Ladungsmengen aus verschiedenen Elektrolyten abgeschiedenen Massen verhalten sich wie die molaren äquivalenten Massen (äquivalente Masse = molare Masse/Wertigkeit).

Die Stromdichte ist nach (3.2) gegeben durch:  $\vec{j} = \sum_i n_i \cdot q_i \cdot \vec{v}_i$  .

Die Dichte der Ladungsträger  $n_i$  und deren Ladung ist, zumindest in einer vollständig dissoziierten Lösung, bekannt. Damit hat man die Möglichkeit, über eine Strommessung direkt die Geschwindigkeit der Ladungsträger für eine gegebene elektrische Feldstärke zu bestimmen. Um von der Feldstärke unabhängig zu sein, gibt man nicht Geschwindigkeiten, sondern Beweglichkeiten  $\mu$  an:

$$\vec{v} = \mu \cdot \vec{E} \quad , \quad (3.17)$$

womit sich für die spezifische Leitfähigkeit einer Elektrolytmischung ergibt

$$\sigma = \sum_i n_i \cdot q_i \cdot \mu_i \quad . \quad (3.18)$$

Die Beweglichkeit hängt stark vom Dissoziationsgrad des Elektrolyten ab. Viele wässrige Lösungen zeigen bei bestimmten Konzentrationen ein relatives Maximum der Leitfähigkeit. Ein Anstieg der Leitfähigkeit bei kleinen Konzentration ist mit der Anzahl der Ladungsträger erklärbar. Bei sehr grossen Konzentrationen nimmt dann der Grad der Dissoziation ab. So ist zum Beispiel 100%-ige Schwefelsäure ein Isolator, da sie nicht dissoziiert ist.

### 3.6.2 Energiebänder im Festkörper und Fermi-Dirac Verteilung

Die elektrische Leitung in Festkörpern erfolgt hauptsächlich durch sogenannte quasifreie Elektronen. Das Verhalten dieser Elektronen wird durch die Bändertheorie beschrieben, die nachfolgend qualitativ erklärt wird. Eine tiefere Betrachtung erfolgt in der Festkörperphysik.

Zunächst soll eine grobe Abschätzung zeigen, wie schnell Elektronen in einem Leiter driften. Kupfer hat ein quasifreies Elektron pro Kupferatom. Damit ist die Ladungsträgerdichte:

$$n = 8.45 \cdot 10^{28} \text{ Elektronen/m}^3, \quad \text{womit } \vec{j} = (8.45 \cdot 10^{28} \cdot 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}) \cdot \vec{v}$$

Unter der Annahme, dass durch einen Kupferdraht von 1 mm Durchmesser ein Strom von 1 A fliesst, beträgt die Driftgeschwindigkeit nach (3.9):

$$\Delta \vec{v} = \frac{j}{n \cdot q} = \frac{I}{A \cdot n \cdot q} = \frac{1}{7.85 \cdot 10^{-7} \cdot 8.45 \cdot 10^{28} \cdot 1.60 \cdot 10^{-19}} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 34 \text{ cm/h}$$

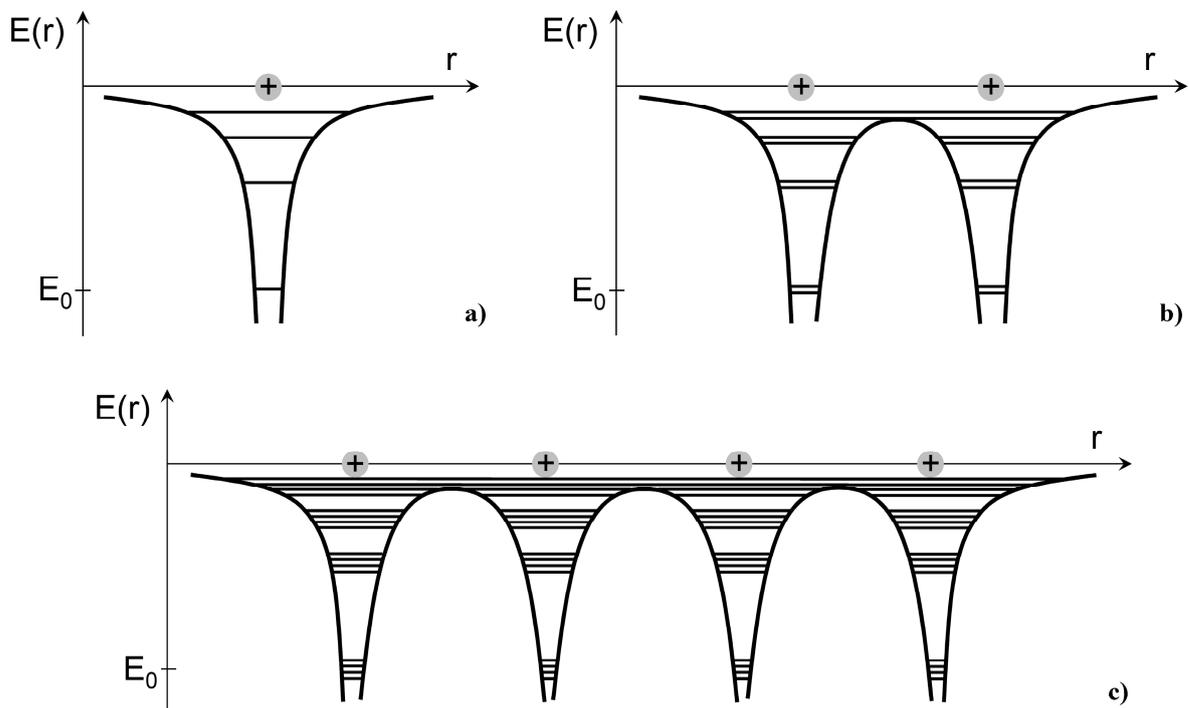
Diese sehr kleine Driftgeschwindigkeit ist rund 9 Grössenordnungen kleiner als der mittlere Betrag der Geschwindigkeit aufgrund der ungeordneten Wärmebewegung:  $\overline{v^2} = 3 \cdot k \cdot T / m$  .

Die elektrische Leitung in Festkörpern kann nur mit Hilfe der Quantenmechanik und ihrer Anwendung auf Atome im Gitterverband verstanden werden. Für eine quantitative Behandlung wird auf die Vorlesung Festkörperphysik verwiesen. Wir wollen hier aber die Theorie der *Bänderstruktur* kurz einführen, um die Beobachtungen zumindest qualitativ verstehen zu können.

Schon die Bohr'sche Theorie der Atome zeigt, dass Elektronen in Atomen nur bestimmte Energieeigenwerte einnehmen können. Die Energie der Elektronen ist quantisiert. In Figur 3.5a sind diese Energieeigenwerte zusammen mit der potentiellen Energie des Elektrons,

$e \cdot \varphi(r)$ , im Coulomb Potential des Kerns für den einfachsten Fall des Wasserstoffatoms schematisch dargestellt. Im Wasserstoffatom, besitzt das Elektron die Energieniveaus  $E_n = E_0 / n^2$ , wobei  $E_0 = -13.6 \text{ eV}$ . Da die Elektronen an das Proton gebunden sind, befinden sich die Energieniveaus auf negativen Werten.

Bringt man zwei H-Atome nahe zueinander (Fig. 3.5b), macht sich das Coulomb Potential des Nachbar-Protons bemerkbar. In der Quantenmechanik wird gezeigt, dass diese Störung zu einer Aufspaltung in zwei benachbarte Energieniveaus führt. Bei vier Atomen spalten die Energieeigenwerte in vier Niveaus auf (3.5c). In einem Kristall gibt es sehr viele Nachbar-Atome. Das Coulomb Potential eines Atoms wird durch alle umgebenden Potentiale gestört, so dass die aufgespaltenen Energieniveaus so nahe zusammen rücken, dass man sie als kontinuierliche **Energiebänder** beschreibt.



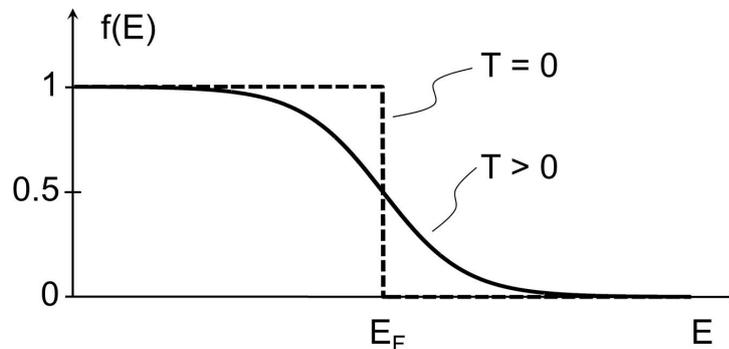
**Figur 3.5:** Darstellung der Energieniveaus und des Verlaufs der potentiellen Energie des Elektrons im Coulomb Potential für ein (a), zwei benachbarte (b), und vier benachbarte Atome (c). Das tiefste Energieniveau, der Grundzustand, ist mit  $E_0$  bezeichnet. In einer Gitterstruktur bilden sich erlaubte Bereiche der Energie der Elektronen (Energiebänder) und verbotene Bereiche der Energie (Energilücken). Da die Elektronen in gebundenen Zuständen sind, sind die Energien negativ.

Die Elektronen befinden sich nicht mehr auf diskreten Energieniveaus, sondern können sich innerhalb von Energiebändern bewegen. Diese Bereiche sind durch **Energilücken** getrennt. Figur 3.5c veranschaulicht auch, dass Elektronen in höheren Energieniveaus nicht mehr notwendigerweise zu einem bestimmten Atomkern gehören.

Die Berechnung der oberen und unteren Grenzen der Energiebänder und ihr Beitrag zum Ladungstransport ist komplex. Hier sollen einige kurze Bemerkungen genügen. Elektronen sind Spin- $1/2$  Teilchen (Fermionen) und unterliegen deshalb dem **Pauli Prinzip**, das besagt, dass ein Quantenzustand nur einmal besetzt sein kann. Eine Anzahl Elektronen im Verband muss deshalb vom Grundzustand ausgehend zunehmend höhere Energieniveaus besetzen.

Die Energieverteilung dieser Zustände ist durch die **Fermi-Dirac Verteilung** gegeben (Fig. 3.6). Diese ist temperaturabhängig gemäss

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/(k \cdot T)} + 1} \quad (3.19)$$



**Figur 3.6:** Fermi-Dirac Verteilung am absoluten Nullpunkt, und für  $T > 0$ .  $f(E)$  gibt den relativen Anteil der Teilchen an, die die Energie  $E$  besitzen.

Am absoluten Nullpunkt sind alle Energieniveaus bis zu  $E_F$  (Fermi-Energie) besetzt. Bei einem Temperaturanstieg wechseln einige Elektronen in einen höheren Energiezustand  $E_F > E$  und hinterlassen Lücken bei  $E_F < E$ .

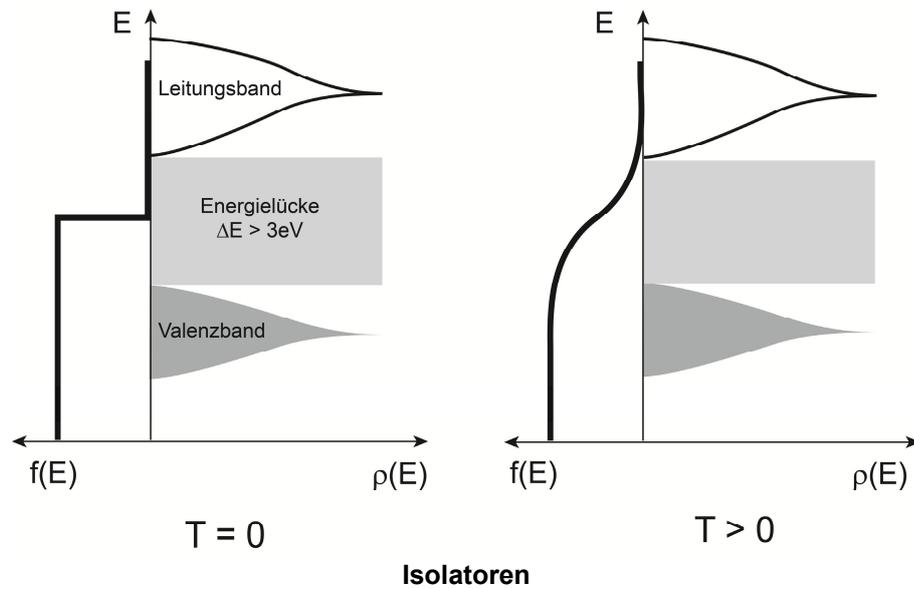
Im Atomgitter sind die niedrigsten Energieniveaus vollständig besetzt, und die Elektronen nehmen an der Bindung zu den Nachbaratomen teil. Diese Elektronen befinden sich in den **Valenzbändern**. Nur Elektronen in nicht vollständig gefüllten Bändern können zum Ladungstransport beitragen. Dies sind die **Leitungsbänder**. Nur wenn das Leitungsband besetzt ist, kann Ladung durch den Festkörper transportiert werden.

### 3.6.3 Ladungstransport in Isolatoren

In Isolatoren sind die Leitungsbänder von den Valenzbändern um mehr als 3 eV getrennt (Fig. 3.7). Das höchste mit Elektronen besetzte Band, das Valenzband, ist aufgefüllt. Das nächst höhere Band, das Leitungsband, ist unbesetzt. Da die Energielücke grösser als 3 eV ist, reicht die thermische Energie nicht aus, um Elektronen vom Valenz- ins Leitungsband zu heben. Mit Hilfe der Fermi-Dirac Verteilung schätzen wir ab, wieviele Teilchen pro Mol sich oberhalb der Energielücke  $\Delta E$  aufhalten. Die Anzahl hängt von der Temperatur ab.  $E_F$  befindet sich genau in der Mitte der Energielücke, damit die Reduktion der Verteilung  $f(E)$  für  $E < E_F$  gleich der Zunahme von  $f(E)$  für  $E > E_F$  ist (Ladungserhaltung). Der Energieunterschied von  $E_F$  zum oberen Rand des Leitungsbands  $E$  beträgt  $\Delta E/2$ . Also:

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/(kT)} + 1} \approx e^{-\Delta E/(2kT)} \approx 6.33 \cdot 10^{-26}, \quad \text{für } T = 300 \text{ K} . \quad (3.20)$$

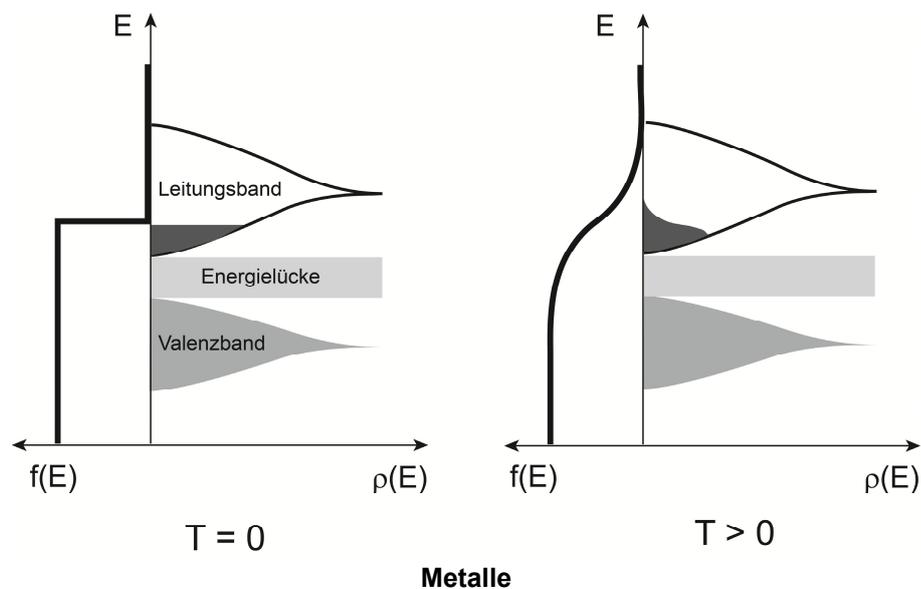
Das heisst, pro Mol stehen  $6.33 \cdot 10^{-26} \cdot 6.02 \cdot 10^{23} \approx 0.04$  Ladungsträger zur Verfügung. Im Vergleich dazu: In Kupfer ermöglichen  $6.02 \cdot 10^{23}$  Elektronen pro Mol den Ladungstransport.



**Figur 3.7:** Besetzung des Leitungs- und Valenzbandes für Isolatoren bei  $T=0$  und bei  $T>0$ . Bei Isolatoren ist das Leitungsband unbesetzt. Auf der linken Seite der x-Achse ist die Fermi-Dirac Verteilung eingezeichnet, rechts die Dichte der Elektronen als Funktion der Energie; die Energieskala ist vertikal.

### 3.6.4 Ladungstransport in Metallen

Die im allgemeinen grosse Leitfähigkeit erfolgt durch quasifreie Elektronen im Leitungsband. Entweder ist das oberste Band nicht vollständig gefüllt (ungerade Elektronenzahl, z.B. Alkali-metalle) oder Valenzband und Leitungsband überlappen sich (gerade Elektronenzahl, z.B. Erdalkalimetalle). Wie in Fig. 3.8 ersichtlich, ist die Besetzungszahl unabhängig von der Temperatur. Deswegen ist die Leitfähigkeit nur schwach temperaturabhängig.



**Figur 3.8:** Besetzung des Leitungs- und Valenzbandes für Metalle bei  $T=0$  und bei  $T>0$ . Bei Metallen ist das Leitungsband teilweise besetzt. Auf der linken Seite der x-Achse ist die Fermi-Dirac Verteilung eingezeichnet, rechts die Dichte der Elektronen als Funktion der Energie; die Energieskala ist vertikal.

Der elektrische Widerstand im Metall wird bewirkt durch:

- Wechselwirkung mit Schwingungen des Kristallgitters und Stöße (siehe 3.2),
- Wechselwirkungen mit Fehlstellen im Kristallgitter,
- Wechselwirkungen mit Fremdatomen.

Ein Restwiderstand bei sehr tiefen Temperaturen ( $< 4$  K) ist auf die letzten beiden Effekte zurückzuführen. Bei Zimmertemperatur ist der erste Effekt der wichtigste. Er ist dafür verantwortlich, dass der elektrische Widerstand bei Metallen mit zunehmender Temperatur schwach steigt.

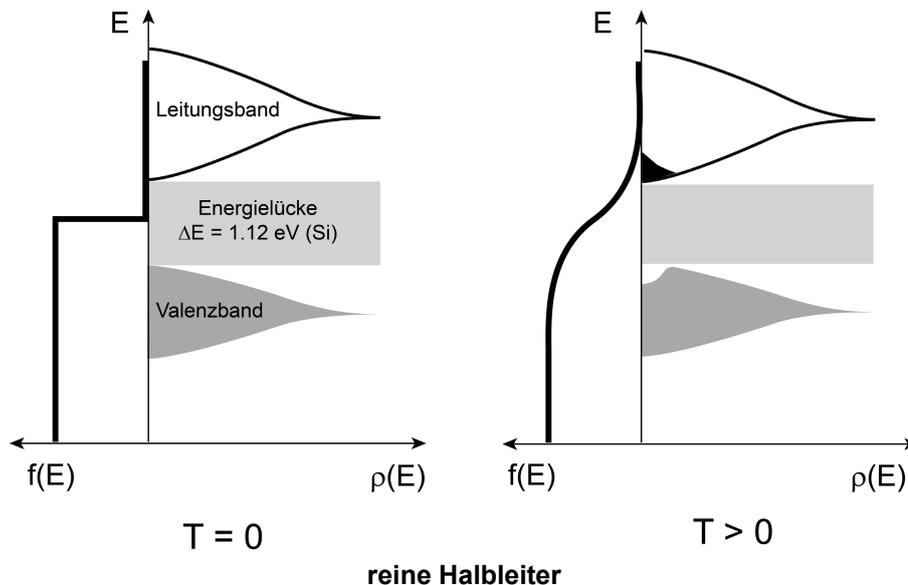
Beispiel Kupfer:	$T = 293$ K	$\rho_{\text{Wid}} = 1.7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$
	$T = 77$ K	$\rho_{\text{Wid}} \approx 0.3 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$
	$T = 4$ K	$\rho_{\text{Wid}} \approx 0.0004 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$

### 3.6.5 Ladungstransport in reinen Halbleitern

Mit der Entdeckung der reinen Halbleiter wurde die Basis zur Miniaturisierung der Elektronik gelegt. In Halbleitern nimmt der spezifische elektrische Widerstand mit steigender Temperatur ab. Dieses Verhalten kommt dadurch zustande, dass die Energielücke zwischen Valenz- und Leitungsband wesentlich kleiner als 3 eV ist.

Energielücken für einige Halbleitermaterialien:

Si	1.12 eV	Ge	0.66 eV
GaAs	1.52 eV	InSb	0.23 eV



Figur 3.9: Besetzung des Leitungs- und Valenzbandes für reine Halbleiter.

Beim absoluten Nullpunkt sind diese Materialien Isolatoren. Mit steigender Temperatur wechseln die Elektronen vom Valenzband ins Leitungsband, da die Energielücke genügend klein ist. Die Leitung erfolgt sowohl durch die Elektronen im Leitungsband, sowie durch die

Löcher (= fehlende Elektronen) im Valenzband. Der spezifische elektrische Widerstand nimmt deshalb mit steigender Temperatur ab. Gezielt eingebrachte Fremdatome im Halbleiter (Dotierung) erhöhen die Leitfähigkeit. Reine Halbleiter haben weniger als  $10^{16}$  Fremdatome pro  $\text{m}^3$  und sind technisch nicht relevant.

Mit Hilfe der Fermi-Dirac Verteilung schätzen wir ab, wieviele Teilchen pro Mol sich beim Halbleiter Si oberhalb der Energielücke von 1.12 eV aufhalten:

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/(kT)} + 1} \approx e^{-\Delta E/(2kT)} \approx 3.91 \cdot 10^{-10}, \quad \text{für } T = 300 \text{ K} \quad (3.21)$$

Das heisst, pro Mol stehen  $3.91 \cdot 10^{-10} \cdot 6.02 \cdot 10^{23} \approx 2.36 \cdot 10^{14}$  Elektronen und gleichviele Löcher zur Verfügung. Bei 800 °C steigt die totale Ladungsträgerdichte auf  $2.82 \cdot 10^{21} \text{ mol}^{-1}$ .

#### **SiO<sub>2</sub> als Halbleiter:**

Da Glas (SiO<sub>2</sub>) unter etwa 500 °C ein Isolator ist, eignet es sich als Sockel des Wendels bei der klassischen Glühbirne. Die Glühbirne wird an 220 V angeschlossen und der Glasmantel wird entfernt. An der Luft verglüht der Wolframfaden nach wenigen Sekunden und es fliesst kein Strom mehr: Glas ist ein Isolator. Wird der Glassockel durch eine Schweissflamme kurz zur Rotglut (ca. 800 °C) gebracht, glüht der Sockel auch ohne weitere Zufuhr von Wärme. Bei dieser Temperatur ist Glas leitend geworden und durch die Leistung, die beim Stromtransport an das SiO<sub>2</sub>-Gitter abgegeben wird, bleibt die hohe Temperatur aufrechterhalten.

### **3.6.6 Ladungstransport in Supraleitern**

Als zu Beginn des Jahrhunderts die Verflüssigung von He bei einer Temperatur von 4.12 K gelang, stellte man fest, dass Hg bei dieser Temperatur einen unmessbar kleinen elektrischen Widerstand aufweist. Seither hat man viele Metalle und Legierungen gefunden, z.B. W ( $T_C=0.015 \text{ K}$ ), Al ( $T_C=1.175 \text{ K}$ ), Hg ( $T_C=4.154 \text{ K}$ ), Pb ( $T_C=7.196 \text{ K}$ ), MgB<sub>2</sub> ( $T_C=39 \text{ K}$ ), etc. , die unterhalb einer kritischen Temperatur, der Sprungtemperatur  $T_C$ , supraleitend werden. Metalle sind Typ I Supraleiter. Ein äusseres Magnetfeld kann nicht in einen Supraleiter vom Typ I eindringen. Der Typ I Supraleiter ist ein perfekter Diamagnet (siehe 4.6.1). Da äussere Magnetfelder die Sprungtemperatur reduzieren, bricht die Supraleitung bei einer kritischen Stärke des äusseren Magnetfeldes zusammen.

#### **Meissner-Ochsenfeld Effekt:**

Eine Keramikscheibe (YBa<sub>2</sub>Cu<sub>3</sub>O<sub>7</sub>, Sprungtemperatur  $-183^\circ\text{C}$ ) wird mit flüssigem Stickstoff auf  $-196^\circ\text{C}$  abgekühlt. Die Annäherung eines Permanentmagneten induziert einen Kreisstrom im Supraleiter. Dieser Strom erzeugt ein magnetisches Moment, auf welches im äusseren, inhomogenen Permanentmagnetfeld eine abstossende Kraft wirkt, da der Typ I Supraleiter ein perfekter Diamagnet ist. Aufgrund von actio=reactio wirkt eine entgegengesetzte Kraft auf den Permanentmagneten, die diesen in Schwebe hält. Wird die Sprungtemperatur des Supraleiters überschritten, erlischt der Strom wegen dem nun vorliegenden elektrischen Widerstand, und der Permanentmagnet fällt herunter.

Eine physikalische Erklärung der Supraleitung für Supraleiter vom Typ I gelang 1957 mit der BCS-Theorie durch Bardeen, Cooper, und Shrieffer (Nobelpreis für Physik 1972). Die quantenmechanische Erklärung, basiert auf sogenannten *Cooper-Paaren*, zwei Elektronen mit entgegengesetztem Spin und entgegengesetztem Impuls. Ein freies Elektron im Kristallgitter verformt lokal das Kristallgitter durch sein Coulomb Potential. Bewegt es sich, so werden Gitterschwingungen erzeugt (Phononen), die sich über eine makroskopische Distanz von einigen  $10^{-7}$  bis  $10^{-6}$  m ausbreiten, und somit ein entferntes Elektron beeinflussen. Wenn zwei Elektronen auf diese Weise koppeln und einen quantenmechanischen Zustand bilden, dann handelt es sich bei diesem Paar nicht mehr um zwei Fermionen (Spin- $\frac{1}{2}$  Teilchen), für die das Pauli Prinzip gilt, sondern um *ein* Boson (Spin-0 Teilchen). Da Bosonen dem Pauli Prinzip nicht unterliegen, können beliebig viele Cooper-Paare im Grundzustand sein. Cooper-Paare setzen sich in einem elektrischen Feld in Bewegung, und stossen aneinander elastisch, also ohne Impulsverlust. Am Gitter stossen sie auch nicht, da das Gitter (via die Phononen) Teil des Zustandes ist. Somit erfahren die gepaarten Elektronen keinen elektrischen Widerstand: das Material ist supraleitend.

Die Cooper-Paare haben eine Bindungsenergie von einigen  $10^{-3}$  eV. Falls die Temperatur hoch genug ist ( $T > T_C$ ) werden die Cooper-Paare durch die thermische Bewegung getrennt und die Supraleitung bricht zusammen.

1986 wurden keramische Werkstoffe gefunden, die über 100 K supraleitend werden. Dafür erhielten A. Müller und J. Bednorz, die am IBM Forschungszentrum Rüschlikon arbeiteten, 1987 den Nobelpreis für Physik. Solche Materialien können mit flüssigem Stickstoff unter  $T_C$  gekühlt werden und sind supraleitend. Seit der Entdeckung der ersten supraleitenden Keramiken aus den Elementen Y, Ba, Cu, und O, mit bestimmter Stöchiometrie, wurden verschiedenste Elementkombinationen hergestellt und getestet. Die bisher höchsten Sprungtemperaturen wurden für  $\text{HgBa}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_8$  (134 K) und  $\text{Hg}_{12}\text{Tl}_3\text{Ba}_{30}\text{Ca}_{30}\text{Cu}_{45}\text{O}_{127}$  (138 K) erreicht. Oberhalb der Sublimationstemperatur von Trockeneis ( $\text{CO}_2(\text{s})$ ,  $-78.5^\circ\text{C}$ ) wird Supraleitung bei bestimmten Materialien nur unter sehr hohem Druck beobachtet: ein  $\text{H}_2\text{S}+\text{CH}_4$ -Gemisch ist bei  $p=270$  GPa bei Raumtemperatur von  $14^\circ\text{C}$  supraleitend.

### Typ II Supraleiter, Supraleiter-Bahn:

Ein Typ II Supraleiter wird mit flüssigem Stickstoff auf  $-196^\circ\text{C}$  abgekühlt und über einen Permanentmagneten placiert. Je nach Symmetrie des Permanentmagnetfeldes ist der Supraleiter in zwei oder drei Dimensionen fixiert. Im ersteren Fall ist reibungsfreie Bewegung möglich. Die Fixierung kommt durch ein partielles Eindringen des Magnetfeldes in das supraleitende Material zustande, wo es mit dem Gitter und den Elektronen einen neuen Quantenzustand bildet (*flux pinning*).

Hochtemperatur-Supraleiter sind vom Typ II. Während beim Typ I ein äusseres Magnetfeld über einer kritischen Grösse die Supraleitung schlagartig zerstört, erfolgt dies beim Typ II in zwei Stufen. Unterhalb der ersten kritischen Magnetfeldstärke verhält sich der Supraleiter wie ein Typ I Material, das heisst ein äusseres Magnetfeld kann wegen der supraleitenden Ströme nicht ins Material eindringen (perfekter Diamagnet). Äussere Magnetfeldlinien umfliessen den Supraleiter vollständig. Wird die erste kritische Magnetfeldstärke überschritten, so dringen einige Feldlinien in das Material ein und bilden zusammen mit dem Gitter einen neuen Quantenzustand. Wird das Material mit Fremdatomen dotiert, so werden die eingedrungenen Feldlinien an diesen fixiert (*flux pinning*). Je nach Struktur und Symmetrie des äusseren Magnetfeldes ist der Supraleiter relativ zum äusseren Feld fixiert oder kann

bewegt werden. Überschreitet die äussere Magnetfeldstärke einen höheren kritischen Wert, bricht die Supraleitung zusammen.

Einige Elemente zeigen auch bei niedrigsten Temperaturen keine Supraleitung. Dazu gehören Cu, Ag und Au. Diese drei Elemente haben als Festkörper ein kubisch-flächenzentriertes Kristallgitter, bei welchem die Kopplung von Cooper-Paaren mit den Phononen (Gitterschwingungen) nicht zustande kommt. Allerdings weisen auch Al, Ir, Ni, Pb und Pt dieselbe Gitterstruktur auf: Al, Ir und Pb werden unterhalb von 1.2 K, 0.14 K und 7.19 K supraleitend.

### 3.6.7 Ladungstransport in dotierten Halbleitern und Dioden

Dass bei bestimmten Materialien der elektrische Widerstand von der Richtung des Stromtransports abhängig ist, wurde bereits durch F. Braun 1874 entdeckt. Die technische Lösung, Strom nur in eine bestimmte Richtung zu transportieren, wurde durch J. A. Fleming 1904 mit seiner Erfindung der Elektronenröhre realisiert. In der Elektronenröhre wird dies durch eine spezielle Anordnung von metallischen Leitern, elektrischen Feldern, und Ladungsträgern ermöglicht. Der Ladungstransport erfolgt durch freie Elektronen im Vakuum.

#### Röhrendiode:

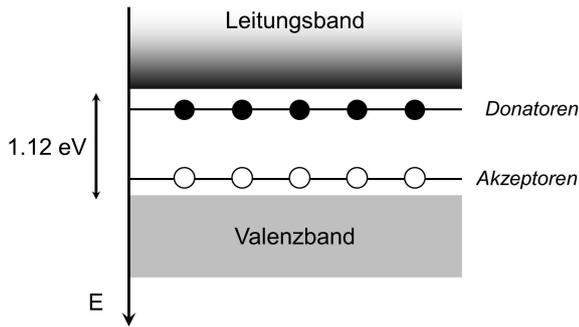
In einem Vakuum wird zwischen einem Pol und einem dünnen Wolframfaden, der zum Glühen gebracht wird, eine Spannung angelegt. Falls der Pol auf einem höheren Potential liegt, wandern die Elektronen vom Wolframfaden zum Pol: die Diode leitet. Falls der Pol auf niedrigerem Potential liegt, ist die Elektronenwolke um den Glühfaden lokalisiert und es fliesst kein Strom: die Diode sperrt. Für kleine positive Spannungen ist die Röhre ein Ohmscher Widerstand, für grosse Spannungen tritt Sättigung auf, da die Anzahl Elektronen, die aus dem Wolfram gelöst werden können, durch die Temperatur des Wolframfadens limitiert ist.

Elektronen nur in eine bestimmte Richtung transportieren zu können, ist von grösster technischer Bedeutung. Es ist die Basis von elektronischen Rechenanlagen. Röhrendioden ermöglichen dies, sind jedoch durch ihre Grösse und Empfindlichkeit (Betriebstemperatur) umständlich. Die Miniaturisierung der Diode kann mit Halbleitermaterialien realisiert werden.

Ein reiner Halbleiter (z.B. Si) ist selbst bei hoher Temperatur kein guter Leiter. Deshalb "dotiert" man den reinen Halbleiter mit Fremdatomen. Si verhält sich im Kristall als 4-wertiges Atom, das heisst dass die Bindung im Gitter durch 4 Elektronen erfolgt. Baut man nun beispielsweise ein 5-wertiges Phosphor-Atom ins Gitter ein, ist eines der 5 Valenzelektronen nicht an der Bindung im Gitter beteiligt und deshalb nur lose gebunden. Das Phosphor-Atom wirkt als **Donator** eines Elektrons. Baut man hingegen ein 3-wertiges Bor-Atom ein, bleibt eine Doppelbindung unvollständig besetzt und akzeptiert dort leicht ein Elektron. Bor ist im Si-Gitter ein **Akzeptor** eines Elektrons. In beiden Fällen werden freie Ladungsträger durch Dotation dem Material zugefügt: der Donator bringt negative Ladungsträger (Elektronen), der Akzeptor positive Ladungsträger (Löcher).

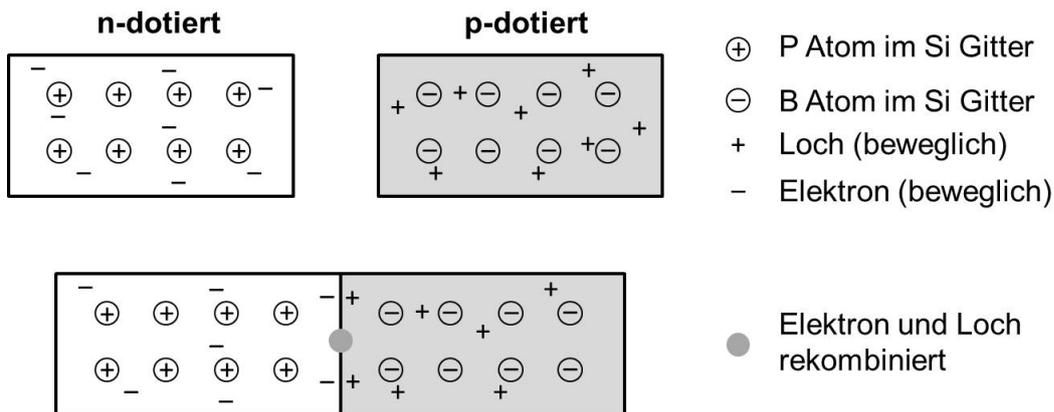
*n-Typ Halbleiter:* Hat Donatoren. Die elektrische Leitung erfolgt durch Elektronen im Leitungsband (Fig. 3.10). (negative Ladungsträger)

*p-Typ Halbleiter:* Hat Akzeptoren. Die elektrische Leitung erfolgt durch sogenannte Löcher im Valenzband (Fig. 3.10). (positive Ladungsträger)



**Figur 3.10:** Schematische Darstellung der Wirkung von Donatoren und Akzeptoren in Si. Die Donatoren liegen nur 0.044 eV unter dem Leitungsband, die Akzeptoren nur 0.045 eV über dem Valenzband.

Im n-dotierten Halbleiter sind zusätzliche Elektronen bewegliche Ladungsträger, im p-dotierten Halbleiter sind es fehlende Elektronen, sogenannte Löcher (Fig. 3.11). Werden nun ein n-dotierter und ein p-dotierter Halbleiter zusammengefügt, so ziehen sich die beweglichen ungleichnamigen Ladungsträger an, das heißt Elektronen und Löcher diffundieren Richtung Kontaktfläche. Dort bildet sich eine Doppelschicht von Elektronen im n-Teil und Löcher im p-Teil. Zum Teil können einzelne Elektronen gegenüberliegende Löcher besetzen, das heißt es findet Rekombination statt.

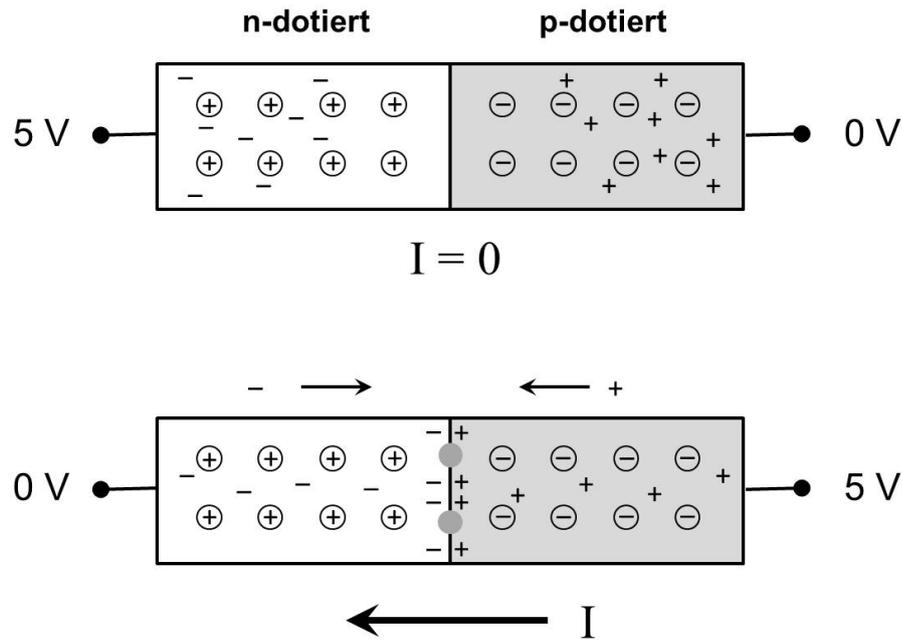


**Figur 3.11:** Durch Zusammenfügen eines n-dotierten und p-dotierten Halbleiters entsteht eine np-Diode. An der Kontaktfläche zwischen n- und p-Halbleiter bildet sich eine Ladungsdoppelschicht. Einige Elektronen und Löcher gehen durch Rekombination "verloren".

Damit entsteht ein leichter Überschuss von positiver Ladung im n-Teil und negativer Ladung im p-Teil. Dieser Ladungsunterschied erzeugt ein elektrisches Feld, das im Gleichgewicht gerade das elektrische Feld der Ladungsdoppelschicht an der Kontaktfläche aufhebt. Damit ist die Beweglichkeit der Elektronen im p-Teil und der Löcher im n-Teil nun stark reduziert.

Das Zusammenfügen eines n- und eines p-dotierten Halbleitern an einer Kontaktfläche führt zu einer erstaunlichen Entdeckung, die die Technik des 20. Jahrhunderts revolutioniert hat: die **Halbleiterdiode**.

Abhängig von der angelegten Spannung transportiert eine np-Halbleiterdiode Strom mit geringem Widerstand, oder sie sperrt, das heißt sie ist ein Isolator (Fig. 3.12).



**Figur 3.12:** Die Halbleiterdiode besteht aus einem n-dotierten Teil (dotierte Gitteratome liefern je ein überschüssiges Elektron) und einem p-dotierten Teil (Fremdatome haben je ein Elektron zuwenig, das heißt sie liefern je ein Loch). Die dotierten Fremdatome und ihre Ladungen sind in Kreisen dargestellt. Da sie im Gitter fest eingebaut sind, ist die Ladung nicht beweglich. Die beweglichen Ladungsträger im n- und p-dotierten Teil sind als + und − bezeichnet. Je nach Polung einer äusseren Spannung sperrt die np-Diode (oben), oder sie leitet einen elektrischen Strom I (unten). Im n-Teil leisten driftende Elektronen den Ladungstransport, im p-Teil driftende Löcher. Elektronen und Löcher rekombinieren kontinuierlich an der Kontaktfläche. Die Spannungsquelle deckt diesen "Verlust" an Ladungsträgern durch Nachliefern von Elektronen am Minus-Pol und Löcher am Plus-Pol.

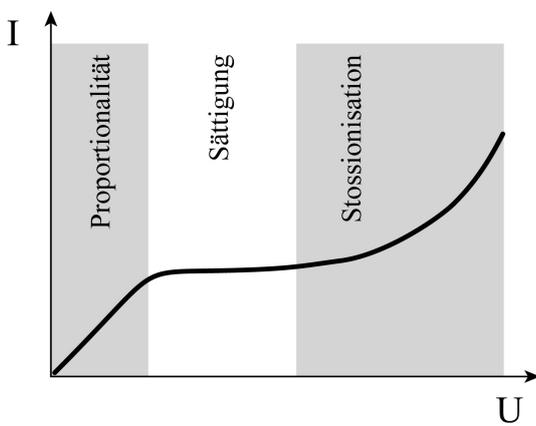
Wird nun das hohe Potential an den n-Teil gelegt, so wandern die Elektronen im n-Teil nach links und die Löcher im p-Teil nach rechts (Fig. 3.12 oben). Die Ladungsdoppelschicht an der Kontaktfläche entleert sich. Durch das Auseinanderdriften der Ladungsträger im n-Teil und im p-Teil entsteht ein elektrisches Feld, das dasjenige der angelegten Spannung gerade aufhebt. Die np-Diode sperrt.

Wird jedoch die Spannung umgekehrt an den np-Halbleiter angelegt, also der Plus-Pol beim p-Teil, so bewegen sich die Elektronen und Löcher im n- bzw. p-Teil zur Kontaktfläche hin (Fig. 3.12, unten). An der Kontaktfläche findet durch Diffusion der Ladungsträger Rekombination statt. Die Elektronen im n-Teil füllen die benachbarten Löcher des p-Teils. Elektronen werden von der Spannungsquelle am n-Teil nachgeliefert, ebenso Löcher am p-Teil, d.h. Elektronen werden am p-Teil der Spannungsquelle wieder zugeführt. Die technische Stromstärke in der Diode ist vom p-Teil zum n-Teil gerichtet.

### 3.6.8 Ladungstransport in Gasen

Gase sind gewöhnlich schlechte elektrische Leiter. Die Leitfähigkeit hängt, wie bei Elektrolyten, von der Konzentration der Ionen ab. Geschieht die Ionisation der Gase durch äussere Einwirkungen (UV-Licht, radioaktive Strahlung) spricht man von *unselbständiger Gasentladung*. Die Bildung von Ionen und die Rekombination bilden ein Gleichgewicht, so dass die Zahl der Ladungsträger konstant ist. Dieser Prozess wird bei einem Zählrohr zum Nachweis schwacher radioaktiver Strahlung (z.B.  $^{14}\text{C}$ -Datierung) oder bei der Vakuum-Röhre benützt.

Bei einer *selbständigen Gasentladung* werden die Gase durch die Bewegung ihrer eigenen Moleküle, bzw. schon vorhandener Ionen selbst ionisiert. Die Stossionisation tritt bei Glimm-Leuchtstoff- und Hochdrucklampen auf.



**Figur 3.13:** Strom-Spannungscharakteristik bei einer unselbständigen Gasentladung.

Bei der unselbständigen Gasentladung unterscheidet man drei Bereiche (Fig. 3.13). Bei kleinen Spannungen steigt die Stromstärke mit der angelegten Spannung proportional, da die Driftgeschwindigkeit der Ladungsträger im Gas, analog wie beim Elektrolyt (3.17), mit der angelegten Spannung ansteigt. Das Gas befindet sich im Proportionalbereich. Wird die Spannung erhöht, so werden die Ionen abgesaugt, bevor sie rekombinieren. Alle gebildeten Ionen erreichen die Elektroden. Der Sättigungsstrom hängt also nicht mehr von der angelegten Spannung ab, sondern nur von der Ionenbildungsrate. Auf diesem Prinzip beruhen Dosismessgeräte (*Geiger-Müller-Zähler*). Hochenergetische Teilchen, wie sie beim radioaktiven Zerfall eines Kernes entstehen, ionisieren das Gas im Zählrohr. Wird das Zählrohr im Sättigungsbereich betrieben, ist der gemessene Strom proportional zur Anzahl der ionisierenden Teilchen.

Bei noch höherer Spannung werden Stossionisationslawinen ausgelöst, und der Strom steigt wieder mit ansteigender Spannung. Dabei spielt die elektrische Feldstärke des angelegten E-Feldes, sowie die freie Weglänge, die durch den Gasdruck und Temperatur bestimmt ist, eine Rolle. Ist die im elektrischen Feld aufgenommene Energie ( $W = q \cdot E \cdot \ell$ ) grösser als die Ionisationsenergie, so entstehen immer wieder neue Ionen im Gas. Die Entladung ist jedoch noch immer unselbständig, da ständig neue Elektronen nachgeführt werden müssen.

Die selbständige Gasentladung ist ähnlich zur unselbständigen im Stossionisationsbereich (Fig. 3.13). Die Ionisation durch Sekundärionen und Elektronen erfolgt lawinenartig und kann durch die immer vorhandenen wenigen Elektronen, erzeugt durch die Hintergrundstrahlung, ausgelöst werden. Es braucht Vorwiderstände, um den Strom zu begrenzen. Gasentladungslampen sind weit verbreitet in der Beleuchtungstechnik.

### 3.7 Spannungs- und Stromquellen (ohne Induktion)

#### 3.7.1 Reibungselektrizität

Bei der Reibungselektrizität handelt es sich im Grunde um eine Kontaktspannung. Die Reibung dient nur dazu, zwei verschiedene Materialien auf einer möglichst grossen Fläche in engen Kontakt zu bringen. Der Abstand zwischen den Materialien muss von der gleichen Grössenordnung sein wie der Abstand in einem Festkörper zwischen Atomen (Grössenordnung  $10^{-10}$  m). Kommen zwei Materialien an einer Fläche in Kontakt, so bildet sich eine Ladungsdoppelschicht (Grundlage der np-Diode, siehe 3.6.2e), wo einzelne Ladungsträger in das andere Material diffundieren und sich die Materialien dann leicht entgegengesetzt aufladen.

Die Doppelschicht erzeugt eine Potentialdifferenz über die Kontaktfläche, die im Gleichgewicht die Diffusion von Ladungsträgern schliesslich unterdrückt. Dies wird als Kontaktspannung bezeichnet, die bei allen Materialpaaren auftritt.

Werden die Materialien wieder getrennt, so verbleiben die diffundierten Ladungsträger im anderen Material, falls es sich um Isolatoren handelt. Das ist die Ursache für die Ladungstrennung, die beim Reiben eines Katzenfells am PVC Stab (negative Ladung), sowie eines Seidentuchs am Glasstab (positive Ladung) festgestellt wurde (siehe 2.1). Dabei wird dasjenige Material mit der grösseren Dielektrizitätskonstanten positiv aufgeladen.

Die Kontaktspannungen zwischen zwei Materialien sind in der Grössenordnung 1 V. Nimmt man an, dass diese Potentialdifferenz bei einer Entfernung der beiden Materialien von  $10^{-10}$  m herrscht, steigt die Spannung beim Vergrössern des Abstandes auf 0,01 m auf  $10^8$  V an, da sich die Kapazität um den Faktor  $10^8$  verkleinert. In der Realität kann nie die ganze Fläche in innige Berührung gebracht werden, und ein Teil der Ladung wird auch beim Trennen von Isolatoren ausgeglichen. Man erreicht aber Potentialdifferenzen von  $10^5$  V. „Reibungselektrizität“ ergibt hohe Spannungen, aber nur sehr geringe Ladungsmengen und entsprechend kleine Ströme. Die sehr hohen Spannungen, die beim Trennen von Isolatoren entstehen, können Funkenentladungen auslösen (Ausziehen eines Wollpullovers, der über einem synthetischem Unterhemd getragen wurde).

#### 3.7.2 Elektrizität in der Atmosphäre

An wolkenlosen Tagen misst man auf flachem Terrain eine elektrische Feldstärke von rund  $E_z = -130 \text{ V m}^{-1}$  (die z-Achse zeigt nach oben). Der Vektor des elektrischen Feldes zeigt senkrecht nach unten. Die Erdoberfläche trägt also eine negative Ladung. Der Betrag der Feldstärke nimmt mit zunehmender Höhe schnell ab und beträgt noch ca.  $25 \text{ V m}^{-1}$  in 2 km Höhe. Die Luft enthält Ladungsträger (Ionen, geladene Wassertröpfchen und Aerosole) und ist deshalb schwach leitend mit einer spezifischen Leitfähigkeit  $\sigma \approx 2.5 \cdot 10^{-14} \text{ A} \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ . Aufgrund des elektrischen Feldes driften die positiven Ladungsträger zur Erdoberfläche, was man als elektrische Stromdichte in z-Richtung messen kann:

$$j_z = \sigma \cdot E_z \approx -3 \cdot 10^{-12} \text{ A} \cdot \text{m}^{-2} .$$

Die negative Ladungsdichte an der Erdoberfläche beträgt rund  $\sigma_{\text{el}} = -1.2 \cdot 10^{-9} \text{ A} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$ . In der Ionosphäre, auf ca. 80 bis 1000 km Höhe, entstehen durch die kosmische Strahlung und

den Sonnenwind kontinuierlich positive Ladungsträger  $O^+$  und  $H^+$ . Der Strom  $j_z$  würde innert weniger Minuten die negative Ladung an der Erdoberfläche neutralisieren. Das heisst, dass der Erdoberfläche stets neue negative Ladungsträger zugeführt werden müssen. Die negative Ladung wird der Erde durch die weltweite Gewitteraktivität geliefert. Einzelne Blitze bringen negativen Ladungen auf die Erdoberfläche (20 bis 30 C pro Blitz). Im globalen Mittel kompensiert der Ladungstransport in Blitzen die geringe Stromdichte  $j_z$ , die in Form von positiv geladenen Aerosolen und Ionen an den übrigen Orten fliesst.

In einer Gewitterwolke entwickeln sich starke vertikale Luftströme, die kleinste Wassertropfchen, Eiskristalle und Aerosole auf 6 bis 7 km Höhe transportieren. Kleinere Tropfchen aggregieren zu grösseren, die bei genügend Gewicht beginnen nach unten zu fallen – es entsteht Regen. Der fallende Tropfen befindet sich im zur Erde gerichteten E-Feld, und somit bildet sich ein induzierter Dipol  $\vec{p}_{\text{ind}} \uparrow \uparrow \vec{E}$ , so dass die Unterseite des fallenden Tropfens eine positive Flächenladung aufweist. Beim Fall trifft der Tropfen zufällig auf positiv und negativ geladene Teilchen. Die positiven Ladungen werden von der der Strömung zugewandten Oberfläche des Tropfens abgestossen, die negativen werden angezogen und "eingesammelt". Der Tropfen lädt sich also beim Fallen negativ auf! Das führt dazu, dass eine voll entwickelte Gewitterwolke an ihrer Unterseite stark negativ aufgeladen ist. Zwischen Wolkenunterseite und der Erdoberfläche entsteht eine Potentialdifferenz von 20 bis 100 MV. Wird die Durchschlagsspannung überschritten, entsteht ein "Ladungsschlauch", der die Erdoberfläche mit der Gewitterwolke verbindet. Durch diesen Leiter fliesst dann die negative Ladung innerhalb von einigen  $10^{-3}$  s zur Erdoberfläche ab. Die Entstehung und der zeitliche Verlauf eines Blitzes ist jedoch ein komplexer Vorgang, auf den wir hier nicht näher eingehen.

### 3.7.3 Galvanische Elemente

Taucht man ein Metall in einen Elektrolyten, gibt das Metall positive Ionen ab. Es entsteht eine elektrische Doppelschicht zwischen positiv geladenem Elektrolyt und negativ geladenem Metall. Die Spannungsdifferenz bei Lösungsgleichgewicht kann nur mit einer zweiten Elektrode gemessen werden. Als übliche Referenz wird die Standardwasserstoffelektrode verwendet. Sie besteht aus einem mit Wasserstoffgas umspülten Platinstab, der in einen Elektrolyten getaucht ist.

#### Galvanisches Element Cu-Zn:

Zwischen einem Cu- und einen Zn-Stab in Leitungswasser wird eine Spannung von 0.9 V gemessen. Beide Stäbe sind von einer Schicht  $Cu^{2+}$ , bzw.  $Zn^{2+}$  Ionen mit Hydrathülle umgeben. Da Zn Elektronen leichter abgibt, entsteht ein Überschuss von  $Zn^{2+}$  Ionen relativ zu  $Cu^{2+}$ . Somit liegt das hohe Potential bei Cu.

Die elektrochemische Spannungen (*elektrochemische Spannungsreihe*) bezüglich der Standardelektrode betragen für einige wichtige Metalle:

Li/Li <sup>+</sup>	-3.05 V	...	
Zn/Zn <sup>++</sup>	-0.76 V	Cu/Cu <sup>++</sup>	+0.34 V
Fe/Fe <sup>++</sup>	-0.41 V	Ag/Ag <sup>+</sup>	+0.80 V
Cd/Cd <sup>++</sup>	-0.40 V	Hg/Hg <sup>++</sup>	+0.85 V
Ni/Ni <sup>++</sup>	-0.23 V	Pt/Pt <sup>++</sup>	+1.20 V
Pb/Pb <sup>++</sup>	-0.13 V	Au/Au <sup>+</sup>	+1.69 V

Negative Normalspannung bedeutet, dass das Metall gegenüber der Wasserstoffelektrode in Lösung geht. Positive Normalspannung heisst, dass aus dem Elektrolyten, in welchem die entsprechenden Metallionen gelöst sind, diese am Metallstab abgeschieden werden. Werden zwei Metalle in einem Elektrolyten verbunden, so geht das unedlere Metall (kleinere Normalspannung) in Lösung, zum Beispiel Zn gegenüber Cu. Taucht man einen Fe-Stab in ein  $\text{CuSO}_4$  Bad, so lagert sich am Fe-Stab eine dünne Cu-Schicht ab.

Aus der Kombination von verschiedenen Metallen oder Metallverbindungen und geeigneten Elektrolyten können **Spannungsquellen** gebaut werden. Grundsätzlich basieren galvanische Elemente auf Redox-Reaktionen von Metallen an den Elektroden. Man unterscheidet sogenannte Primärelemente, die nicht aufladbar sind, und Sekundärelemente oder Akkumulatoren, die wieder aufladbar sind. Einige wichtige Primärelemente sind:

**Klassisches Zink/Braunstein Element (Leclanché)**

Pole: +  $\text{MnO}_2$ ; - Zn

Reaktion:  $\text{Zn} + 2\text{MnO}_2 + 2\text{NH}_4\text{Cl} \rightarrow 2\text{MnO}(\text{OH}) + \text{Zn}(\text{NH}_3)_2\text{Cl}_2$

Nennspannung: 1.5 V

Energiedichte: 25 - 70  $\text{Wh}\cdot\text{kg}^{-1}$

**Zink/Braunstein Element (Alkali-Mangan Batterie)**

Pole: +  $\text{MnO}_2$ ; - Zn

Reaktion:  $\text{Zn} + 2\text{MnO}_2 + 2\text{H}_2\text{O} + 2\text{OH}^- \rightarrow 2\text{MnO}(\text{OH}) + [\text{Zn}(\text{OH})_4]^{2-}$

Nennspannung: 1.5 V

Energiedichte: 80 - 120  $\text{Wh}\cdot\text{kg}^{-1}$

**Zink/Quecksilber**

Pole: +  $\text{HgO}$ ; - Zn

Reaktion:  $\text{Zn} + \text{HgO} \rightarrow \text{Hg} + \text{ZnO}$

Nennspannung: 1.35 V

Energiedichte: 90 - 120  $\text{Wh}\cdot\text{kg}^{-1}$

Der erste Akkumulator war das *Daniell-Element* (1836), bei dem ein Cu-Stab eingetaucht in  $\text{CuSO}_4$ -Lösung, mit einem Zn-Stab in  $\text{ZnSO}_4$ -Lösung verbunden wird. Die beiden Elektrolyte sind durch eine poröse Keramikwand getrennt, die für  $\text{SO}_4^{2-}$  Ionen permeabel ist. An der Zn-Elektrode wird Zn oxidiert ( $\text{Zn} \rightarrow \text{Zn}^{2+} + 2\text{e}^-$ ) und geht als  $\text{Zn}^{2+}$  in Lösung, an der Cu-Elektrode wird Cu reduziert ( $\text{Cu}^{2+} + 2\text{e}^- \rightarrow \text{Cu}$ ), und  $\text{Cu}^{2+}$  Ionen werden vom Elektrolyten an der Elektrode abgelagert. Cu ist das edlere Metall als Zn (siehe elektrochemische Spannungsreihe). Die gemessene Spannung beträgt  $U = +0.34 \text{ V} - (-0.76 \text{ V}) = 1.1 \text{ V}$ . Das Daniell-Element kann als Batterie verwendet werden. Wegen dem hohen Innenwiderstand nimmt die Spannung unter Last jedoch schnell ab (siehe 3.4.2d).

Akkumulatoren mit breiter Anwendung sind:

**Blei Akkumulator**

Pole: +  $\text{PbO}_2$ ; - Pb

Reaktion:  $2\text{PbSO}_4 + \text{H}_2\text{O} \leftrightarrow \text{PbO}_2 + 2\text{H}_2\text{SO}_4 + \text{Pb}$

Nennspannung: 2 V

Energiedichte: 25 - 35  $\text{Wh}\cdot\text{kg}^{-1}$

**Nickel/Cadmium Akkumulator**

Pole: +  $\text{NiOOH}$ ; - Cd

Reaktion:  $\text{Cd}(\text{OH})_2 + 2\text{Ni}(\text{OH})_2 \leftrightarrow \text{Cd} + 2\text{NiOOH} + \text{H}_2\text{O}$

Nennspannung: 1.2 V

Energiedichte: 15 - 45  $\text{Wh}\cdot\text{kg}^{-1}$

**Lithium-Ionen Akkumulator**

Pole: +  $\text{LiMn}_2\text{O}_4$ ; -  $\text{Li}_x\text{C}_n$

Reaktion:  $\text{Li}_{1-x} + \text{Mn}_2\text{O}_4 + \text{Li}_x\text{C}_n \leftrightarrow \text{LiMn}_2\text{O}_4 + n\cdot\text{C}$

Nennspannung: 3.7 V

Energiedichte: 95 - 190  $\text{Wh}\cdot\text{kg}^{-1}$

**Lithium-Luft Akkumulator**

Pole: + poröses C; - Li

Reaktion:  $\text{Li} + \text{O}_2 \leftrightarrow \text{Li}_2\text{O}_2$

Nennspannung: 2.96 V

Energiedichte: 900  $\text{Wh}\cdot\text{kg}^{-1}$

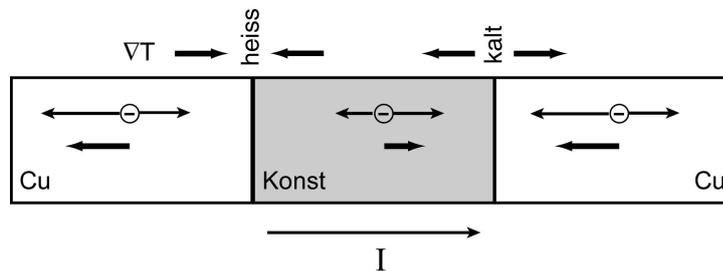
### 3.7.4 Kontaktspannung

Um ein Elektron aus einem Metall herauszulösen, wird Austrittsarbeit benötigt, die von der Gitterstruktur abhängt (z.B.  $W_{\text{Au}} = 5.1 \text{ eV}$ ,  $W_{\text{Al}} = 4.1 \text{ eV}$ ). Werden zwei unterschiedliche Metalle in Kontakt gebracht, so können Elektronen vom einen in das andere Metall "diffundieren". Dabei wandern pro Zeiteinheit mehr Elektronen vom Metall mit niedrigerer Austrittsarbeit zum Metall mit höherer Austrittsarbeit, da insgesamt ein energetisch günstigerer Zustand erreicht wird.

Auf dem Metall mit höherer Austrittsarbeit bildet sich eine negative Oberflächenladung an der Kontaktfläche. Die entsprechend positive Oberflächenladung befindet sich auf dem anderen Metall. Die beiden Oberflächenladungen erzeugen ein elektrisches Feld, welches die Diffusion behindert und bei genügend Ladung schliesslich unterdrückt. Die Potentialdifferenz über der Doppelschicht, die Kontaktspannung, ist dann gerade gleich der Differenz der Austrittsarbeit der beiden Metalle.

### 3.7.5 Thermoelektrische Spannung

Werden zwei verschiedene Metalle an beiden Enden verbunden und die beiden Kontaktstellen auf unterschiedlichen Temperaturen  $T_1$  und  $T_2$  gehalten (Fig. 3.14), baut sich zwischen den beiden Kontaktstellen eine Thermospannung auf. Messfühler, die diesen Effekt ausnützen, nennt man Thermoelemente. Die Thermospannungen sind in der Grössenordnung  $10^{-5} \text{ V}\cdot\text{K}^{-1}$  (*Seebeck Effekt*).



**Figur 3.14:** Cu-Konstantan (55% Cu, 44% Ni, 1% Mn)-Cu Thermoelement. In jedem Metall tritt ein Netto-Elektronenstrom auf in Richtung  $-\nabla T$ . Der elektrische Widerstand von Cu ist ca. 30 Mal kleiner als derjenige von Konstantan, somit dominiert der Elektronenstrom von rechts nach links.

Der Effekt beruht auf der Kombination der thermischen Bewegung von Elektronen im Leiter und der unterschiedlichen Leitfähigkeit der beiden Metalle. Elektronen bewegen sich im Leiter wie ein Gas ("Elektronengas"): sie driften in der heissen Umgebung schneller, als in der kalten. An jedem Ort bewegen sich deshalb jene Elektronen, die von der heissen Stelle kommen, schneller als jene, die von der kalten kommen (Fig. 3.14). Somit resultiert ein Elektronenstrom in Richtung  $-\nabla T$  (*Thermodiffusion*). Im Metall mit der höheren Leitfähigkeit (Cu) sind die Ströme entsprechend grösser. Werden die Leiterenden über einen Widerstand geschlossen, so fliesst der thermoelektrische Strom.

#### Thermoelektrischer Strom:

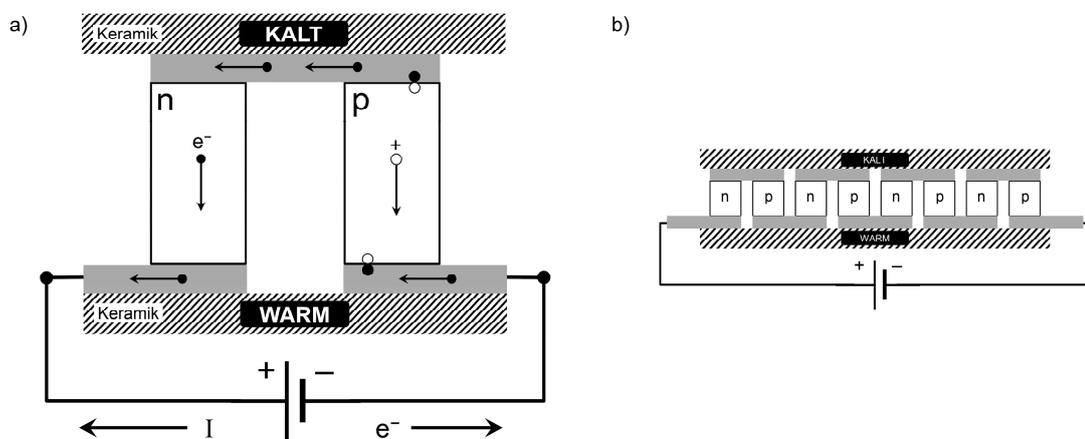
Ein zu einem U gebogener dicker Kupferstab wird am einen Ende in Eiswasser getaucht und am anderen Ende mit einem Brenner erhitzt. Das U ist durch Konstantan-Stege kurzgeschlossen. Durch den Kupferstab fliesst ein grosser thermoelektrischer Strom ( $\sim 40 \text{ A}$ ), dessen Magnetfeld ein Gewicht von mehreren kg halten kann.

### 3.7.6 Peltier Effekt und Peltier-Element

Der Effekt der thermoelektrischen Spannung kann auch umgekehrt genutzt werden. Fließt ein Strom durch eine Grenzfläche zweier unterschiedlicher Leitermaterialien (Metalle, dotierte Halbleiter), beobachtet man an den Kontaktstellen eine Abkühlung, bzw. eine Erwärmung (*Peltier Effekt*). Materialien unterscheiden sich in ihren Fermi-Energien (Metalle: Fig. 3.8, dotierte Halbleiter: Fig. 3.10). Somit ist bei einem gegebenem elektrischen Strom die Energieverteilung, und daher die Driftgeschwindigkeit, verschieden. Die Leitungselektronen nehmen auch am Wärmetransport teil, denn die Elektronen geben Energie ab, wenn sie beim Materialübergang von einem höheren Energieniveau auf ein niedrigeres fallen, z.B. vom Leitungsband eines Metalls in ein Loch eines p-dotierten Halbleiters. Dies äussert sich als lokalisierte Wärmequelle am Materialübergang. Je nach Stromrichtung kann an einer Kontaktstelle eine Erwärmung oder Abkühlung erreicht werden. Ein **Peltier-Element** besteht aus einem n- und p-dotierten Halbleiter, meist  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$ , die durch eine Metallbrücke verbunden sind (Fig. 3.15a).

#### Peltier Effekt:

Durch ein Peltier-Element fließt ein elektrischer Strom. Auf der Seite, wo die Elektronen vom p-dotierten Material via eine Metallbrücke ins n-dotierte Material übertreten, wird eine Abkühlung gemessen. Wird die Spannungsquelle umgekehrt gepolt, so erwärmt sich diese Seite des Peltier-Elements. Ohne Spannungsquelle kann zwischen den Polen des Peltier-Elements eine Potentialdifferenz gemessen werden, falls eine Seite erwärmt, bzw. abgekühlt wird.



**Figur 3.15:** (a): Peltier-Element, das aus einem n-dotierten und p-dotierten Halbleiter besteht, welche auf einer Seite leitend in Serie verbunden sind und deren Enden an einer Spannungsquelle angeschlossen sind. Der Ladungstransport erfolgt im n-dotierten Halbleiter durch Elektronen und im p-dotierten durch Löcher. An den Grenzflächen des p-Halbleiters verschwinden, bzw. entstehen Löcher. (b): Die Serieschaltung von mehreren Peltier-Elementen ergibt Einheiten, die zur Kühlung von Mikroprozessoren verwendet werden.

Effiziente Kühlelemente werden durch in Serie geschalteten Peltier-Elemente realisiert (Fig. 3.15b). Obwohl im Peltier-Element das hohe Potential beim n-dotierten Halbleiter angelegt ist, kann, im Gegensatz zur sperrenden np-Halbleiterdiode (Fig. 3.12), hier ein Strom fließen, da die beiden Halbleiter durch eine Metallbrücke (grau, Fig. 3.15) verbunden sind, wo genügend Ladungsträger vorhanden sind. Der Peltier Effekt kommt, wie bei den Metallen, durch die Struktur der Energiebänder im n- und p-dotierten Halbleiter zustande. Die Energieniveaus der beweglichen Ladungsträger im n- und p-Halbleiter liegen in der Energielücke zwischen Valenz- und Leitungsband (siehe Fig. 3.10). Das Energieniveau des Elektrons eines

Donatoratoms befindet sich knapp unterhalb des Leitungsbands, und ist deshalb höher als das Energieniveau des Lochs eines Akzeptoratoms, welches knapp oberhalb des tiefergelegenen Valenzbandes liegt. Es gilt also für die beweglichen Ladungsträger  $E_{\text{Elektron}} > E_{\text{Loch}}$ . Wenn das Elektron an der Grenzfläche vom Metall in das Loch im p-Halbleiter tritt, wird  $E_{\text{Metall}} - E_{\text{Loch}}$  abgegeben. Gegenüber tritt aber ein Elektron aus dem n-Halbleiter in die Metallbrücke ein und nimmt  $E_{\text{Metall}} - E_{\text{Elektron}}$  auf. Netto wird  $E_{\text{Elektron}} - E_{\text{Loch}} > 0$  an die Umgebung abgegeben: die Stelle erwärmt sich. Auf der oberen Seite der Halbleiter findet der umgekehrte Prozess statt: beim Übertritt der Elektronen vom p-Halbleiter in die Metallbrücke muss mehr Energie aufgenommen werden, als an der Grenzfläche Metallbrücke/n-Halbleiter abgegeben wird, also  $E_{\text{Loch}} - E_{\text{Elektron}} < 0$  wird abgegeben: hier tritt eine Abkühlung auf. An einem einzelnen np-Peltier-Element kann ein Temperaturunterschied von 75 K erzeugt werden. Mit Serie-schaltung von Elementen (Fig. 3.15b) können sogar über 120 K erreicht werden.

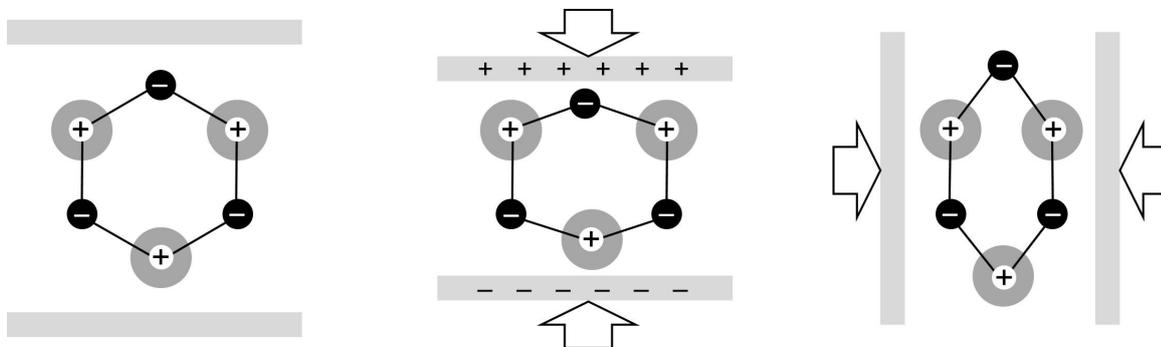
### 3.7.7 Piezoelektrische Spannung

Werden Kristallgitter mechanisch verformt, so verschieben sich die Ladungswolken der Gitteratome, und es bilden sich elektrische Dipolmomente, die makroskopisch als Oberflächenladungen, bzw. als Potentialdifferenzen messbar sind (Fig. 3.16, mitte). Der piezoelektrische Effekt hängt von der Orientierung des Kristallgitters ab.

#### Piezoelektrische Spannung am Bergkristall:

Ein Kristallstab ( $\text{SiO}_2$ ) wird in einen Schraubstock eingespannt. Die Kompression führt zu einer messbaren Spannung. Die erreichten Feldstärken sind im Bereich von  $10^9$  V/m! Die Oberflächenladungen an den Kompressionsflächen können über eine Funkenstrecke abgeführt werden (Anwendung: Feuerzeug).

Umgekehrt erzeugt eine an Kristallflächen angelegte Potentialdifferenz Verformungen ( $10^{-9}$ m) des Kristallgitters. Das ist die Grundlage des Rastertunnel-Mikroskops, das von Gerd Binnig und Heinrich Rohrer (IBM Rüslikon) entwickelt und mit dem Nobelpreis für Physik 1986 geehrt wurde.



**Figur 3.16:** Wird ein Bergkristall ( $\text{SiO}_2$ ) komprimiert, so kann je nach Orientierung der Kompression relativ zum Kristallgitter eine Potentialdifferenz zwischen den Druckflächen gemessen werden. Die elektronegativen O-Atome werden bei der vertikalen Kompression zwischen die elektropositiven Si-Atome geschoben, so dass sich ein nach oben gerichtetes Dipolmoment bildet. Bei der horizontalen Kompression entsteht ein nach unten gerichtetes Dipolmoment, jedoch keine Spannung über den Druckflächen.

## 4. MAGNETISMUS

### 4.1 Charakterisierung magnetischer Felder

Die besonderen physikalischen Eigenschaften von Magnetit ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ) wurden bereits vor über 3000 Jahren in China entdeckt. Dabei beobachtete man, dass Magnetit Kräfte auf bestimmte Materialien ausübt. Die Ursache dieser Kräfte kann mit einem Feld beschrieben werden. Dazu führt man das **Magnetfeld** ein; spezifischere Bezeichnungen für diese Felder werden unten erwähnt.

#### Magnetnadeln im Feld eines Stabmagneten:

Wird eine Magnetnadel in das Feld eines Stabmagneten gebracht, so dreht sich die Nadel und richtet sich entlang der Stabachse aus: es wirkt ein mechanisches Drehmoment auf die Nadel. Ein Gitter von kleinen Magnetnadeln zeigt den Verlauf des Magnetfeldes an, das von einem Stabmagneten verursacht wird. Die Feldlinien des Magnetfeldes verlaufen analog zu den Feldlinien eines elektrischen Dipols: die Linien beginnen an einem Stabende und münden in das andere. Der Stabmagnet wird als magnetischer Dipol bezeichnet.

Die Magnetnadel kann als Vektor beschrieben werden. Da auf eine Magnetnadel in einem Magnetfeld ein mechanisches Drehmoment wirkt, können wir die Nadel als *magnetisches Dipolmoment* auffassen. Wir nutzen nun den Formalismus, der bereits in der Elektrostatik (Abschnitt 2.8) vorgestellt wurde, und führen analog zum elektrischen Feld  $\vec{E}$  und dem elektrischen Dipolmoment  $\vec{p}$  das **magnetische Feld**  $\vec{B}$  und das **magnetische Dipolmoment** (oder **magnetisches Moment**)  $\vec{m}$  ein. Dann gelten folgende formale Analogien:

Elektrostatik		Magnetismus	
elektrisches Feld	$\vec{E}$	magnetisches Feld	$\vec{B}$
elektrisches Dipolmoment	$\vec{p}$	magnetisches Dipolmoment	$\vec{m}$
mechanisches Drehmoment	$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$	mechanisches Drehmoment	$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$
Kraft im inhomogenen Feld	$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla})\vec{E}$	Kraft im inhomogenen Feld	$\vec{F} = (\vec{m} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}$

Eine Magnetnadel in Ruhe zeigt die Richtung des magnetischen Feldes an:  $\vec{B} \uparrow \uparrow \vec{m}$ . Diese Beobachtung legt die Richtung des magnetischen Feldes fest. Man hat historisch jenes Ende von Magnetnadeln, das gegen Norden zeigt, als magnetischen Nordpol, die Gegenseite als magnetischen Südpol bezeichnet. Eine andere Betrachtungsweise des magnetischen Dipolmoments, ausgehend vom mechanischen Drehmoment, wird in Abschnitt 4.4 vorgestellt.

Dass magnetische Felder eng mit Ladungen verknüpft sind, hat Christian Oersted bereits 1820 beobachtet: Eine Magnetnadel richtet sich in der Nähe eines stromführenden Drahts aus. In der Elektrostatik sind ruhende elektrische Ladungen die Ursache elektrischer Felder. Offenbar sind *bewegte elektrische Ladungen* die Ursache für magnetische Felder. Das gilt auch auf atomarer Ebene: ein resultierender Drehimpuls der Elektronenwolke des Atoms ist "bewegte Ladung" und erzeugt ein magnetisches Moment und ein zugehöriges Magnetfeld.

Bis heute wurden keine *magnetische Ladungen*, also magnetische Monopole, gefunden. Aus diesem Grund unterscheiden sich die Strukturen elektrischer und magnetischer Felder. Trotzdem gibt es viele formale Analogien.

Eine ruhende Ladungsverteilung bewirkt ein elektrisches Feld. Ein elektrisches Feld übt eine Kraft auf elektrische Ladungen aus.

Man stellt fest:

- Eine *bewegte elektrische Ladung* oder ein Strom hat ein magnetisches Feld zur Folge.
- Ein magnetisches Feld übt eine Kraft auf eine *bewegte elektrische Ladung* bzw. auf einen stromführenden Leiter aus.

Elektrische und magnetische Felder hängen eng zusammen. Das wird klar, wenn die Wirkung eines magnetischen und elektrischen Feldes im Raum von einem ruhenden und einem bewegten Beobachter beschrieben wird (siehe Abschnitt 4.2.4).

Zur Beschreibung des magnetischen Feldes verwendet man die ***magnetische Induktion***  $\vec{B}$  (weitere Bezeichnungen sind *B-Feld*, *magnetisches Feld* oder *magnetische Flussdichte*), sowie das Feld  $\vec{H}$ .

Das fundamentale magnetische Feld, das Kräfte ausübt, wird durch die Grösse  $\vec{B}$  dargestellt, während  $\vec{H}$  nur den durch *makroskopische* Ströme  $I$  erzeugten Teil des magnetischen Feldes berücksichtigt. Wie die dielektrische Verschiebung  $\vec{D}$  (siehe Abschnitt 2.9.1) ist auch  $\vec{H}$  eine praktische Rechengrösse, wenn Felder in Materie untersucht werden. Für das  $\vec{H}$ -Feld müssen die *mikroskopisch* induzierten Ströme nicht berücksichtigt werden.

Im Vakuum gilt:

$$\vec{B}_{\text{Vakuum}} = \mu_0 \cdot \vec{H} \quad \mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}} = 1.257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}} \quad (4.1)$$

$\mu_0$  ist die ***magnetische Feldkonstante***.

Die Einheit der magnetischen Induktion  $\vec{B}$  ist Tesla:  $[\vec{B}] = \text{T} = \text{V} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$

Die Einheit des  $\vec{H}$ -Felds ist:  $[\vec{H}] = \text{A} \cdot \text{m}^{-1}$

Grössenordnungen:	Erdmagnetfeld:	$\approx 2 \cdot 10^{-5} \text{ T}$
	grosse Elektromagnete:	$\approx 2 \text{ T}$
	grösste Magnete für MRI:	$\approx 10 \text{ T}$
	Bitter Magnet	$\approx 45 \text{ T}$

Analog zu den elektrischen Feldern werden magnetische Felder mit Hilfe von *magnetischen Feldlinien* dargestellt. ***Magnetische Feldlinien sind geschlossen.*** Der Vektor der magnetischen Induktion  $\vec{B}$  ist in jedem Punkt tangential zu den magnetischen Feldlinien. An Orten hoher Feldliniendichte herrschen starke Magnetfelder.

## 4.2 Kraft auf bewegte elektrische Ladungen

### 4.2.1 Lorentzkraft

#### Stromführender Draht im Magnetfeld:

In einem vertikal gerichteten Feld eines Permanentmagneten liegt ein dünner Metallstab auf einem Gleis. Fließt ein Strom durch den Metallstab, so wird dieser beschleunigt. Es wirkt also eine Kraft, deren Richtung senkrecht zur Stromrichtung und zum Magnetfeld ist. Bei umgekehrter Stromrichtung, bzw. Magnetfeld, wechselt die Kraft das Vorzeichen.

Aus dem Experiment stellt man fest:

- Die Kraft steht senkrecht zur Stromrichtung und ist proportional zur Stromstärke.
- Die Kraft tritt nur bei bewegten Ladungen auf.
- Die Kraft steht senkrecht zum Magnetfeld und ist proportional zu seinem Betrag.

Aus diesen Tatsachen kann folgende Vektorgleichung aufgestellt werden:

$$\vec{F}_L = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (4.2)$$

wobei:

$q$	elektrische Ladung
$\vec{v}$	Geschwindigkeit der elektrischen Ladung $q$
$\vec{B}$	magnetisches Feld, in dem sich die Ladung $q$ bewegt

Diese Kraft heisst **Lorentzkraft**. Die Lorentzkraft leistet keine Arbeit, da sie immer senkrecht zur Bewegungsrichtung steht. Gleichung 4.2 kann umgekehrt auch als Definition der magnetischen Induktion und ihrer Masseinheit aufgefasst werden. Das Magnetfeld wird also über seine mechanische Wirkung auf bewegte elektrische Ladungsträger definiert.

Die elektrische Ladung kann sich im Vakuum, in einer Flüssigkeit (Ionen), oder in einem elektrischen Leiter (freie Elektronen) befinden.

Wir betrachten nun die Kraft auf elektrische Ströme:

$$\begin{aligned} \vec{j} &= n \cdot q \cdot \vec{v} & n: & \text{Dichte der Ladungsträger} \\ I &= n \cdot q \cdot v \cdot A & A: & \text{Querschnittsfläche Leiter (senkrecht zu } \vec{v} \text{)} \end{aligned}$$

In einem Leiterstück infinitesimaler Länge hat es  $n \cdot A \cdot d\ell$  Ladungsträger. Sie bewegen sich entlang der Leiterachse. Auf jeden Ladungsträger wirkt im infinitesimalen Leiterstück die infinitesimale Lorentzkraft:

$$d\vec{F} = n \cdot q \cdot A \cdot d\ell \cdot \vec{v} \times \vec{B} = n \cdot q \cdot A \cdot v \cdot d\vec{\ell} \times \vec{B} \quad (4.3)$$

$$d\vec{F} = I \cdot d\vec{\ell} \times \vec{B} \quad (4.4)$$

Die Richtung der Kraft ergibt sich, wie auch für (4.2), aus der Dreifingerregel der rechten (positive Ladungen), bzw. der linken Hand (negative Ladungen).

### 4.2.2 Bahnen von Punktladungen im homogenen Magnetfeld

Auf eine Punktladung im elektrischen und magnetischen Feld wirkt insgesamt die Kraft:

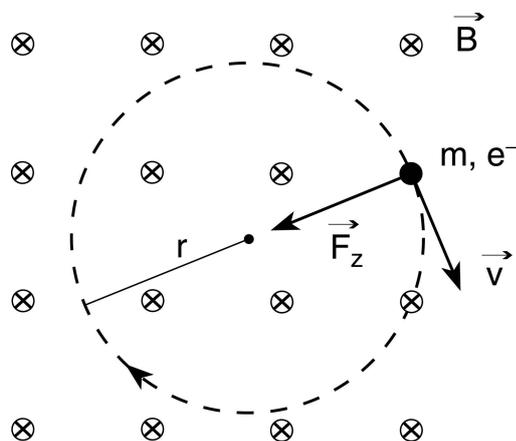
$$\vec{F} = q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (4.5)$$

Als Beispiel betrachten wir ein Elektron, das mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  in ein senkrecht zu  $\vec{v}$  stehendes, homogenes Magnetfeld geschossen wird (Fig. 4.1).

#### Bahnkurven von Elektronen im homogenen Magnetfeld:

In einem durch zwei Helmholtz-Spulen erzeugten nahezu homogenen Magnetfeld befindet sich ein Kolben, in dem aus einer Glühkathode Elektronen beschleunigt werden. Treten diese in das Magnetfeld, wirkt die Lorentzkraft auf sie. Da sie senkrecht zur Geschwindigkeit steht, beschreiben die Elektronen eine Kreisbahn. Die Bahnkurve wird durch Stossanregung des  $H_2$ -Gases im Kolben sichtbar gemacht. Die Erhöhung der Beschleunigungsspannung, bzw. die Abschwächung der magnetischen Induktion erhöht den Radius der Bahnkurve.

Die Feldlinien des magnetischen Feldes zeigen, wie durch die Kreuze angedeutet, senkrecht in die Papierebene hinein. Die Lorentzkraft steht senkrecht zum Magnetfeld und zur Geschwindigkeit; sie wirkt als Zentripetalkraft. Der Betrag der Lorentzkraft ist konstant, da das B-Feld homogen ist, und der Geschwindigkeitsbetrag konstant ist ( $F_L$  leistet keine Arbeit, also  $E_{\text{kin}} = \text{konst.}$ ).



Figur 4.1: Kreisbahn eines Elektrons in einem homogenen Magnetfeld, das senkrecht zur Bewegungsrichtung steht.

$$\begin{aligned} \vec{F}_L &= q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = -e \cdot \vec{v} \times \vec{B} & F_z &= \frac{m \cdot v^2}{r} = F_L = q \cdot v \cdot B \\ B \cdot r &= \frac{m \cdot v}{q} = \frac{p}{q} & & \end{aligned} \quad (4.6)$$

Da der Geschwindigkeitsbetrag konstant ist, ändert sich der Radius  $r$  nicht, und das Elektron beschreibt eine Kreisbahn. Nehmen wir an, dass verschiedene Ladungsträger  $q_i$  mit unterschiedlichen Massen  $m_i$  in einem homogenen E-Feld (Potentialdifferenz  $U$ ) beschleunigt werden. Die kinetische Energie der Ladungsträger ist dann

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot v^2 = q_i \cdot U \quad . \quad (4.7)$$

Aus (4.6) und (4.7), nach r aufgelöst, folgt

$$r^2 = \frac{2 \cdot U}{B^2} \cdot \frac{m_i}{q_i} \quad . \quad (4.8)$$

Wie beobachtet nimmt der Bahnradius zu, wenn die Beschleunigungsspannung erhöht wird, bzw. die magnetische Induktion reduziert wird. Teilchen gleicher Ladung aber verschiedener Masse, bewegen sich auf Bahnen, deren Radien mit der Masse zunehmen. Sie können somit räumlich getrennt und gemessen werden. Das ist die Grundlage der *Massenspektrometrie*.

$$\begin{aligned} \text{Umlaufzeit von Elektronen auf der Kreisbahn:} \quad T &= \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot m}{q \cdot B} \\ \text{Kreisfrequenz (Zyklotronfrequenz):} \quad \omega &= \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{q}{m} \cdot B \end{aligned} \quad (4.9)$$

Für nicht-relativistische Teilchen sind Umlaufzeit und Zyklotronfrequenz unabhängig vom Bahnradius und vom Geschwindigkeitsbetrag.

### 4.2.3 Halleffekt

Fließt Strom durch einen Leiter, der sich in einem Magnetfeld befindet, wirkt auf jeden einzelnen Ladungsträger eine Lorentzkraft. Die Ladungsträger verschieben sich dann im Leiter senkrecht zur Stromrichtung so lange, bis die Lorentzkraft durch die Kraft auf die Ladungen im elektrischen Feld, das durch die Ladungsverschiebung entsteht, aufgehoben wird.

$$q \cdot \vec{E}_H = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

Geschwindigkeiten und Kräfte sind in Figur 4.2 für positive und negative Ladungsträger skizziert.

Auf der unteren und oberen Deckfläche des Quaders bildet sich eine Oberflächenladung. Es besteht also eine Potentialdifferenz über die Distanz b, die gemessen werden kann. Diese Potentialdifferenz wird als **Hall-Spannung** bezeichnet.

Die mittlere Driftgeschwindigkeit der Ladungsträger, wenn es nur eine Sorte hat, beträgt:

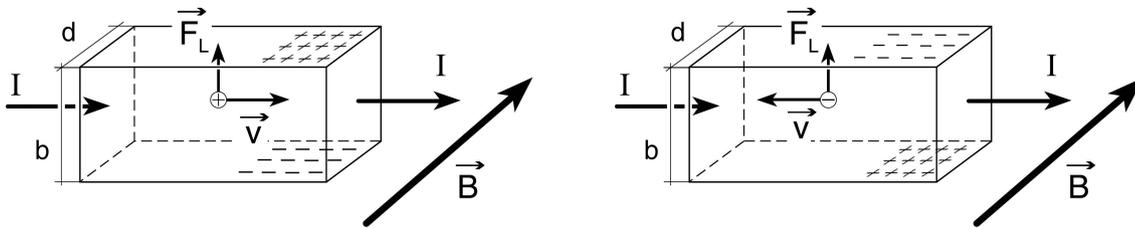
$$\vec{v} = \frac{\vec{j}}{n \cdot q} \quad \text{also } v = \frac{I}{n \cdot q \cdot b \cdot d} \quad .$$

Falls die Ladungsträger Elektronen sind, gilt  $q = -e$

$$F_L = \frac{I \cdot B}{n \cdot b \cdot d}$$

$$e \cdot E_H = e \cdot \frac{U_H}{b} = \frac{I \cdot B}{n \cdot b \cdot d}$$

$$U_H = \frac{1}{n \cdot e} \cdot \frac{I \cdot B}{d} \quad (4.10)$$



**Figur 4.2:** Hallspannung für positive Ladungsträger links und für negative Ladungsträger rechts, erzeugt an einem stromführenden Leiter, der sich in einem Magnetfeld befindet. Je nach Vorzeichen des Ladungsträgers, Richtung des Stroms, und Richtung des Magnetfeldes wechselt die Hallspannung über  $b$  das Vorzeichen.

Bei bekanntem Strom und bekannter magnetischer Feldstärke kann man mit der Hallspannung das Vorzeichen der Ladungsträger und die Anzahl Ladungsträger pro Volumen bestimmen. Man kann auch direkt die Driftgeschwindigkeit messen, wenn man den Leiterstreifen mit der Driftgeschwindigkeit der Ladungsträger entgegen deren Bewegungsrichtung bewegt. Dann wird die Hallspannung Null. (4.10) ist auch die Grundlage der Messung der Feldstärke der magnetischen Induktion. Bei bekannter Geometrie, Stromstärke und Hallspannung, kann die magnetische Induktion mit einer Hall-Sonde bestimmt werden.

#### Hall-Sonde:

Mit einer Hall-Sonde wird die Feldstärke um einen Permanentmagneten ausgemessen.

Bis anhin wurde angenommen, dass die Hallspannung linear mit der Stärke des Magnetfeldes zunimmt (4.10). Bei sehr tiefen Temperaturen und sehr hohen Magnetfeldern beobachtet man jedoch den *Quanten Halleffekt* (Nobelpreis für Physik, 1985; fraktionaler Quanten Halleffekt: Nobelpreis für Physik 1998). Die Hallspannung dividiert durch die Stromstärke nimmt nur noch quantisierte Werte an:

$$U_H = \frac{1}{\nu} \cdot R_K \cdot I \quad \nu = 1, 2, 3, \dots \quad \text{oder} \quad \nu = \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{2}{3}, \dots$$

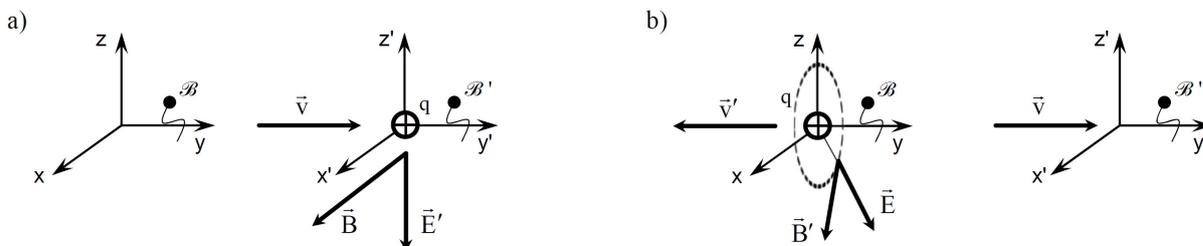
$R_K$  ist die *Von-Klitzing-Konstante*, die die Masseinheit eines Widerstands hat.  $R_K$  ist durch die Elementarladung  $e$  und das Planck'schen Wirkungsquantum  $h$  gegeben:

$$R_K = \frac{h}{e^2} = \frac{6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{(1.602 \cdot 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s})^2} \approx 2.581 \cdot 10^4 \text{ } \Omega \text{ .}$$

Da  $R_K$  mit einer relativen Genauigkeit von  $10^{-9}$  gemessen werden kann, dient dies als Definition eines Normalwiderstands mit dem exakten Wert  $25812.807 \text{ } \Omega$ .

### 4.2.4 Elektrische und magnetische Felder in bewegten Inertialsystemen

Elektrische und magnetische Felder sind eng miteinander verknüpft. Der Beobachter  $\mathcal{B}$  im Ruhesystem  $(x, y, z)$  misst die Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$ ; der mit konstanter Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegte Beobachter  $\mathcal{B}'$  in seinem Inertialsystem  $(x', y', z')$  misst  $\vec{E}'$  und  $\vec{B}'$ .



**Figur 4.3:** a) Eine Ladung  $q$  befindet sich fix im System  $(x', y', z')$ , das mit Geschwindigkeit  $v$  durch ein B-Feld fliegt. Beobachter  $\mathcal{B}'$  interpretiert die Lorentzkraft als eine elektrische Kraft, die durch  $\vec{E}'$  verursacht wird und auf  $q$  wirkt. b) Eine Ladung  $q$  befindet sich fix im Ruhesystem  $(x, y, z)$  und erzeugt das radiale Coulomb-Feld  $\vec{E}$ .  $\mathcal{B}'$  beobachtet die Ladung  $q$ , die sich mit  $\vec{v}' = -\vec{v}$  bewegt. Beobachter  $\mathcal{B}'$  interpretiert die bewegte Ladung  $q$  als elektrischen Strom, der von einem  $\vec{B}'$ -Feld umschlungen sein muss.

Ein Beobachter  $\mathcal{B}'$  und eine Probeladung  $q$  bewegen sich mit  $\vec{v}$  im Raum. Nun treten beide in ein magnetisches Feld  $\vec{B}$  ein (Fig. 4.3a). Die Lorentzkraft  $\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$  wirkt nun auf die Probeladung und beschleunigt sie. Da für  $\mathcal{B}'$  die Ladung  $q$  aber zunächst in Ruhe ist, führt  $\mathcal{B}'$  die Kraft auf  $q$  auf ein  $\vec{E}'$ -Feld senkrecht zur Bewegungsrichtung zurück, also  $\vec{F}' = q \cdot \vec{E}'$ . Eine grundsätzliche Forderung der Physik ist, dass Kräfte unabhängig vom unbeschleunigten Beobachter  $\mathcal{B}'$  sein müssen, das heisst  $\vec{F}' = \vec{F}$ . Beobachter  $\mathcal{B}'$  folgert also  $\vec{E}' = \vec{v} \times \vec{B}$ .

Analog dazu interpretiert  $\mathcal{B}'$  in Fig. 4.3b, dass eine mit  $v'$  bewegte Ladung  $q$  von einem  $\vec{B}'$ -Feld umschlungen ist. Nach Biot-Savart (4.13) gilt  $\vec{B}' \sim q\vec{v}' \times \vec{r} \sim \vec{v}' \times \vec{E} \sim -\vec{v} \times \vec{E}$ , wobei  $\vec{r}$  der Radialvektor ist.  $\mathcal{B}'$  folgert also  $\vec{B}' = -k \cdot (\vec{v} \times \vec{E})$ , wobei  $k$  eine Konstante mit Masseinheit  $(m/s)^{-2}$  ist. In der Vorlesung *Elektrodynamik* wird gezeigt, dass für  $v \ll c$  folgendes gilt:

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} , \\ \vec{B}' &= \vec{B} - \frac{1}{c^2} \cdot (\vec{v} \times \vec{E}) . \end{aligned} \tag{4.11}$$

$\vec{E}$ - und  $\vec{B}$ -Felder hängen vom Bezugssystem des Beobachters ab, das heisst sie sind relativ. Die relativistische Form von (4.11) hat Albert Einstein in seiner grundlegenden Arbeit *Zur Elektrodynamik bewegter Körper* veröffentlicht, die im Juni 1905 in Bern verfasst worden ist und die Spezielle Relativitätstheorie begründet hat (*Annalen der Physik* 17, 891-921).

Im selben Jahr, dem *Annus Mirabilis der Physik*, hat Einstein vier weitere bahnbrechende Arbeiten geschrieben: seine Dissertation über eine neue Methode der Bestimmung von Moleküldimensionen, die Erklärung des Photoeffekts mit Lichtquanten, die Brown'sche Bewegung, und die Äquivalenz von Masse und Energie,  $E = m \cdot c^2$  !

### 4.3 Erzeugung magnetischer Felder

#### 4.3.1 Gesetz von Biot-Savart

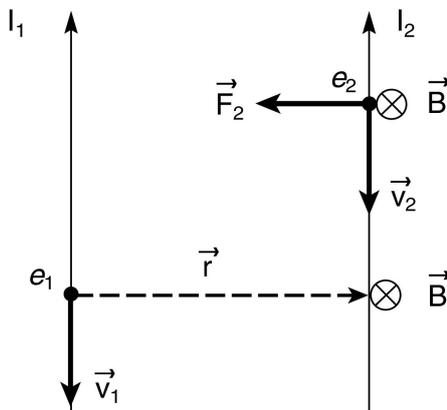
Ladungen sind Quellen elektrischer Felder. Der Betrag des elektrischen Feldes ist proportional zur Ladung und nimmt mit dem Abstand von der Quelle gemäss  $1/r^2$  ab.

Wenn sich Ladungen bewegen, werden zusätzlich Magnetfelder erzeugt. Ihr Vorhandensein wird durch die Wirkung der Lorentzkraft auf die sich bewegenden Ladungsträger bestätigt. Dies folgt aus dem einfachen Versuch zweier paralleler, stromführender Drähte, die sich anziehen (Fig. 4.3).

#### Kraftwirkung paralleler elektrischer Ströme:

Durch zwei lose, nebeneinander aufgehängte Drähte fliesst Strom in derselben Richtung. Eine anziehende Kraft lenkt die beiden Drähte zueinander aus.

Die Anziehung der beiden Drähte kommt aufgrund der Kraft auf die bewegten Ladungen zustande. Betrachten wir ein Elektron in Leiter 2 (Fig. 4.4), das sich mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}_2$  bewegt. Auf dieses wirkt die Kraft  $\vec{F}_2$ , jedoch nur dann, wenn in Leiter 2 ein Strom fliesst.



**Figur 4.4:** Zwei parallele Leiter ziehen sich an, falls durch sie die Ströme  $I_1$  und  $I_2$  in gleicher Richtung fließen. Das heisst, dass bewegte Ladungen im Leiter 1 ein Magnetfeld im Raum verursachen.

Andererseits kommt die Kraft auch nur zustande, wenn in Leiter 1 ein Strom fliesst; sie ist somit eine *Wirkung* der bewegten Ladungen in Leiter 1. Also handelt es sich um eine Lorentzkraft, so dass am Ort des Elektrons  $e_2$  ein Magnetfeld herrschen muss, gemäss

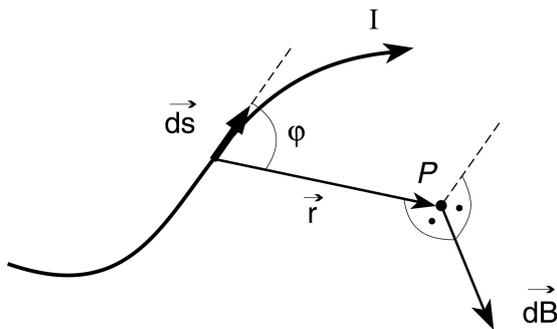
$$\vec{F}_2 = e \cdot (\vec{v}_2 \times \vec{B}) \quad (4.12)$$

Das Magnetfeld ist in die Zeichenebene gerichtet. Die Lorentzkraft tritt jedoch nur auf, wenn im Leiter 1 ein Strom fliesst. Die bewegten Ladungen in Leiter 1 sind also die *Ursache* für die Lorentzkraft, und somit das Magnetfeld. Es gilt geometrisch  $\vec{B} \perp \vec{r}$  und  $\vec{B} \perp \vec{v}$ .

Nach *actio = reactio* wirkt auch auf das Elektron  $e_1$  eine gleich grosse, entgegengesetzte Kraft.

Natürlich kommt die magnetische Induktion  $\vec{B}$  zustande aufgrund der gemeinsamen Wirkung sämtlicher bewegter Ladungen im Leiter 1. Die Beobachtung zeigt, dass der Betrag von  $B$  proportional zur Stromstärke  $I_1$  ist.

Das obige Beispiel ist sehr speziell, indem unendlich lange, parallele Leiter betrachtet wurden, in denen die Ströme fließen. Eine allgemeinere Konfiguration ist ein beliebig geformter dünner Leiter, durch den ein Strom der Stromstärke  $I$  fließt (Fig. 4.5).



**Figur 4.5:** Bewegte Ladungen im elektrischen Leiter bewirken ein Magnetfeld im Raum.

Durch ein infinitesimales Leiterstück  $d\vec{s}$  fließen nun Ladungsträger, die im Punkt  $P$  einen infinitesimalen Beitrag  $d\vec{B}$  zum Magnetfeld liefern. J.-B. Biot und F. Savart haben 1820 folgendes Gesetz gefunden:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{I \cdot (d\vec{s} \times \vec{r})}{r^3} \quad (4.13)$$

Das Gesetz von Biot-Savart kann auch direkt aus den Maxwell Gleichungen (1.2) und (1.4) hergeleitet werden.

Falls nur der Betrag des infinitesimalen Beitrages zum Magnetfeld interessiert, kann (4.13) geschrieben werden als:

$$dB = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\sin \varphi}{r^2} \cdot ds \quad (4.14)$$

Diese Ausdrücke erlauben es, die resultierende magnetische Feldstärke eines beliebig geformten stromführenden Leiters in irgendeinem Punkt des Raumes zu berechnen.

Eine gewisse formale Analogie von (4.13) zur elektrischen Feldstärke einer Punktladung ist erkennbar. Der Betrag des Magnetfeldes nimmt quadratisch mit dem Abstand vom stromführenden Leiterelement ab. Der Betrag des elektrischen Feldes einer Punktladung nimmt ebenfalls quadratisch mit dem Abstand von der Ladung ab (Coulomb Gesetz). Der Vektorcharakter ist jedoch völlig unterschiedlich.

### 4.3.2 Beispiele zur Berechnung magnetischer Felder mit dem Gesetz von Biot-Savart

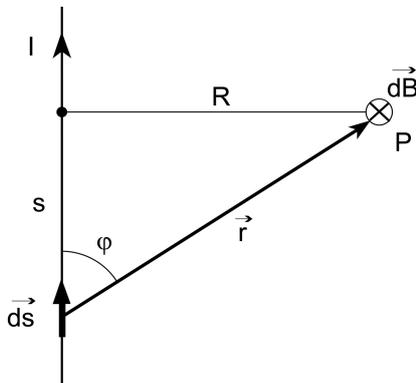
#### a) Unendlich langer gerader Leiter

Gemäss Fig. 4.6 ist der Beitrag an den Betrag des Magnetfeldes im Punkt P von einem Leiterelement  $ds$  unter dem Winkel  $\varphi$  gegeben durch

$$dB = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\sin \varphi \cdot ds}{r^2} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{R \cdot ds}{\sqrt{(s^2 + R^2)^3}} \quad \rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R \cdot ds}{(s^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot R}$$

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot R} \quad (4.15)$$

Die magnetische Feldstärke im Abstand R eines unendlich langen Leiters, der den Strom I führt, ist proportional zum Strom und umgekehrt proportional zum Abstand.



**Figur 4.6:** Bestimmung des Magnetfeldes im Punkt P verursacht durch die Stromstärke I im geraden Leiter.

Die Feldlinien des Magnetfeldes sind konzentrische Kreise, da die Feldstärke B nach (4.15) nur von R abhängt, das heisst auf einem Kreis ist der Betrag von  $\vec{B}$  konstant. Der Drehsinn der Feldlinien hängt von der Stromrichtung ab und kann mit der rechten Hand einfach bestimmt werden (Daumen in Stromrichtung, 4 geschlossene Finger zeigen den Drehsinn an).

#### Magnetfeld um einen geraden Leiter:

Fliesst ein elektrischer Strom in einem langen, geraden Kupferdraht, so richten sich die kleinen Magnetnadeln im Magnetfeld aus (magnetische Dipole). Die magnetischen Feldlinien sind konzentrische Kreise; magnetische Feldlinien sind immer geschlossen. Die Abnahme der Feldstärke ( $\sim 1/r$ ) wird mit der Hall-Sonde gemessen.

#### Darstellung der magnetischen Feldlinien mit Eisenfeilspänen 1:

Verschiedene Anordnungen von Leitern, in denen ein Strom fliesst, werden mit Eisenfeilspänen bestreut, die die magnetischen Feldlinien anzeigen. Die Felder überlagern sich.

### b) Kraft zwischen parallelen Leitern

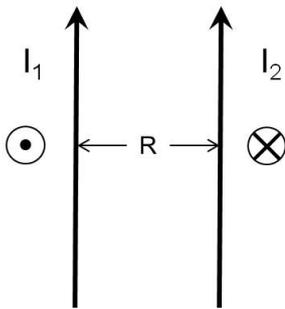
Einerseits verursacht ein stromführender Draht ein Magnetfeld, andererseits übt die magnetische Induktion eine Kraft auf einen stromführenden Draht aus. Im Folgenden soll berechnet werden, wie gross die Kraft zwischen zwei parallelen unendlich langen stromführenden Leitern ist.

Die Lage der stromführenden Leiter ist in Fig. 4.7 dargestellt. Der Strom  $I_1$  im Leiter 1 bewirkt am Ort des Leiters 2 ein Magnetfeld:

$$B_1 = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2 \cdot \pi \cdot R} \quad . \quad (4.16)$$

Die Kraft, das dieses Magnetfeld auf ein infinitesimales Leiterstück ausübt, in dem der Strom  $I_2$  fliesst, beträgt:

$$d\vec{F} = I_2 \cdot (d\vec{\ell} \times \vec{B}) \quad .$$



**Figur 4.7:** Zwei parallele, stromführende Leiter und die erzeugten Magnetfelder.

Bei parallelen Leitern steht  $d\vec{\ell}$  immer senkrecht zu  $\vec{B}$ .

$$dF = I_2 \cdot d\ell \cdot \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2 \cdot \pi \cdot R} \quad \rightarrow \quad F = \mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot \frac{\ell}{2 \cdot \pi \cdot R} \quad .$$

Fliesst der Strom in beiden Drähten in gleicher Richtung, ziehen sie sich an. Fliesst er in entgegengesetzter Richtung, stossen sie sich ab.

Fliesst in 1 m voneinander entfernten Leitern je der Strom 1 A dann beträgt die Kraft je Meter Leiterstück:

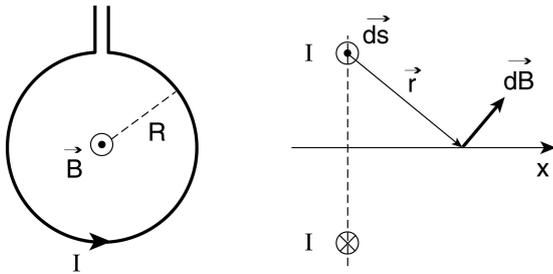
$$F = \mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot \frac{\ell}{2 \cdot \pi \cdot R} = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}} \cdot 1 \text{ A} \cdot 1 \text{ A} \cdot \frac{1 \text{ m}}{2 \cdot \pi \cdot 1 \text{ m}} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N} \quad .$$

Dies ist keine Überraschung, denn das entspricht der Definition des Ampère.

### c) Magnetisches Feld im Zentrum einer kreisrunden Leiterschleife

Wir wenden das Gesetz von Biot-Savart (4.13) auf eine kreisrunde Leiterschleife an. Im Zentrum haben alle Leiterelemente den Abstand  $R$  (Fig. 4.8, links), und als Integrationsvariable kann der Azimutwinkel verwendet werden:

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \int \frac{I \cdot |d\vec{s} \times \vec{r}|}{r^3} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{R \cdot d\vartheta \cdot R}{R^3} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot R} \quad (4.17)$$



**Figur 4.8:** Links: Kreisförmige Leiterschleife mit Stromrichtung im Gegenuhrzeigersinn. Rechts: Ansicht von der Seite und Bezeichnungen zur Berechnung des Magnetfeldes auf der Zentralachse durch die Leiterschleife.

#### Darstellung der magnetischen Feldlinien mit Eisenfeilspänen 2:

Strom fließt durch verschiedene Formen von Leiterschleifen. Die Eisenfeilspäne richten sich nach dem Magnetfeld aus und zeigen den Verlauf der Feldlinien. Die Feldlinien sind in der Spule stark gebündelt und schliessen sich ausserhalb; dort ist die Feldstärke schwach. Das Magnetfeld ist im Torus eingeschlossen.

### d) Helmholtz-Spule, Anti-Helmholtz-Spule

Wir wenden wiederum das Gesetz von Biot-Savart (4.13) auf eine kreisrunde Leiterschleife an (Fig. 4.8 rechts). Der Betrag des Magnetfeldes auf der Zentralachse ist gegeben durch

$$B(x) = \frac{\mu_0 \cdot I}{2} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \cdot$$

Zwei identische Kreisschleifen mit Radius  $R$  im Abstand  $R$  ergeben eine *Helmholtz-Spule*, falls in beiden Schleifen der Strom  $I$  im gleichen Drehsinn fließt. Auf der Zentralachse zwischen den Schleifen entsteht ein nahezu homogenes Magnetfeld des Betrags:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{R} \cdot \frac{8}{\sqrt{125}} \cdot$$

Bei  $x = 0$  gilt  $\partial B / \partial x = \partial^2 B / \partial x^2 = \partial^3 B / \partial x^3 = 0$ , d.h. dort ist die Feldstärke nahezu konstant. Anwendungen sind das Magnetron oder der Tokamak.

In der *Anti-Helmholtz-Spule* sind die beiden Ströme gegeneinander gerichtet. Für den Spulenabstand von  $\sqrt{3} \cdot R$  entsteht ein Magnetfeld mit einem fast konstanten Gradienten bei  $x = 0$ , d.h.  $\partial^2 B / \partial x^2 = \partial^3 B / \partial x^3 = 0$ . Wichtige Anwendungen der Anti-Helmholtz-Spule sind die Fokussierung von Teilchenstrahlen in Beschleunigern, magneto-optische Fallen zum Einfangen von neutralen Atomen, und MRI-Geräte.

### 4.3.3 Gesetz von Ampère (Durchflutungsgesetz)

Die Linien des magnetischen Feldes um einen unendlich langen, stromdurchflossenen Leiter beschreiben zur Drahtachse konzentrische Kreise. Bildet man ein Integral über einen geschlossenen Kreis mit beliebigem aber festem Radius erhält man unter Berücksichtigung von (4.16)

$$\int_{\text{Kreis}} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r = \mu_0 \cdot I \quad .$$

Dieses Ergebnis lässt sich auf beliebige stationäre elektrische Ströme verallgemeinern. Das sogenannte *Gesetz von Ampère*, oder Durchflutungsgesetz lautet dann (ohne Herleitung):

$$\int_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} \quad (4.18)$$

wobei über die Fläche A, bzw. entlang ihrem Rand  $\partial A$  integriert wird. Diese wichtige Gleichung entspricht der vierten Maxwell Gleichung in integraler Form (1.8), sofern die Flüsse der elektrischen Felder, und damit auch die elektrischen Felder selbst, zeitlich konstant sind. Das ist aber nur der Fall, wenn wir uns auf stationäre Ströme beschränken.

Hauptsächlich für Studierende der Physik:

Nach dem mathematischen Satz von Stokes kann man Gleichung (4.18) wie folgt schreiben:

$$\int_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_A \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{A} = \mu_0 \cdot \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} \quad . \quad (4.19)$$

Die Fläche A und ihr Rand  $\partial A$  sind beliebig, also gilt für die Integranden Gleichheit:

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j} \quad .$$

Das ist *ein Teil* der **4. Maxwell Gleichung** (1.4). Wir definieren nun den **magnetischen Fluss**

$\Phi_B = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$  und betrachten eine Oberfläche A, die ein Volumen V umschließt.

Magnetfeldlinien sind gemäss Beobachtung immer geschlossen (siehe 4.1), das heisst für den Gesamtfluss durch A gilt  $\Phi_B = 0$ . Nach dem mathematischen Satz von Gauss folgt dann:

$$\Phi_B = \int_{A=\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_V \text{div } \vec{B} \cdot dV = 0 \quad . \quad (4.20)$$

Diese Gleichung ist die **2. Maxwell Gleichung** (1.6), bzw. in lokaler Form (1.2):

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad . \quad (4.21)$$

Das ist die fundamentale Aussage, dass keine magnetischen Ladungen existieren. **Es gibt keine magnetischen Monopole**, bzw. keine Quellen oder Senken magnetischer Feldlinien.

#### 4.3.4 Beispiele zur Berechnung magnetischer Felder mit dem Gesetz von Ampère

Für die Berechnung von magnetischen Feldern bei gegebener Verteilung elektrischer Ströme haben wir in 4.2.2 das Gesetz von Biot-Savart angewendet. Wir berechnen nun den Betrag des Magnetfeldes mit dem Gesetz von Ampère. Grundsätzlich kann man beide Methoden verwenden. Beim unendlich langen geraden Draht führen beide Methoden relativ einfach zum Ergebnis. Bei anderen Anordnungen kommt es auf die vorhandenen Symmetrien an.

##### a) Magnetisches Feld um den unendlich langen, geraden Draht

Wir betrachten einen unendlich langen, geraden Draht, durch den der Strom  $I$  fließt. Der Betrag des Magnetfeldes an einem Punkt hängt in diesem Fall nur vom Abstand vom Draht ab. Somit können wir (4.18) anwenden, und integrieren auf einem Kreis mit Radius  $R$ , durch dessen Zentrum der Draht geht:

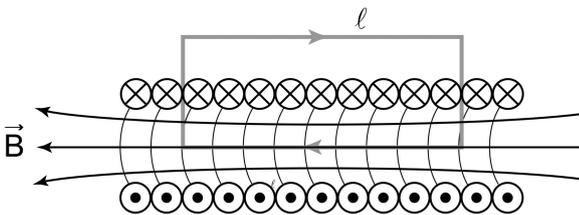
$$\int_{\text{Kreis}} \vec{B} \cdot d\vec{s} = B(R) \cdot 2 \cdot \pi \cdot R = \mu_0 \cdot I \quad .$$

Also folgt, in Übereinstimmung mit (4.15)

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot R} \quad . \quad (4.22)$$

##### b) Magnetisches Feld in einer langen Zylinderspule (Solenoid)

Wir betrachten eine Zylinderspule der Länge  $\ell$ , die im wesentlichen aus einer Aneinanderreihung von einzelnen kreisrunden Leiterschleifen in Serie besteht (Fig. 4.9). Die Spule bestehe aus  $n$  Windungen pro Längeneinheit. Aus Symmetriegründen muss  $\vec{B}$  parallel zur Spulenachse sein. Aus Experimenten wissen wir zusätzlich, dass  $\vec{B}$  ausserhalb der Spule sehr klein, ist. Diese Randeffekte sollen nicht berücksichtigt werden.



**Figur 4.9:** Schnittbild einer langen Zylinderspule (Solenoid) mit  $n$  Windungen pro Längeneinheit. Stromrichtung durch die Spule und der geschlossene Integrationspfad sind dargestellt.

Nach dem Gesetz von Ampère gilt:

$$\int_{\text{Pfad } \ell} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot \sum I \rightarrow |\vec{B}| \cdot \ell + 0 + 0 + 0 = \mu_0 \cdot n \cdot \ell \cdot I$$

$B = \mu_0 \cdot n \cdot I$	(4.23)
-----------------------------	--------

Das Magnetfeld ist im Innern der langen Spule annähernd konstant.

## 4.4 Magnetisches Moment

Die ersten Experimente zum Magnetismus wurden ausschliesslich mit Permanentmagneten durchgeführt. Wie in Abschnitt 4.1 erwähnt, entdeckte Oersted 1820, dass ein elektrischer Strom eine Magnetnadel genauso ablenkt wie ein Permanentmagnet. Es besteht somit ein enger Zusammenhang zwischen Strom und Magnetismus. Heute wissen wir, dass die atomaren magnetischen Momente, auch diejenigen der Permanentmagnete, durch atomare „Kreisströme“ verursacht werden.

Das Ende eines Stabmagneten, das sich nach Norden ausrichtet, heisst Nordpol. Zwei unterschiedliche Magnetpole ziehen sich an, zwei gleiche Pole stossen sich ab. Die Feldlinien des magnetischen Feldes ausserhalb eines Stabmagneten gehen vom Nordpol zum Südpol. (Achtung: Da der Nordpol einer Kompassnadel näherungsweise nach Norden zeigt, liegt heute der magnetische Südpol nahe beim geographischen Nordpol der Erde!).

### 4.4.1 Magnetisches Moment eines elektrischen Stromes in einer Leiterschleife

#### Drehmoment auf Leiterschleife im Magnetfeld:

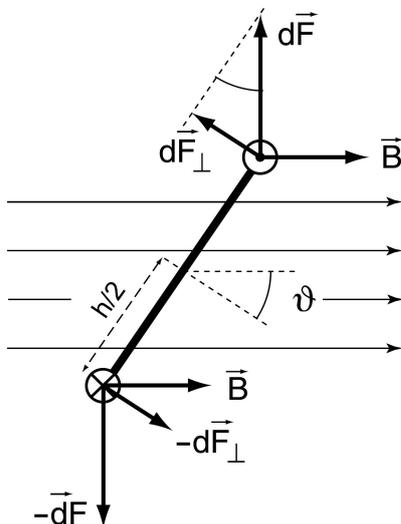
Eine rechteckige Leiterschleife ist im Feld eines Permanentmagneten drehbar aufgehängt. Fliesst ein Strom durch die Leiterschleife, so wirkt ein mechanisches Drehmoment auf die Schleife, das von der Stromstärke abhängt. Wird die Stromrichtung umgekehrt, ändert sich auch die Richtung des mechanischen Drehmomentes.

Wir betrachten eine rechteckige Leiterschleife der Breite  $h$  und Länge  $s$ , die sich in einem homogenen Magnetfeld befindet (Fig. 4.10). Fliesst ein elektrischer Strom  $I$  durch die Schleife, dann wirkt die Lorentzkraft auf die Ladungsträger, und somit gemäss (4.4) eine Kraft auf den Leiter.

Die Kraft auf ein infinitesimales Leiterstück ist

$$d\vec{F} = I \cdot d\vec{s} \times \vec{B}$$

Das Kräftepaar auf gegenüberliegenden Leiterstücken übt ein infinitesimales mechanisches Drehmoment bezüglich dem Mittelpunkt aus, dessen Betrag gegeben ist durch



**Figur 4.10:** Aufsicht auf rechteckige Leiterschleife im homogenen Magnetfeld  $B$ . Der Strom ist im rechten Ast aus der Papierebene gerichtet, im linken in die Ebene hinein. Auf das Leitererelement wirkt die Lorentzkraft  $d\vec{F}$ . Das Kräftepaar bildet ein mechanisches Drehmoment bezüglich dem Mittelpunkt.

$$dM = 2 \cdot \frac{h}{2} \cdot dF_{\perp} = h \cdot dF \cdot \sin \vartheta = h \cdot I \cdot ds \cdot B \cdot \sin \vartheta \quad . \quad (4.24)$$

Der Drehmomentvektor zeigt aus der Blattebene. Die Kräfte auf die oberen und unteren Leiterstücke bilden keine Drehmomente.

Integration von (4.24) entlang  $s$ , d.h. senkrecht zur Blattebene in Fig. 4.10, ergibt:

$$M = h \cdot I \cdot s \cdot B \cdot \sin \vartheta = I \cdot A \cdot B \cdot \sin \vartheta \quad , \quad (4.25)$$

wobei  $A$  die Fläche ist, die die rechteckige Leiterschleife aufspannt. Die Verallgemeinerung und Vektorschreibweise von (4.25) lautet:

$$\vec{M} = I \cdot \vec{A} \times \vec{B} \quad . \quad (4.26)$$

Die Analogie zum elektrischen Dipolmoment (2.44) ist offensichtlich, wenn wir ein **magnetisches Moment** definieren gemäss

$$\vec{m} = I \cdot \vec{A} \quad (4.27)$$

wobei  $I$  die Stromstärke in der die Fläche  $\vec{A}$  umfahrenden Leiterschleife bezeichnet. Somit kann (4.26) in Analogie zu (2.44) geschrieben werden:

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (4.28)$$

Auf ein magnetisches Moment wirkt in einem Magnetfeld ein mechanisches Drehmoment.

Die obigen Resultate können auch für eine Kreisschleife, oder für eine beliebige geschlossene Drahtschleife, die die Fläche  $A$  umfahren, hergeleitet werden.

#### 4.4.2 Potentielle Energie und Kraft

Aufgrund der Definition des magnetischen Moments, können wir die Resultate aus Kapitel 2.7.3 und 2.7.4 direkt übernehmen.

Ein homogenes äusseres Magnetfeld versucht, ein magnetisches Moment  $\vec{m}$  entlang der Feldlinie auszurichten. Ein nicht ausgerichtetes magnetisches Moment hat damit eine vom Winkel  $\vartheta$  abhängige potentielle Energie:

$$E_{\text{pot}} = -\vec{m} \cdot \vec{B} \quad (4.29)$$

Im inhomogenen Magnetfeld  $\vec{B}$  wirkt zusätzlich eine Kraft auf das magnetische Moment:

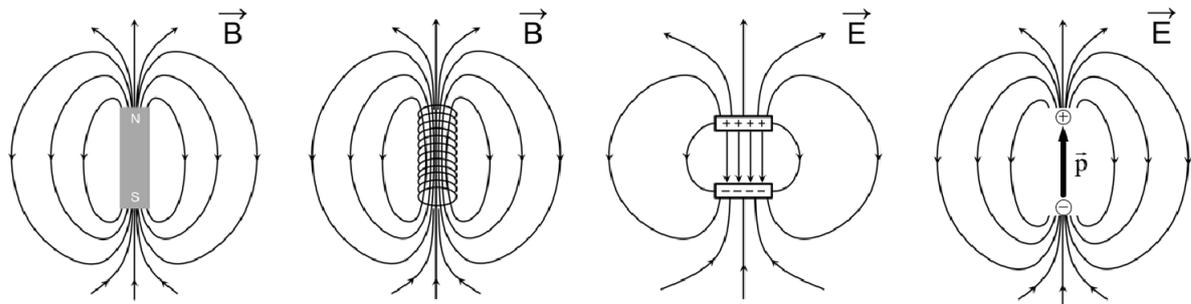
$$\vec{F} = (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \quad . \quad (4.30)$$

### 4.4.3 Magnetisches Feld eines magnetischen Moments

Analog zum Feld eines elektrischen Dipols verursacht auch ein magnetisches Moment ein Magnetfeld. Dieses Feld lässt sich, formal analog zu (2.43), darstellen (ohne Herleitung):

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{3 \cdot (\vec{m} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{m}}{r^5} \quad (4.31)$$

Die Form der Feldlinien ist daher identisch zu derjenigen eines elektrischen Dipols (Fig. 4.11). Deshalb spricht man auch von magnetischen Dipolen, obwohl es keine magnetische Ladungen gibt. Bis anhin haben wir nur Dipole, verursacht von einem Kreisstrom, behandelt. Natürlich sind auch Stabmagnete und Solenoide magnetische Dipole. Bei Permanentmagneten greifen wir etwas vor, da es sich im Stab nicht mehr um Felder im Vakuum handelt.



**Figur 4.11:** Schematische Darstellung der B-Feldlinien eines Permanentmagneten, einer Spule (Solenoid), sowie der E-Feldlinien eines geladenen Kondensators und eines elektrischen Dipolmoments. Die Plattengröße des Kondensators nicht grösser ist als der Plattenabstand. Alle Anordnungen entsprechen näherungsweise einem magnetischen, bzw. elektrischen Dipol (Fig.2.3).

Magnetischen Momenten kann, in Analogie zu den elektrischen Dipolen, eine *magnetische Polstärke*  $P_m$  zugeordnet werden, die formal die Rolle einer "magnetischen Ladung" übernimmt. In Analogie zu  $\vec{F} = Q \cdot \vec{E}$  schreibt man  $\vec{F} = P_m \cdot \vec{B}$ . Mit (4.28) und  $\vec{M} = \vec{\ell} \times \vec{F}$  folgt dann

$$\vec{m} = P_m \cdot \vec{\ell} \quad , \quad (4.32)$$

korrespondierend zu (2.41).  $\vec{\ell}$  zeigt vom Südpol zum Nordpol des Magneten.

Im Stabmagneten und im Solenoid (lange Spule) sei das Magnetfeld  $\vec{B}$ . Man kann nun den *magnetischen Fluss*, der durch eine Fläche A fließt, definieren:

$$\Phi_B = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (4.33)$$

Der magnetische Fluss ist die Grundlage für die elektromagnetische Induktion (3. Maxwell Gleichung), die im folgenden Kapitel behandelt wird.

Hauptsächlich für Studierende der Physik:

Den Zusammenhang zwischen Polstärke und magnetischem Fluss kann in der Spule einfach berechnet werden. Eine lange Spule ist auch ein gutes makroskopisches Modell für den Stabmagneten.

In einer Spule der Querschnittsfläche  $A$  und Windungszahl  $n$  ist  $\Phi_B = \mu_0 \cdot n \cdot I \cdot A$ . Das magnetische Moment ist  $m = (n \cdot \ell) \cdot I \cdot A$ . Somit gilt für die Spule die Polstärke  $P_m = \Phi_B / \mu_0$ . Allgemein ist das magnetische Moment des Stabmagneten oder Solenoids:

$$\vec{m} = \frac{\Phi_B \cdot \vec{\ell}}{\mu_0} \quad (4.34)$$

Der Betrag von  $\vec{\ell}$  entspricht der Länge von Stabmagnet oder Solenoid. Die Richtung zeigt vom Südpol zum Nordpol des Magneten.

Es bleibt nun noch die Frage zu klären, wie stark z.B. der Nordpol eines Stabmagneten von einem Südpol eines andern Stabmagneten angezogen wird. Bei langen Stabmagneten (oder Solenoiden) kann man die Polstärke fast als eine Art "magnetische Ladung" (wie beim elektrischen Dipol) betrachten. Die Kraft zwischen einem Nordpol der Polstärke  $P_{m1}$  und dem Südpol der Polstärke  $P_{m2}$  beträgt dann (ohne Herleitung):

$$\left| \vec{F}(r) \right| = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{P_{m1} \cdot P_{m2}}{r^2}, \quad (4.35)$$

wobei  $r$  der Abstand der beiden Pole ist. Dieser Abstand muss viel kleiner sein, als die Länge des Stabmagneten, aber viel grösser als der Durchmesser des Magneten oder Solenoides. Die Beziehung (4.35) hat damit eine sehr beschränkte praktische Bedeutung und eignet sich insbesondere nicht, um die Hubkraft eines Magneten zu berechnen (siehe 4.52).

Hauptsächlich für Studierende der Physik

## 4.5 Elektromagnetische Induktion

### 4.5.1 Vorbereitende Überlegungen

Bewegt man ein Leiterstück mit freien Ladungsträgern durch ein Magnetfeld, dann wirkt auf die Ladungsträger die Lorentzkraft. Unter der Lorentzkraft verschieben sich die Ladungsträger und bauen ein elektrisches Feld auf, bis die elektrostatische Kraft die Lorentzkraft gerade kompensiert. Ganz analoge Verhältnisse wurden schon beim Halleffekt (Kap. 4.1.4) behandelt.

#### **Eine Spule fällt durch ein räumlich begrenztes permanentes Magnetfeld:**

Eine kleine Spule, die über einen Widerstand kurzgeschlossen ist, fällt durch ein räumlich begrenztes permanentes Magnetfeld, das senkrecht zur von der Spule umschlossenen Fläche gerichtet ist. Beim Eintritt und beim Austritt der Spule aus dem Magnetfeld, verlangsamt sich die Bewegung.

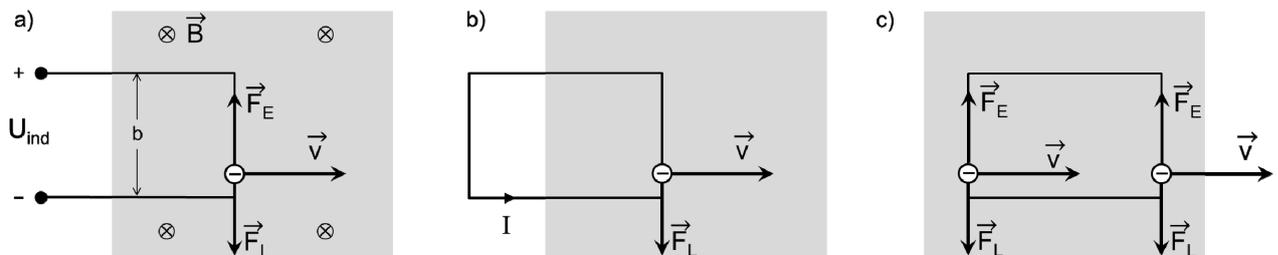
Eine Leiterschleife wird durch ein homogenes, aber räumlich begrenztes Magnetfeld geschoben, das in die Papierebene zeigt (Fig. 4.12). Die Geschwindigkeit ist klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit. Im dünnen Draht berücksichtigen wir nur Bewegungen der Ladungsträger entlang der Drahtachsen. Drei Fälle sind zu unterscheiden: bei a) ist die Schleife offen und die rechte Hälfte befindet sich bereits im Magnetfeld. Bei b) und c) betrachten wir eine geschlossene Schleife, die teilweise (b), bzw. vollständig (c) im Magnetfeld ist. In der Situation der Fig. 4.12a wirkt die Lorentzkraft auf die Elektronen, die solange an den unteren Pol driften bis eine Potentialdifferenz  $U_{\text{ind}}$  zwischen dem nun positiv geladenen oberen, und dem nun negativ geladenen unteren Pol aufgebaut ist. Entlang des Drahtes wirkt nun ein elektrisches Feld, das eine weitere Bewegung der Elektronen verhindert. Dann heben sich Lorentzkraft und die durch das E-Feld verursachte Kraft auf:

$$\vec{F}_L + \vec{F}_E = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) + q \cdot \vec{E} = 0 \quad ,$$

$$q \cdot v \cdot B + q \cdot \frac{U_{\text{ind}}}{b} = 0 \quad ,$$

$$U_{\text{ind}} = -v \cdot b \cdot B = -\frac{\Delta x \cdot b}{\Delta t} \cdot B = -\frac{\Delta A}{\Delta t} \cdot B \quad , \quad (4.36)$$

wobei  $\Delta A$  die in  $\Delta t$  überstrichene Fläche ist. Auf die Ladungen in den waagrechten oberen und unteren Leiterstücken wirkt keine Lorentzkraft entlang der Drahtachse. Würde ein Widerstand  $R$  zwischen die beiden Pole geschaltet, so würde ein Strom  $I = U_{\text{ind}} / R$  in der angezeigten Richtung fließen (Fig. 4.12b).



**Figur 4.12:** Eine Leiterschleife wird mit der Geschwindigkeit  $v$  durch ein räumlich begrenztes, homogenes Magnetfeld  $B$  (graue Fläche) gezogen. **(a)** eine offene Schleife ist noch nicht vollständig im  $B$ -Feld; an den Drahtenden wird eine Spannung  $U_{\text{ind}}$  gemessen. **(b)** eine geschlossene Schleife ist teilweise im  $B$ -Feld; es wird ein Strom  $I$  induziert. **(c)** eine geschlossene Schleife bewegt sich vollständig im  $B$ -Feld; es fließt kein Strom, da sich  $F_L$  und  $F_E$  aufheben.

In der Situation c) wirkt im rechten und linken Drahtstück eine gleich grosse Lorentzkraft auf die Ladungsträger. Wie bereits beim Hall-Effekt driften die Elektronen auf das untere horizontale Drahtstück; entsprechend befinden sich "positive Ladungsträger" (Löcher) auf dem oberen Drahtstück. Dies bewirkt ein nach unten gerichtetes E-Feld, so dass wie in a) auf die Elektronen auch die Kraft  $\vec{F}_E$  mit  $\vec{F}_L + \vec{F}_E = 0$  wirkt. Es fließt also kein Strom.

### 4.5.2 Das Induktionsgesetz von Faraday

M. Faraday hat 1831 mit verblüffend einfachen Experimenten Induktionserscheinungen systematisch untersucht und die Ergebnisse in einem genial einfachen Gesetz zusammengefasst. Für seine Versuche hat er eine kreisrunde Drahtschleife verwendet, deren Enden mit einem ballistischen Galvanometer verbunden waren. Dieses misst die während der Versuchsdauer geflossene Ladung. Qualitativ zeigen die Experimente, dass in der Leiterschleife ein Strom fließt, falls:

- sich das Magnetfeld  $\vec{B}$  in unmittelbarer Nähe der Leiterschleife ändert,
- sich die Fläche  $A$ , welche die Leiterschleife umschließt, ändert,
- sich in einem homogenen Magnetfeld der Winkel zwischen  $\vec{A}$  und  $\vec{B}$  ändert.

#### Spannungsmessung an einer Spule:

Ein Stabmagnet wird in eine Spule getaucht. Beim Eintritt und beim Austritt werden an der Spule Spannungspulse mit unterschiedlichem Vorzeichen gemessen. Das Vorzeichen des Pulses hängt von der Orientierung des Magnetfeldes ab, die Amplitude von der Geschwindigkeit, mit der der Magnetstab bewegt wird.

Also ist der magnetische Fluss  $\Phi_B$  (4.33), und dessen zeitliche Änderung für den Strom verantwortlich. Man beachte, dass es sich hier um den Fluss durch die von einer Leiterschleife eingeschlossene Fläche  $A$  handelt, und nicht um eine ein Volumen einschliessende Fläche. Quantitativ können die Ergebnisse als **Induktionsgesetz von Faraday** zusammengefasst werden:

$$-\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_{\text{Schleife}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = U_{\text{ind}} \quad (4.37)$$

Wird der Magnetfluss durch eine gegebene Fläche zeitlich geändert, wird entlang ihrem Rand ein elektrisches Feld induziert. Dabei ist es gleichgültig, ob die Leiterschleife materiell als solche vorhanden ist oder nicht. In einer leitenden Scheibe können sich beispielsweise Wirbelströme ausbilden. In der Gleichung (4.37) tritt die Ableitung  $d/dt$  auf, die anzeigt, dass das Faraday Gesetz auch in einem bewegten Bezugssystem betrachtet werden kann. In diesem Fall muss das elektrische Feld gemäss (4.11) berücksichtigt werden. Das Ohmsche Gesetz (3.10) wird entsprechend erweitert zu  $\vec{j} = \sigma \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ . Das ist die Ausgangslage für die *Magnetohydrodynamik*.

Dabei ist zu beachten, dass die Geschwindigkeit des Bezugssystems konstant sein muss (Inertialsystem) und dass sie klein ist gegenüber der Lichtgeschwindigkeit. Eine allgemeinere Behandlung wird in der theoretischen Vorlesung *Elektrodynamik* vorgestellt. Es besteht ein grosser Unterschied zur Elektrostatik. Dort wurde in Kapitel 2.5 festgestellt, dass das elektrische Feld wirbelfrei ist (Arbeit zur Verschiebung einer Ladung ist unabhängig vom Weg). Ein **induziertes** elektrisches Feld ist nicht wirbelfrei.

Hauptsächlich für Studierende der Physik:

Man wendet den Satz von Stokes an, um das Integral über die geschlossene Schleife  $s$  durch das Flächenintegral über die von der Schleife  $s$  eingeschlossene Fläche  $A$  zu ersetzen:

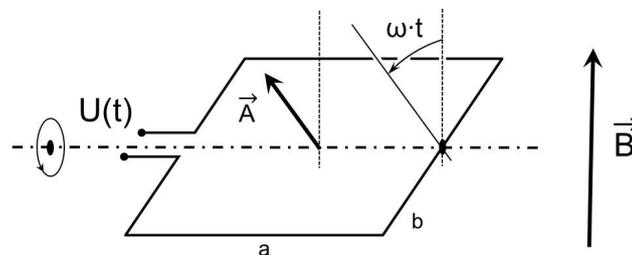
$$\int_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{\text{Stokes}} \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{A} = -\frac{d}{dt} \Phi_B = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}, \quad (4.37)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (4.38)$$

Die Gleichung (4.38) ist die differentielle Form des Induktionsgesetzes und ist, falls die Fläche  $A$  zeitlich konstant ist, identisch mit der dritten Maxwell Gleichung. Im Gegensatz zur Elektrostatik ist das induzierte elektrische Feld nicht wirbelfrei: die Wirbel werden durch zeitliche Änderungen des Magnetfelds erzeugt (4.38).

Hauptsächlich für Studierende der Physik

Die wichtigste Anwendung des Faraday'schen Induktionsgesetz ist der **Dynamo**, oder Wechselstromgenerator, der in jedem Elektrizitätswerk eingesetzt wird. Als einfachsten Fall betrachten wir eine Leiterschleife, die sich in einem homogenen Magnetfeld dreht (Fig. 4.13).



**Figur 4.13:** Dynamo: Leiterschleife der Fläche  $A$ , die sich mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  dreht und sich in einem homogenen Magnetfeld befindet.

Die Rechteckschleife mit der Länge  $a$  und der Breite  $b$  drehe sich mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um die Mittelachse, welche senkrecht zum Magnetfeld  $B$  steht. Gesucht ist die induzierte Spannung  $U(t)$ :

$$U_{\text{ind}}(t) = -\frac{d}{dt} \Phi_B = -\frac{d}{dt} \vec{B} \cdot \vec{A} = -\frac{d}{dt} ( B \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t) ) ,$$

$$U_{\text{ind}}(t) = \omega \cdot B \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t) = (\omega \cdot B \cdot a \cdot b) \cdot \sin(\omega \cdot t) . \quad (4.39)$$

Die Amplitude der induzierten Spannung ist proportional zur Winkelgeschwindigkeit, zum Magnetfeld und zur Fläche der Leiterschleife. Für eine Spule mit  $N$  Windungen gilt  $\Phi_B = N \cdot \vec{B} \cdot \vec{A}$ .

**Dynamo:**

Eine Leiterschleife wird in einem durch Helmholtzspulen erzeugten Magnetfeld gedreht. An der Schleife wird eine Wechselspannung gemessen, deren Betrag proportional zu  $B$  und der Winkelgeschwindigkeit ist.

**Springseil-Dynamo:**

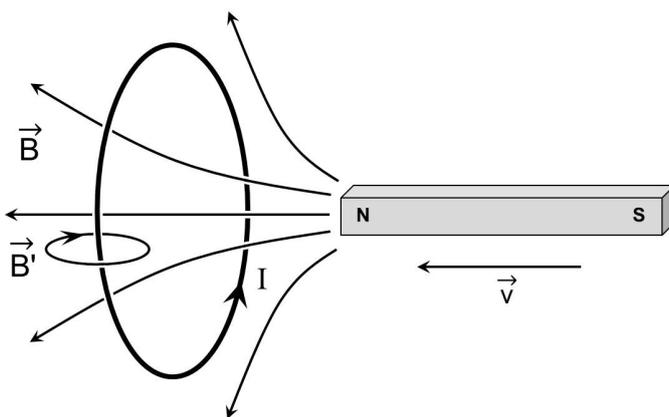
Ein langes Kabel wird als Springseil verwendet. Die Bewegung erzeugt eine periodische Potentialdifferenz zwischen den Enden des Springseils, die durch den ändernden Feldfluss des Erdmagnetfelds erzeugt wird.

Wird das Springseil verkürzt, ist die Fläche und somit der magnetische Feldfluss kleiner. Die Amplitude der Wechselspannung nimmt entsprechend ab. Schnelleres Schwingen vergrößert die Amplitude.

**4.5.3 Lenz'sche Regel und Wirbelströme**

Beim Dynamo muss man sich die Frage stellen, ob es also möglich ist, durch eine reibungsfrei aufgehängte, sich drehende Leiterschleife ohne Arbeit Strom zu erzeugen. Natürlich nicht! Das Drehen der Leiterschleife im Magnetfeld erfordert mechanische Arbeit, wie jeder Benutzer eines Velodynamos aus Erfahrung weiss. Dass mechanische Arbeit erforderlich ist, folgt auch aus (4.28), da der induzierte elektrische Strom in der Schleife ein magnetisches Moment darstellt, auf das im Magnetfeld ein Drehmoment wirkt, entgegen welches Arbeit verrichtet werden muss. Die den Strom erzeugende Ursache wird behindert.

Dies ist die **Lenz'sche Regel**, die wie folgt lautet: Der infolge der Induktion entstehende elektrische Strom ist so gerichtet, dass das von ihm verursachte Magnetfeld dem induzierenden Magnetfeld entgegen gerichtet ist. Mit anderen Worten: Der Strom ist so gerichtet, dass er die ihn erzeugende Ursache hemmt. Dies entspricht dem Energiesatz.



**Figur 4.14:** Annäherung eines Permanentmagneten mit seinem Magnetfeld  $B$  an einen geschlossenen Leiterkreis, in dem ein Strom  $I$  induziert wird, der seinerseits ein Magnetfeld  $B'$  verursacht.

Nähert man einer ruhenden kreisrunden Leiterschleife einen Permanentmagneten mit dem Nordpol voraus (Fig. 4.14), induziert das in der Schleife eine Spannung, und somit einen Strom (vom Magneten aus gesehen im Gegenuhrzeigersinn). Dieser Kreisstrom erzeugt seinerseits ein Magnetfeld, das demjenigen des Permanentmagneten *entgegengesetzt* ist und

somit der Änderung des magnetischen Feldflusses durch die Fläche der Schleife entgegengesetzt ist. Das ist die Lenz'sche Regel.

Der in der Schleife induzierte Kreisstrom stellt gemäss  $\vec{m} = I \cdot \vec{A}$  auch ein induziertes magnetisches Dipolmoment dar. Das Dipolmoment befindet sich in einem inhomogenen Magnetfeld. Nach  $\vec{F} = (\vec{m} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}$  wirkt eine resultierende Kraft auf die Schleife. Die Kraft ist nach links gerichtet (Fig. 4.14). Der sich gegen die Leiterschleife bewegendes Permanentmagnet stösst die Schleife aufgrund des induzierten magnetischen Dipolmoments ab. Zur Bewegung des Permanentmagneten muss also Arbeit verrichtet werden, die vom induzierten Strom  $I$  und somit vom Material der Leiterschleife abhängt.

*Hauptsächlich für Studierende der Physik:*

Die Beschleunigung der Ladungsträger, die sich dann im induzierten elektrischen Strom äussert, kann für die Situationen in Fig. 4.12 und Fig. 4.13 mit Hilfe der Lorentzkraft plausibel gemacht werden. Dies ist jedoch nicht offensichtlich, wenn anstatt des Leiters das Magnetfeld selbst bewegt wird, wie in Fig. 4.14 gezeigt. Ist jedoch  $\vec{v}$  in Fig. 4.14 konstant und  $v \ll c$ , so sind die Bezugssysteme der Schleife und des Magneten beides Inertialsysteme, und somit ist die Physik nicht unterscheidbar. Das bedeutet, dass der Beobachter im Bezugssystem des Magnetstabes Ladungsträger sieht, die sich mit  $-\vec{v}$  bewegen. Auf diese wirkt im konstanten  $\vec{B}$ -Feld die Lorentzkraft, und der induzierte Strom in der Schleife wird korrekt vorausgesagt.

Betrachten wir nun aber eine Spule, in der ein Strom  $I$  fliesst und die koaxial mit einer Leiterschleife umschlossen ist (siehe nachfolgendes Experiment). Sowohl Spule wie Schleife sind in Ruhe. Wird nun die Stromstärke in der Spule erhöht, so kann in der Schleife ein induzierter Spannungspuls gemessen werden. Diese Beobachtung kann nur noch mit dem Faraday Gesetz vorausgesagt werden. Dies zeigt, dass das Induktionsgesetz von Faraday, das heisst die dritte Maxwell Gleichung, eine fundamentalere Beschreibung der Natur ist, als die Lorentzkraft.

*Hauptsächlich für Studierende der Physik*

Bisher konnten wir alle Beobachtungen entweder direkt mit der Lorentzkraft, die auf sich bewegende Ladungsträger in einem Magnetfeld wirkt, oder mit dem Induktionsgesetz von Faraday erklären. Im Folgenden wird ein Experiment gezeigt, wo wir keine Lorentzkraft beobachten. Das heisst, das Induktionsgesetz von Faraday ist die fundamentalere Beschreibung der Natur!

#### **Koaxiale Spulen:**

Zwei Spulen verschiedener Querschnittsfläche sind koaxial ineinander gestellt. An der äusseren Spule wird die Spannung ein- und ausgeschaltet. Die magnetische Flussänderung induziert eine Spannung in der inneren Spule, die als Folge des Induktionsgesetzes von Faraday die zeitliche Ableitung des äusseren Signals ist.

In Fig. 4.12 wurde eine rechteckige Leiterschleife durch ein begrenztes Magnetfeld gezogen. Zieht man statt einer Leiterschleife eine rechteckige leitende Platte in gleicher Weise durch das Magnetfeld, werden Wirbelströme induziert. Wirbelströme fliessen an allen Stellen, wo

eine zeitliche Änderung des magnetischen Feldflusses auftritt. Die zeitliche Änderung bezieht sich auf einen Beobachter auf der Platte. Für die elektrische Stromdichte gilt:

$$\operatorname{rot} \vec{j}(t) = -\sigma \cdot \frac{d}{dt} \vec{B}(t) , \quad (4.40)$$

wobei  $\sigma$  die spezifische elektrische Leitfähigkeit des Materials ist.

Wirbelströme sind meist unerwünscht, z.B. bei Transformatoren, da durch sie elektrische Energie in Wärme umgewandelt wird und verloren geht. Es gibt aber auch wichtige technische Anwendungen der Wirbelströme, z.B. bei Wirbelstrombremsen, Schmelzöfen, oder im Haushalt bei Induktionskochfeldern.

**Kupfer-Pendel im Magnetfeld:**

Die Masse eines physikalischen Pendels besteht aus einem Kupferblech. Im Ruhepunkt des Pendels ist ein entlang der Pendelachse gerichtetes Magnetfeld. Durchfährt das Kupferblech nach einer Auslenkung den Ruhepunkt, wird die Bewegung gebremst. Der Effekt ist stark reduziert, wenn die Wirbelströme durch die Geometrie des Blechs behindert werden (Kamm).

**Aluminiumring im instationären Magnetfeld:**

Ein Aluminiumring umschließt den verlängerten Eisenkern einer Spule. Beim Einschalten des Stroms in der Spule wird der Ring weggeschleudert. Wird an der Spule eine Wechselspannung angelegt, so kann der Ring in Schwebe gehalten werden. Die Ohmsche Leistung des induzierten Wechselstroms im Aluminiumring wird an das Material abgegeben und erhöht dessen Temperatur.

#### 4.5.4 Selbstinduktion, Induktivität

Jeder elektrische Strom  $I$  hat ein Magnetfeld  $\vec{B}$  zur Folge. Ändert sich der Strom in einem Stromkreis zeitlich, dann ändert sich auch das erzeugte Magnetfeld und induziert, nach dem Faraday Gesetz, seinerseits wieder eine Spannung  $U_{s,ind}$  (selbst-induzierte Spannung) im Stromkreis. Diesen Vorgang nennt man Selbstinduktion. Diese selbstinduzierte Spannung wirkt, nach der Lenz'schen Regel, dem elektrischen Strom entgegen. Es gilt

$$|\vec{B}| \sim I \rightarrow \Phi_B \sim I \rightarrow U_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \sim -\frac{dI}{dt}$$

Man setzt also für ein beliebiges Element eines Stromkreises:

$$U_{ind}(t) = -L \cdot \frac{d}{dt} I(t) \quad (4.41)$$

$L$  wird als *Induktivität* oder *Selbstinduktionskoeffizient* bezeichnet.

Die Einheit von  $L$  ist  $[L] = \text{Henry} = \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A}} = \Omega \cdot \text{s}$

Das Symbol der Spule im Leiterkreis ist:



Die Induktivität ist eine Grösse, die durch Geometrie und Material des Leiters gegeben ist (analog zur Kapazität).

##### a) Induktivität einer Spule

Eine leere Spule der Länge  $\ell$ , der Querschnittsfläche  $A$  und  $N$  Windungen ( $N = n \cdot \ell$ ) wird von einem Strom  $I(t)$  durchflossen. Der Strom erzeugt nach (4.23) ein Magnetfeld:

$$B(t) = \mu_0 \cdot I(t) \cdot \frac{N}{\ell} \quad ,$$

$$U_{ind} = -\frac{d}{dt} \Phi_B = -N \cdot A \cdot \frac{d}{dt} B(t) = -\frac{A \cdot \mu_0 \cdot N^2}{\ell} \cdot \frac{dI(t)}{dt} \quad .$$

Bei der Berechnung des magnetischen Flusses durch die Spule ist zu berücksichtigen, dass die effektiv durchflossene Fläche  $N \cdot A$  ist. Also erhalten wir, wenn  $r$  den Radius der Spule bezeichnet:

$$L = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \mu_0 \cdot N^2}{\ell} \quad . \quad (4.42)$$

$L$  ist ein Mass der "Trägheit", mit welcher der Strom in einer Spule, oder allgemein in einem Leiterelement, auf Änderungen der Spannung reagiert.

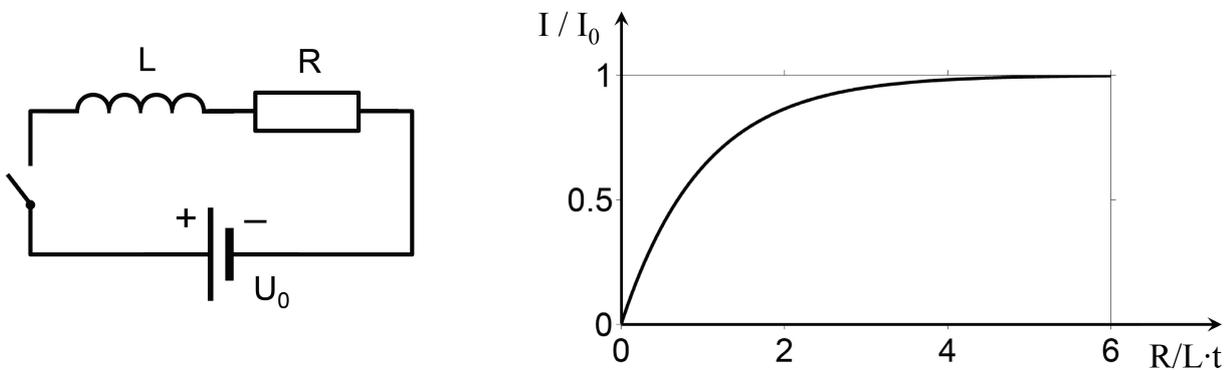
### b) Wirkung der Selbstinduktion bei Einschaltvorgängen (LR-Kreis)

Ein Leiterkreis bestehe aus einer Spannungsquelle, einer Spule mit Induktivität  $L$ , und einem Widerstand, die alle in Serie geschaltet sind (Fig. 4.15). Zum Zeitpunkt  $t = 0$  wird der Schalter geschlossen. Die Anwendung der 2. Kirchhoffschen Regel ergibt:

$$U_{\text{ind}} - R \cdot I + U_0 = -L \cdot \frac{dI}{dt} - R \cdot I + U_0 = 0 \quad (4.43)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung für  $I(t)$  mit der Anfangsbedingung ist  $I(0) = 0$  ist

$$I(t) = I_0 \cdot (1 - e^{-(R/L) \cdot t}) = \frac{U_0}{R} \cdot (1 - e^{-(R/L) \cdot t})$$



Figur 4.15: LR-Leiterkreis und Stromstärke als Funktion der Zeit bei einem Einschaltvorgang

#### Stromstärke und Spannung an der Spule beim Ein- und Ausschalten:

$U$  und  $I$  werden an einer Spule aufgezeichnet. Der Strom  $I$  "hinkt" den abrupten Spannungsänderungen nach.

Hauptsächlich für Studierende der Physik: \_\_\_\_\_

Die Lösung der Differentialgleichung (4.43) erfolgt in zwei Schritten. Da (4.43) inhomogen ist, wird die Lösung in einen zeitabhängigen und in einen konstanten Teil zerlegt:

$$I(t) = I_0 + \tilde{I}(t)$$

Wählt man  $I_0 = U_0 / R$ , so wird (4.43) homogen und man erhält:

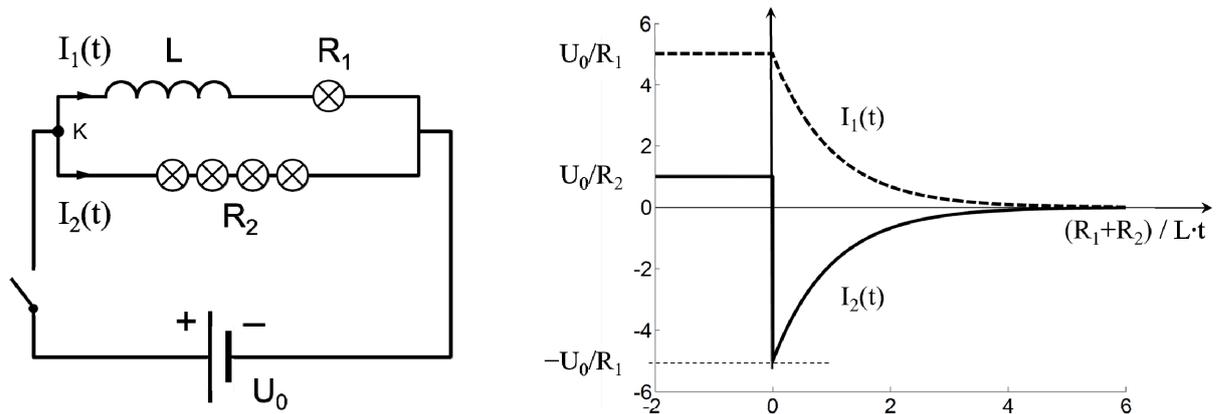
$$\frac{d\tilde{I}}{dt} = -\frac{R}{L} \cdot \tilde{I} \quad \text{mit der bekannten Lösung} \quad \tilde{I}(t) = a \cdot e^{-(R/L) \cdot t}.$$

Die Anfangsbedingung  $\tilde{I}(0) = 0$  erfordert  $a = -I_0$ .

Hauptsächlich für Studierende der Physik

**c) Ausschaltvorgang unter parallel geschalteter Last:**

**Abschalten einer Spannungsquelle in einem Leiterkreis mit Spule:**  
 In einem Leiterkreis hängen eine Spule und Lämpchen parallel an einer Spannungsquelle: die Lämpchen leuchten. Die Spannungsquelle wird unterbrochen: die Lämpchen blitzen kurz auf und erlöschen langsam.



**Figur 4.16:** Leiterkreis und Stromstärke durch die Spule ( $I_1$ ) und die Lampe ( $I_2$ ). Der Schalter wird bei  $t = 0$  geöffnet. Beispiel:  $U_0 = 100 \text{ V}$ ,  $R_1 = 20 \text{ } \Omega$ ,  $R_2 = 100 \text{ } \Omega$ ,  $L = 2.5 \text{ H}$

In einem Stromkreis mit parallel geschalteter Last  $R_2$  in Form von vier Lämpchen (Fig. 4.16) sei bis  $t = 0$  der Schalter geschlossen. Es fließen die zeitlich konstanten Ströme  $I_1 = U_0 / R_1$  und  $I_2 = U_0 / R_2$  wobei wir annehmen, dass der sehr kleine Widerstand der Spule und eines Lämpchens durch  $R_1$  bereits berücksichtigt sind. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  wird der Schalter geöffnet, der Strom fließt nur noch im oberen Stromkreis. Die Widerstände behindern den Strom, die Spule behindert die *Stromänderung*. Somit fließt  $I_1$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  zunächst unverändert weiter durch die Spule. Nach der 1. Kirchhoff'schen Regel muss am Knotenpunkt K gelten:  $0 - I_1 - I_2 = 0$ . Im oberen Stromkreis ohne Spannungsquelle gilt folgende Beziehung (2. Kirchhoff'sche Regel):

$$-L \cdot \frac{dI_1}{dt} - R_1 \cdot I_1(t) - R_2 \cdot I_1(t) = 0 \tag{4.44}$$

wobei für den Strom durch  $R_2$  bereits  $I_2 = -I_1$  verwendet wurde.

Die Lösung der Differentialgleichung ergibt unter der Berücksichtigung der Anfangsbedingung  $I_1(0) = I_1$ :

$$I_1(t) = \frac{U_0}{R_1} \cdot e^{-(R_1 + R_2) / L \cdot t} \quad I_2(t) = -\frac{U_0}{R_1} \cdot e^{-(R_1 + R_2) / L \cdot t} \quad .$$

Da  $R_2 \gg R_1$  ( $R_1$  ist der sehr kleine Ohmsche Widerstand der Spule,  $R_2$  der Widerstand des Lämpchens), gibt es beim Ausschalten eine starke Stromspitze, die Lämpchen leuchten kurz hell auf. Die Spannungsspitze über dem Widerstand  $R_2$  beträgt:

$$U_{\max} = U_0 \cdot \frac{R_2}{R_1} \gg U_0 .$$

Diese Spannungsspitzen können Schäden an Lastelementen in Leiterkreisen (Apparate, bzw. in diesem Versuch die Lämpchen) verursachen. So entstehen auch Funken (Durchschläge) beim Öffnen von Schaltern. Ein Beispiel ist die Trennung des Pantographen einer Lokomotive von der Oberleitung.

Das langsame Abklingen des Stromes bedeutet, dass offenbar noch Energie im Stromkreis gespeichert sein muss, die an den Widerständen verbraucht wird. Die Energie steckt in der Spule.

#### 4.5.5 Energiedichte im Magnetfeld

Die Energie des abklingenden elektrischen Stromes im vorangehenden Beispiel muss aus dem Magnetfeld der Spule kommen. Beim Einschalten des elektrischen Stromes in einer Spule muss Ladung entgegen der selbstinduzierten Spannung verschoben werden. Die benötigte Arbeit, ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} dW &= -U_{\text{ind}} \cdot dq = -U_{\text{ind}} \cdot I \cdot dt , \\ W &= -\int_0^\infty U_{\text{ind}} \cdot I \cdot dt = L \cdot \int_0^\infty \frac{dI}{dt} \cdot I \cdot dt = \int_0^I I' \cdot dI' = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 . \end{aligned} \quad (4.45)$$

Hat die Spule ihre stationäre Stromstärke  $I$  erreicht, dann ist das Magnetfeld in der Spule aufgebaut. Die Energie steckt nun in der potentiellen Energie des Magnetfeldes. Unter Verwendung von (4.42) und (4.23) erhalten wir:

$$W = E_{\text{pot}} = \frac{L \cdot I^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot I^2 \cdot \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \mu_0 \cdot N^2}{\ell} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\vec{B}^2}{\mu_0} \cdot \underbrace{\pi \cdot r^2 \cdot \ell}_{\text{Volumen der Spule}} .$$

Die Energiedichte beträgt im materiefreien Raum demnach:

$$w_{\text{magn}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\vec{B}^2}{\mu_0} . \quad (4.46)$$

Wir postulieren, analog wie in Kapitel 2.7.3 für das elektrische Feld, dass dieser Ausdruck nicht nur für eine Zylinderspule, sondern ganz allgemein gilt.

## 4.6 Materie im magnetischen Feld

### 4.6.1 Phänomenologie und Begriffe

Bringt man Materie in ein magnetisches Feld, dann werden im Material atomare Ströme induziert, die ihrerseits Magnetfelder verursachen, die zum äusseren Magnetfeld  $\vec{B}$  beitragen. Wie gross Betrag *und* Vorzeichen dieser zusätzlichen Magnetfelder sind, ist durch die magnetischen Eigenschaften des Materials bestimmt. Die Situation ist analog zum Fall, wenn ein Dielektrikum in ein elektrisches Feld gebracht wird und die Polarisierung das äussere elektrische Feld modifiziert.

#### Koaxiale Spulen und Eisenstäbe:

Zwei Spulen unterschiedlicher Querschnittsfläche sind coaxial ineinander gestellt. An der äusseren Spule wird die Spannung ein- und ausgeschaltet. Die magnetische Flussänderung induziert eine Spannung in der inneren Spule. Die induzierte Spannung ist wesentlich grösser, falls die innere Spule mit Eisenstäben gefüllt ist.

Auch im Magnetismus wird eine rechnerische Hilfsgrösse, das  $\vec{H}$ -Feld, eingeführt, für deren Berechnung die atomaren Ströme nicht berücksichtigt werden müssen. Wiederum ist dies analog zur dielektrischen Verschiebung  $\vec{D}$ , die rechnerische Hilfsgrösse, in welche die Polarisationsladungen nicht eingehen. Analog zu Kapitel 2.8.3 müssen auch für B- und H-Felder bei Übergängen zwischen verschiedenen Materialien Stetigkeitsbedingungen gelten. Auf einer leitenden Oberfläche mit Normalenvektor  $\vec{n}$  gilt:  $\vec{n} \cdot \vec{B} = 0$  und  $\vec{n} \times \vec{E} = 0$ .

Man verwendet folgende Begriffe:

$$\text{im Vakuum:} \quad \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H} \quad (4.47)$$

$$\text{mit Materie:} \quad \vec{B} = \mu \cdot \mu_0 \cdot \vec{H} \quad (4.48)$$

$\mu$  ist die *magnetische Permeabilität*. Sie ist für isotrope Materialien eine dimensionslose Zahl, für anisotrope jedoch eine Matrix. Da die magnetische Permeabilität für viele Stoffe sehr nahe bei eins liegt, führt man zusätzlich die *magnetische Suszeptibilität*  $\chi_m$  ein:

$$\chi_m = \mu - 1 \quad (4.49)$$

Für die Materie wird sehr grob folgende magnetische Klassifikation verwendet:

	Permeabilität $\mu$	Suszeptibilität $\chi_m$	induziertes B-Feld in Materie	atomare magnetische Momente
Supraleiter	0	-1	$B = 0$	
Diamagnet	$< 1$	$< 0$	B schwächer	$\Sigma m_i = 0$
Paramagnet	$> 1$	$> 0$	B stärker	$\Sigma m_i \neq 0, E_{\text{pot}}(m_i, m_j) \approx 0$
Ferromagnet	$\gg 1$	sehr gross	B sehr stark	$\Sigma m_i \neq 0, E_{\text{pot}}(m_i, m_j) \gg 0$

Neben diesen Materialien gibt es noch Antiferromagnetika und Ferrite.

Analog zur elektrischen Polarisation  $\vec{P}$  (2.57) kann man die *Magnetisierung*  $\vec{J}$  einführen:

$$\vec{J} = \frac{\Delta \vec{m}}{\Delta V},$$

wobei  $\Delta \vec{m}$  die atomaren oder molekularen magnetischen Momente im Volumen  $\Delta V$  sind. Das B-Feld wird durch die makroskopischen und die atomaren Ströme gebildet, also:

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \vec{J}) \quad \text{mit} \quad \vec{J} = \chi_m \cdot \vec{H}. \quad (4.50)$$

Magnetische Momente, verursacht durch atomare Ströme, tragen also zum B-Feld bei. Betrachtet man das B-Feld eines magnetischen Moments entlang der  $\vec{m}$ -Achse, wo die grössten Feldstärken auftreten, folgt aus (4.31) näherungsweise

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \vec{m}.$$

Jedes magnetische Moment trägt zum B-Feld bei, wobei dieses mit  $1/r^3$  abnimmt.

#### **Kohle und Mangan im inhomogenen Magnetfeld:**

Ein inhomogenes Magnetfeld wird erzeugt, indem aus zwei Spulen ein flacher und ein spitzer Polschuh einander gegenübergestellt werden. Im Zwischenraum wird ein aufgehängtes Graphitkugeln (diamagnetisch) in Richtung schwächeres Feld ausgelenkt. Das Mangankugeln (paramagnetisch) wird Richtung stärkeres Magnetfeld ausgelenkt. Vertauschung des Nord- und Südpols ändert am Verhalten der Materialien nichts.

Im Folgenden wird nun kurz die Klassifikation der magnetischen Eigenschaften von Stoffen vorgestellt:

#### **a) Diamagnetische Materialien**

In diamagnetischen Materialien wird das Magnetfeld leicht geschwächt, das heisst in der Materie wird ein atomares Magnetfeld erzeugt, das entgegengesetzt dem äusseren Feld gerichtet ist.

Typische diamagnetische Materialien sind:

Material (bei 20 °C)	$\chi_m [ 10^{-6} ]$
Helium (Normaldruck)	$- 9.85 \cdot 10^{-4}$
Stickstoff (Normaldruck)	$- 5.06 \cdot 10^{-3}$
Wasser	$- 9.035$
Kupfer	$- 9.63$
Graphit	$- 14$
Bismut	$- 166$

In inhomogenen Magnetfeldern wirkt auf Diamagnetika eine Kraft in Richtung kleinerem Betrag der Feldstärke. Die Suszeptibilität ist weitgehend unabhängig von der Temperatur.

### **b) Paramagnetische Materialien**

In paramagnetischen Materialien wird die magnetische Induktion leicht verstärkt, das heisst in der Materie wird ein atomares Magnetfeld erzeugt, das gleichgerichtet dem äusseren Feld ist. In inhomogenen Magnetfeldern wirkt auf Paramagnetika eine Kraft in Richtung grösserem Betrag der Feldstärke.

Die Suszeptibilität ist stark temperaturabhängig. Die oben angegebenen Werte beziehen sich auf 20 °C. Näherungsweise gilt nach Pierre Curie:

$$\chi_m(T) = \frac{C}{T}, \quad (4.51)$$

wobei C eine Materialkonstante ist. Typische paramagnetische Materialien sind:

Material	$\chi_m [10^{-6}]$
Aluminium (20 °C)	22
Mangan (20 °C)	871.0
Sauerstoff (20 °C, Normaldruck)	1.86
Sauerstoff (-183 °C, flüssig)	5670.0

### **c) Ferromagnetische Materialien**

Ferromagnetische Materialien wie beispielsweise Fe, Co, Ni, EuO besitzen unterhalb der sogenannten Curie-Temperatur sehr hohe Suszeptibilitäten, die aber vom äusseren Magnetfeld abhängig sind. Es entstehen also sehr starke Magnetisierungen im Material. Die Permeabilität von Ferromagneten ist sehr hoch, reines Eisen hat  $\mu \approx 5000 \dots 200'000$ . Die starke Magnetisierung entsteht durch die permanente magnetische Momente der Atome oder Moleküle, die eine starke gegenseitige Wechselwirkung aufweisen. Diese Wechselwirkung tritt auf, weil die Atome oder Moleküle in einem Kristallgitter angeordnet sind.

#### **Modell Weiss'scher Bezirke:**

Kleine Magnetnadeln sind in kleinem Abstand gitterartig angeordnet. Bei der Ausrichtung der Nadeln wird die Kopplung zu den Nachbarn sichtbar. Die Annäherung eines Permanentmagneten stört die Ausrichtung und es bilden sich kleine Bezirke, in welchen die Nadeln alle die gleiche Orientierung besitzen.

Die Wechselwirkungsenergie zwischen zwei benachbarten magnetischen Momenten ist minimal, wenn die Momente entlang ihrer Verbindungslinie gleichgerichtet sind. In Bereichen, wo die magnetischen Momente parallel ausgerichtet sind, wird ein Zustand relativer minimaler Energie angenommen. Das ist eine makroskopische Eigenschaft des Ferromagneten. Diese Bereiche werden *Weiss'sche Bezirke* genannt. Bei einer Änderung des äusseren Feldes ändern alle Dipole innerhalb eines Bezirkes ihre Orientierung in koordinierter Weise. Dabei können aber auch wieder neue Weiss'sche Bezirke gebildet werden.

**Barkhausen Effekt:**

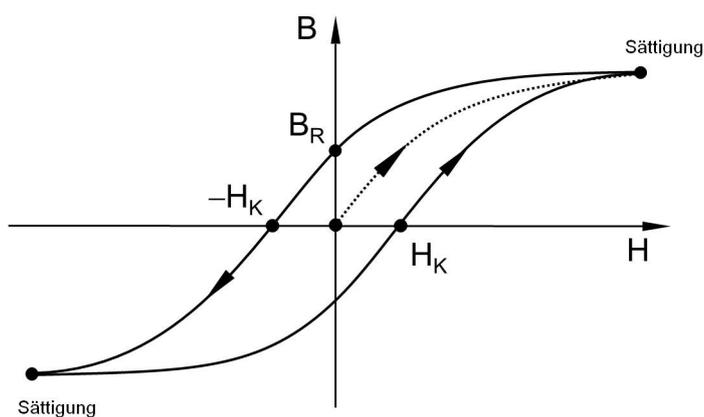
Fe-, Ni- und Cu-Nadeln werden in eine Spule gebracht, die sich in einem Magnetfeld befindet. Wird die Richtung des Feldes umgekehrt, müssen sich die magnetischen Momente in den Nadeln neu ausrichten. Das Umklappen verändert den magnetischen Fluss in der Spule und induziert nach Faraday eine Spannung, die durch einen Lautsprecher hörbar gemacht wird.

Durch das Umklappen der Weiss'schen Bezirke verändert sich die Magnetisierung und somit der magnetische Feldfluss. Die Veränderung des magnetischen Feldflusses verursacht aufgrund des Faraday Gesetzes einen Spannungspuls. Diesen kann man hörbar machen (*Barkhausen Effekt*).

Das Umklappen von Weiss'schen Bezirken benötigt Energie. Wenn in ferromagnetischen Materialien die Orientierung der magnetischen Momente verändert wird, muss also zuerst Arbeit verrichtet werden.

**Hysterese:**

Um einen geschlossenen Eisenring sind zwei Spulen gewickelt. Durch die erste Spule fließt ein Wechselstrom, der ein magnetisches Feld im Eisenkern induziert, das mit der zweiten Spule gemessen wird. Die Spannung der ersten Spule ist proportional zu  $H$ , die Spannung an der zweiten Spule ist proportional zu  $dB/dt$ , und mittels Zuschaltung eines Kondensators, proportional zu  $B$ . Ein  $(H, B)$ -Diagramm zeigt die Hysterese. Ersetzt man den Eisenring durch Lamellen kann die Hysterese stark verkleinert und somit die Verlustleistung reduziert werden. In Transformatoren muss die Hysterese möglichst gering sein, damit die Verluste beim Betrieb minimal bleiben.



**Figur 4.17:** Hysterese-Kurve eines Ferromagneten: das Magnetfeld  $B$  im Material ist eine nicht-eindeutige Funktion des äusseren Feldes  $H$ , nachdem die Erstmagnetisierung (gestrichelt) erfolgt ist. Für grosse  $H$  tritt Sättigung im Material auf.  $B_R$  ist das Remanenzfeld,  $H_K$  das Koerzitivfeld.

Wird ein unmagnetisierter Ferromagnet das erste Mal durch ein äusseres Feld  $H$  magnetisiert, hängt die Induktion  $B$  im Material eindeutig von  $H$  ab. Ab einer gewissen Grösse von  $H$  tritt Sättigung im Material auf. Wird  $H$  wieder reduziert, bleibt die magnetische Induktion im Material noch bestehen. Gemäss (4.50) liegt dann für  $H = 0$  eine Restmagnetisierung vor, die ein Remanenzfeld  $B_R$  erzeugt. Der Ferromagnet ist nun permanent magnetisiert, ohne äusseres Feld. Dies ist die Grundlage der magnetischen Speicherung.

Die Magnetisierung kann nur auf null gebracht werden, indem ein entsprechend starkes Gegenfeld  $-H_K$  (*Koerzitivfeld*) angelegt wird.  $B$  hängt also von der Vorgeschichte des Materials ab. Nach der Erstmagnetisierung ist  $B$  nicht mehr eine eindeutige Funktion von  $H$ . Dieses nichtlineare Verhalten wird als **Hysterese** bezeichnet (Fig. 4.17).

Die von der Hysterese-Kurve eingeschlossene Fläche stellt eine Energiedichte dar (aus 4.46 und 4.47 folgt  $w = \frac{1}{2} \cdot \vec{B} \cdot \vec{H}$ ). Die Veränderung von atomaren Magnetfeldern erfordert Arbeit. Ein Umfahren der Hysterese, z.B. in einem Wechselfeld, ist Verlust-Arbeit, die in Wärme umgewandelt wird. Deshalb ist man bei Spulenkörpern und Transformatoren an möglichst „schmalen“ Hysterese-Kurven, also an kleinen Koerzitivfeldern interessiert. Sehr kleine Koerzitivfeldstärken liegen bei 1 bis 10  $\text{Am}^{-1}$ .

Die Sättigungswerte für die magnetische Induktion liegen typischerweise bei 1.6 T bis 2 T und werden bei Magnetfeldstärken von  $2 \cdot 10^3 \text{ Am}^{-1}$  bis  $30 \cdot 10^3 \text{ Am}^{-1}$  erreicht. Für Permanentmagnete ist man an einer hohen Remanenz und einem hohen Koerzitivfeld interessiert (für die Legierung AlNiCo700 ist  $B_R = 1.3 \text{ T}$  und  $H_K = 55.7 \text{ kAm}^{-1}$ ).

Oberhalb der Curie-Temperatur wird die starke Wechselwirkung zwischen den magnetischen Momenten der Gitteratome wegen der thermischen Bewegung gestört und somit verringert. Ferromagnetische Materialien werden paramagnetisch oberhalb der Curie-Temperatur. Die Curie-Temperatur beträgt für Eisen  $770 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $T_C(\text{Ni}) = 380 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $T_C(\text{Gd}) = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ .

#### Curie-Temperatur von Eisen und Stahl:

Fe ist ferromagnetisch. Ein Eisendraht überträgt ein Wechselspannungssignal von einer Spule auf die andere. Der Eisenstab wird über seine Curie-Temperatur erhitzt. Das Signal wird schlagartig nicht mehr übertragen. Der Stab ist paramagnetisch geworden. Ein CrNiFe Stahlblech ( $T_C = -125 \text{ }^\circ\text{C}$ ), das bei Zimmertemperatur von einem Permanentmagneten nicht gehalten werden kann, wird ferromagnetisch, wenn es mit flüssiger Luft ( $-192 \text{ }^\circ\text{C}$ ) unter seine Curie-Temperatur abgekühlt wird.

Hauptsächlich für Studierende der Physik: \_\_\_\_\_

### 4.6.2 Tragkraft von Magneten

Für die Berechnung der Tragkraft eines Magneten ist (4.35) ungeeignet, da der Abstand zweier Magnete meist kleiner ist, als ihr typischer Durchmesser. Bei sehr kleinem Abstand eines Nord- und eines Südpols zweier Magnete hat man praktisch, analog zum Plattenkondensator, ein näherungsweise homogenes Magnetfeld. Zieht man einen Pol der Fläche  $A$  um die Strecke  $x$  vom andern weg, so entsteht ein neuer felderfüllter Raum, nach (4.46) mit dem Energieinhalt  $W = \frac{1}{2} \cdot A \cdot x \cdot B^2 / \mu_0$ . Dieser muss durch eine Arbeit erzeugt werden. Die zugehörige Kraft ist also  $F = dW / dx = \frac{1}{2} \cdot A \cdot B^2 / \mu_0$ . Allgemeiner gilt (ohne Herleitung)

$$\vec{F} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{H} \cdot \vec{A}) \cdot \vec{B} \quad , \quad (4.52)$$

wobei  $A$  die Querschnittsfläche des Magneten und  $\vec{B}$  die magnetische Induktion im Luftspalt bedeuten. Man beachte, dass dies analog zur Formel für die Kraft auf eine Platte im Plattenkondensator ist:  $|\vec{F}| = \frac{1}{2} \cdot |\vec{D} \cdot \vec{A} \cdot \vec{E}|$ , wie man durch Umformen von 2.37 feststellt.

### 4.6.3 Levitation von Massen in Magnetfeldern

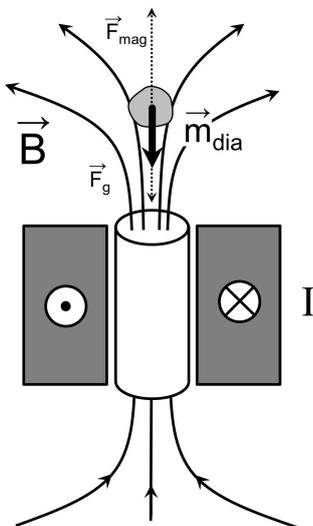
#### Levitation von Massen in Magnetfeldern:

Ein frei beweglicher Permanentmagnet wird von einem zweiten schwächeren Permanentmagneten nach oben angezogen. Bei einem gewissen Abstand heben sich die Schwerkraft und die magnetische Anziehungskraft gerade auf. Nun wird der bewegliche Permanentmagnet zwischen zwei fixen Diamagneten placiert. Zwischen Diamagnet und Permanentmagnet wirken gemäss (4.53) abstossende Kräfte, die proportional zur Auslenkung aus der Ruhelage sind. Der Permanentmagnet befindet sich in einer stabilen Gleichgewichtslage.

Befindet sich ein Diamagnet in einem äusseren inhomogenen Magnetfeld, wirkt die Kraft  $\vec{F} = (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$  auf die im diamagnetischen Material induzierten atomaren magnetischen Momente. Da für den Diamagneten  $\chi_m < 0$ , ist  $\vec{m} \uparrow \downarrow \vec{B}$ , so dass Diamagnete von Orten grösserer Magnetfeldstärke abgestossen werden. Die Kraft inhomogenen  $\vec{B}$ -Feld auf einen makroskopischen Körper des Volumen  $V$ , der die Magnetisierung  $\vec{J}$  aufweist, ist:

$$\vec{F} = (V \cdot \vec{J} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} = \chi_m \cdot \mu_0 \cdot V \cdot (\vec{H} \cdot \vec{\nabla}) \vec{H} \quad (4.53)$$

Ein Diamagnet kann bei geeigneter Anordnung von einem inhomogenen Magnetfeld in Schwebelage gehalten werden. Das wurde bereits beim Meissner-Ochsenfeld Effekt beobachtet, wo ein Permanentmagnet über einem Supraleiter (perfekter Diamagnet:  $\chi_m = -1$ ), schwebte.



**Figur 4.18:** Levitation eines Diamagneten oberhalb der Austrittsstelle des starken B-Feldes (20 T) eines Solenoid-Elektromagneten (Bitter Magnet). Das Magnetfeld wird durch einen Kreisstrom von  $I = 20$  kA erzeugt, der durch speziell konstruierte, kreisringförmige Kupferplatten fließt. Diese müssen wegen der Ohmschen Leistung (ca. 4 MW) mit Wasser gekühlt werden. Das Magnetfeld ist auf einen sehr kleinen zylinderförmigen Raum begrenzt (Durchmesser 3.2 cm) und erzeugt ein magnetisches Moment  $\vec{m}_{\text{dia}}$  im Diamagneten. Auf den Diamagneten wirkt wegen des inhomogenen Magnetfeldes die abstossende Kraft  $F_{\text{mag}}$ , die die Schwerkraft  $F_g$  (punktierter Pfeil) kompensiert.

Dieser Effekt kann auch bei normalen Diamagneten beobachtet werden, die sich in einem inhomogenen Magnetfeld befinden. Andrei Geim (Nobelpreis der Physik 2010 für die Erforschung von Graphen) hat einige spektakuläre Versuche mit Wasser ( $\chi_m = -9 \cdot 10^{-6}$ ) durchgeführt und Wassertropfen schwerelos gemacht (Fig. 4.18). Da Lebewesen einen hohen Wassergehalt aufweisen, sind diese diamagnetisch und können in einem sehr starken Magnetfeld von ca. 20 T schweben. Solche Felder liefern Solenoid-Elektromagneten (Bitter Magnet), in denen sehr hohe Kreisströme von ca. 20 kA fließen.

#### 4.6.4 Atomistische Deutung der magnetischen Eigenschaften der Materie

Für die folgenden Überlegungen soll ein halb-klassisches Atommodell verwendet werden. Elektronen kreisen um einen Kern. Das bewirkt einen Kreisstrom, der ein magnetisches Moment zur Folge hat:

$$\vec{m} = I \cdot \vec{A} \quad \rightarrow \quad |\vec{m}| = I \cdot A = \frac{\omega \cdot r^2 \cdot e}{2} = \frac{e}{2 \cdot m_e} \cdot |\vec{\ell}| \quad (4.54)$$

Da der Betrag des Drehimpulses  $\vec{\ell}$  nach der Quantentheorie quantisiert ist, folgt:

$$|\vec{\ell}| = \sqrt{\ell \cdot (\ell + 1)} \cdot \frac{h}{2 \cdot \pi} \quad (\ell = 0, 1, \dots, n-1) \quad (4.55)$$

$$|\vec{m}| = \sqrt{\ell \cdot (\ell + 1)} \cdot \frac{h \cdot e}{4 \cdot \pi \cdot m_e} = \mu_B \cdot \sqrt{\ell \cdot (\ell + 1)} \quad (4.56)$$

$$\text{mit } \mu_B = 9.27 \cdot 10^{-24} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1} \quad (\mu_B : \text{Bohr'sches Magneton}) \quad (4.57)$$

Elektronen haben auch eine Art Eigendrehimpuls, einen *Spin*. Dieser Spin verursacht ebenfalls ein magnetisches Moment.

Auch der Atomkern hat einen Spin, der ein magnetisches Moment zur Folge hat. Der Betrag ist aber um drei Größenordnungen kleiner als bei Elektronen und kann hier vernachlässigt werden.

Bahndrehimpulse und Spins der einzelnen Elektronen addieren sich gemäss den Regeln der Quantentheorie zu einem Gesamtdrehimpuls. Dieser Gesamtdrehimpuls ist quantisiert und, ähnlich wie der Bahndrehimpuls, mit einem magnetischen Moment verknüpft.

In **diamagnetischen Substanzen** haben die einzelnen Elektronen teilweise Bahndrehimpulse und einen Spin, aber der Gesamtdrehimpuls aller Elektronen eines Atoms, bzw. Moleküls ist null. Nun soll wiederum vereinfacht angenommen werden, dass einzelne Elektronen um den Kern kreisen. In einem äusseren Magnetfeld wird die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  wegen der Lorentzkraft  $F_L$ , und der damit verbundenen Änderung der Zentripetalkraft, je nach Drehsinn des Elektrons etwas grösser, oder etwas kleiner. Die veränderte Winkelgeschwindigkeit sei  $\omega'$ :

$$\left| \vec{F}_L \right| = e \cdot v \cdot \left| \vec{B} \right| = m_e \cdot r \cdot (\omega^2 - \omega'^2) \approx m_e \cdot r \cdot 2 \cdot \omega' \cdot \Delta\omega$$

$$\begin{aligned}
 \text{mit } \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}' \cdot \mathbf{r} \quad \rightarrow \quad \Delta\omega &\approx \pm \frac{e \cdot |\vec{\mathbf{B}}|}{2 \cdot m_e} \\
 \Delta I = \frac{e \cdot \Delta\omega}{2 \cdot \pi} = \pm \frac{e^2 \cdot |\vec{\mathbf{B}}|}{4 \cdot \pi \cdot m_e} \quad \rightarrow \quad |\Delta\vec{\mathbf{m}}| = \Delta I \cdot A = \frac{e^2 \cdot |\vec{\mathbf{B}}|}{4 \cdot \pi \cdot m_e} \cdot \pi \cdot r^2 \\
 \vec{\mathbf{J}} = n \cdot \Delta\vec{\mathbf{m}} = \chi_m \cdot \vec{\mathbf{H}} = -n \cdot \frac{e^2 \cdot \mu_0 \cdot \vec{\mathbf{H}}}{4 \cdot \pi \cdot m_e} \cdot \pi \cdot r^2, \quad (4.58)
 \end{aligned}$$

wobei berücksichtigt wurde, dass wegen der Lenz'schen Regel  $\Delta\vec{\mathbf{m}} \uparrow \downarrow \vec{\mathbf{B}}$  gilt. Also

$$\chi_m = -\frac{n \cdot e^2 \cdot \mu_0}{4 \cdot m_e} \cdot \langle r^2 \rangle, \quad (4.59)$$

wobei  $n$  die Anzahl Elektronen pro Volumeneinheit ist. Für Wasserstoffgas bei Normaltemperatur und Normaldruck ist  $n \approx 5.4 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$ , der Erwartungswert des Radius ist ungefähr  $0.53 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ . Damit wird die grob geschätzte magnetische Suszeptibilität:  $\chi_m \approx -1.3 \cdot 10^{-9}$ , dieselbe Grössenordnung wie der gemessene Wert von  $-2.2 \cdot 10^{-9}$ .

Bei **paramagnetischen Substanzen** haben die Atome oder Moleküle einen von null verschiedenen totalen Drehimpuls und ein magnetisches Moment. Die magnetischen Momente sind in Wechselwirkung mit dem äusseren magnetischen Feld. Die gegenseitige Wechselwirkung zwischen den atomaren Dipolen kann aber vernachlässigt werden. Der Ausrichtung im äusseren magnetischen Feld steht die Wärmebewegung gegenüber. Die Ausrichtung der magnetischen Momente in Richtung des äusseren Magnetfeldes ist quantisiert (*Stern-Gerlach Versuch*). Trotz der Quantisierung gilt in grober Näherung (2.60):

$$\chi_{m,\text{para}} \approx n \cdot \mu_0 \cdot \frac{\bar{m}^2}{3 \cdot k \cdot T} = \mu_0 \cdot \frac{N_A \cdot \rho}{M} \cdot \frac{\bar{m}^2}{3 \cdot k \cdot T} \quad (4.60)$$

**Antiferromagnetische Substanzen** haben zwei Untergitter beide haben magnetische Momente, die stark gekoppelt und gegeneinander gerichtet sind, so dass die resultierende Suszeptibilität klein und sehr komplex von der Temperatur abhängig ist.

Interessanter sind **ferrimagnetische Substanzen**, die wie antiferromagnetische Substanzen zwei Untergitter mit entgegengesetzten magnetischen Dipolmomenten haben, die aber nicht gleich gross sind. Somit ergibt sich eine resultierende Suszeptibilität, die zwar kleiner ist als bei ferromagnetischen, jedoch wesentlich grösser als bei paramagnetischen Substanzen. Diese Materialien sind deshalb interessant, weil sie anders als ferromagnetische Substanzen, eine sehr geringe elektrische Leitfähigkeit besitzen und deshalb Wirbelstromverluste bei hohen Frequenzen vernachlässigt werden können.

#### 4.7 Wichtige Beziehungen elektrischer und magnetischer Grössen

Elektrische Grössen	Magnetische Grössen
elektrische Feldstärke: $\vec{E}$ fundamentales Feld, alle elektrischen Ladungen tragen bei	magnetische Induktion: $\vec{B}$ fundamentales Feld, alle elektrischen Ströme tragen bei
Dielektrische Verschiebungsdichte: $\vec{D} = \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}$ Rechengrösse, nur freie Ladungen tragen bei	H-Feld, Magnetfeld: $\vec{H} = \frac{1}{\mu \cdot \mu_0} \vec{B}$ Rechengrösse, nur makroskopische Ströme tragen bei
Kraft auf elektrische Ladung: $\vec{F} = Q \cdot \vec{E}$	Kraft auf bewegte elektrische Ladung: $\vec{F} = Q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$
Ladung erzeugt elektrisches Feld: $\vec{E} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot \vec{r}}{r^3}$	Bewegte Ladung erzeugt magnetische Induktion: $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{Q \cdot (\vec{v} \times \vec{r})}{r^3}$
Beziehung Feld-elektrische Ladung: $\int_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{\text{inA}}$ (Satz von Gauss)	Beziehung Feld-elektrischer Strom: $\int \vec{H}(\vec{s}) \cdot d\vec{s} = \sum I$ (Gesetz von Ampère)
Elektrischer Fluss: $\Phi_E = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$	Magnetischer Fluss: $\Phi_B = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$
Kapazität: $C = \frac{Q}{U}$	Induktivität: $L = - \frac{U_{\text{ind}}}{dI / dt}$
Kapazität des Plattenkondensators: $C = \frac{\epsilon_0 \cdot A}{d}$ A: Fläche der Platten d: Abstand der Platten	Induktivität einer langen, dünnen Spule: $L = \frac{\mu_0 \cdot A}{\ell} \cdot N^2$ A: Querschnittsfläche N: Anzahl Windungen $\ell$ : Länge der Spule
Energie in der Kapazität: $E = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2$	Energie in der Spule: $E = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2$
Energiedichte des elektrischen Feldes: $w = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$	Energiedichte des magnetischen Feldes: $w = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$
elektrisches Dipolmoment: $\vec{p} = Q \cdot \vec{a}$	magnetisches Moment: $\vec{m} = I \cdot \vec{A}$
Kraft, Drehmoment, potentielle Energie: $\vec{F} = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E}$ $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$ $E_{\text{pot}} = -\vec{p} \cdot \vec{E}$	Kraft, Drehmoment, potentielle Energie: $\vec{F} = (\vec{m} \cdot \nabla) \vec{B}$ $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$ $E_{\text{pot}} = -\vec{m} \cdot \vec{B}$
Polarisation: $\vec{P} = \chi_e \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}$	Magnetisierung: $\vec{J} = \chi_m \cdot \vec{H}$
Materie im elektrischen Feld: $\vec{D} = \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E} = (1 + \chi_e) \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}$	Materie im magnetischen Feld: $\vec{B} = \mu \cdot \mu_0 \cdot \vec{H} = (1 + \chi_m) \cdot \mu_0 \cdot \vec{H} = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \vec{J})$

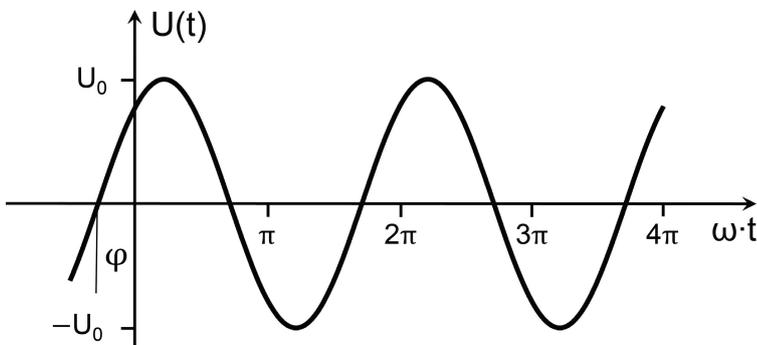
## 5. WECHSELSPANNUNGEN UND WECHSELSTRÖME

### 5.1 Sinusförmige Wechselspannungen

Im Beispiel der Leiterschleife, die sich in einem homogenen Magnetfeld dreht, wurde bereits in (4.39) festgestellt, dass sich eine sinusförmige Wechselspannung ergibt. Dreht sich eine Spule mit  $N$  Windungen um eine Drehachse senkrecht zum homogenen Magnetfeld  $\vec{B}$  ergibt sich die induzierte Spannung:

$$U_{\text{ind}}(t) = N \cdot \omega \cdot |\vec{B}| \cdot |\vec{A}| \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) = U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) = U_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi') \quad (5.1)$$

Der Spannungsverlauf ist durch die Amplitude  $U_0$ , die Kreisfrequenz  $\omega$  und die Phase  $\varphi$  (oder  $\varphi' = \varphi - \frac{\pi}{2}$ ) vollständig charakterisiert. Die Phase  $\varphi$  ist durch die Anfangsbedingungen, d.h. die Lage der Spule zur Zeit  $t = 0$  bestimmt.



**Figur 5.1:** Charakteristischer Verlauf einer harmonischen Wechselspannung in Funktion der Zeit mit der Amplitude  $U_0$ , der Kreisfrequenz  $\omega$  und dem Phasenwinkel  $\varphi$ .

Wechselspannung spielt in der Technik eine grosse Rolle. Sie lässt sich relativ einfach erzeugen und kann auf höhere oder tiefere Spannungswerte transformiert werden. In der Schweiz beträgt  $U_0$  für den einphasigen Wechselstrom 325 V und die Frequenz  $\nu = 50$  Hz,  $\omega = 2\pi \cdot \nu = 314 \text{ s}^{-1}$ .

#### Fouriersynthese:

Die Überlagerung von 10 Sinusschwingungen mit bestimmten Amplituden erzeugt eine periodische Rechteckfunktion, bzw. einen Sägezahn. Die Fouriersynthese wird mit einem Synthesizer hörbar gemacht.

Hauptsächlich für Studierende der Physik: \_\_\_\_\_

Elektrische Generatoren, nicht nur Leiterschleifen in einem homogenen Magnetfeld, erzeugen näherungsweise sinusförmige Wechselspannungen. Wir beschränken uns in diesem Kapitel noch aus einem andern Grund auf harmonische Wechselspannungen. Jede beliebige andere Wechselspannung  $U(t)$  kann durch eine Addition von Sinus- und Cosinus-Schwingungen mit Vielfachen der Kreisfrequenz  $\omega$  überlagert werden. Dies ist die Fourier-Synthese von zeitabhängigen Funktionen. Die Fourierreihe einer beliebigen periodischen Funktion  $y(t)$  lautet

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t) + b_n \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) \quad (5.2)$$

Die Koeffizienten  $a_n$  und  $b_n$  in (5.2) lassen sich wie folgt bestimmen:

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \cdot \int_0^T y(t) \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t) \cdot dt \quad b_n = \frac{\omega}{\pi} \cdot \int_0^T y(t) \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) \cdot dt \quad (5.3)$$

Die Thematik der **Fourier-Analyse**, insbesondere auch für nicht-periodische Funktionen, wird in den Mathematischen Methoden zur Physik behandelt.

*Hauptsächlich für Studierende der Physik*

In Kapitel 3.4 wurden Gleichstromkreise behandelt. In diesen spielen nur Widerstände als passive Elemente eine Rolle. Kapazitäten wirken als Stromsperrern, und Induktivitäten, also Spulen, haben den Gleichstromwiderstand null, sofern der Ohmsche Widerstand der Drähte vernachlässigt werden darf.

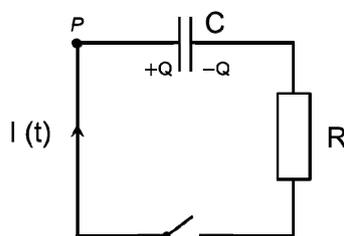
In Wechselstromkreisen fließt der elektrische Strom durch Widerstände entsprechend dem Ohmschen Gesetz. Kapazitäten werden im Wechselstrom geladen und entladen, und in Spulen bauen sich mit der Frequenz der Wechselspannung magnetische Felder entgegengesetzter Polarität auf und ab. Im nächsten Kapitel geht es darum, die Charakteristiken von Kapazitäten und Induktivitäten in Wechselstromkreisen zu untersuchen.

## 5.2 Kapazitäten und Induktivitäten bei Ein- und Ausschaltvorgängen

### Entladung eines Kondensators:

Ein Kondensator wird über verschiedene Widerstände entladen und der Verlauf der Stromstärke wird aufgezeichnet. Je grösser der Widerstand, desto langsamer verläuft die Entladung.

### 5.2.1 Entladen eines Kondensators über einen Widerstand



2. Kirchhoff-Regel, beginnend bei P, im Uhrzeigersinn:

$$-U_C - U_R = 0$$

$$-\frac{Q}{C} - I \cdot R = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{R \cdot C}$$

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{R \cdot C} \cdot dt \quad \rightarrow \quad \ln Q = -\frac{1}{R \cdot C} \cdot t + \text{konst.}$$

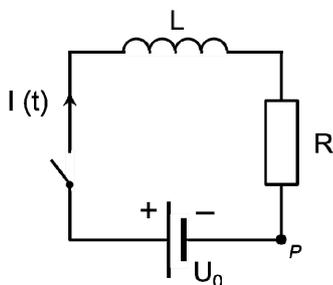
Damit  $I = dQ/dt$  gilt, muss die Stromrichtung korrekt relativ zur Polung des Kondensators eingezeichnet sein, das heisst wenn  $I(t) > 0$ , dann nimmt  $Q(t)$  als Funktion der Zeit zu. Mit der Anfangsbedingung  $Q(t = 0) = Q_0$  bestimmen wir die Integrationskonstante:

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{-1/(R \cdot C) \cdot t} = Q_0 \cdot e^{-t/\tau_C} \quad (5.4)$$

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = -\frac{Q_0}{R \cdot C} \cdot e^{-1/(R \cdot C) \cdot t} = I_0 \cdot e^{-1/(R \cdot C) \cdot t} = I_0 \cdot e^{-t/\tau_C} .$$

Beachte, dass die berechnete technische Stromrichtung  $I(t)$  entgegengesetzt zur eingezeichneten ist:  $I_0 < 0$ . Das heisst, dass die Ladung auf dem Kondensator nach dem Schliessen des Schalters abnimmt und sich dem Wert 0 annähert, wie bereits aus (5.4) ersichtlich ist. Der Kondensator entlädt sich über den Widerstand. Die charakteristische Zeit, nach welcher der Anfangswert noch  $1/e \approx 36.8\%$  beträgt, ist für das RC-Glied  $\tau_C = R \cdot C$ . Je grösser die Kapazität und je grösser der Widerstand ist, desto länger dauert der Entladungsvorgang.

### 5.2.2 Einschalten eines elektrischen Stromes über einen Widerstand und eine Spule



2. Kirchhoff-Regel, beginnend bei P, im Uhrzeigersinn:

$$U_0 + U_{\text{ind}} - U_R = 0$$

$$U_0 - L \cdot \frac{dI}{dt} - I \cdot R = 0$$

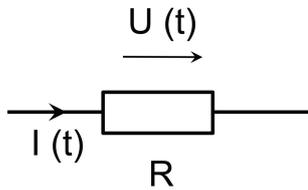
Dieses Problem wurde bereits in Kapitel 4.5.4 (Fall b) gelöst. Die Lösung lautet:

$$I(t) = \frac{U_0}{R} \cdot (1 - e^{-(R/L) \cdot t}) = \frac{U_0}{R} \cdot (1 - e^{-t/\tau_L}) . \quad (5.5)$$

Der Strom  $I(t)$  steigt nach dem Einschalten exponentiell an und nähert sich dann dem stationären Wert  $I_0 = U_0 / R$  an. Die charakteristische Zeit für das RL-Glied beträgt  $\tau_L = L / R$ . Je grösser die Selbstinduktion und je kleiner der Widerstand ist, desto länger dauert der Einschaltvorgang.

### 5.3 Kapazitäten und Induktivitäten in Wechselstromkreisen

#### 5.3.1 Wechselspannung über einem Ohmschen Widerstand



Über dem Widerstand  $R$  liege die Spannung:

$$U(t) = U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad ,$$

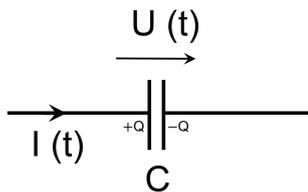
gesucht ist der Strom  $I(t)$ :

$$U - U_R = 0$$

$$I(t) = \frac{U(t)}{R} = \frac{U_0}{R} \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad .$$

Der Strom  $I(t)$  ist in Phase mit der Spannung, d.h. sobald eine Spannung an einem Ohmschen Widerstand liegt, fließt ein Strom.

#### 5.3.2 Wechselspannung über einer Kapazität



Über dem Kondensator mit Kapazität  $C$  liege die Spannung:

$$U(t) = U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad ,$$

gesucht ist der Strom  $I(t)$ :

$$U - U_C = 0 \quad , \quad \text{somit } U = \frac{Q}{C}$$

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = C \cdot \frac{dU(t)}{dt} = C \cdot \omega \cdot U_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$I(t) = C \cdot \omega \cdot U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}) = I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}) \quad (5.6)$$

Der Strom  $I(t)$  ist gegenüber der Spannung um  $90^\circ$  phasenverschoben. Der Strom eilt der Spannung voraus. Um eine Spannung über dem Kondensator aufzubauen, muss *zuerst* ein Strom fließen, der den Kondensator auflädt.

#### Wechselspannung über C:

Eine Wechselspannung wird an einen Kondensator angeschlossen. Die Stromstärke wird durch eine Glühlampe im Leiterkreis angezeigt. Je höher die Frequenz der Wechselspannung, desto stärker leuchtet die Lampe.

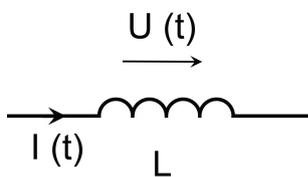
Der Widerstandswert  $R_C$  wird definiert als Quotient:

$$R_C = \frac{U_0}{I_0} = \frac{1}{\omega \cdot C} \quad . \quad (5.7)$$

Dieser Widerstandswert gibt keine Auskunft über die Phasenverschiebung, sondern nur über das Verhältnis der Spannungs- und der Stromamplituden. Je grösser die Kreisfrequenz der Wechselspannung über  $C$ , desto kleiner wird der Widerstandswert  $R_C$ . Man sagt:

"Kondensatoren werden leitend bei hohen Frequenzen".

### 5.3.3 Wechselspannung über einer Spule



Über der Spule mit Induktivität  $L$  liege die Spannung:

$$U(t) = U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

gesucht ist der Strom  $I(t)$ :

$$U + U_{\text{ind}} = 0 \quad , \quad \text{somit} \quad U = -U_{\text{ind}} = L \cdot \frac{dI}{dt}$$

$$L \cdot \frac{dI(t)}{dt} = U(t) = U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$I(t) = \frac{U_0}{L} \cdot \int \sin(\omega \cdot t) \cdot dt = -\frac{U_0}{\omega \cdot L} \cos(\omega \cdot t)$$

$$I(t) = \frac{U_0}{\omega \cdot L} \cdot \sin(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2}) = I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2}) \quad (5.8)$$

Der Strom  $I(t)$  ist gegenüber der Spannung um  $90^\circ$  phasenverschoben. Die Änderung von Magnetfeldern ist der Lenz'schen Regel unterworfen. Deshalb hinkt der Strom der Spannung hinten nach.

#### **Wechselspannung über L:**

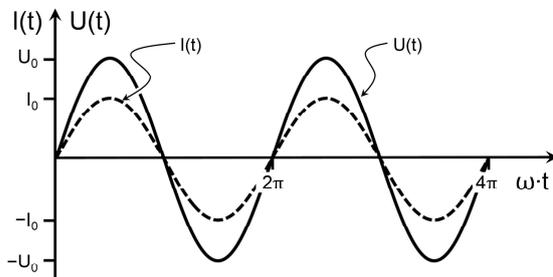
Eine Wechselspannung wird an eine Spule angeschlossen. Die Stromstärke wird durch eine Glühlampe im Leiterkreis angezeigt. Je höher die Frequenz der Wechselspannung, desto schwächer leuchtet die Lampe. Das Einbringen eines Eisenkerns in die Spule erhöht  $L$  und  $R_L$  (Anwendung: Dimmer).

Der Widerstandswert  $R_L$  wird definiert als Quotient:

$$R_L = \frac{U_0}{I_0} = \omega \cdot L \quad . \quad (5.9)$$

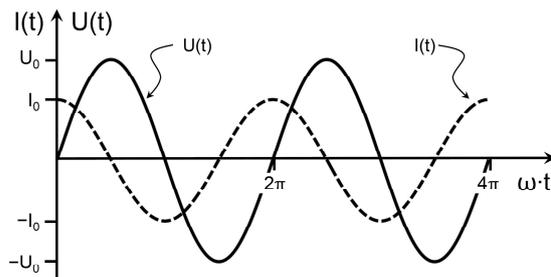
Dieser Widerstandswert gibt keine Auskunft über die Phasenverschiebung, sondern nur über das Verhältnis der Spannungs- und der Stromamplituden. Je grösser die Kreisfrequenz der Wechselspannung über  $L$ , desto grösser wird der Widerstandswert  $R_L$ . Man sagt: "Spulen werden Widerstände bei hohen Frequenzen".

### Ohmscher Widerstand



Widerstandswert des Ohmschen Widerstands  
ist unabhängig von der Frequenz

### Kapazität

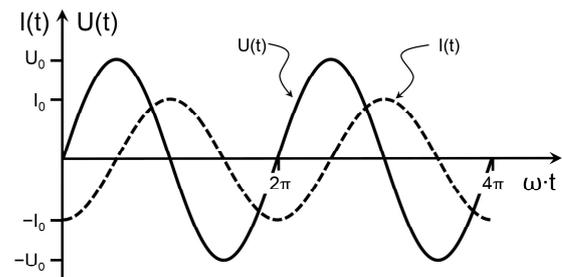


Widerstandswert der Kapazität sinkt  
mit steigender Frequenz:

$$C=1 \mu\text{F}, \nu=50 \text{ Hz}, R_C=3180 \Omega$$

$$C=1 \mu\text{F}, \nu=2000 \text{ Hz}, R_C=80 \Omega$$

### Induktivität



Widerstandswert der Spule steigt  
mit steigender Frequenz:

$$L=1 \text{ H}, \nu=50 \text{ Hz}, R_L=314 \Omega$$

$$L=1 \text{ H}, \nu=2000 \text{ Hz}, R_L=12570 \Omega$$

**Figur 5.2:** Überblick über das Verhalten Ohmscher Widerstände, Kapazitäten und Spulen in Wechselstromkreisen. Spannungen sind mit ausgezogenen, Stromstärken mit gestrichelten Kurven gekennzeichnet. Der Phasenwinkel  $\varphi$  für  $U(t)$  ist in diesen Darstellungen null gewählt.

## 5.4 Widerstandswerte in komplexer Darstellung, Impedanz

Zur Vorbereitung erinnern wir uns einiger Tatsachen über komplexe Zahlen. Zwei reelle Zahlen  $a$ , und  $b$ , sowie die imaginäre Einheit  $i = \sqrt{-1}$  bilden die komplexe Zahl

$$z = a + i \cdot b ;$$

$a$  und  $b$  heissen Real-, bzw. Imaginärteil von  $z$ . Komplexe Zahlen werden in der Gauss'schen Zahlenebene dargestellt: Die Zahl  $z$  befindet sich am Punkt  $(a, b)$ , wobei der Realteil  $Re$  entlang der  $x$ -Achse und der Imaginärteil  $Im$  entlang der  $y$ -Achse abgetragen wird. Die Zahl  $z$  kann auch als Vektor in der Gauss'schen Zahlenebene aufgefasst werden. Der Vektor  $z$  zeigt vom Ursprung zum Punkt  $(a, b)$ ; er ist durch seinen Betrag  $r$  und den Winkel  $\varphi$  zur  $x$ -Achse eindeutig gegeben. Das ist die polare Form der komplexen Zahl  $z$ :

$$z = r \cdot \cos \varphi + i \cdot r \cdot \sin \varphi ,$$

wobei gilt  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$  und  $\varphi = \arctan(b/a)$ . Mit Hilfe der berühmten Beziehung, die der Schweizer Mathematiker *Leonhard Euler* 1748 entdeckt hat:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi ,$$

gilt schliesslich:

$$z = a + i \cdot b = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi) = r \cdot e^{i\varphi} . \quad (5.10)$$

Wechselspannungen und Wechselströme mit fester Kreisfrequenz  $\omega$  sind nach (5.1) proportional zur harmonischen Funktion  $\sin(\omega \cdot t + \varphi)$  oder, äquivalent,  $\cos(\omega \cdot t + \varphi')$ , also:

$$\text{Reell:} \quad U(t) = U_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_U), \quad I(t) = I_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_I)$$

$$\text{Komplex:} \quad \hat{U}(t) = U_0 \cdot e^{i(\omega t + \varphi_U)} = \hat{U}_0 \cdot e^{i\omega t}, \quad \hat{I}(t) = I_0 \cdot e^{i(\omega t + \varphi_I)} = \hat{I}_0 \cdot e^{i\omega t},$$

wobei  $\hat{U}_0 = U_0 \cdot e^{i\varphi_U}$  und  $\hat{I}_0 = I_0 \cdot e^{i\varphi_I}$  die komplexen Spannungs-, bzw. Stromamplituden bezeichnen, die die Phaseninformation beinhalten. Es gilt:

$$U(t) = \text{Re}(\hat{U}(t)) \quad I(t) = \text{Re}(\hat{I}(t)) .$$

Die Bestimmung von Spannungen und Strömen in Wechselstromkreisen mit Widerständen, Kapazitäten und Induktivitäten wird sehr einfach, wenn die komplexe Darstellung  $\hat{U}$  und  $\hat{I}$  verwendet wird.

Wechselspannung und Wechselstrom sind durch die **Impedanz**  $Z$  wie folgt verknüpft:

$$Z = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{\hat{U}_0}{\hat{I}_0} = \frac{U_0 \cdot e^{i\varphi_U}}{I_0 \cdot e^{i\varphi_I}} = \frac{U_0}{I_0} \cdot e^{i(\varphi_U - \varphi_I)} . \quad (5.11)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir als Referenzphase  $\varphi_U = 0$ :

Ohmscher Widerstand:  $Z_R = \frac{U_0}{I_0 \cdot e^{i\varphi_I}}; \quad \varphi_I = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_R = \frac{U_0}{I_0} = R \quad (5.12)$

Kapazität:  $\hat{I}(t) = C \cdot \frac{d\hat{U}}{dt} = C \cdot \frac{d}{dt}(\hat{U}_0 \cdot e^{i\omega t}) = C \cdot i \cdot \omega \cdot \hat{U}_0 \cdot e^{i\omega t} = \hat{I}_0 \cdot e^{i\omega t}$   
 $Z_C = \frac{\hat{U}_0}{\hat{I}_0} = \frac{1}{i \cdot \omega \cdot C} \quad (5.13)$

Induktivität:  $\hat{U}(t) = L \cdot \frac{d\hat{I}}{dt} = L \cdot \frac{d}{dt}(\hat{I}_0 \cdot e^{i\omega t}) = L \cdot i \cdot \omega \cdot \hat{I}_0 \cdot e^{i\omega t} = \hat{U}_0 \cdot e^{i\omega t}$   
 $Z_L = \frac{\hat{U}_0}{\hat{I}_0} = i \cdot \omega \cdot L \quad (5.14)$

**Impedanzen:**  $Z_R = R$        $Z_C = \frac{1}{i \cdot \omega \cdot C}$        $Z_L = i \cdot \omega \cdot L$

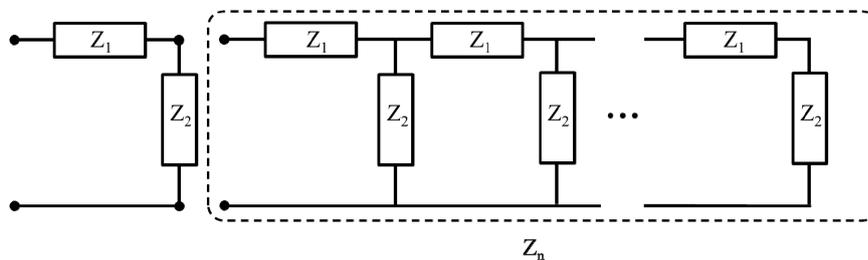
Mit den im allgemeinen komplexen Impedanzen kann in Stromkreisen generell wie mit Ohmschen Widerständen gerechnet werden.

Bei der Kombinationen von Zweipolen gilt:

**Serieschaltung:**  $Z_{\text{tot}} = Z_1 + Z_2$       **Parallelschaltung:**  $Z_{\text{tot}} = \left( \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right)^{-1} \quad (5.15)$

Hauptsächlich für Studierende der Physik: \_\_\_\_\_

**Challenge:** Wie gross ist die Gesamt-Impedanz  $Z$  einer unendlich langen Impedanz-"Leiter", die aus Elementen der Impedanzen  $Z_1$  und  $Z_2$  besteht, die wie dargestellt in Serie geschaltet sind? Bestimmen Sie zunächst die Impedanz  $Z_{n+1}$  unter der Annahme, dass die Impedanz  $Z_n$  bekannt sei. Für  $n \rightarrow \infty$  gilt dann  $Z_{n+1} = Z_n = Z$ .



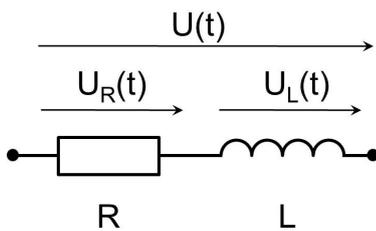
1. Berechne den Gesamtwiderstand für den Fall  $Z_1 = Z_2 = R$ .
2. Nun sei  $Z_1$  eine Spule und  $Z_2$  ein Kondensator. Diskutieren Sie die Funktion  $Z(\omega)$ .

## 5.5 Kombinationen Ohmscher, kapazitiver und induktiver Elemente

Bei passiven Zweipolen geht es darum, die Gesamtimpedanz, den Gesamtstrom, sowie die Spannungsabfälle über, bzw. die Ströme durch die einzelnen Elemente zu berechnen. Das Vorgehen kann am besten anhand von einigen Beispielen gezeigt werden.

### 5.5.1 Serieschaltung von Elementen im Wechselstromkreis

#### a) Serieschaltung RL



Gegeben:

$$U(t) = U_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) = \operatorname{Re}(\hat{U}(t)) = \operatorname{Re}(U_0 \cdot e^{i\omega t})$$

Gesucht:

$$Z, I(t), U_R(t), U_L(t)$$

Die Impedanz der Serieschaltung beträgt:

$$Z = R + i \cdot \omega \cdot L$$

Damit kann die Wechselstromstärke berechnet werden:

$$\begin{aligned} I(t) &= \operatorname{Re}(\hat{I}(t)) = \operatorname{Re}\left(\frac{\hat{U}(t)}{Z}\right) = U_0 \cdot \operatorname{Re}\left(\frac{1}{R + i \cdot \omega \cdot L} \cdot e^{i\omega t}\right) = U_0 \cdot \operatorname{Re}\left(\frac{R - i \cdot \omega \cdot L}{R^2 + \omega^2 \cdot L^2} \cdot e^{i\omega t}\right) \\ &= \frac{U_0}{R^2 + \omega^2 \cdot L^2} \cdot \operatorname{Re}((R - i \cdot \omega \cdot L) \cdot e^{i\omega t}) = \frac{U_0}{R^2 + \omega^2 \cdot L^2} \cdot \operatorname{Re}(\sqrt{R^2 + \omega^2 \cdot L^2} \cdot e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\omega t}) \\ &= \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 \cdot L^2}} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_1) \\ &\text{mit } \varphi_1 = \arctan\left(-\frac{\omega \cdot L}{R}\right). \end{aligned}$$

Die praktische Anwendung soll mit einem numerischen Beispiel illustriert werden:

$$U_0 = 12 \text{ V}; \quad \nu = 50 \text{ Hz}; \quad R = 1500 \text{ } \Omega; \quad L = 2.5 \text{ H}$$

$$|Z| = |R + i \cdot \omega \cdot L| = \sqrt{R^2 + \omega^2 \cdot L^2} = 1693 \text{ } \Omega$$

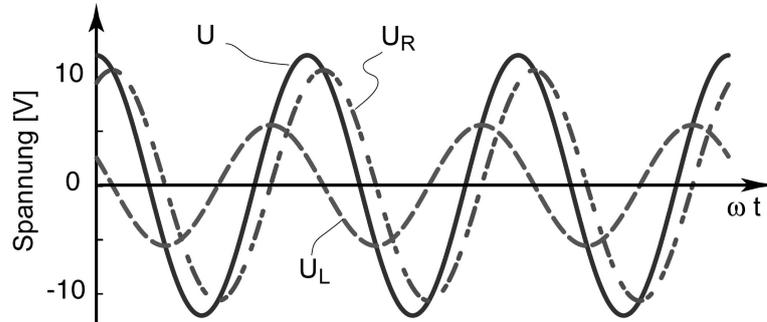
$$\varphi_1 = \arctan\left(-\frac{\omega \cdot L}{R}\right) = -0.4823 = -27.64^\circ$$

$$I(t) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 \cdot L^2}} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_1) = 7.087 \text{ mA} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_1)$$

$$U_R(t) = R \cdot I(t) = 10.63 \text{ V} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_1),$$

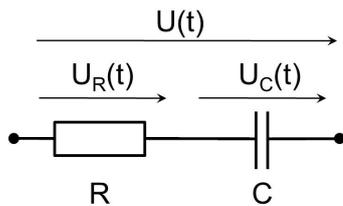
$$U_L(t) = \operatorname{Re}(Z_L \cdot \hat{I}(t)) = 785.4 \, \Omega \cdot 7.088 \, \text{mA} \cdot \operatorname{Re}(i \cdot e^{i(\omega t + \varphi_1)}) = 5.567 \, \text{V} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_L)$$

mit  $\varphi_L = \varphi_1 + \frac{\pi}{2} = 1.0885 = 62.37^\circ$



Figur 5.3: Verlauf der Spannung U, und der Spannungen über R und L.

**b) Serieschaltung RC**



Gegeben:

$$U(t) = U_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) = \operatorname{Re}(\hat{U}(t)) = \operatorname{Re}(U_0 \cdot e^{i\omega t})$$

Gesucht:

$$Z, I(t), U_R(t), U_C(t)$$

Die Impedanz der Serieschaltung beträgt:

$$Z = R + \frac{1}{i \cdot \omega \cdot C}$$

Damit kann die Wechselstromstärke berechnet werden:

$$\begin{aligned} I(t) &= \operatorname{Re}(\hat{I}(t)) = \operatorname{Re}\left(\frac{\hat{U}(t)}{Z}\right) = U_0 \cdot \operatorname{Re}\left(\frac{i \cdot \omega \cdot C}{1 + i \cdot \omega \cdot R \cdot C} \cdot e^{i\omega t}\right) \\ &= U_0 \cdot \operatorname{Re}\left(\frac{i \cdot \omega \cdot C \cdot (1 - i \cdot \omega \cdot R \cdot C)}{1 + \omega^2 \cdot R^2 \cdot C^2} \cdot e^{i\omega t}\right) = \frac{U_0 \cdot \omega \cdot C}{1 + \omega^2 \cdot R^2 \cdot C^2} \cdot \operatorname{Re}((\omega \cdot R \cdot C + i) \cdot e^{i\omega t}) \\ &= \frac{U_0 \cdot \omega \cdot C}{\sqrt{1 + \omega^2 \cdot R^2 \cdot C^2}} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_1) \end{aligned}$$

mit  $\varphi_1 = \arctan\left(\frac{1}{\omega \cdot R \cdot C}\right)$ .

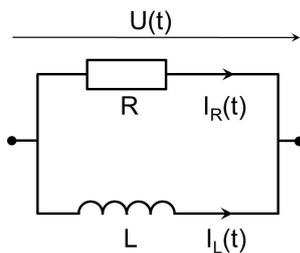
$$U_R(t) = \operatorname{Re}(Z_R \cdot \hat{I}(t)) = \frac{U_0 \cdot \omega \cdot R \cdot C}{\sqrt{1 + \omega^2 \cdot R^2 \cdot C^2}} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_1)$$

$$\begin{aligned}
 U_C(t) &= \operatorname{Re}(Z_C \cdot \hat{I}(t)) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{i \cdot \omega \cdot C} \cdot \hat{I}(t)\right) = \frac{U_0}{1 + \omega^2 \cdot R^2 \cdot C^2} \cdot \operatorname{Re}((1 - i \cdot \omega \cdot R \cdot C) \cdot e^{i\omega t}) \\
 &= \frac{U_0}{\sqrt{1 + \omega^2 \cdot R^2 \cdot C^2}} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_C)
 \end{aligned}$$

mit  $\varphi_C = \arctan(-\omega \cdot R \cdot C)$  .

### 5.5.2 Parallelschaltung von Elementen im Wechselstromkreis

#### a) Parallelschaltung RL



Gegeben:

$$U(t) = U_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) = \operatorname{Re}(\hat{U}(t)) = \operatorname{Re}(U_0 \cdot e^{i\omega t})$$

Gesucht:

$$Z, I_L(t), I_R(t), I_{\text{tot}}(t)$$

Die Impedanz der Parallelschaltung beträgt:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{i \cdot \omega \cdot L} = \frac{\omega \cdot L - i \cdot R}{\omega \cdot R \cdot L} .$$

Damit können die Wechselstromstärken berechnet werden:

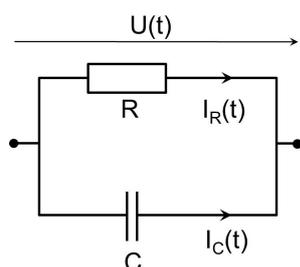
$$I_R(t) = \operatorname{Re}(\hat{I}_R(t)) = \operatorname{Re}\left(\frac{\hat{U}(t)}{Z_R}\right) = \frac{U_0}{R} \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$I_L(t) = \operatorname{Re}(\hat{I}_L(t)) = \operatorname{Re}\left(\frac{\hat{U}(t)}{Z_L}\right) = U_0 \cdot \operatorname{Re}\left(\frac{1}{i \cdot \omega \cdot L} \cdot e^{i\omega t}\right) = \frac{U_0}{\omega \cdot L} \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$I_{\text{tot}}(t) = \operatorname{Re}(\hat{I}_{\text{tot}}(t)) = \operatorname{Re}\left(\frac{\hat{U}(t)}{Z}\right) = U_0 \cdot \operatorname{Re}\left(\frac{\omega \cdot L - i \cdot R}{\omega \cdot R \cdot L} \cdot e^{i\omega t}\right) = \frac{U_0}{R} \cdot \sqrt{1 + \frac{R^2}{\omega^2 \cdot L^2}} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_I)$$

mit  $\varphi_I = \arctan\left(-\frac{R}{\omega \cdot L}\right)$  .

#### b) Parallelschaltung RC



Gegeben:

$$U(t) = U_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) = \operatorname{Re}(\hat{U}(t)) = \operatorname{Re}(U_0 \cdot e^{i\omega t})$$

Gesucht:

$$Z, I_R(t), I_C(t), I_{\text{tot}}(t)$$

Die Impedanz der Parallelschaltung beträgt:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + i \cdot \omega \cdot C$$

Damit können die Wechselstromstärken berechnet werden:

$$I_R(t) = \operatorname{Re}(\hat{I}_R(t)) = \operatorname{Re}\left(\frac{\hat{U}(t)}{Z_R}\right) = \frac{U_0}{R} \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$I_C(t) = \operatorname{Re}(\hat{I}_C(t)) = \operatorname{Re}\left(\frac{\hat{U}(t)}{Z_C}\right) = U_0 \cdot \operatorname{Re}(i \cdot \omega \cdot C \cdot e^{i\omega t}) = U_0 \cdot \omega \cdot C \cdot \cos\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

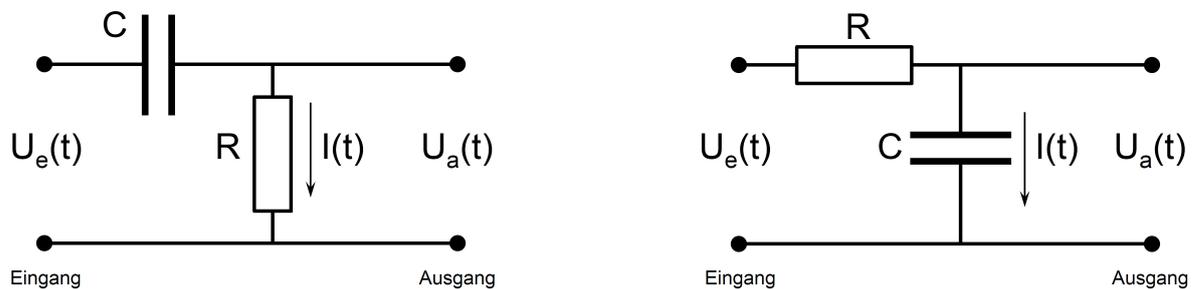
$$\begin{aligned} I_{\text{tot}}(t) &= \operatorname{Re}(\hat{I}_{\text{tot}}(t)) = \operatorname{Re}\left(\frac{\hat{U}(t)}{Z}\right) = U_0 \cdot \operatorname{Re}\left(\left(\frac{1}{R} + i \cdot \omega \cdot C\right) \cdot e^{i\omega t}\right) \\ &= \frac{U_0}{R} \cdot \sqrt{1 + \omega^2 \cdot R^2 \cdot C^2} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_1) \end{aligned}$$

mit  $\varphi_1 = \arctan(\omega \cdot R \cdot C)$  .

Hauptsächlich für Studierende der Physik (bis Seite 113):

### 5.5.3 Hoch- und Tiefpassfilter

Auf den Eingang (linkes Anschlusspaar) der beiden Filter wird je eine Wechselspannung  $U_e(t)$  gegeben, welche eine Überlagerung einer niederfrequenten ( $\nu_1 = 50$  Hz) und einer hochfrequenten ( $\nu_2 = 20'000$  Hz) Spannung ist. Gesucht ist die Spannung  $U_a(t)$  am Ausgang der beiden Filter.



**Figur 5.4:** Einfachste Anordnung eines Hochpassfilters (links) und eines Tiefpassfilters (rechts) mit einem Ohmschen Widerstand und einer Kapazität.

#### a) Hochpass-Filter

Die Eingangsspannung  $U_e$  wird an der Serieschaltung von C und R angelegt; die Ausgangsspannung  $U_a$  wird über dem Widerstand R abgegriffen:

$$\left. \begin{aligned} \hat{U}_e &= Z \cdot \hat{I} = \left( \frac{1}{i \cdot \omega \cdot C} + R \right) \cdot \hat{I} \\ \hat{U}_a &= R \cdot \hat{I} \end{aligned} \right\} \rightarrow \hat{U}_a = \frac{R}{\frac{1}{i \cdot \omega \cdot C} + R} \cdot \hat{U}_e = \frac{(\omega \cdot R \cdot C)^2 + i \cdot (\omega \cdot R \cdot C)}{1 + (\omega \cdot R \cdot C)^2} \cdot \hat{U}_e$$

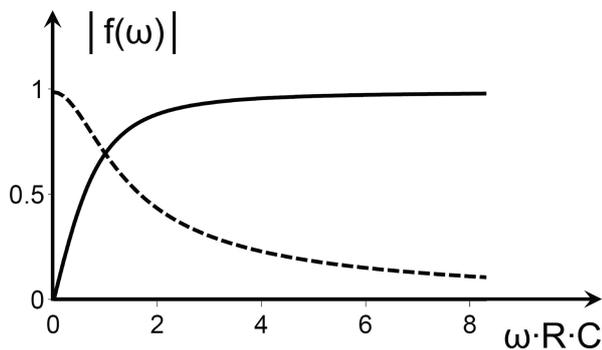
Die gemessene Ausgangsspannung beträgt

$$U_a(t) = \operatorname{Re}(\hat{U}_a) = \operatorname{Re}(f(\omega) \cdot \hat{U}_e) \quad ,$$

wobei  $f(\omega)$  die komplexe Übertragungsfunktion mit Betrag  $|f(\omega)|$  ist (Fig. 5.5). Für den Hochpassfilter gilt

$$f(\omega) = \frac{(\omega \cdot R \cdot C)^2 + i \cdot (\omega \cdot R \cdot C)}{1 + (\omega \cdot R \cdot C)^2} = |f(\omega)| \cdot e^{i \cdot \varphi(\omega)} = \frac{\omega \cdot R \cdot C}{\sqrt{1 + (\omega \cdot R \cdot C)^2}} \cdot e^{i \cdot \varphi(\omega)} \quad ,$$

mit der Eigenschaft  $|f(\omega)| \rightarrow 1$  für  $\omega \rightarrow \infty$  .



**Figur 5.5:** Betrag der Übertragungsfunktion für einen RC-Hochpassfilter (durchgezogene Linie) und einen RC-Tiefpassfilter (gestrichelt).

### b) Tiefpass-Filter

$$\left. \begin{aligned} \hat{U}_e &= Z \cdot \hat{I} = \left( \frac{1}{i \cdot \omega \cdot C} + R \right) \cdot \hat{I} \\ \hat{U}_a &= \frac{1}{i \cdot \omega \cdot C} \cdot \hat{I} \end{aligned} \right\} \rightarrow \hat{U}_a = \frac{1}{1 + i \cdot (\omega \cdot R \cdot C)} \cdot \hat{U}_e = \frac{1 - i \cdot (\omega \cdot R \cdot C)}{1 + (\omega \cdot R \cdot C)^2} \cdot \hat{U}_e$$

Die gemessene Ausgangsspannung beträgt

$$U_a(t) = \operatorname{Re}(\hat{U}_a) = \operatorname{Re}(f(\omega) \cdot \hat{U}_e) \quad ,$$

wobei  $f(\omega)$  die komplexe Übertragungsfunktion mit Betrag  $|f(\omega)|$  ist (Fig. 5.5). Für den Tiefpassfilter gilt

$$f(\omega) = \frac{1 - i \cdot (\omega \cdot R \cdot C)}{1 + (\omega \cdot R \cdot C)^2} = |f(\omega)| \cdot e^{i\varphi(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega \cdot R \cdot C)^2}} \cdot e^{i\varphi(\omega)}$$

mit der Eigenschaft  $|f(\omega)| \rightarrow 1$  für  $\omega \rightarrow 0$ .

*Numerisches Beispiel:*  $C = 1 \mu\text{F}$   $R = 200 \Omega$

Die Eingangsspannung am Hoch-, bzw. Tiefpassfilter bestehe aus zwei Wechselspannungen in Phase mit Amplituden  $U_1$ ,  $U_2$ , und Frequenzen  $\nu_1 = 50 \text{ Hz}$ ,  $\nu_2 = 20'000 \text{ Hz}$ :

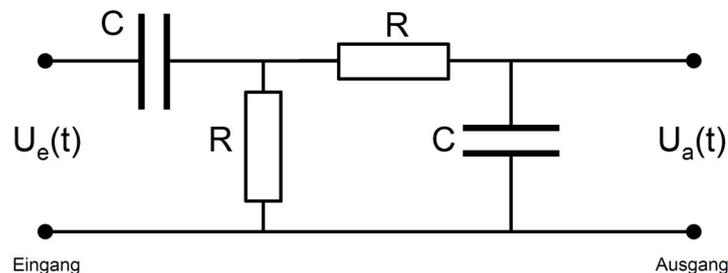
Eingang:  $U_e(t) = U_1 \cdot \cos(\omega_1 t) + U_2 \cdot \cos(\omega_2 t) = \text{Re}(U_1 \cdot e^{i\omega_1 t} + U_2 \cdot e^{i\omega_2 t}) = \text{Re}(\hat{U}_e)$

Ausgang Hochpass:  $U_a(t) = U_1 \cdot 0.063 \cdot \cos(\omega_1 t + 1.51) + U_2 \cdot 0.999 \cdot \cos(\omega_2 t + 0.04)$

Ausgang Tiefpass:  $U_a(t) = U_1 \cdot 0.998 \cdot \cos(\omega_1 t - 0.06) + U_2 \cdot 0.040 \cdot \cos(\omega_2 t - 1.53)$

Am Ausgang des Hochpassfilters wird die Komponente  $U_1$  (tiefe Frequenz) stark reduziert, während  $U_2$  (hohe Frequenz) fast verlustfrei und mit schwacher positiver Phasenverschiebung wiedergegeben wird. Am Ausgang des Tiefpassfilters wird die Komponente  $U_1$  (hohe Frequenz) stark reduziert, während  $U_2$  (tiefe Frequenz) fast verlustfrei und mit schwacher negativer Phasenverschiebung wiedergegeben wird:

*Challenge:* Hoch- und Tiefpassfilter werden nun wie unten gezeigt in Serie geschaltet. Berechne für diesen Filter die komplexe Übertragungsfunktion  $f(\omega)$  und ihren Betrag.



Hauptsächlich für Studierende der Physik

## 5.6 Leistung im Wechselstromkreis

Mit der zeitlichen Variation der Spannung und der Stromstärke variiert auch die aufgenommene Leistung mit der Zeit:

$$P(t) = U(t) \cdot I(t) = U_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot I_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_1) , \quad (5.16)$$

wobei der Phasenwinkel der Spannung willkürlich auf Null gesetzt ist. Meist interessiert nur die über die Zeit gemittelte Leistung. Falls man über viele Perioden mittelt, spielt der Beitrag einer angebrochenen Periode keine Rolle. Man kann also einen Mittelwert über eine ganze Anzahl Perioden, bzw. über eine einzige Periode bilden:

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T P(t) \cdot dt = \frac{U_0 \cdot I_0}{2} \cdot \cos \varphi_1 . \quad (5.17)$$

Für *ideale* Kondensatoren und Spulen gilt  $\varphi_1 = \pm\pi/2$ , also  $\cos\varphi_1 = 0$ , und diese geben unter Wechselspannung keine Leistung ab. Für den Ohmschen Widerstand ist  $\varphi_1 = 0$ , also

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \cdot U_0 \cdot I_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{(U_0)^2}{R} = \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{U_0}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{R} \cdot (U_{\text{eff}})^2 = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \quad (5.18)$$

Aus praktischen Gründen führt man die sogenannte *effektive Spannung*  $U_{\text{eff}}$  und die *effektive Stromstärke*  $I_{\text{eff}}$  ein. Das Quadrat von  $U_{\text{eff}}$  und  $I_{\text{eff}}$  ist der zeitliche Mittelwert ihrer Quadrate:

$$(U_{\text{eff}})^2 = \overline{U^2(t)} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T U_0^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t) \cdot dt = \frac{U_0^2}{2} \quad ; \quad U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \quad (5.19)$$

$$(I_{\text{eff}})^2 = \overline{I^2(t)} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T I_0^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t) \cdot dt = \frac{I_0^2}{2} \quad ; \quad I_{\text{eff}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \quad (5.20)$$

Effektivwerte sind vor allem in der Technik sehr gebräuchlich. Messinstrumente messen häufig Effektivwerte. Die Multiplikation der effektiven Spannung mit der effektiven Stromstärke gibt, wie oben gezeigt, die zeitlich gemittelte Leistung. Für Ohmsche Widerstände gilt auch das Ohmsche Gesetz in der Form:  $U_{\text{eff}} = R \cdot I_{\text{eff}}$ .

#### Effektive Spannung:

Zwei Glühlampen werden mit Wechselstrom, bzw. Gleichstrom betrieben und in ihrer Helligkeit verglichen.

Diese sind gleich, falls die Amplitude der Wechselspannung um ca. 1.4 grösser ist als die Gleichspannung.

*Stromversorgung:* Mit dem Widerstand  $R_L$  einer elektrischen Versorgungsleitung ist die Verlustleistung  $P_V$  gegeben durch

$$P_V = U \cdot I = R_L \cdot I^2 = R_L \cdot (P/U)^2,$$

wobei  $P$  die Leistung am Verbraucher ist. Der relative Leistungsverlust ist dann

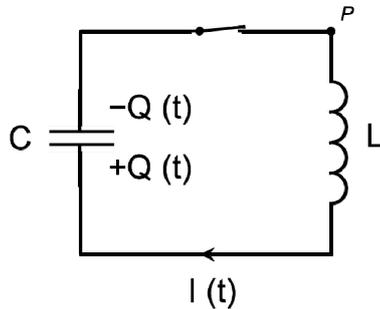
$$P_V / P = R_L \cdot P / U^2.$$

Der relative Leistungsverlust nimmt bei gegebenem  $P$  und  $R_L$  quadratisch mit der Spannung ab. Deshalb wird zur Energieübertragung eine Hochspannung von 380 kV verwendet. Wechselspannung wird eingesetzt, da deren Erzeugung durch Generatoren (Dynamo), sowie deren Veränderung durch Transformatoren, technisch äusserst zuverlässig realisiert werden können.

Allerdings werden bei langen Leitungen und hohen Wechselspannungen die kapazitiven und induktiven Verluste der Energieübertragung gross: bei Freileitungen  $>750$  km, bei Erd- und Seekabeln bereits bei einigen 10 km. Für sehr grosse Distanzen wird deshalb die technisch aufwändigere Hochspannungs-Gleichstrom-Übertragung eingesetzt, die keine kapazitiven und induktiven Verluste aufweist.

## 5.7 Der elektrische Schwingkreis

### 5.7.1 Der LC-Kreis



**Figur 5.6:** Schaltschema eines einfachen elektrischen Schwingkreises bestehend aus L und C in Serie.

Wie beim RC-Kreis wird ein geladener Kondensator durch Schliessen eines Schalters entladen, diesmal jedoch über eine Induktivität. Die 2. Kirchhoffsche Regel, angewendet im Uhrzeigersinn beginnend bei P, ergibt:

$$U_{\text{ind}} - U_C = 0$$

$$-L \cdot \frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot Q = 0 \quad .$$

Der letzte Ausdruck ist die Differentialgleichung einer harmonischen Schwingung. Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet:

$$Q(t) = Q_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) \quad . \quad Q_0 \text{ und } \varphi \text{ gemäss Anfangsbedingungen} \quad (5.21)$$

Durch Einsetzen von (5.21) in die Differentialgleichung muss für  $\omega$  gelten:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad \text{Frequenz des elektrischen LC-Schwingkreises} \quad (5.22)$$

Die Gleichungen für die Stromstärke und die Spannungen über der Kapazität und der Spule lauten, unter der Annahme  $\varphi = 0$ :

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = -\omega \cdot Q_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{Q_0}{C} \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$U_L(t) = L \cdot \frac{dI}{dt} = -\omega^2 \cdot L \cdot Q_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad . \quad (5.23)$$

Das bedeutet, dass die Stromstärke  $I(t)$  und die über C und über L liegenden Spannungen  $U_C(t)$  und  $U_L(t)$  eine harmonische Schwingung mit der Kreisfrequenz  $\omega$  ausführen.

### 5.7.2 Der gedämpfte RLC Schwingkreis

Falls ein Ohmscher Widerstand  $R$  in Serie zugeschaltet wird, entsteht ein gedämpfter Schwingkreis, für den die Differentialgleichung

$$L \cdot \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \quad (5.24)$$

gilt. Im Widerstand wird elektrische Energie in Wärme umgesetzt. Die Lösung von (5.24) ist:

$$Q(t) = Q_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) \cdot e^{-\frac{R}{2L} \cdot t}, \quad (5.25)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{R \cdot C}{L/R}} = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{\tau_C}{\tau_L}}, \quad (5.26)$$

wobei der Ohmsche Widerstand  $R$  die Schwingungsfrequenz  $\omega$  gegenüber der Eigenfrequenz  $\omega_0 = 1/\sqrt{L \cdot C}$  des reinen LC-Kreises reduziert. Die Abweichung von  $\omega_0$  ist durch die sogenannte Kreisgüte (Q-Faktor)  $\sqrt{\tau_L / \tau_C}$  bestimmt (5.26). Für  $\sqrt{\tau_L / \tau_C} < 1/2$  ist der Schwingkreis *überkritisch gedämpft* und es treten keine Oszillationen auf.

### 5.7.3 Erzwungene Schwingung im RLC Schwingkreis

Da ein Schwingkreis immer einen gewissen Widerstand  $R$  besitzt (Drähte), und somit Energie verliert, muss in technischen Anwendungen eine Spannungsquelle eingesetzt werden, die eine Schwingung erzwingt. Die Differentialgleichungen für  $\hat{Q}(t)$  und  $\hat{I}(t)$  lauten in komplexer Schreibweise:

$$L \cdot \frac{d^2 \hat{Q}}{dt^2} + R \cdot \frac{d\hat{Q}}{dt} + \frac{\hat{Q}}{C} = \hat{U}_0 \cdot e^{i\omega t}, \quad \text{bzw.} \quad L \cdot \frac{d^2 \hat{I}}{dt^2} + R \cdot \frac{d\hat{I}}{dt} + \frac{\hat{I}}{C} = i \cdot \omega \cdot \hat{U}_0 \cdot e^{i\omega t}. \quad (5.27a, b)$$

Die Amplituden der Lösungen können geschrieben werden als  $Q_0(\omega) = f_Q(\omega) \cdot U_0$  und  $I_0(\omega) = f_I(\omega) \cdot U_0$  und zeigen **Resonanz** bei  $\omega_r$ . Die Resonanzfrequenz für  $Q_0$  hängt von der Kreisgüte ab, während sie für  $I_0$  unabhängig davon ist. Mit  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  finden wir:

$$\text{Resonanz für } Q_0 \text{ bei } \omega_r = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2} \cdot \tau_C / \tau_L}; \quad \text{Resonanz für } I_0 \text{ bei } \omega_r = \omega_0.$$

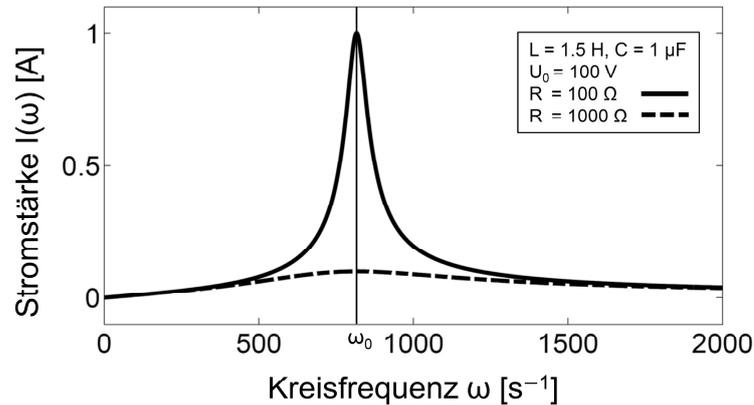
#### Resonanz im angeregten RLC-Kreis:

Ein RLC-Kreis wird durch eine Wechselspannung mit variabler Frequenz angeregt. Stromstärken durch  $L$ ,  $C$ , und die Spannungsquelle werden durch Glühlampen angezeigt. Bei Resonanz genügt ein kleiner Anregungsstrom, um hohe Ströme im RLC-Kreis zu verursachen.

In Serieschaltung beträgt die Impedanz eines RLC-Kreises

$$Z = R + i \cdot \omega \cdot L + \frac{1}{i \cdot \omega \cdot C} = R + i \cdot \left( \omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right) . \quad (5.28)$$

Da  $\hat{I}(t) = \hat{U}(t) / Z(\omega)$  tritt die Resonanz für die Stromstärke beim Minimum von  $Z$  auf. Von (5.28) folgt, dass  $Z(\omega)$  bei  $\omega_r = \omega_0 = 1 / \sqrt{L \cdot C}$  minimal wird, die Stromstärke also ein Maximum annimmt (Fig. 5.7).

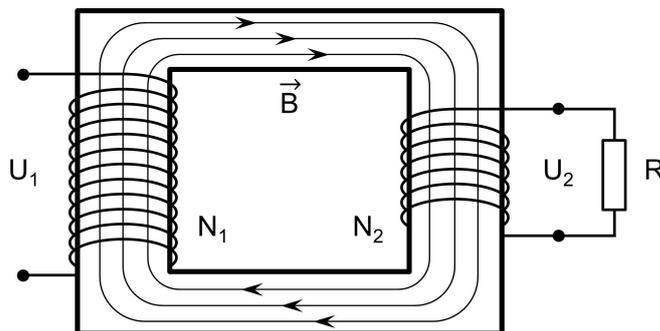


**Figur 5.7:** Strom-Frequenzcharakteristik für ein RLC-Glied in Serieschaltung für zwei Werte von  $R$ . Die Resonanz für die Stromstärke ist bei  $\omega_0$ .

## 5.8 Transformatoren

### 5.8.1 Ringkerntransformatoren

Ein Transformator dient dazu, die Amplitude einer Wechselspannung bei gleichbleibender Frequenz zu ändern. Er besteht aus zwei Spulen, die einen Eisenkern umschliessen (Fig. 5.8). Der Eisenkern vermittelt ein starkes Magnetfeld zwischen den beiden Spulen.



**Figur 5.8:** Einfacher Transformator mit Eisenkern und angehängtem Verbraucher  $R$ .

Die Primärspule mit  $N_1$  Windungen erzeugt im Eisenkern einen magnetischen Fluss  $\Phi_B$ . Bei idealen Bedingungen durchsetzt der ganze Fluss auch die Sekundärspule mit  $N_2$  Windungen und induziert dort eine Spannung. Falls der zweiten Spule kein Strom entnommen wird, gilt:

$$U_2(t) = -N_2 \cdot \frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{N_2}{N_1} \cdot U_1(t) . \quad (5.29)$$

Ist die Windungszahl der Sekundärspule grösser, so wird an der Sekundärspule Hochspannung erzeugt, umgekehrt wird die Spannung reduziert. Bei idealen Verhältnissen erbringt  $I_1(t)$  unter diesen Umständen keine elektrische Leistung, da Strom und Spannung um  $\pi/2$  gegeneinander phasenverschoben sind.

Falls der Spule 2 durch Dazwischenschalten eines Ohmschen Widerstandes (Fig. 5.8) Strom entnommen wird, ist nun  $I_2(t)$  in Phase mit  $U_2(t)$ , aber entsprechend um  $\pi/2$  gegen  $I_1(t)$  phasenverschoben. Dies bewirkt eine Änderung des Flusses im Eisenkern und eine Änderung der Phasendifferenz von  $U_1(t)$  und  $I_1(t)$ . Dies führt zu einer Leistungsabgabe im primären Stromkreis, die bei idealen Verhältnissen gerade der entsprechenden Leistung im sekundären Stromkreis entspricht. Bei realen Verhältnissen treten Verluste auf durch:

- Ohmscher Widerstand der beiden Spulen
- Wirbelströme im Eisenkern
- Hysterese bei der Magnetisierung des Eisenkernes

Gute Transformatoren, die laminierte Weicheisenkerne haben, erreichen Wirkungsgrade von über 90%.

**Transformator:**

Bei einem Transformator ( $N_1 = 500$ ,  $N_2 = 23'000$ ) wird an der Sekundärspule Hochspannung und ein Lichtbogen erzeugt. Mit  $N_2 = 24$  wird ein Eisendraht, der die Sekundärspule kurzschliesst, zum Glühen gebracht.

### 5.8.2 Induktoren, Tesla-Transformator

Hochfrequenztransformatoren haben keinen Spulenkern. Damit der Fluss durch beide Spulen geht, sind sie übereinander gewickelt. Schaltvorgänge, besonders bei Funkenbildung, ergeben sehr hochfrequente Schwingungen. Um starke hochfrequente Spannungen zu erzeugen, lädt man mit einer niederfrequenten Hochspannung (50 Hz, 16 kV) einen Primär-Kondensator ( $C = 3.3 \cdot 10^{-8}$  F) auf und entlädt ihn via eine Primär-Spule ( $L = 5.7 \cdot 10^{-5}$  H) über eine Funkenstrecke. Der primäre LC-Schwingkreis ist mit einem sekundären LC-Schwingkreis mit niedriger Kapazität ( $C = 2.5 \cdot 10^{-11}$  F) und hoher Induktivität ( $L = 7.5 \cdot 10^{-2}$  H) resonant gekoppelt. Der Sekundärschwingkreis ist "offen", das heisst er besteht einzig aus einer Spule mit hoher Windungszahl und einem Metalltorus, der als Kapazität dient, und auf dem eine sehr hohe Wechselspannung der Amplitude 0.6 MV entsteht. Durch Unterbruch des Primärkreises entlädt sich die Kapazität über Plasmaschläuche in der umgebenden Luft. Einen solchen Induktor nennt man *Tesla-Transformator*.

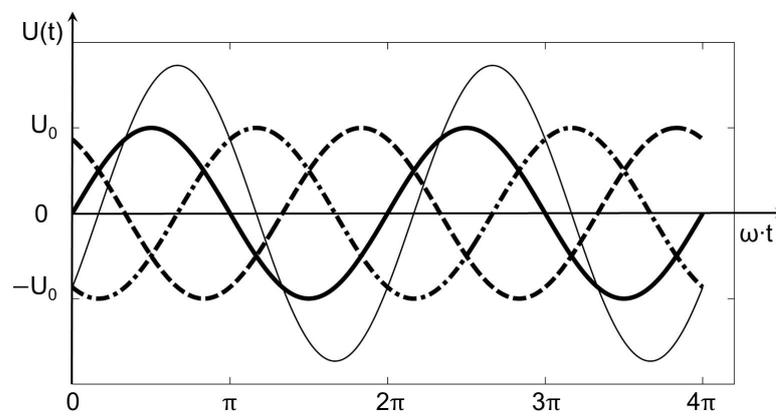
**Tesla-Transformator:**

Mit einem Tesla-Transformator ( $\nu = 116$  Hz) werden hochfrequente Wechselspannungen von ca. 0.6 MV erzeugt. Dies führt zu Gasentladungen an Spitzen ("Elmsfeuer"), bzw. auf der Torusoberfläche der Kapazität. Im Twin-Betrieb sind zwei offene LC-Schwingkreise in Gegenphase gekoppelt, womit eine doppelte Potentialdifferenz vom 1.2 MV erreicht wird. Es entstehen Lichtbögen (Plasmaschläuche) von ca. 1.5 Metern Länge.

Mit der hochfrequenten Wechselspannung kann man den *Skinneffekt* nachweisen. Der Strom fließt nicht mehr über den ganzen Querschnitt des Drahtes verteilt, sondern bevorzugt an dessen Oberfläche. Grund ist eine innere Selbstinduktion. Es entstehen im Draht eine Art Wirbelströme, welche im Zentrum entgegen dem Wechselstrom, an der Aussenseite aber mit dem Wechselstrom gerichtet sind. Der Strom wird deshalb in einer dünnen äusseren Schicht von typischerweise  $\mu\text{m}$  bis  $\text{mm}$  Dicke geführt.

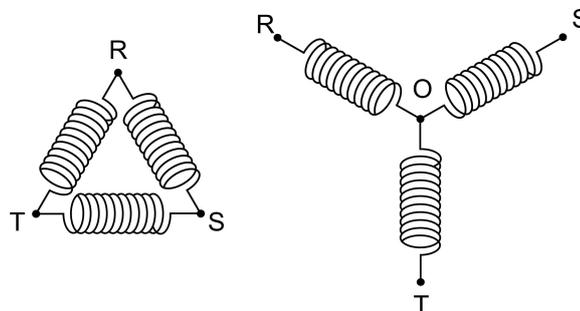
## 5.9 Mehrphasiger Wechselstrom (Drehstrom)

Im öffentlichen Stromnetz fließt ein so genannter Drehstrom. Ursache sind drei Wechselspannungen  $U_1$ ,  $U_2$  und  $U_3$  mit gleicher Amplitude  $U_0$ , die um jeweils  $120^\circ$  phasenverschoben sind (Fig. 5.9).



**Figur 5.9:** Zeitlicher Verlauf der drei um  $120^\circ$  phasenverschobenen Spannungen in Sternschaltung  $U_1=U_{RO}$ ,  $U_2=U_{SO}$ ,  $U_3=U_{TO}$  (je fett) und die Spannung, die an benachbarten Spulenenden abgegriffen wird,  $U_{RS}=U_1-U_2$ .

Die drei Wechselspannungen werden durch drei voneinander unabhängige Spulenwicklungen im Generator erzeugt. Dann ergeben sich sechs Spulenendpunkte. Durch geeignete Schaltung kann man die Anzahl Drähte auf drei (Dreieckschaltung) beziehungsweise vier (Sternschaltung) beschränken (Fig. 5.10).



**Figur 5.10:** Dreieckschaltung (links) und Sternschaltung (rechts) für die Erzeugung von Drehstrom. Im Generator drehen die Schaltungen in einem Magnetfeld. Dadurch werden an den Anschlussstellen R, S, und T Spannungen erzeugt, die zueinander  $120^\circ$  phasenverschoben sind. O liegt auf Erde.

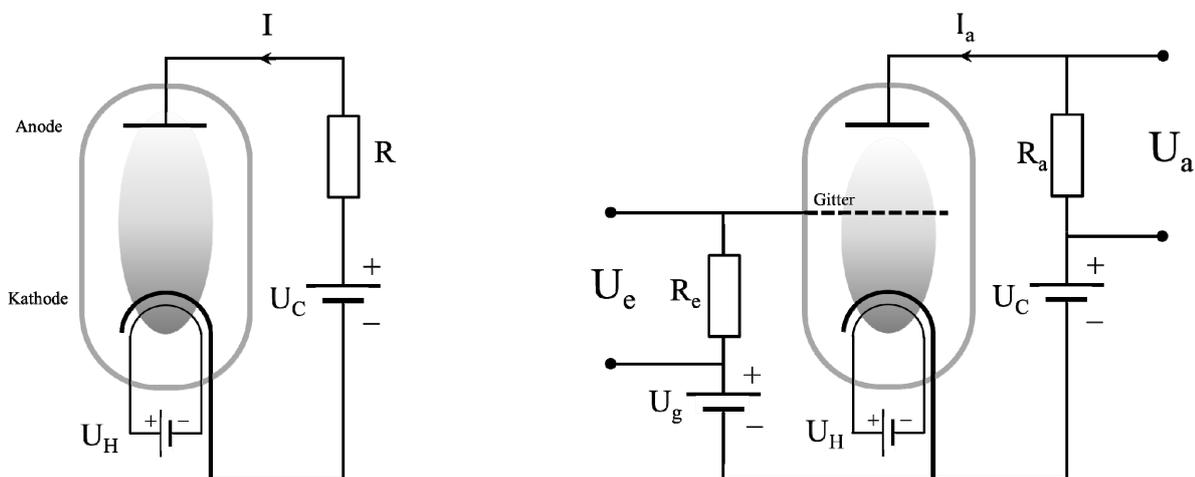
Im öffentlichen Netz haben wir Sternschaltung (Fig. 5.10) mit  $U_{RO} = U_{SO} = U_{TO} = 230 \text{ V}$ , bzw.  $U_{RS} = U_{RO} - U_{SO} = \sqrt{3} \cdot 230 \text{ V} = 400 \text{ V}$ , und  $U_{RS} = U_{ST} = U_{TR} = 400 \text{ V}$ .

## 5.10 Aktive Elemente

Nachdem bisher ausschliesslich passive und lineare Elemente im Stromkreis beschrieben wurden, sollen in diesem Kapitel noch zwei Elemente erwähnt werden, die dazu dienen, Wechselspannung gleichzurichten und Signale zu verstärken. Es sind Elektronenröhren und Halbleiterbauelemente wie Dioden und Transistoren.

### 5.10.1 Elektronenröhren

Elektronenröhren bestehen aus einer evakuierten Glasröhre, in der eine heisse Kathode (glühender Wolframdraht, oder beschichteter Nickeldraht) Elektronen emittiert, die dann zur Anode hin beschleunigt werden. Meist ist die Anode röhrenförmig um die Kathode angeordnet. Durch das Erhitzen der Kathode nimmt die kinetische Energie der Elektronen so stark zu, dass einige Elektronen (mittlere kinetische Energie bei Rotglut  $\sim 0.1$  eV, Austrittsarbeit Grössenordnung einige eV) die Kathode verlassen können.

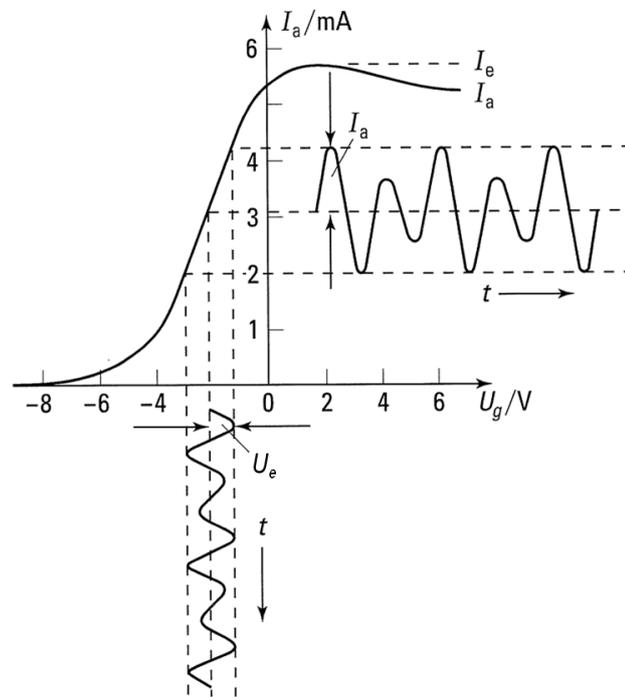


**Figur 5.11:** Schematische Darstellung einer Vakuumdiode (links) und einer Röhrentriode in Verstärkerschaltung (rechts). Eine an der Glühkathode erzeugte Elektronenwolke vermittelt den Ladungstransport.

In der **Vakuumdiode** (Fig. 5.11 links) werden die Elektronen im elektrischen Feld, das durch  $U_C - I \cdot R$  erzeugt wird, beschleunigt. Gemäss Kontinuitätsgleichung muss damit die Dichte der Elektronen gegen die Anode hin abnehmen. Ist  $U_C$  umgekehrt gepolt, können die Elektronen nicht zur Anode der Vakuumdiode gelangen, da ihre kinetische Energie nicht genügt, das negative Potential zu überwinden. Die Röhrentriode wirkt als Gleichrichter, da Elektronen nur von der Kathode zur Anode fließen. Die technische Stromrichtung ist also nur in der eingezeichneten Richtung möglich.

Eine **Röhrentriode** (Fig. 5.11 rechts) beruht auf demselben Prinzip wie die Vakuumdiode. Nun wird ein Gitter zwischen Kathode und Anode montiert, das gegenüber der Kathode schwach negativ geladen ist. Dies wird durch eine entsprechend gepolte Gitterspannung  $U_g$  erreicht. Auf das Gitter gibt man das zu verstärkende Eingangsspannungssignal  $U_e$ . Dieses steuert über das Gitter den Anodenstrom  $I_a$ . Über dem Ausgangswiderstand  $R_a$  kann das Ausgangssignal  $U_a$ , bzw.  $I_a$  gemessen werden (Fig. 5.12). Kleine Änderungen der

Gitterspannung bewirken grosse Änderungen der Ausgangsspannung. Deshalb ist die Röhrentriode ein Verstärkerelement. Das Eingangssignal kann praktisch ohne Belastung des Signals (Eingangswiderstand sehr hochohmig) verstärkt werden. Heute werden ausser bei Spezialanwendungen, die hohe Leistung erfordern wie z. B. Radiosender oder Radar, Elektronenröhren durch Halbleitertransistoren ersetzt.

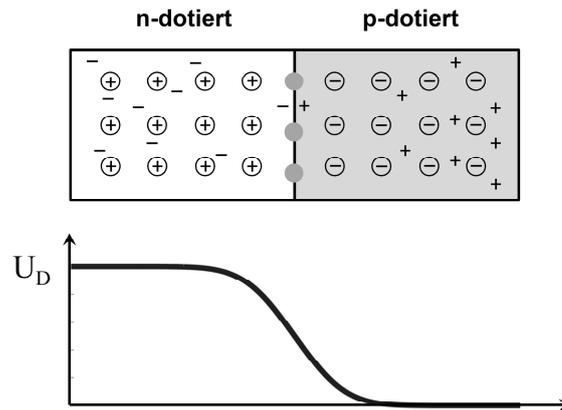


**Figur 5.12:** Charakteristik des Anodenstroms  $I_a$  der Triode (Fig. 5.11, rechts) als Funktion der Gitterspannung. Für stark negative Gitterspannung  $U_g$  sperrt die Triode. Bei grösserer Gitterspannung steigt  $I_a$  an und kommt in die Sättigung, welche durch die Heizspannung  $U_H$  bestimmt ist (Fig., 5.11). Ein der Gitterspannung überlagertes Wechsellspannungssignal  $U_e$  wird über den Anodenstrom verstärkt. (Figur aus Bergmann & Schäfer, 2006)

### 5.10.2 Halbleiterdioden und Halbleitertransistoren

Das Grundelement der meisten Halbleiterbauelemente ist ein np-Übergang (Kapitel 3.6.2), bei dem wie in Fig. 5.13 skizziert n- und p-dotiertes Material aneinander gefügt ist. Eine solche Grenzschicht hat sehr interessante Eigenschaften. Elektrische Spannung, Stromdichte, Magnetfeld, einfallendes Licht, Teilchenstrahlen, Temperatur und mechanische Spannungen beeinflussen dessen Eigenschaften, so dass eine elektrische Spannung auftritt, deren Widerstand ändert, oder Licht emittiert wird. Sie bilden also die Bausteine für jegliche Art von Sensoren.

Weit weg von der np-Grenze beträgt die Dotierung von Donatoren in der n-Schicht (Donatoren sind als eingekreiste positive Gitteratome dargestellt, die negative bewegliche Ladungsträger zur Verfügung stellen) üblicherweise in der Grössenordnung  $n_1 \approx 10^{22} \text{ m}^{-3}$ , jene der Akzeptoren (Löcher, nicht eingezeichnet) nur ungefähr  $p_1 \approx 10^{12} \text{ m}^{-3}$ . In der p-Schicht sind die Verhältnisse umgekehrt. Dort die die Dotierung der Akzeptoren (Akzeptoren sind als eingekreiste negative Gitteratome dargestellt, die positive bewegliche Ladungsträger – Löcher – zur Verfügung stellen) in der Grössenordnung  $p_2 \approx 10^{22} \text{ m}^{-3}$ , und  $n_2 \approx 10^{12} \text{ m}^{-3}$ .



**Figur 5.13:** Aufbau einer np-Diode und Verteilung der Ladungsträger. Unbewegliche Gitteratome (Donatoren im n-Teil und Akzeptoren im p-Teil) sind in Kreisen, bewegliche Ladungen durch Dotierung sind als + und –, und Orte der Rekombination sind als graue Punkte dargestellt. Verlauf des Potentials  $U_D$ , das durch die Ladungsverteilung entlang des np-Halbleiters entsteht (Vorspannung).

Infolge des grossen Konzentrationsgefälles an der np-Grenze diffundieren negative Ladungsträger in die p-Schicht und Löcher in die n-Schicht, wo sie rekombinieren, d.h. Elektronen füllen Löcher, dargestellt als graue Punkte in Fig. 5.13. Der n-dotierte Halbleiter lädt sich durch den Verlust von Elektronen leicht positiv auf, der p-dotierte leicht negativ. An der Kontaktfläche bildet sich ein elektrisches Feld, das den weiteren Zustrom von Elektronen aus dem n-dotierten und Löchern aus dem p-dotierten Halbleiter verhindert. Zwischen n- und p-Halbleiter liegt das Potential  $U_D$ . Diese Potentialdifferenz muss überwunden werden, bevor der np-Übergang leitend wird. Man bezeichnet das als Vorspannung; die Diode muss "vorgespannt" werden. Im Gleichgewicht muss nach der *Boltzmannstatistik* gelten:

$$n_2 = n_1 \cdot e^{-\frac{e \cdot U_D}{k \cdot T}} \quad p_1 = p_2 \cdot e^{-\frac{e \cdot U_D}{k \cdot T}} ,$$

so dass

$$U_D = \frac{k \cdot T}{e} \cdot \ln \frac{n_1}{n_2} = \frac{k \cdot T}{e} \cdot \ln \frac{p_2}{p_1} . \quad (5.30)$$

An der Grenze gibt es durch Rekombination eine Schicht, die an Ladungsträgern verarmt ist. Beim Anlegen einer äusseren Spannung muss der Diffusionsstrom gegen eine noch grössere Spannungsdifferenz anlaufen (wenn der p-Leiter negativ gepolt ist). Die Grenzschicht verarmt noch mehr an Ladungsträgern und die Diode sperrt. Bei einer Spannung mit umgekehrter Polarisation wird aber der Diffusionsstrom unterstützt, es fliesst ein elektrischer Strom. Für die Abhängigkeit des Stromes von der angelegten Spannung  $U$  gilt:

$$I = I_S \cdot \left( e^{\frac{e \cdot U}{k \cdot T}} - 1 \right) . \quad (5.31)$$

Der Sperrsättigungsstrom  $I_S$  ist bei Raumtemperatur in der Grössenordnung von 1 nA für Si und 1  $\mu$ A für Ge. Der pn-Übergang wirkt somit als Gleichrichter.

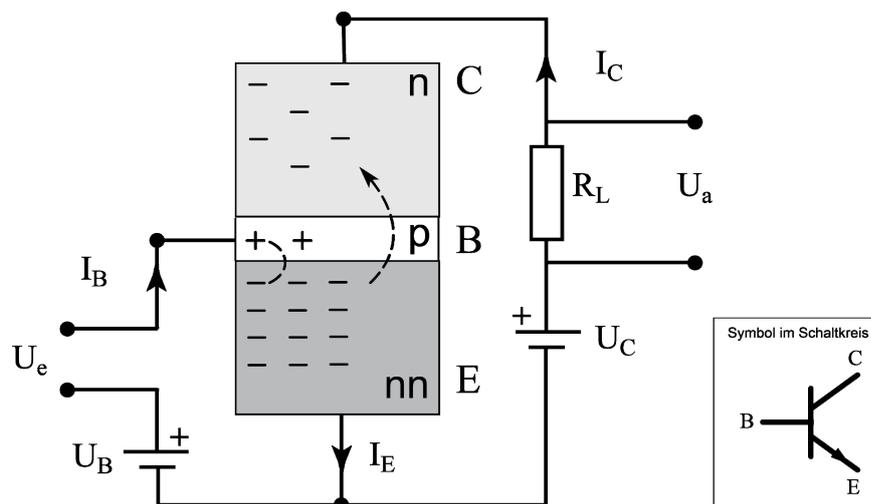
**Halbleiter-Transistoren** enthalten zwei Materialübergänge. Beim npn-Transistor liegt die dünne p-Schicht (p-dotiert = Überschuss an Löchern) zwischen zwei n-Schichten (n-dotiert = Überschuss an Elektronen). Die Schichten heissen: Emmitter (E), Basis (B) und Kollektor (C).

In Fig. 5.14 ist der schematische Aufbau eines Transistors in Emitterschaltung angegeben und bildet so einen Verstärker. Es ist zu beachten, dass das Emittiermaterial (E) sehr viel höher n-dotiert ist als das Kollektormaterial (C), angedeutet in Fig. 5.14 als nn und mehr negativen Ladungen. Mit einer Vorspannung  $U_C > 0$  kann man den npn im Kollektorkreis so einstellen, dass trotz dem eigentlich sperrenden Element np bei CB ein Strom  $I_C$  fliessen kann.

Durch die Vorspannung am Kollektor ( $U_C$ ) gelangen Elektronen vom Emmitter in den Kollektor. Die Vorspannung an der Basis ( $U_B$ ) stellt Löcher in der sehr dünnen p-Schicht ( $10^{-5}$  m) zur Verfügung, die mit den Elektronen in E rekombinieren. In B bildet sich eine Grenzschicht mit einem Überschuss an negativer Ladung, die den Übertritt der Elektronen von E nach C verhindert, falls nicht zusätzliche Löcher in p gelangen. Eine zusätzliche Spannung  $U_e$  an der Basis erzeugt einen Basisstrom  $I_B$ , der der p-Schicht neue Löcher zuführt. Damit fliessen nun wieder Elektronen aus dem Emmitter in den Kollektor.  $I_B$  steuert somit  $I_C$ , und es gilt

$$I_C = \beta \cdot I_B ,$$

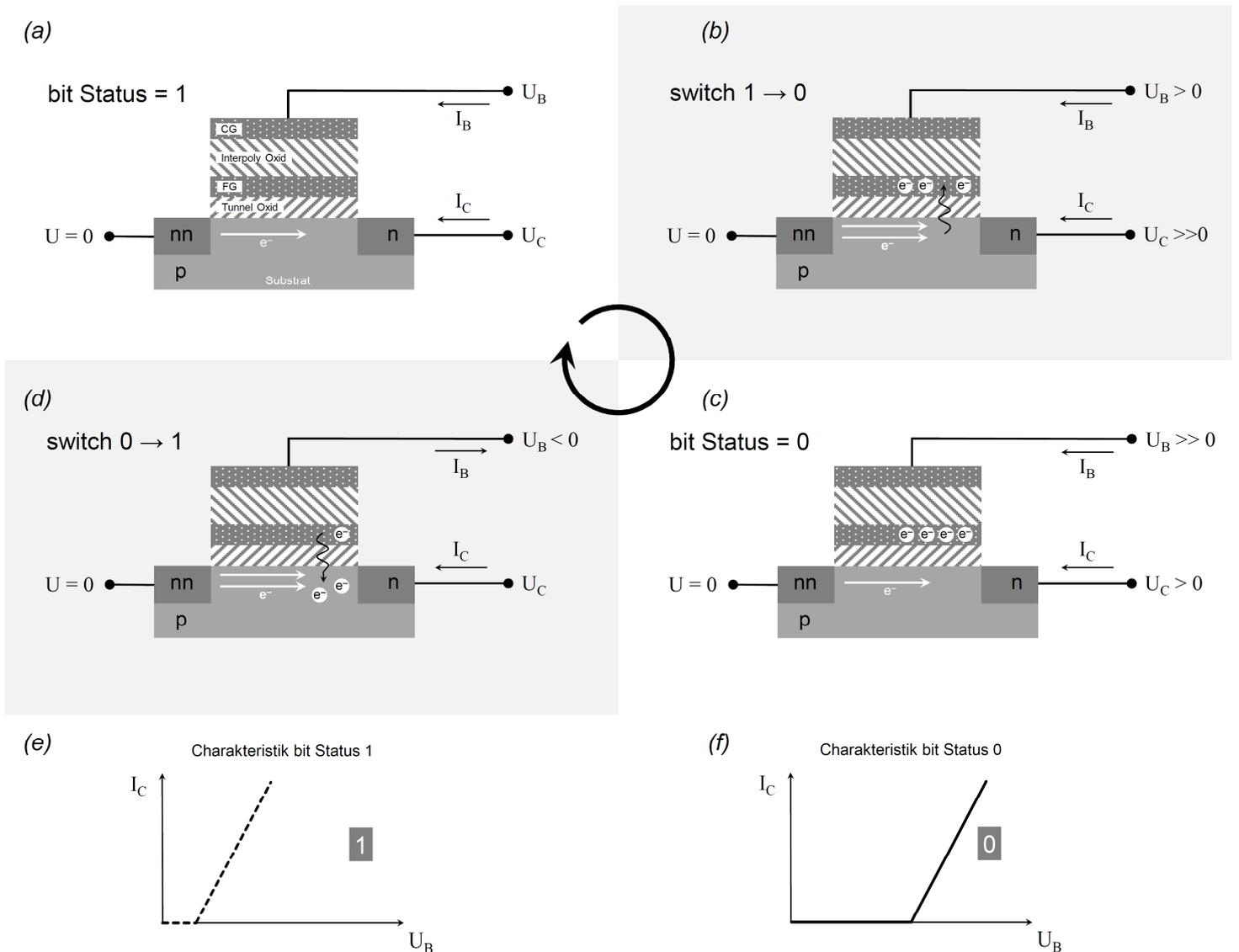
mit der Stromverstärkung  $\beta \approx 10^1 \dots 10^4$ . Der Transistor kann auch als Schalter verwendet werden: Der Kollektorstrom kann durch Steuerung der Basisspannung ein- und ausgeschaltet werden. Der Transistor wird meistens als Spannungsverstärker angewendet, indem im Basiskreis eine variable Eingangsspannung  $U_e$  angelegt wird, die über  $R_L$  als verstärkte Ausgangsspannung  $U_a$  abgegriffen wird. In analoger Weise funktioniert auch der pnp-Transistor.



**Figur 5.14:** Prinzip der Stromverstärkung beim npn Transistor in Emitterschaltung. C, B, und E bezeichnen Kollektor (n-dotiert), Basis (p-dotiert), und Emmitter (stark n-dotiert),  $I$  sind die Stromstärken in den zugehörigen Kreisen,  $R_L$  ist ein äusserer Lastwiderstand. Die Eingangsspannung  $U_e$  erzeugt einen Basisstrom  $I_B$  der im Kollektorkreis einen grossen Kollektorstrom  $I_C$  erlaubt. Über dem Lastwiderstand  $R_L$  wird die Ausgangsspannung  $U_a$  abgegriffen. Diese ist sehr viel grösser als die Eingangsspannung  $U_e$ . Der npn-Transistor wirkt somit als Verstärker. Mit den Vorspannungen an der Basis ( $U_B$ ) und am Kollektor ( $U_C$ ) wird der Transistor auf den Arbeitspunkt eingestellt.

### 5.10.3 Festkörperspeicher, Flash-Memory

Eine Erweiterung des Halbleitertransistors liefert ein Bauelement, das die Speicherung von Information revolutioniert hat: das **Flash-Memory**. Es handelt sich dabei um Festkörperspeicher, die durch eine besondere Kombination von n- und p-dotierten Materialien mit Dielektrika so aufgebaut sind, dass Information gespeichert und verändert werden kann. Die Information bleibt auch ohne äussere Spannungsquellen erhalten. Diese Technologie kommt inzwischen in allen elektronischen Geräten zum Einsatz, insbesondere in Speicherkarten von Digitalkameras, MP3 Players, Mobiltelefonen und Festspeicher von Laptops und Computer.



**Figur 5.15:** Prinzip eines Floating Gate Metalloxid Transistors zur Speicherung eines einzelnen bits, der Grundlage der digitalen Information. (a) zeigt den Aufbau. Ein npn Transistor im bit Status 1 liegt auf dem p-dotierten Substrat. FG und CG bezeichnen Floating Gate und Control Gate. Der Emitter (Source, stark n-dotiert) liegt auf Potential 0, am Kollektor (Drain, n-dotiert) und an der Basis (Control Gate) sind die Potentiale  $U_C$  und  $U_B$ . Fließende Elektronen bilden den Kollektorstrom  $I_C$ . (b) Schaltung zum bit Status 0 durch Zuführen von Elektronen, die durch die isolierende Tunnel Oxid Schicht in den FG tunneln. (c) bit Status 0 mit negativ geladenem FG, der zur Leitung des npn Transistors einen höheren Basisstrom  $I_B$  erfordert. (d) Schaltung zum bit Status 1 durch Abführen von Elektronen durch die Tunnel Oxid Schicht zurück in den Kollektorstrom. Durch den Vorgang in (d) ist der Speicher vom bit Status 0 in (c) auf den ursprünglichen bit Status 1 in (a) zurückgesetzt worden. (e, f) Der Zustand des Speichers kann jederzeit eindeutig abgelesen werden aufgrund der unterschiedlichen Charakteristik des Kollektorstroms  $I_C$  als Funktion der Basisspannung  $U_B$ .

Die digitale Speicherung mittels Halbleiter hat seither eine rasante Entwicklung hinter sich. Mitte 1990er Jahre konnte auf einem  $\text{mm}^2$  etwa 5 kB gespeichert werden, 20 Jahre später waren es bereits über 10 MB. Inzwischen werden die einzelnen Speicherbits dreidimensional gepackt und ermöglichen so Terabyte-Speicher im Taschenformat.

Die fundamentale Einheit eines **bit-Speichers** soll hier kurz erklärt werden. Dabei gehen wir nicht ins Detail, welches ein vertieftes Verständnis der Festkörperphysik erfordert. Dieser bit-Speicher beruht auf der CMOS (Complementary Metal Oxide Semiconductor) Technologie. Bereits 1967 wurde das Grundprinzip des Floating Gate Metal Oxide Transistors in den Bell Laboratories USA entwickelt, aus welchen die EPROMs hervorgegangen sind. So speicherten bereits 1976 Taschenrechner (z.B. der legendäre HP-25C) Daten und Programme permanent und ohne äussere Spannungsquelle.

Figur 5.15 zeigt einen Schreibzyklus des bit-Speichers und die beiden binären Zustände 1 und 0. Der grundlegende Aufbau des Floating Gate Metalloxid Transistors und die Bezeichnungen sind in (a) gezeigt. Ein npn Transistor liegt auf dem p-dotierten Silizium Substrat. Auf der p-dotierten Basis ist zunächst eine erste dünne, isolierende dielektrische Schicht von ca. 10 nm aus  $\text{SiO}_2$ , *Tunnel Oxid Schicht* genannt, aufgebracht. Darüber ist das Floating Gate (FG). Zwischen Floating Gate und Control Gate (CG) liegt eine zweite isolierende dielektrische Schicht von ca. 20 nm Dicke aus  $\text{SiO}_2\text{-Si}_3\text{N}_4\text{-SiO}_2$ , die *Interpolyoxid Schicht*. FG und CG bestehen aus einem Metalloxid ( $\text{ZnO}_2$ ,  $\text{SnO}_2$ ,  $\text{NiO}$ ).

In Fig. 5.15a ist FG ungeladen, was dem bit Zustand 1 entspricht. Durch Anlegen einer grossen Spannung an der Basis  $U_B$  und einer Kollektorspannung  $U_C$  gelangen Elektronen vom Emitter zum Kollektor, und einige Elektronen tunneln in das FG, wo sie wegen der sie umgebenden isolierenden Schichten gefangen bleiben (Fig. 5.15b). Der *Tunneleffekt* wird in der Quantenmechanik vorgestellt. Durch den Vorgang in (b) ist der Speicher vom bit Status 1 in (a) auf den bit Status 0 in (c) geschaltet worden. Die Information bleibt erhalten, auch wenn alle Spannungen abgeschaltet sind.

Man kann den Speicher wieder "löschen", indem durch Anlegen eines negativen Potentials an der Basis,  $U_B < 0$ , die Elektronen im FG genügend Energie erhalten, um zurück ins p-Substrat zu tunneln, wo sie am Kollektorstrom teilnehmen. Durch den Vorgang in (d) ist der Speicher vom bit Status 0 in (c) auf den ursprünglichen bit Status 1 in (a) zurückgesetzt worden.

Der Zustand des Speichers kann jederzeit eindeutig abgelesen werden aufgrund der unterschiedlichen Charakteristik des Kollektorstroms  $I_C$  als Funktion der Basisspannung  $U_B$  (Fig. 5.15e und f). Ist der bit-Speicher im Zustand 1, so genügt eine kleine Spannung  $U_B$ , um den Kollektorstrom  $I_C$  zu erzeugen. Beim Zustand 0 ist eine wesentlich grössere Spannung  $U_B$  notwendig.

Die typischen Dimensionen eines solchen Halbleiter Floating Gate Metalloxid Transistors sind etwa  $180 \text{ nm} \times 100 \text{ nm} \times 100 \text{ nm}$ . Ein bit Information (0 oder 1) benötigt also ein Volumen von  $1.8 \times 10^{-21} \text{ m}^3$ . Da 1 Byte = 8 bit könnten somit in einem  $\text{mm}^3$  theoretisch etwa 70 GB gespeichert werden! Die Limitierung ist jedoch die "Verkabelung" der einzelnen bits. Das technologische Knowhow liegt deshalb in der 3-dimensionalen Packung und optimalen Schaltung der Speicherelemente, sowie in der Materialwahl zur Erhöhung der Langlebigkeit des Speichers, also der Anzahl Schreib- und Lesezyklen.

## 5.11 Messinstrumente und Motoren

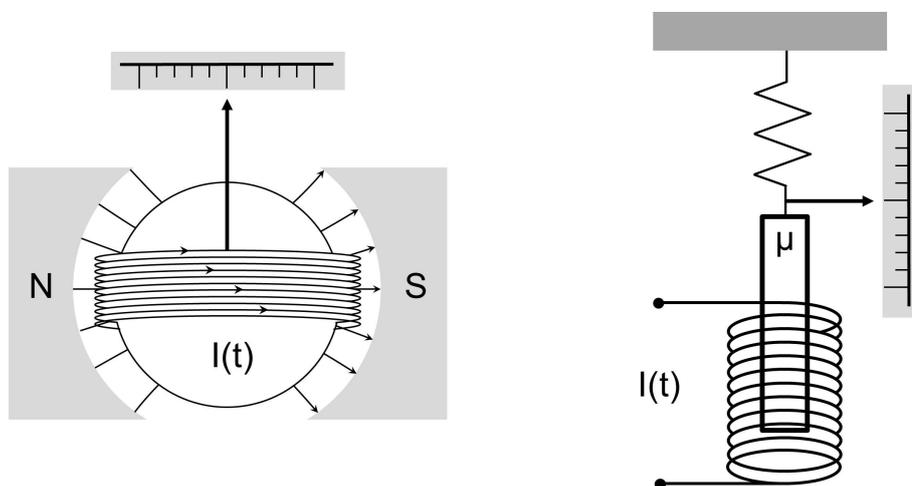
### 5.11.1 Messung elektrischer Spannung und Stromstärke

Die elektrische Spannung ist mit der Feldstärke und diese mit der Kraftwirkung auf eine elektrische Ladung verknüpft. Eine Spannung kann daher über die Kraft zwischen zwei Kondensatorplatten nach (2.38) gemessen werden. Dieses Prinzip nutzen Elektrometer und statische Voltmeter aus. Da elektrostatische Kräfte klein sind, eignet sich das Prinzip nur zur Messung von hohen Spannungen (höher als ca. 1000 V).

Die Messung kleinerer Spannungen erfolgt mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes  $U = I \cdot R$  durch eine Strommessung über einen hochohmigen Widerstand. Elektrische Ströme können mit verschiedenen Messprinzipien bis hinunter in den Bereich  $10^{-9}$  A gemessen werden.

Das älteste Strommessinstrument war das *Hitzdrahtampèremeter*. Es misst die Ausdehnung eines Drahtes bei der Erwärmung durch den Strom. Das Instrument wird praktisch nicht mehr eingesetzt, es wird durch die empfindlicheren Weicheiseninstrumente und noch häufiger durch Drehspulgalvanometer ersetzt.

Das *Drehspul-Galvanometer* besteht aus einer vom zu messenden Strom durchflossenen Spule, die sich im Feld eines Permanentmagneten drehen kann. Das Magnetfeld zwischen Spule und Permanentmagnet ist überall radial (Fig. 5.16, links) und praktisch gleich gross. Der zu messende Strom fließt in den Drähten der Spule in der mit Pfeilen angegebenen Richtung und bildet ein magnetisches Moment. Dieses erfährt nach (4.28) ein mechanisches Drehmoment.



**Figur 5.16:** Aufbau von Strommessgeräten: Drehspul-Galvanometer (links), Weicheiseninstrument (rechts).

In der Ruhelage wirkt auf die Spule der Fläche  $A$  mit  $N$  Windungen, durch die der Strom  $I$  fließt, ein mechanisches Drehmoment:

$$M = \left| \vec{m} \times \vec{B} \right| = N \cdot A \cdot I \cdot B \quad . \quad (5.32)$$

Eine Spiralfeder erzeugt ein Rückstellmoment  $M_{\text{Feder}} = -D \cdot \varphi$ . Der Zeigerausschlag ist somit proportional zu  $I$ . Die Richtung des Ausschlages ändert sich mit der Stromrichtung. Bei einem

Vorzeichenwechsel von  $I$  wird die ganze Spule mit Zeiger, die zusammen ein Massen-Trägheitsmoment  $J$  aufweisen, gedreht. Ein solches Instrument kann also nur Wechselströme messen, deren Frequenz  $\omega_0$  nicht viel grösser ist als die Eigenfrequenz von Spule und Zeiger,  $\omega_0 = \sqrt{D \cdot J^{-1}}$ . Dann misst das Gerät einen zeitlichen Mittelwert der Stromstärke. Bei hohen Frequenzen des Wechselstroms ist dieser Mittelwert 0, das heisst das Gerät kann solche Wechselströme nicht messen. Zeiger-Galvanometer erreichen eine Empfindlichkeit von  $10^7 \text{ mm} \cdot \text{A}^{-1}$ , mit Lichtzeiger oder Drehspiegeln sogar bis  $10^{10} \text{ mm} \cdot \text{A}^{-1}$ .

Hauptsächlich für Studierende der Physik:

Spule und Zeiger bilden ein Drehpendel mit der Eigenfrequenz  $\omega_0 = \sqrt{D \cdot J^{-1}}$ , wobei  $D$  die Spiralfederkonstante und  $J$  das Massen-Trägheitsmoment sind. Wir nehmen einen Wechselstrom  $I = I_0 \cdot \sin \omega t$  an. Die Bewegungsgleichung des Drehspul-Galvanometers beschreibt eine angeregte Schwingung:

$$J \cdot \ddot{\phi} = -D \cdot \phi + (N \cdot B \cdot A) \cdot I_0 \cdot \sin \omega t \cdot \cos \phi \quad .$$

Dabei haben wir den Ohmschen Widerstand vernachlässigt. Näherungsweise für sehr kleine Auslenkungen  $\phi$  gilt

$$J \cdot \ddot{\phi} = -D \cdot \phi + (N \cdot B \cdot A) \cdot I_0 \cdot \sin \omega t \quad .$$

Die Amplitude der Auslenkung ist

$$\phi_0 = \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \cdot \frac{N \cdot B \cdot A}{J} \cdot I_0 \quad ,$$

also proportional zur Strom-Amplitude, jedoch mit einem Dämpfungsfaktor, der von der Frequenz des zu messenden Wechselstroms abhängt. Für  $\omega \gg \omega_0$  geht die Auslenkung des Zeigers gegen 0. Das Drehspul-Galvanometer kann also Wechselströme vom Netz nicht messen.

Mit einem Drehspul-Galvanometer können aber Strompulse, also die durchgeflossene Ladung, gemessen werden. Die Arbeit, die Spule und den Zeiger maximal auszulenken, beträgt

$$\frac{1}{2} D \cdot \phi_{\max}^2 = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2 = \frac{1}{2J} (L)^2 = \frac{1}{2J} \left( \int M dt \right)^2 = \frac{1}{2J} \left( \int N \cdot B \cdot A \cdot I \cdot dt \right)^2 = \frac{(N \cdot B \cdot A)^2}{2 \cdot J} \cdot Q^2 \quad ,$$

wobei  $L$  der Drehimpuls ist und die Bewegungsgleichung  $dL/dt = M$  und die Definition  $I = dQ/dt$  verwendet wurden. Die maximale Auslenkung ist proportional zur durchgeflossenen Ladung:

$$\phi_{\max} = \frac{N \cdot B \cdot A}{\sqrt{D \cdot J}} \cdot Q$$

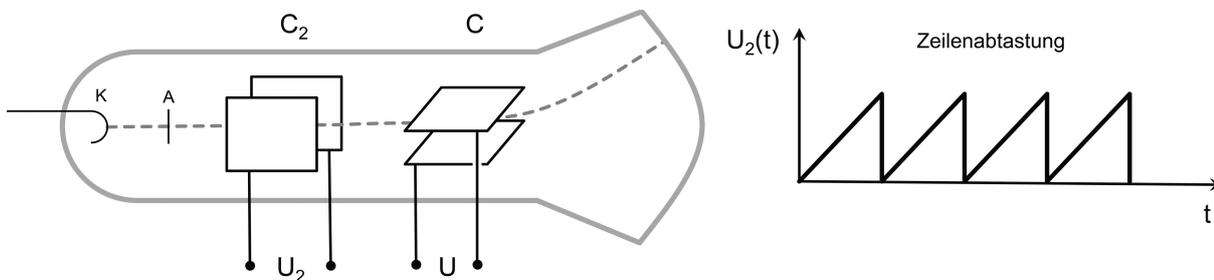
Beim *Weicheiseninstrument* fließt der Strom durch eine stationäre Spule. Ein an einer Feder aufgehängter Eisenstab mit magnetischer Permeabilität  $\mu$  wird im Feld magnetisiert und wird dadurch in die Spule hineingezogen (Fig. 5.16, rechts).

Nach (4.23) und (4.52) ist  $I \sim B$  und  $F \sim B^2$ , somit  $I^2 \sim F$ . Die Kraft führt zu einer Auslenkung  $\Delta x$  der Feder, wobei  $\Delta x \sim F$ , also  $\Delta x \sim I^2$ . Der Ausschlag ist somit unabhängig von der Stromrichtung. Damit können auch zeitliche Mittelwerte von Wechselströmen gemessen werden.

**Gleichstrom und Wechselstrom am Weicheiseninstrument und Drehspul-Galvanometer:**

Beide Strommessgeräte messen die Gleichstromstärke. Das Weicheiseninstrument kann die Stromrichtung nicht anzeigen, der Ausschlag des Drehspul-Galvanometers hängt jedoch von der Stromrichtung ab. Das Drehspul-Galvanometer zeigt bei schnell wechselnder Stromrichtung (Wechselstrom) keinen Ausschlag wegen der Trägheit der Masse des Zeigers und der Spule.

Den Verlauf schnell veränderlicher Spannungen misst man mit dem Kathodenstrahl-Oszillographen (KO). Aus der Glühkathode K (Fig. 5.17) treten Elektronen aus und werden bis zur Anode A auf einige keV beschleunigt. Der Elektronenstrahl tritt durch die beiden senkrecht zueinander stehenden Ablenkkondensatoren C<sub>2</sub> und C und trifft dann auf einen Leuchtschirm, wo er als leuchtender Punkt sichtbar ist. Auf den Kondensator C<sub>2</sub> wird eine Kippspannung gelegt, welche den Elektronenstrahl periodisch horizontal über den Bildschirm laufen lässt (Zeile). Über C wird die zu messende Spannung angelegt, welche die Ablenkung  $y(t)$  des Strahls bewirkt (siehe 2.40). C steuert somit die y-Achse, C<sub>2</sub> die x-Achse der Anzeige.



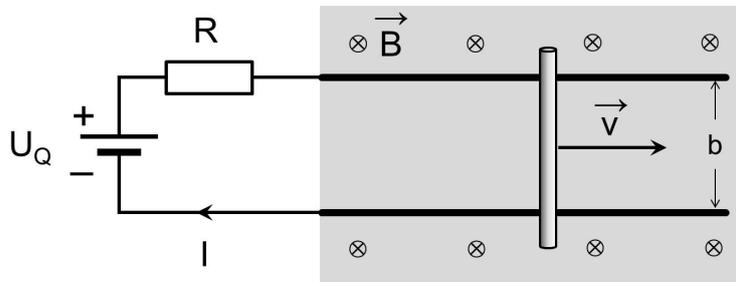
**Figur 5.17:** Seitenansicht eines Kathodenstrahl-Oszillographen. Ein Elektronenstrahl wird an der Kathode erzeugt und zur Anode beschleunigt. Die Kippspannung  $U_2$  erzeugt die Abtastung einer Zeile, die vertikale Auslenkung ist proportional zu  $U$ .

Bei digitalen Spannungsmessgeräten wird beispielsweise ein Kondensator schrittweise mit kleinen, konstanten Ladungen aufgeladen, bis die über ihm liegende Spannung genau gleich wie die zu messende Spannung ist (Brückenschaltung). Die zum Laden des Kondensators nötigen Ladungen werden gezählt und geben die digitale Spannung an.

Es gibt auch ein so genanntes „dual slope“ Verfahren wobei ein Kondensator aufgeladen wird, bis er die zu messende Spannung erreicht. Anschließend wird der Kondensator über einen Widerstand entladen. Die Entladungszeit wird gemessen und daraus die digitale Spannung errechnet.

### 5.11.2 Das Prinzip elektrischer Motoren

Das Prinzip des elektrischen Antriebs soll am einfachsten Motor, dem Linearmotor vorgestellt werden. Ein bewegliches Leiterstück der Länge  $b$  bewege sich gemäss Fig. 5.18 auf zwei leitenden Schienen mit der Geschwindigkeit  $v$  senkrecht zu einem homogenen Magnetfeld  $\vec{B}$ . Die mit dem Leiterstück gebildete Leiterschleife wird durch eine externe Stromquelle mit der Spannung  $U_Q$  gespeist.



**Figur 5.18:** Aufbau eines einfachen Linearmotors.

Das Leiterstück der Länge  $b$  bewegt sich auf den beiden Schienen mit der Geschwindigkeit  $v$  senkrecht zu einem homogenen Magnetfeld. Nach der Maschenregel gilt:

$$U_Q - I \cdot R + U_{\text{ind}} = 0 \quad . \quad (5.33)$$

Falls man nach (4.36) für  $U_{\text{ind}} = -B \cdot b \cdot v$  einsetzt, erhält man für die Stromstärke:

$$I = \frac{1}{R} \cdot (U_Q - B \cdot b \cdot v) \quad . \quad (5.34)$$

Ist die Geschwindigkeit klein, wird der Stromquelle Strom entnommen; ist sie sehr gross wirkt der Linearmotor als Generator und speist die Stromquelle (beachte Vorzeichen von  $I$ ).

Bei der Geschwindigkeit  $v_{\text{max}} = U_Q / (B \cdot b)$  ist die Stromstärke gerade null. Das ist die theoretische Endgeschwindigkeit, die der Stab erreichen kann. Ohne Reibungskraft und ohne sonstige äussere Kraft wird der Stab durch die Lorentzkraft solange beschleunigt, bis er diese Geschwindigkeit erreicht. Wirkt auf den Stab eine äussere Kraft entgegen der Bewegungsrichtung, muss im Kräftegleichgewicht diese Kraft gerade der Lorentzkraft entsprechen, welche auf den Stab wirkt:  $|\vec{F}| = I \cdot |\vec{B}| \cdot b$ . Falls man nach  $I$  auflöst und den entsprechenden Wert in (5.34) einsetzt, erhält man für die Geschwindigkeit:

$$v = \frac{U_Q}{B \cdot b} - \frac{R}{(B \cdot b)^2} \cdot |\vec{F}| \quad . \quad (5.35)$$

Rotations-Gleichstrommotoren funktionieren meist nach einem sehr ähnlichen Prinzip wie Linearmotoren. Stromdurchflossene Leiter im Rotor drehen sich im Magnetfeld des Stators. Damit das Drehmoment nach einer halben Drehung nicht mit dem Statorfeld seine Richtung ändert, muss sich die Stromrichtung in den Leitern des Rotors ändern. Dazu dienen die

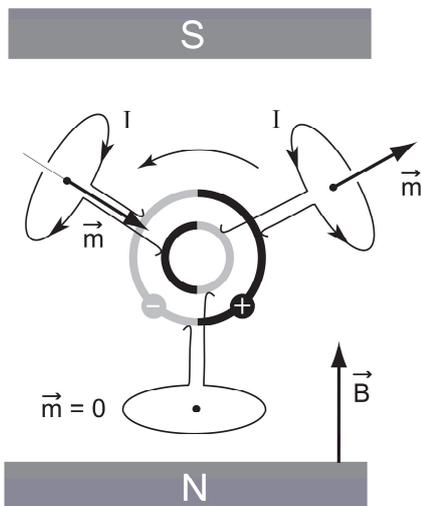
Kommutatoren (Stromwender), auf welche die externe Spannung mittels Schleifkontakten übertragen wird (Fig. 5.19). Das Statorfeld kann durch einen Permanentmagneten oder durch eine oder mehrere stromdurchflossene Spulen erzeugt werden.

#### Drehstrommotor:

Durch drei nebeneinander liegende Spulen fließt ein Drehstrom. Ein Kupferrad ist nahe der Spulenenenden drehbar befestigt. Die Veränderung der Magnetfelder der Spulen erzeugt Wirbelströme im Kupferrad. Diese haben ein resultierendes Drehmoment, das das Rad zur Rotation bringt. Ist nur eine Spule aktiv, dreht das Kupferrad nicht.

#### Meccano-Motor:

Der einfache Meccano-Motor besteht aus drei sternförmig angeordneten Spulen mit Eisenkernen, die im Feld eines Permanentmagneten rotieren. Die Stromrichtung in den drei Spulen wird periodisch durch einen Stromwender gewechselt, womit das resultierende Drehmoment, das durch die drei magnetischen Momente der Spulen im konstanten Magnetfeld  $B$  verursacht wird, immer in der gleichen Richtung wirkt.

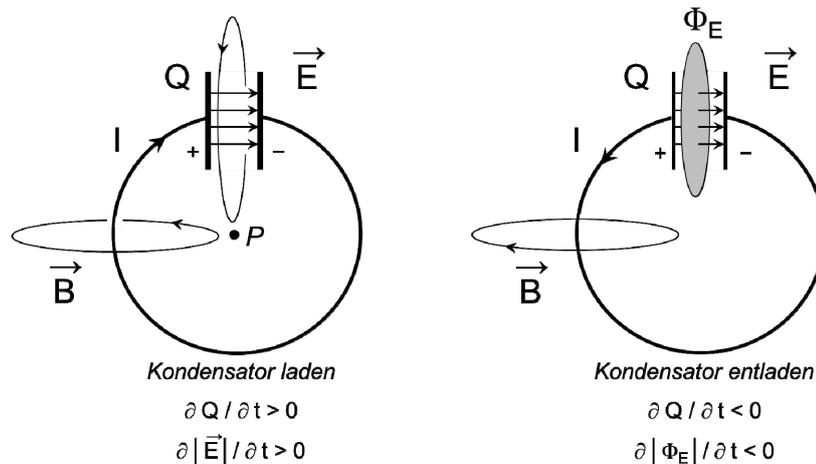


**Figur 5.19:** Schema des einfachen Meccano Spielzeug Elektromotors. Die drei Spulen rotieren im Magnetfeld  $B$  um die beiden im Raum festen, konzentrischen Pole der Spannungsquelle und befinden sich in einem permanenten äusserern Magnetfeld.

## 6. ELEKTROMAGNETISCHE WELLEN

### 6.1 Zeitlich variable elektrische Felder (Verschiebungsstrom)

Man betrachte eine kreisrunde Leiterschleife, welche von einem Plattenkondensator unterbrochen wird (Fig. 6.1). Der Kondensator werde durch Ladungstransport durch einen Draht aufgeladen (a) oder entladen (b). Überall wo ein Strom fließt, existiert nach dem Gesetz von Ampère ein den Draht umschlingendes Magnetfeld  $\vec{B}$ , also auch am Punkt P in Fig. 6.1. Betrachten wir einen geschlossenen Pfad im Raum zwischen den Kondensatorplatten, so fließt kein Strom durch die von diesem Pfad eingeschlossene Fläche, also  $\int \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$ . Da der Pfad in diesem Zwischenraum beliebig ist, muss  $\vec{B} = 0$  gelten, also auch am Punkt P. Damit entsteht aber ein Widerspruch.



**Figur 6.1:** Beim Laden und Entladen eines Kondensators fließt ein Strom durch den Leiter, der ein B-Feld um den Leiter verursacht. Das Magnetfeld B im Punkt P kann durch das Gesetz von Ampère, angewendet auf den einen oder anderen Pfad bestimmt werden. Beim Laden und Entladen des Kondensators ändert sich der elektrische Feldfluss im Raum zwischen den Kondensatorplatten.

Maxwell hat das Dilemma gelöst, indem er das Gesetz von Ampère ergänzte. Zwischen den Kondensatorplatten fließt zwar kein Strom, aber beim Laden und Entladen des Kondensators herrscht zwischen den Platten ein zeitlich veränderliches elektrisches Feld und damit ein elektrischer Feldfluss  $\Phi_E(t)$ . Die Anwendung des Satzes von Gauss ergibt:

$$\int_{+ \text{Platte}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \Phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot Q, \quad \text{und somit} \quad \frac{dQ}{dt} = I_M = \epsilon_0 \cdot \frac{d\Phi_E}{dt},$$

wobei die geschlossene Fläche die positiv geladene Kondensatorplatte enthält.  $I_M$  bezeichnet den *Maxwell'schen Verschiebungsstrom*, der zusätzlich zu den Strömen I durch Drähte berücksichtigt werden muss. Das ergänzte Gesetz von Ampère lautet dann:

$$\int \vec{B}(\vec{s}) \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot \sum I + \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{d\Phi_E}{dt}. \quad (6.1)$$

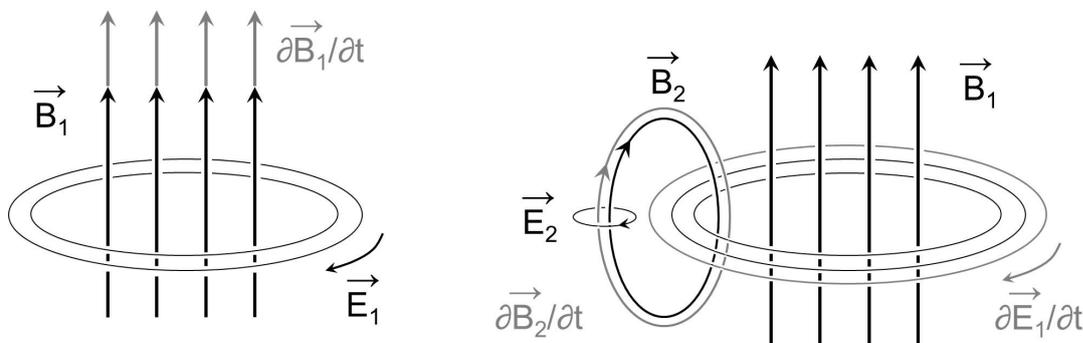
Die Ergänzung von Maxwell ist unterstrichen; sie beseitigt nicht nur die oben erwähnte Mehrdeutigkeit, sondern bildet auch die Grundlage für die theoretische Voraussage der Existenz **elektromagnetischer Wellen**.

## 6.2 Anschauliche Begründung für elektromagnetische Wellen

Nachdem nun das Gesetz von Ampère durch den Verschiebungsstrom ergänzt wurde, gilt symmetrisch:

- Ein sich zeitlich änderndes elektrisches Feld erzeugt ein magnetisches Wirbelfeld.
- Ein sich zeitlich änderndes Magnetfeld erzeugt ein elektrisches Wirbelfeld.

Jede Änderung eines Magnetfeldes induziert in einem Leiter, der das Feld umfasst, eine elektrische Spannung. Wird der Leiter zum Ring geschlossen, fließt im Ring ein Strom, der seinerseits wieder ein Magnetfeld zur Folge hat. Dieses Magnetfeld ist im Innern des Ringes dem primären Feld entgegengerichtet (*Lenz'sche Regel*). In Fig. 6.2 sind die Richtungen der Felder für den Fall eingetragen, dass das primäre Magnetfeld  $B_1$  zunimmt. Mit der zeitlichen Änderung des primären Magnetfeldes, ändert sich der Strom im Ring und damit auch die Stärke des sekundären Magnetfeldes  $B_2$ .



**Figur 6.2:** Links: Ein sich zeitlich änderndes Magnetfeld  $B_1$  erzeugt durch Induktion ein ringförmiges elektrisches Feld  $E_1$ . Rechts: Das sich zeitlich verändernde ringförmige elektrische Feld  $E_1$  erzeugt seinerseits ein ringförmiges Magnetfeld  $B_2$ , das das ursprüngliche Magnetfeld  $B_1$  abschwächt (*Lenz'sche Regel*), dafür aber weiter in den Raum ausgreift. Auch  $B_2$  verändert sich zeitlich, so dass ein weiteres ringförmiges elektrisches Feld  $E_2$  induziert wird.

Nach der 3. *Maxwell Gleichung* (1.3, oder 1.7) hat das zeitlich ändernde primäre Magnetfeld  $B_1$  ein ringförmiges elektrisches Feld  $E_1$  zur Folge (Fig. 6.2 links). Dieses zeitlich sich ändernde elektrische Feld  $E_1$  erzeugt einen zeitlich ändernden elektrischen Feldfluss durch eine gedachte Fläche. Nach der 4. *Maxwell Gleichung* (6.1) erzeugt dieser ein weiteres ihn umschlingendes Magnetfeld  $B_2$  (Fig. 6.2 rechts). Da sich  $B_2$  ebenfalls zeitlich ändert, verursacht es seinerseits wieder ein ringförmiges elektrisches Feld  $E_2$  usw.. Man sieht leicht ein, dass sich dieser Prozess räumlich fortsetzt. Sowohl das E- wie auch das dazu senkrechte B-Feld breitet sich im Raum aus. Ob die Ausbreitung in Form einer *Welle* erfolgt, muss aber noch genauer untersucht werden.

Die sehr qualitativen Überlegungen zeigen bereits, dass wir eine Ausbreitung bevorzugt senkrecht zur Richtung des primären Feldes erwarten. Weiter sehen wir auch, dass die magnetischen und elektrischen Feldvektoren stets senkrecht zueinander stehen und eng miteinander gekoppelt sind. Die Vermutungen, die aus diesen qualitativen Überlegungen folgen, müssen nun quantitativ bestätigt werden.

### 6.3 Zusammenfassung der Ergebnisse der allgemeinen Wellenlehre

Eine Welle ist eine sich zeitlich und räumlich ändernde Störung oder Anregung. Meist erfolgt ein Energietransport ohne gleichzeitigen Materialtransport. Eine Welle kann sich in einer Dimension (Seilwelle), in zwei (Oberflächenwellen des Wassers) oder drei (Schallwellen, elektromagnetische Wellen) ausbreiten. Die Störung an jedem Ort und zu jeder Zeit lässt sich durch eine Funktion  $F(\vec{r}, t)$  beschreiben. Man unterscheidet longitudinale Wellen (Schallwellen) und Transversalwellen (Saite, elektromagnetische Wellen). Transversalwellen können polarisiert werden, longitudinale nicht. Wellenflächen sind Orte gleicher Phasenlage. Sie stehen immer senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle.

Falls die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $u$  einer Welle unabhängig von der Frequenz der Störung ist (keine Dispersion), muss sie folgende Wellengleichung erfüllen:

$$\frac{\partial^2 F(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = u^2 \cdot \Delta F(\vec{r}, t) = u^2 \cdot \left( \frac{\partial^2 F(\vec{r}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(\vec{r}, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F(\vec{r}, t)}{\partial z^2} \right) ; \quad (6.2)$$

$\Delta$  (oft auch  $\nabla^2$ ) bezeichnet den Laplace Operator  $\Delta = \nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$ .

Falls sich die Welle nur in einer Dimension ausbreitet, lautet die entsprechende Gleichung:

$$\frac{\partial^2 F(x, t)}{\partial t^2} = u^2 \cdot \frac{\partial^2 F(x, t)}{\partial x^2} . \quad (6.3)$$

Die eindimensionale Wellengleichung (6.3) hat folgende allgemeine Lösung:

$$F(x, t) = f(x - u \cdot t) + g(x + u \cdot t) . \quad (6.4)$$

Dabei sind  $f$  und  $g$  beliebige differenzierbare Funktionen, welche eine Störung beschreiben.  $f(x - u \cdot t)$  ist eine Störung, die sich in Richtung der positiven  $x$ -Achse ausbreitet,  $g(x + u \cdot t)$  beschreibt eine Störung, die in Richtung der negativen  $x$ -Achse läuft. Eine eindimensionale harmonische Welle, und Linearkombinationen mehrerer Wellen (Fouriersynthese, Kapitel 5.1) mit unterschiedlichen Wellenlängen, sind spezielle Lösungen von (6.3):

$$F(x, t) = F_0 \cdot \cos(k \cdot x - \omega \cdot t + \varphi) , \quad (6.5)$$

$$\text{wobei} \quad k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \quad \rightarrow \quad u = \frac{\omega}{k} . \quad (6.6)$$

Die Amplitude  $F_0$  und der Phasenwinkel  $\varphi$  hängen von den Anfangsbedingungen ab.  $k$  ist die *Wellenzahl*,  $\lambda$  ist die *Wellenlänge*.

Die ebene harmonische Welle ist eine spezielle Lösung der dreidimensionalen Wellengleichung:

$$F(\vec{r}, t) = F_0 \cdot \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega \cdot t + \varphi) . \quad (6.7)$$

$\vec{k}$  ist der Wellenzahl-Vektor und zeigt in die Ausbreitungsrichtung. Wählt man dafür die x-Achse, ist die Lösung formal identisch mit jener für eindimensionale harmonische Wellen (6.5). Die Wellenflächen sind hier dann Ebenen, welche senkrecht zur x-Achse stehen.

Eine wichtige spezielle Lösung der dreidimensionalen Wellengleichung ist auch die Kugelwelle, deren Wellenflächen konzentrische Kugeloberflächen sind:

$$F(\mathbf{r}, t) = \frac{F_0}{r} \cdot \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega \cdot t + \varphi) \quad , \quad \text{wobei} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad . \quad (6.8)$$

Zum Schluss sei noch darauf hingewiesen, dass sich Wellen auch in komplexer Schreibweise darstellen lassen. Eine ebene Welle in beliebiger Ausbreitungsrichtung lautet:

$$F(\vec{x}, t) = \operatorname{Re} \left( F_0 \cdot e^{i \cdot (\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega \cdot t + \varphi)} \right) \quad . \quad (6.9)$$

## 6.4 Bereitstellung bisheriger Ergebnisse der Elektrodynamik

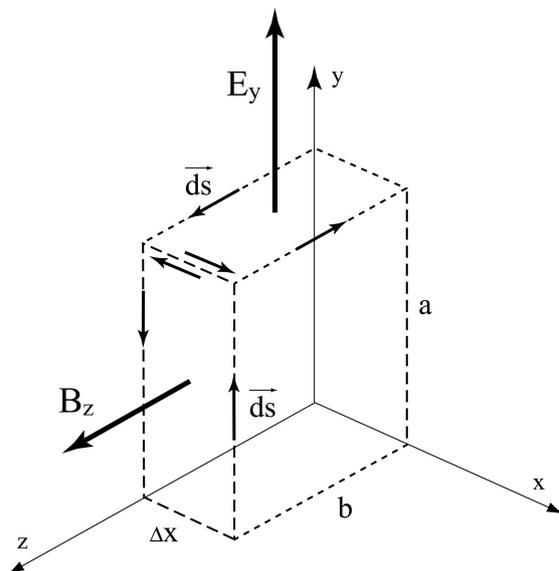
Integrale Form der Maxwell Gleichungen:	Differentielle Form der Maxwell Gleichungen:
<b>Satz von Gauss</b>	
$\int \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{\text{in } A} \quad (6.10)$ <p>Ladungen erzeugen einen elektrischen Feldfluss durch eine geschlossene Fläche A. Die experimentelle Grundlage des Satzes von Gauss ist das Gesetz von Coulomb.</p>	$\operatorname{div} \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho_e \quad (6.14)$ <p>Ruhende elektrische Ladungen erzeugen elektrische Felder. Elektrische Feldlinien gehen von positiven Ladungen aus (Divergenz) und münden in negativen Ladungen (Konvergenz).</p>
<b>Inexistenz magnetischer Quellen</b>	
$\int \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (6.11)$ <p>Magnetfeldlinien sind immer geschlossen.</p>	$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (6.15)$ <p>Die Divergenz des Magnetfeldes ist Null. Es gibt keine magnetischen Monopole.</p>
<b>Induktionsgesetz von Faraday</b>	
$U_{\text{ind}} = \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{d}{dt} \Phi_B(t) \quad (6.12)$ <p>Zeitliche Änderung des magnetischen Feldflusses induziert Spannung in einem geschlossenen Pfad.</p>	$\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (6.16)$ <p>Ein zeitlich veränderliches magnetisches Feld verursacht ein elektrisches „Wirbel-Feld“, das der Ursache entgegen wirkt.</p>
<b>Gesetz von Ampère und Maxwell</b>	
$\int \vec{H} \cdot d\vec{s} = I + \epsilon_0 \cdot \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (6.13)$ <p>Das Linienintegral des Magnetfeldes entlang eines geschlossenen Pfads ist gleich der Summe des Leitungsstromes plus der Änderung des elektrischen Flusses durch die von der Kurve umschlossene Fläche.</p>	$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (6.17)$ <p>Elektrischer Strom sowie ein zeitlich veränderliches elektrisches Feld verursachen ein magnetisches „Wirbel-Feld“.</p>

## 6.5 Herleitung der Gleichung für elektromagnetische Wellen

Die gesamte Elektrodynamik ist durch die **vier Maxwell Gleichungen** (integrale Form 6.10-6.13; differentielle Form 6.14-6.17) beschrieben. Zunächst leiten wir eine Gleichung ebener Wellen in der x-Richtung aus der integralen Form der Maxwell Gleichungen her. Derselbe Ansatz kann dann auch für die y- und z-Richtung verwendet werden. Eleganter und allgemeiner ist jedoch die Herleitung einer Gleichung für elektromagnetische Wellen ausgehend von der differentiellen Form der Maxwell Gleichungen (siehe 6.5.2).

### 6.5.1 Gleichung für ebene Wellen in x-Richtung

Das elektrische Feld soll sich in Funktion von x und der Zeit t ändern, für gegebenes x aber auf der ganzen zur x-Achse senkrechten Ebene den gleichen Wert haben. Wir wählen das Koordinatensystem so, dass die y-Achse in Richtung des elektrischen Feldes zeigt und nehmen an, dass  $E_y$  auf der Strecke a konstant ist.



**Figur 6.3:** Zur Herleitung der Wellengleichung: Pfade der Integration um die Fläche  $b \cdot \Delta x$  senkrecht zur y-Komponente des elektrischen Feldes bzw. um die Fläche  $a \cdot \Delta x$  senkrecht zur z-Komponente der magnetischen Induktion.

Das Gesetz von Faraday auf das Rechteck  $a \cdot \Delta x$  angewendet lautet:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \Phi_B(t) = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$-E_y(x, t) \cdot a + E_y(x + \Delta x, t) \cdot a = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \cdot a \cdot \Delta x$$

$$\frac{E_y(x + \Delta x, t) - E_y(x, t)}{\Delta x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

$$\Delta x \rightarrow 0: \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad . \quad (6.18)$$

Allfällige Komponenten  $B_x$  und  $B_y$  tragen nichts zu  $\Phi_B$  bei.

Das Gesetz von Ampère-Maxwell angewandt auf das Rechteck  $b \cdot \Delta x$  lautet:

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot I + \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{d\Phi_E}{dt} .$$

Im Vakuum ist  $I = 0$  , also

$$\begin{aligned} \int \vec{B} \cdot d\vec{s} &= \epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \frac{d\Phi_E}{dt} \\ B_z(x, t) \cdot b - B_z(x + \Delta x, t) \cdot b &= \epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial E_y}{\partial t} \cdot b \cdot \Delta x \\ -\frac{B_z(x + \Delta x, t) - B_z(x, t)}{\Delta x} &= \epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ -\frac{\partial B_z}{\partial x} &= \epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial E_y}{\partial t} . \end{aligned} \quad (6.19)$$

Allfällige Komponenten  $E_x$  und  $E_z$  tragen nichts zu  $\Phi_E$  bei, und wir haben angenommen, dass  $B_z$  auf der Strecke  $b$  konstant ist. (6.18) nach  $x$ , und (6.19) nach  $t$  abgeleitet ergibt:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B_z}{\partial t \cdot \partial x} \quad \text{und} \quad -\frac{\partial^2 B_z}{\partial x \cdot \partial t} = \epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} , \quad (6.20, 6.21)$$

womit durch Einsetzen von (6.21) in (6.20) folgt:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} . \quad (6.22)$$

Leitet man (6.18) nach  $t$  und (6.19) nach  $x$  ab, erhält man analog:

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} . \quad (6.23)$$

(6.22) und (6.23) sind Gleichungen für **ebene Wellen**, die sich nur in  $x$ -Richtung ausbreiten. Dabei breiten sich die  $y$ -Komponente des  $E$ -Feldes, und die  $z$ -Komponente des  $B$ -Feldes mit derselben Geschwindigkeit  $u^2 = 1/(\epsilon_0 \cdot \mu_0)$  aus. Dass das elektrische Feld mit seinen Änderungen ein magnetisches Feld in  $z$ -Richtung zur Folge hat (und umgekehrt), ist ein erstaunliches Ergebnis unserer Rechnung. Durch Einsetzen der Werte der elektrischen und magnetischen Feldkonstanten erhält man

$u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}} = 2.998 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1} = c$	<b>Lichtgeschwindigkeit im Vakuum</b>
--	---------------------------------------

***Licht ist also eine elektromagnetische Welle!***

Hauptsächlich für Studierende der Physik:

### 6.5.2 Allgemeine Wellengleichung aus der differentiellen Form der Maxwell Gleichungen

Für das Vakuum ohne elektrische Ladung ( $\rho_{el} = 0$ ) und ohne elektrische Ströme ( $\vec{j} = 0$ ) lauten die drei relevanten Maxwell Gleichungen in differentieller Form:

$$\operatorname{div} \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (6.24)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (6.25)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = \varepsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (6.26)$$

Aus der Vektoranalysis werden folgende Identitäten für ein beliebiges Vektorfeld  $\vec{F}$  verwendet:

$$\frac{\partial \operatorname{rot} \vec{F}}{\partial t} = \operatorname{rot} \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} \quad \text{in } \nabla\text{-Schreibweise: } \frac{\partial(\vec{\nabla} \times \vec{F})}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{F}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{F} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{F} - \Delta \vec{F} \quad \text{in } \nabla\text{-Schreibweise: } \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \Delta \vec{F}$$

Die zeitliche Ableitung von (6.25) und die Rotation von (6.26) ergeben, unter Verwendung von (6.24):

$$\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \Delta \vec{B} = \varepsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\Delta \vec{B} = \varepsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad (6.27)$$

(6.27) ist die Wellengleichung einer allgemeinen harmonischen Welle. Analog erhalten wir aus rot(6.25) und  $\partial(6.26)/\partial t$ :

$$\Delta \vec{E} = \varepsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (6.28)$$

Beschleunigte E-Felder, also beschleunigte Ladungen, erzeugen elektromagnetische Wellen. Diese breiten sich mit konstanter Phasengeschwindigkeit  $u^2 = 1/(\varepsilon_0 \cdot \mu_0)$  im Raum aus. Die elektromagnetischen Wellen im Vakuum sind nicht dispersiv, das heisst  $u$  hängt nicht von  $\omega$  oder  $\lambda$  ab. Wellenformen bleiben erhalten.

## 6.6 Eigenschaften ebener, elektromagnetischer Wellen

### UKW Sender ( $\nu = 105.6 \text{ MHz}$ ):

Mit einem Röhrensender wird eine elektromagnetische Welle erzeugt. Ein RLC-Kreis mit variablem C (Drehkondensator) und R (Lämpchen) zeigt die Abstrahlung von Energie an. Eine Dipolantenne mit Lampe detektiert das Signal noch im Abstand von ca. 1 Meter. Weiter weg muss die Dipolantenne mit einem Verstärker ausgerüstet werden. Die Orientierung der Antenne bestimmt die Amplitude der empfangenen Welle, da das Signal linear polarisiert ist. Die E- und B-Vektoren schwingen in festen Ebenen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung.

Eine einfache harmonische, ebene, elektromagnetische Welle, die sich in x-Richtung ausbreitet, wird dargestellt als:

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \cdot \cos(k \cdot x - \omega \cdot t + \varphi) = \vec{E}_0 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot (x / \lambda - t / T) + \varphi) \quad ,$$

oder in komplexer Schreibweise im Raum:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0 \cdot e^{i \cdot (\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega \cdot t + \varphi)} \quad , \quad (6.29)$$

und analog für  $\vec{B}(\vec{x}, t)$ . Da der Feldvektor im ganzen Raum in eine feste Richtung zeigt, handelt es sich um eine linear polarisierte Welle. Nach den Gleichungen (6.22) und (6.23), bzw. (6.27) und (6.28) gilt für die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $u$  im Vakuum  $c$ , wie schon in 6.5.1 gezeigt:

$$u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}} = 2.998 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = c \quad (6.30)$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Welle im Vakuum stimmt also mit der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum überein. Dies ist eine der fundamentalsten Erkenntnisse der Maxwell Gleichungen: **Licht ist eine elektromagnetische Welle.**

Folgende Eigenschaften gelten für elektromagnetische Wellen:

- **Elektromagnetische Wellen sind transversal.**

Transversale Wellen haben die Eigenschaft, dass die oszillierende Grösse ein Vektor ist, der senkrecht zur Ausbreitungsrichtung steht (Seilwelle, elektromagnetische Welle).

Nach (6.7) schreiben wir die allgemeine Lösung von (6.27) als:

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = (B_1, B_2, B_3) \cdot e^{i \cdot (\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega \cdot t)} = (B_1, B_2, B_3) \cdot e^{i \cdot (k_1 \cdot x + k_2 \cdot y + k_3 \cdot z - \omega \cdot t)} \quad .$$

Nun gilt die 4. Maxwell Gleichung:

$$\begin{aligned}
0 = \operatorname{div} \vec{B} &= \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = i \cdot k_1 \cdot B_1 \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} + i \cdot k_2 \cdot B_2 \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} + \dots \\
&= i \cdot (\vec{k} \cdot \vec{B}) \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \rightarrow \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow \vec{k} \perp \vec{B}
\end{aligned}$$

Im ladungsfreien Raum gilt nach der 1. Maxwell Gleichung  $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ , und analog nach obiger Herleitung ebenfalls

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \rightarrow \vec{k} \perp \vec{E} .$$

Würde nämlich eine Komponente des elektrischen oder magnetischen Feldvektors in die Ausbreitungsrichtung zeigen, gäbe es im Raum periodisch Senken und Quellen, was für den elektrischen Feldvektor im ladungsfreien Raum, und für den Magnetfeldvektor immer, unmöglich ist. Mit andern Worten folgt aus  $\operatorname{div} \vec{E} = 0$  und  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ , dass  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  immer senkrecht zur Ausbreitungsrichtung stehen müssen.

- **Die Vektoren  $\vec{B}$  und  $\vec{E}$  stehen senkrecht zueinander und sind in Phase.**

Zum Beweis wählen wir ein Koordinatensystem mit der x-Richtung entlang der Ausbreitung der Welle, und die z-Richtung entlang dem B-Feld. Wie ist das E-Feld gerichtet und welche Phase hat es? Wir machen folgenden Ansatz:

$$\vec{B} = (0, 0, B_3) \cdot e^{i(kx - \omega t)}, \text{ und } \vec{E} = (0, E_2, E_3) \cdot e^{i(kx - \omega t + \varphi)} .$$

Nach der dritten Maxwell Gleichung (6.25) muss gelten:

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = (0, 0, i \cdot \omega \cdot B_3) \cdot e^{i(kx - \omega t)} = \operatorname{rot} \vec{E} = (0, -i \cdot k \cdot E_3, i \cdot k \cdot E_2) \cdot e^{i(kx - \omega t + \varphi)} ,$$

also  $E_3 = 0$  und  $E_2 = \frac{\omega}{k} \cdot B_3 \cdot e^{-i\varphi}$ . Da die Amplituden  $E_2$  und  $B_3$  reell sind, kann die

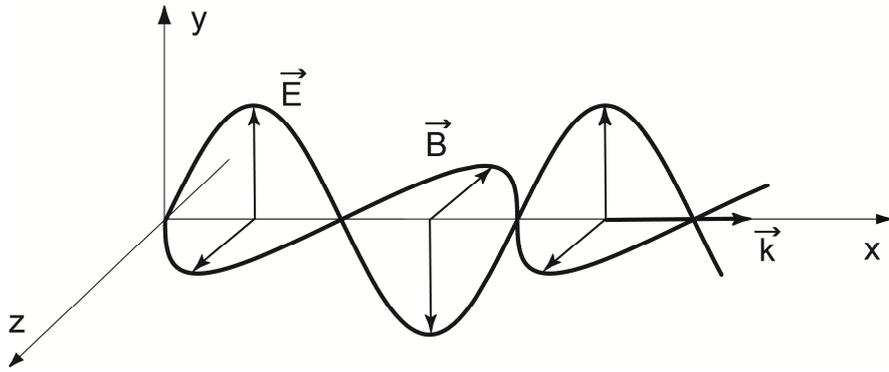
Phase  $\varphi$  nur die Werte 0 oder  $\pi$  annehmen. In beiden Fällen sind  $\vec{B}$  und  $\vec{E}$  immer in Phase und  $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ , also  $\vec{E} \perp \vec{B}$ , mit  $|\vec{E}| = c \cdot |\vec{B}|$ .

Allgemein gilt:

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega \cdot \vec{B} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{|\vec{E}| \cdot |\vec{B}|} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} . \quad (6.31)$$

- **Die elektromagnetische Welle ist in Richtung des E-Vektors linear polarisiert.**

Eine elektromagnetische Welle mit den obigen Eigenschaften ist in Fig. 6.4 zu einem bestimmten Zeitpunkt dargestellt.



**Figur 6.4:** „Momentaufnahme“ einer ebenen elektromagnetischen Welle mit Ausbreitungsrichtung entlang der positiven x-Achse. Die Welle ist in y-Richtung linear polarisiert.

- **Elektromagnetische Wellen überlagern sich durch Addition der  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  Felder.**

Durch Superposition von einfachen harmonischen Wellen mit unterschiedlichen Amplituden (bezüglich Betrag und Richtung des Vektors!), unterschiedlichen Wellenzahlen und unterschiedlichen Phasenwinkeln können Wellen mit beliebigen Formen beschrieben werden. Dies ist die Grundlage der **Fourieranalyse**.

- **Überlagerung von Wellen unterschiedlicher Phase und Polarisation.**

Zwei Wellen mit gleicher Frequenz sollen sich in positiver x-Richtung ausbreiten. Ihre E-Vektoren schwingen in der y-, bzw. z-Richtung; beide Wellen sind linear polarisiert. Die z-polarisierte Welle soll um  $90^\circ$  phasenverschoben sein, also  $\varphi = \pi/2$ . Die Überlagerung ergibt:

$$\begin{aligned}\vec{E}(x, t) &= \hat{y} \cdot E_{y,0} \cdot \sin(k \cdot x - \omega \cdot t) + \hat{z} \cdot E_{z,0} \cdot \sin(k \cdot x - \omega \cdot t + \pi/2) \\ &= \hat{y} \cdot E_{y,0} \cdot \sin(k \cdot x - \omega \cdot t) + \hat{z} \cdot E_{z,0} \cdot \cos(k \cdot x - \omega \cdot t) \quad ,\end{aligned}$$

wobei  $\hat{y}$  und  $\hat{z}$  Einheitsvektoren der entsprechenden Richtungen sind. An einem festen Ort  $x$  durchläuft die Spitze des E-Vektors in der  $yz$ -Ebene eine Ellipse mit den Halbachsen  $E_{y,0}$  und  $E_{z,0}$ . Der Drehsinn ist durch  $\varphi$  bestimmt: in diesem Beispiel rotiert der E-Vektor im Gegenuhrzeigersinn. Die Welle ist **zirkular polarisiert**.

Umgekehrt kann jede zirkular polarisierte Welle als Überlagerung von zwei linear polarisierten Wellen dargestellt werden. Obige Betrachtungen gelten auch für den zugehörigen B-Vektor der elektromagnetischen Welle. Die beiden Vektoren spiralen sich sozusagen entlang der x-Achse vorwärts.

#### **Mikrowellen ( $\nu = 9.3$ GHz):**

Mit einem Empfänger wird das Signal eines Mikrowellensenders in einigen Metern Entfernung aufgenommen. Wird der Empfänger um  $90^\circ$  gedreht, verschwindet das Signal, da die ausgesandte Welle linear polarisiert ist. Wird ein Gitter aus leitenden Drähten zwischen Sender und Empfänger gestellt, so verschwindet das Signal, falls die Drahrichtung mit der Polarisationsrichtung übereinstimmt.

## 6.7 Energiedichte, Intensität und Impuls elektromagnetischer Wellen

Es wurde früher gezeigt, dass die Energiedichte im Plattenkondensator, bzw. in der Spule wie folgt gegeben sind:

$$\text{nach (2.37)} \quad w_{\text{el}} = \frac{\epsilon_0 \cdot \vec{E}^2}{2}, \quad \text{und nach (4.46)} \quad w_{\text{magn}} = \frac{\vec{B}^2}{2 \cdot \mu_0}.$$

Falls diese Beziehungen ganz allgemein gelten, beträgt die Energiedichte im elektromagnetischen Feld:

$$w = w_{\text{el}} + w_{\text{magn}} = \frac{1}{2} \cdot \left( \epsilon_0 \cdot \vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{\mu_0} \right) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot |\vec{E}| \cdot c \cdot |\vec{B}| + \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} \epsilon_0 \cdot |\vec{B}| \cdot \frac{1}{c} \cdot |\vec{E}| = \frac{1}{c \cdot \mu_0} \vec{E} \cdot \vec{B}$$

$$w = \epsilon_0 \cdot \vec{E}^2 = \frac{\vec{B}^2}{\mu_0} = \frac{1}{c \cdot \mu_0} |\vec{E}| \cdot |\vec{B}| \quad (6.32)$$

Dass dieser Ausdruck wirklich allgemein gilt, kann mit den Maxwell Gleichungen (6.16) und (6.17) hergeleitet werden. Auf diese Herleitung soll aber hier verzichtet werden.

Eine Welle transportiert Energie. Als Intensität  $J$  bezeichnet man die von einer Welle pro Zeit- und Flächeneinheit transportierte Energie. Für die elektromagnetische Welle, die sich mit Lichtgeschwindigkeit  $c$  ausbreitet, gilt:

$$J = w \cdot c = \frac{1}{\mu_0} |\vec{E}| \cdot |\vec{B}|. \quad (6.33)$$

Im Zusammenhang mit dem Energietransport soll noch der **Poynting Vektor**  $\vec{S}$  eingeführt werden:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \vec{E} \times \vec{B} \quad (6.34)$$

Der Poynting Vektor hat die Masseinheit  $\text{Wm}^{-2}$  und zeigt in die Ausbreitungsrichtung der Welle, also in Richtung des  $k$ -Vektors, wie aus (6.31) folgt. Der Betrag von  $\vec{S}$  ist identisch mit der Intensität  $J$  der Welle nach (6.33).

Hauptsächlich für Studierende der Physik:

Wenn komplexe Felder,  $\vec{E}(\vec{x}, t) = \text{Re}(\vec{E} \cdot e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}) = \frac{1}{2} \cdot (\vec{E} \cdot e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} + \vec{E}^* \cdot e^{-i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)})$ ,

verwendet werden, wobei  $*$  die konjugiert komplexe Grösse bezeichnet, so müssen die obigen Beziehungen für den zeitlichen Mittelwert modifiziert werden:

$$w = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}^* \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\vec{B}^* \cdot \vec{B}}{\mu_0}, \quad \vec{S} = \frac{1}{2} \cdot \vec{E}^* \times \vec{H} = \frac{1}{2\mu_0} \cdot \vec{E}^* \times \vec{B},$$

wobei  $\vec{E}^*$  und  $\vec{B}$  die komplexen Amplituden sind. Dabei tritt wie bei der Leistung im Wechselstromkreis (5.18) ein Faktor  $\frac{1}{2}$  auf.

Mit dem Energietransport ist auch ein Impuls verbunden. Da Photonen keine Ruhemasse haben, gilt nach der Relativitätstheorie  $w^2 = p^2 \cdot c^2$ , und somit für den Impulsvektor

$$\vec{p} = \frac{\vec{S}}{c^2} . \quad (6.35)$$

Wird eine Welle auf einer Oberfläche absorbiert oder reflektiert, so wird auf die Oberfläche ein Strahlungsdruck ausgeübt. Die Kraft senkrecht auf eine Ebene  $\vec{A}$  beträgt:

$$F_{\perp}^{\text{abs}} = \frac{\vec{S} \cdot \vec{A}}{c} , \quad (6.36)$$

$$F_{\perp}^{\text{refl}} = \frac{2 \cdot \vec{S} \cdot \vec{A}}{c} . \quad (6.37)$$

In der Optik wird gezeigt, dass diese Kräfte durch den Strahlungsdruck im allgemeinen sehr klein sind. Trotzdem können sie relevant sein und die Flugbahn von Satelliten beeinflussen.

*Hauptsächlich für Studierende der Physik*

## 6.8 Reflexion der elektromagnetischen Welle an einer Leiterebene

In technischen Anwendungen werden elektromagnetische Wellen innerhalb leitender Hohlkörper transportiert (Mikrowellenofen, Radar, wifi-Sender, siehe Kapitel 6.11). Um das Verhalten an leitenden Oberflächen grundsätzlich zu verstehen, betrachten wir eine Welle, die senkrecht auf eine ideal leitende Platte trifft.

Wir nehmen an, dass die einlaufende Welle in Richtung der negativen x-Achse läuft (Fig. 6.5). Zu einem bestimmten Zeitpunkt zeigt der E-Vektor in die  $-y$ -Richtung und, gemäß (6.31), der B-Vektor in die  $+z$ -Richtung. Die Metallplatte befindet sich bei  $x = 0$  in der y-z Ebene. Die elektromagnetische Welle kann in einen idealen Leiter nicht eindringen, da das elektrische Feld dort kurzgeschlossen wird. Die Welle wird reflektiert, und das elektrische Feld muss an der Oberfläche einen Knoten haben.

Die einlaufende und auslaufende Wellen seien wie folgt beschrieben:

$$\begin{aligned} \text{einlaufende elektromagnetische Welle:} & \quad E_{\text{ein}} = -E_y \cdot e^{i(-k \cdot x - \omega \cdot t)} \\ \text{auslaufende elektromagnetische Welle:} & \quad E_{\text{aus}} = -E_y \cdot e^{i(+k \cdot x - \omega \cdot t + \varphi)} \end{aligned}$$

Wir nehmen an, dass die auslaufende Welle eine noch zu bestimmende Phasenverschiebung  $\varphi$  aufweist. Der resultierende elektrische Feldvektor ist dann:

$$\text{resultierende Welle:} \quad E = E_{\text{ein}} + E_{\text{aus}} = -E_y \cdot e^{-i\omega \cdot t} \cdot (e^{-i \cdot k \cdot x} + e^{i \cdot k \cdot x} \cdot e^{i\varphi})$$

Die leitende Platte ist bei  $x = 0$ . Dort muss das resultierende E-Feld einen Knoten haben, also  $E = 0$  (Fig. 6.5). Dies ist nur erfüllt, falls  $\varphi = \pi$ . Das elektrische Feld weist einen *Phasensprung* an der Platte auf.

Damit erhalten wir für das elektrische Feld:

$$E = E_y \cdot e^{-i\omega t} \cdot 2 \cdot i \cdot \sin(k \cdot x) \quad . \quad (6.38)$$

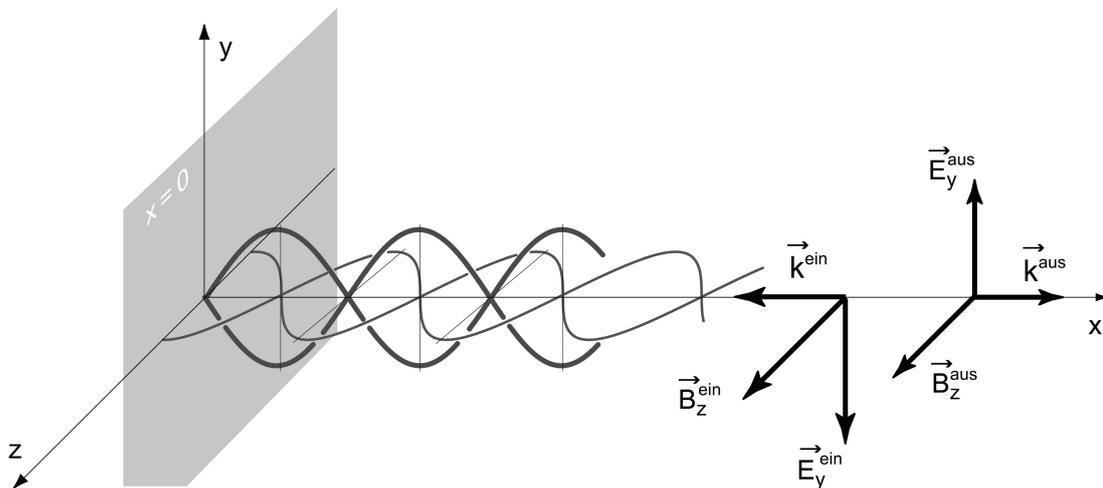
Der B-Vektor der einlaufenden Welle zeigt in die  $+z$ -Richtung. Für die auslaufende Welle bestimmt man die Lage des B-Vektors wiederum mit Hilfe von (6.31): der B-Vektor zeigt ebenfalls in die  $+z$ -Richtung (Fig. 6.5). Es gilt

$$B = B_{\text{ein}} + B_{\text{aus}} = B_z \cdot e^{-i\omega t} \cdot 2 \cdot \cos(k \cdot x) \quad . \quad (6.39)$$

Das B-Feld ändert die Phase bei  $x = 0$  nicht und hat dort ein Maximum. (6.38) und (6.39) beschreiben eine *stehende Welle*.

**Elektrisches Feld und magnetisches Feld sind bei der stehenden Welle nicht mehr in Phase.** Die Maxima von E fallen mit den Knoten von B zusammen und umgekehrt. Die stehende Welle transportiert keine Energie, das heisst  $\vec{S} = \vec{S}_{\text{ein}} + \vec{S}_{\text{aus}} = 0$ .

Beachte die Randbedingung für das Magnetfeld auf der leitenden Platte: das B-Feld ist parallel zur Leiterplatte, d.h.  $\vec{n} \cdot \vec{B} = 0$ , die senkrechte Komponente des B-Feldes verschwindet.



**Figur 6.5:** Überlagerung einer einlaufenden und einer auslaufenden elektromagnetischen Welle zu einer stehenden Welle bei der Reflexion an einer leitenden Platte bei  $x = 0$ . Der E-Vektor (dickere Sinuskurve) weist einen Knoten an der leitenden Platte auf, was einen Phasensprung des E-Vektors von  $180^\circ$  erzeugt.

#### Mikrowellen ( $\nu = 9.3 \text{ GHz}$ ):

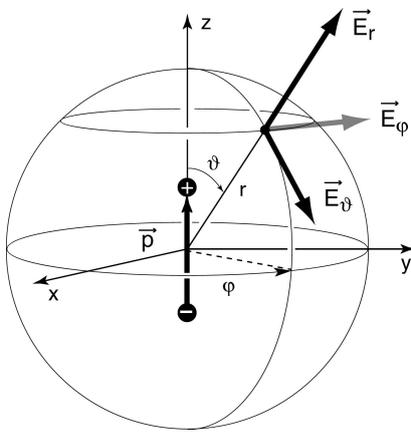
Mit einem Empfänger wird das Signal eines Mikrowellensenders in einigen Metern Entfernung aufgenommen. Wird ein Reflektor aufgestellt, bildet sich eine stehende Welle. Knoten und Bäuche der elektromagnetischen Welle werden gemessen. Aus deren Abstand wird die Wellenlänge bestimmt.

## 6.9 Quellen elektromagnetischer Wellen

### 6.9.1 Hertz'scher Dipol

In Schwingkreisen ist das elektrische Feld auf den Kondensator, das magnetische Feld auf die Spule begrenzt. Um die Eigenfrequenz weit über den MHz Bereich zu steigern, muss man C und L so sehr verkleinern, dass man gar keine Spule und gar keine Kondensatorplatten mehr braucht, sondern dass ein Leitungsdraht (Antenne) schon Kapazität und Induktivität genug hat. Elektrisches und magnetisches Feld umgeben dann den Draht und sind nicht mehr räumlich getrennt.

Eine Antenne ist ein gerades Leiterstück, in dessen Mitte eine Hochfrequenz-Wechselspannungsquelle angeschlossen ist. Dies führt dazu, dass an den Leiterenden periodisch positive und negative Ladung liegt. Ladungen werden also auf dem offenen Leiterstück periodisch hin und her transportiert. Dies ist ein schwingender elektrischer Dipol.



**Figur 6.6:** Kugelkoordinaten, Hertz'scher Dipol und Richtungen (radial  $r$ , azimutal  $\varphi$ , und polar  $\vartheta$ ) der Komponenten der E-Vektoren.

In der Elektrodynamik wird gezeigt, dass ein zeitlich veränderliches elektrisches Dipolmoment  $\vec{p}(t)$  entlang der  $z$ -Achse folgende Komponenten des elektrischen und des magnetischen Feldes in Kugelkoordinaten (Fig. 6.6) erzeugt:

$$\begin{aligned}
 E_r &= \frac{2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \cos \vartheta \cdot \left( \frac{\vec{p}}{r^3} + \frac{\dot{\vec{p}}}{r^2 \cdot c} \right) & B_r &= 0 \quad , \\
 E_\vartheta &= \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \sin \vartheta \cdot \left( \frac{\vec{p}}{r^3} + \frac{\dot{\vec{p}}}{r^2 \cdot c} + \frac{\ddot{\vec{p}}}{r \cdot c^2} \right) & B_\vartheta &= 0 \quad , \\
 E_\varphi &= 0 & B_\varphi &= \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot c} \cdot \sin \vartheta \cdot \left( \frac{\dot{\vec{p}}}{r^2 \cdot c} + \frac{\ddot{\vec{p}}}{r \cdot c^2} \right) \quad ,
 \end{aligned} \tag{6.40}$$

wobei die Dipolmomente und ihre zeitlichen Ableitungen in (6.40) zum früheren Zeitpunkt  $t - r/c$  auszuwerten sind. Der Dipolmomentvektor ist gegeben durch

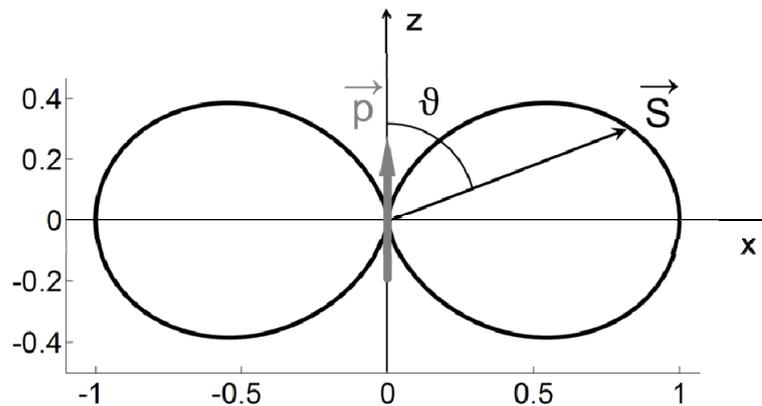
$$\vec{p}(t) = \vec{a} \cdot Q_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) = \vec{p}_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) .$$

In (6.40) treten 3 Beiträge auf: die ersten zwei Terme dominieren das *Nahfeld* des Hertz'schen Dipols. Sie nehmen mit der Distanz  $r$  rasch ab, und übrig bleibt der Term der *Fernfeldes*, der mit  $1/r$  abnimmt. Entlang der Dipolachse ( $\vartheta = 0$ ) gibt es nur ein elektrisches Feld im Nahfeld.

Die Abstrahlung von der Antenne in die Richtung  $\vartheta$  beträgt im zeitlichen Mittel im Fernfeld:

$$|\vec{S}| = \frac{\vec{p}_{\text{eff}}^2 \cdot \omega^4}{(4 \cdot \pi)^2 \cdot \epsilon_0 \cdot c^3} \cdot \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2}, \quad \text{wobei} \quad \vec{p}_{\text{eff}} = \frac{\vec{p}_0}{\sqrt{2}}. \quad (6.41)$$

Es wird keine Leistung in der Bewegungsrichtung der Ladung ( $\vartheta = 0$ ) abgestrahlt. Die maximale Abstrahlung erfolgt in der Ebene senkrecht zum elektrischen Dipolmoment  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ .



**Figur 6.7:** Abgestrahlte mittlere Leistung im Fernfeld einer Dipolantenne in Abhängigkeit vom Polarwinkel  $\vartheta$ , dargestellt in Polarkoordinaten. Die Pfeillänge von  $S$  ist proportional zum Betrag von  $S$  (6.41).

Die gesamte im zeitlichen Mittel in den Raum abgestrahlte Leistung beträgt:

$$P = \frac{1}{6 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot c^3} \cdot \vec{p}_{\text{eff}}^2 \cdot \omega^4 = \frac{8 \cdot \pi^3 \cdot c}{3 \cdot \epsilon_0} \cdot \vec{p}_{\text{eff}}^2 \cdot \frac{1}{\lambda^4}. \quad (6.42)$$

Die von einer Antenne aufgenommene Leistung ist aber grösser, da wegen dem spezifischen Widerstand in der Antenne auch Energie in Wärme umgewandelt wird.

Gemäss (6.42) nimmt  $P$  mit zunehmender Wellenlänge  $\lambda$  schnell ab. Trifft weisses Licht auf Gasmoleküle oder Teilchen, deren Grösse sehr viel kleiner als  $\lambda$  ist, so beginnt das Molekül als Hertz'scher Dipol zu schwingen, und strahlt in eine zufällige Richtung in den Raum ab (**Rayleigh-Streuung**). Der Hauptanteil der Leistung, die der Hertz'sche Dipol aufnimmt, wird bei kurzen Wellenlängen wieder in den Raum abgestrahlt, d.h. für blaues Licht ist die Streuung am stärksten. Das ist die Ursache für den blauen Himmel.

## 6.9.2 Oszillierendes magnetisches Moment

Anstatt dem periodischen E-Feld wie beim Hertz'schen Dipol kann auch ein periodisches Magnetfeld als Quelle einer elektromagnetischen Welle dienen. Wird an eine Kreisschleife eine Hochfrequenz-Spannungsquelle angeschlossen, so erzeugt diese im Leiterkreis nach (4.27) ein magnetisches Moment. Dieses ist die Quelle einer elektromagnetischen Welle. Dabei wird für das Magnetfeld ein zu (6.38) analoger Ausdruck erhalten, indem folgende Substitutionen gemacht werden:  $\vec{E} \rightarrow -(1/\mu_0) \cdot \vec{B}$ ,  $\vec{B} \rightarrow \epsilon_0 \cdot \vec{E}$ , und  $\vec{p} \rightarrow \vec{m}$ .

## 6.10 Elektromagnetische Wellen in Materie

### 6.10.1 Elektromagnetische Wellen in Dielektrika

Bis anhin erfolgten alle Überlegungen für ein strom- und ladungsfreies Vakuum. In dielektrischen Materialien (Isolatoren) gibt es keine Ströme, aber die elektrische Polarisation und Magnetisierung muss berücksichtigt werden. Man könnte die Wellengleichung aus den modifizierten Maxwell Gleichungen für diesen Fall erneut herleiten, was aber hier nicht getan werden soll. Es ist einleuchtend, dass sich vor allem die Ausbreitungsgeschwindigkeit ändert.

In einem Material mit der Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  und Permeabilität  $\mu$  gilt:

$$u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot \mu \cdot \mu_0}} = c_{\text{mat}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \cdot \mu}} . \quad (6.43)$$

Für die meisten Dielektrika ist die magnetische Permeabilität  $\mu$  nahe bei eins (Ausnahme: Ferrite). In diesem Falle ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Welle im Material:

$$c_{\text{mat}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} = \frac{c}{n} \rightarrow n = \sqrt{\epsilon} , \quad (6.44)$$

$n$  ist der Brechungsindex eines Materials. Es ist zu beachten, dass  $\epsilon$  und  $n$  stark frequenzabhängig sind.

Neben der Ausbreitungsgeschwindigkeit ändern sich auch die Energiedichte und der Poynting Vektor:

$$w = \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}^2 \quad \text{und} \quad \vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu \cdot \mu_0} \cdot \vec{E} \times \vec{B} .$$

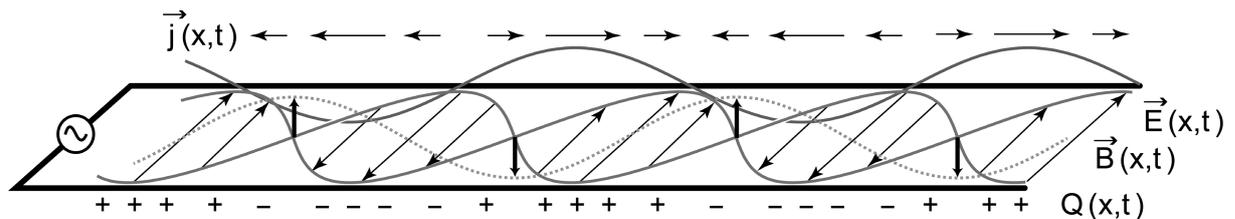
### 6.10.2 Elektromagnetische Wellen auf einem Doppel-Leiter (Lecher-Leitung)

Elektromagnetische Wellen breiten sich auch entlang einer Doppelleitung aus (zwei parallele

#### **Stehende elektromagnetische Welle ( $\nu = 146$ MHz) auf Doppel-Leiter (Lecher-Leitung):**

Zwei lange parallele Drähte werden an eine hochfrequente Wechselspannungsquelle angeschlossen. Spannungspulse breiten sich entlang der Drähte aus; wenn die Drähte am Ende offen sind, bildet sich eine stehende elektromagnetische Welle. Dort befindet ein Maximum des E-Feldes, und ein Knoten der Stromstärke, und somit der Magnetfeldlinien, die den Draht umhüllen. Orte maximaler E-Feldstärke können mit einer Glühlampe, die die beiden Leitungen verbindet, angezeigt werden, in Spannungsbäuchen ( $E = 0$ ) erlischt die Lampe. Auch eine aufgelegte Fluoreszenzröhre zeigt ein periodisches Muster von erleuchteten und dunklen Stellen, letztere bei  $E = 0$ . Damit kann die Wellenlänge gemessen werden ( $\lambda = 1.58$  m). Verläuft die Doppelleitung im Wasser (Dielektrikum), wird die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$ , und somit bei gleicher Frequenz, die Wellenlänge stark reduziert.

Drähte). Das ist die Grundlage der **Telegraphie**, die sich Mitte des 19. Jahrhunderts als sehr effektives Kommunikationsmittel verbreitete. Wenn die Doppelleitung am Ende offen ist, bilden sich bei geeigneten Randbedingungen stehende Wellen aus (Fig. 6.8). Zwei Bäuche haben immer den Abstand einer halben Wellenlänge  $\lambda/2$ . Die Wellenlänge ist durch die Frequenz der Spannungsquelle bestimmt:  $\lambda = c/v$ , wobei  $c$  die Lichtgeschwindigkeit ist. Da es sich um stehende Wellen handelt, sind die Bäuche des elektrischen Feldes (Potentialdifferenz zwischen den Drähten) und des magnetischen Feldes (Strom in den Drähten) um  $\lambda/4$  phasenverschoben. Bei offenen Enden bildet sich dort ein Knoten des Stroms aus, bzw. ein Maximum des elektrischen Feldes (Spannungsbauch).



**Figur 6.8:** Doppelleitung, die an eine Hochfrequenz-Spannungsquelle angeschlossen ist, und Momentanbild der Verteilung des E-Feldes (feine Pfeile schräg von Draht zu Draht), des B-Feldes (fette Pfeile vertikal), der Ladungsbelegung  $Q$  (auf unterem Draht eingezeichnet), und der Stromdichte  $j$  (horizontale Pfeile am oberen Draht eingezeichnet). Sowohl Ladungsbelegung wie auch Stromdichte sind auf dem gegenüberliegenden Draht umgekehrt. Für jede Grösse bildet sich eine stehende Welle aus. Die Amplitude zu einem Zeitpunkt ist gezeichnet für  $j$ ,  $E$  und  $B$ .  $E$  und  $B$ -Feldvektoren stehen senkrecht zueinander. Wie bei der Reflexion einer elektromagnetischen Welle an einer Leiterebene (Fig. 6.5) ist für die stehende Welle das  $B$  und  $E$ -Feld  $90^\circ$ , d.h. um  $\lambda/4$  phasenverschoben.

Hauptsächlich für Studierende der Physik:

Betrachtet man eine kleine geschlossene Fläche  $b \cdot \Delta x$  zwischen der Doppelleitung, wobei  $b$  der Abstand der Doppelleiter ist, und wendet das Induktionsgesetz, sowie die Definitionen der Spannung und der Kapazität an, so erhält man die **Telegraphengleichung**

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + \frac{R^*}{L^*} \cdot \frac{\partial I}{\partial t} = \frac{1}{L^* C^*} \cdot \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}, \quad (6.47)$$

wobei  $R^*$ ,  $L^*$ , und  $C^*$  Widerstand, Induktivität und Kapazität pro Längeneinheit der Leitung bezeichnen. Es gilt dieselbe Gleichung für  $U$ . (6.47) beschreibt die Ausbreitung eines Strom-, bzw. Spannungspulses (Morsesignal) entlang der Doppelleitung (Basis der **Telegraphie**).

Die Telegraphengleichung enthält einen Dämpfungsterm  $(\partial / \partial t)$ , der durch den nicht vernachlässigbaren Widerstand der Leitung verursacht wird. Für  $\omega \gg R^*/L^*$  geht die Telegraphengleichung in die Wellengleichung über. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Welle beträgt  $1/\sqrt{L^* C^*}$ , wobei das Material, das die Drähte umgibt, zu berücksichtigen ist. Falls  $\omega \ll R^*/L^*$  gilt, ist der erste Term vernachlässigbar, und die Telegraphengleichung geht in eine Gleichung über, die formal identisch ist mit der Wärmeleitungsgleichung. Die Störungen breiten sich nicht mehr als Wellen von der Quelle aus, sondern diffundieren mit der Diffusionskonstante  $1/(R^* C^*)$  entlang der Drähte.

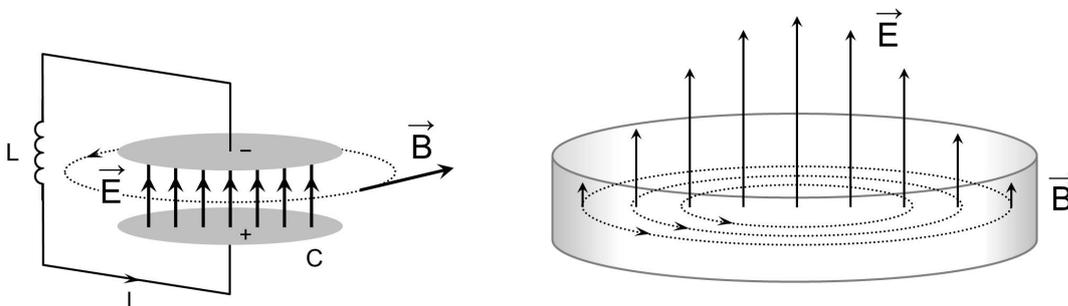
## 6.11 Elektromagnetische Wellen im Hohlleiter

Bei sehr hohen Frequenzen, zum Beispiel Mikrowellen, sind Drähte als Leiter nicht mehr geeignet. Der Skineneffekt führt dazu, dass die leitende Schicht nur noch sehr dünn ist (ca.  $1 \mu\text{m}$  bei  $\omega = 10^{12}\text{s}^{-1}$ ) und somit einen grossen Widerstand aufweist. Eine Doppelleitung von 1 m Länge bei einem Abstand der Drähte von 0.1 m hat bei dieser Kreisfrequenz schon einen induktiven Widerstand  $|Z_L|$  von  $10^4 \Omega$ .

Wellen mit Wellenlängen im cm bis mm-Bereich überträgt man mit *Hohlleitern*. Diese werden für Frequenzen von 1 GHz bis 200 GHz verwendet.

Um die Struktur der elektromagnetischen Welle in einem Hohlleiter zu verstehen, betrachten wir zunächst einen LC-Schwingkreis bestehend aus einer Spule und einem Plattenkondensator (Fig. 6.9). Im Kondensator schwingt die elektrische Feldstärke aufgrund der periodischen Auf- und Entladung des Kondensators. Zwischen den Platten ist also ein zeitlich ändernder elektrischer Feldfluss, der nach (6.1) ein ihn umschliessendes B-Feld erzeugt.

Die Anordnung wird nun ersetzt, indem das elektrische Feld in einen leitenden Zylindermantel eingeschlossen wird; die Kondensatorplatten bilden zunächst die Deckel des Zylinders. In dieser Anordnung erfüllt das B-Feld überall die Randbedingung  $\vec{n} \cdot \vec{B} = 0$ . Das E-Feld steht senkrecht auf den Deckflächen. Damit  $\vec{n} \times \vec{E} = 0$  auch auf der Mantelfläche gilt, muss die elektrische Feldstärke eine radiale Abhängigkeit aufweisen, so dass  $E = 0$  auf der Mantelfläche ist. Die Anordnung ist ein elektromagnetischer Hohlraumresonator, der das elektromagnetische Feld vollständig einschliesst und in Abschnitt 6.12 vorgestellt wird.



**Figur 6.9:** Links: elektrischer LC-Schwingkreis mit E-Feld zwischen den Kondensatorplatten und das umschliessende B-Feld zum Zeitpunkt, wo die untere Platte positiv aufgeladen wird. Rechts: Ein leitender Zylindermantel umgibt das E-Feld, die Kondensatorplatten bilden die Deckel. Die geschlossene leitende Fläche ist ein elektromagnetischer Hohlraumresonator. Sowohl das E- wie auch das B-Feld erfüllen überall die erfordernten Randbedingungen. Ohne Deckel bildet der Zylindermantel einen Hohlleiter, entlang welchem sich die elektromagnetische Welle fortpflanzt.

Die Deckflächen des Zylinders werden nun entfernt. Das ermöglicht die Ausbreitung einer elektromagnetischen Wellen entlang der Zylinderachse. Die Röhre ist nun ein Wellenleiter, ein *elektromagnetischer Hohlleiter*. Es gibt viele Möglichkeiten, wie das E- und B-Feld im Hohlleiter orientiert ist und welche Struktur es aufweist. In Fig. 6.9 könnte beispielsweise das E-Feld auch radial gerichtet sein und das B-Feld dementsprechend entlang der Zylinderachse.

Wir betrachten nun einen rechteckigen Hohlleiter. Das ist die Geometrie, die in der Praxis bei der Übertragung von Radar- oder Mikrowellen verwendet wird.

Das elektrische und magnetische Feld ist wie folgt gegeben:

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \cdot e^{i \cdot (\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega \cdot t)}, \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} \cdot e^{i \cdot (\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega \cdot t)}, \quad (6.48)$$

wobei  $E_1$ ,  $E_2$ , und  $E_3$ , sowie  $B_1$ ,  $B_2$ , und  $B_3$  komplexe Amplituden der entsprechenden Felder sind. Der Wellenvektor ist  $\vec{k} = (\ell, m, k)$ . Die gemessenen Felder sind  $Re(\vec{E})$  und  $Re(\vec{B})$ . Jede Komponente von (6.48) muss die Wellengleichung (6.27) bzw. (6.28) erfüllen. Daraus folgt:

$$\omega = c \cdot \sqrt{\ell^2 + m^2 + k^2} = c \cdot |\vec{k}| = c \cdot \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (6.49)$$

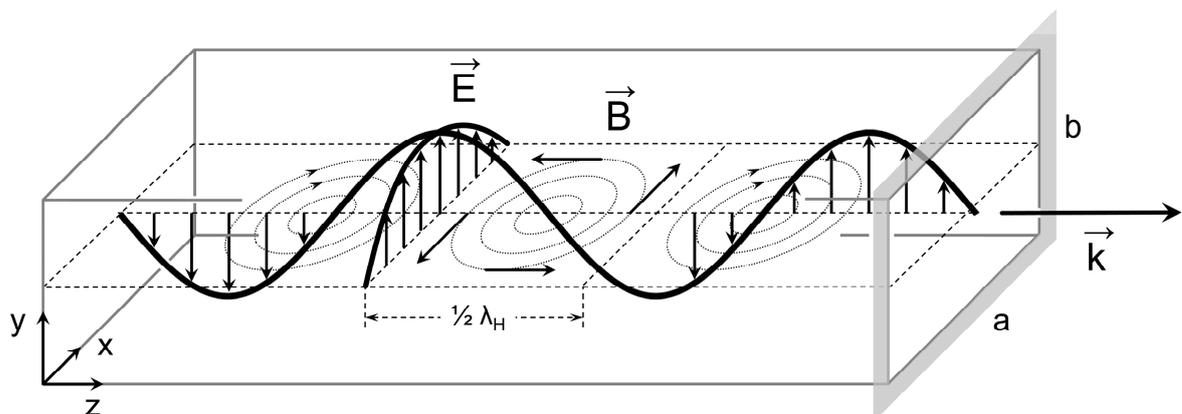
wobei  $\lambda$  die Wellenlänge der elektromagnetischen Welle (6.48) ist.

Die elektrischen und magnetischen Felder (6.48) müssen natürlich auch die beiden Maxwell Gleichungen (6.25) und (6.26) erfüllen. Wir wählen das Koordinatensystem nun so, dass die Ausbreitung in  $z$ -Richtung erfolgt. Die  $x$ - und  $y$ -Abhängigkeiten sollen in den komplexen Amplituden belassen werden, also

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \cdot e^{i \cdot (k \cdot z - \omega \cdot t)}, \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} \cdot e^{i \cdot (k \cdot z - \omega \cdot t)}. \quad (6.50)$$

Man kann zeigen, dass alle transversalen Amplituden vollständig durch die beiden axialen Amplituden  $E_3$  und  $B_3$  und deren ersten  $x$ - und  $y$ -Ableitungen bestimmt sind.

Als Beispiel betrachten wir eine elektromagnetische Welle mit einfacher räumlicher Struktur im rechteckigen Hohlleiter. Die Welle pflanzt sich in  $+z$ -Richtung fort, also  $\vec{k} = (0, 0, k)$ ,



**Figur 6.10:** Elektromagnetische Welle der Mode  $TE_{10}$  in einem rechteckigen Hohlleiter. Die Welle breitet sich in  $+z$ -Richtung aus und ist in  $y$ -Richtung polarisiert.  $\lambda_H$  bezeichnet die Wellenlänge im Hohlleiter. An den Seitenflächen ist das  $E$ -Feld 0, auf den Deckflächen steht es senkrecht. Die geschlossenen  $B$ -Feldlinien sind gepunktet eingezeichnet. Das  $B$ -Feld ist parallel zu den Seitenflächen, steht jederzeit senkrecht zum  $E$ -Feld, und ist in Phase mit dem  $E$ -Feld. Bei  $TE_{10}$  sind die Amplituden beider Felder konstant in  $y$ -Richtung, das heisst, die  $E$ -Feldlinien beginnen auf der Fläche  $y = 0$  und enden bei  $y = b$ .

und ihr elektrisches Feld ist in  $y$ -Richtung polarisiert, d.h. transversal zur Ausbreitungsrichtung (Fig. 6.10). Dies wird als TE-Mode bezeichnet (*Transverse Electric Mode*). Es gilt für diese Welle  $E_1 = 0$  und  $E_3 = 0$ .

Aus den Maxwell Gleichungen für die Amplituden von (6.50) folgt dann für dieses Beispiel  $B_2 = 0$ . Die komplexe Rechnung zeigt auch, dass das magnetische Feld ringförmig im Hohlleiter angeordnet ist, wie dies bereits in Fig. 6.9 erklärt wurde. Die B-Feldvektoren stehen jederzeit und überall senkrecht auf den E-Feldvektoren und sind konstant in  $y$ -Richtung.

Nun müssen beide Felder ebenfalls die entsprechenden Randbedingungen auf den Hohlleiterflächen erfüllen, d.h.  $\vec{n} \times \vec{E} = 0$  (E-Feld senkrecht auf allen leitenden Flächen) und  $\vec{n} \cdot \vec{B} = 0$  (B-Feld parallel zu allen leitenden Flächen).

Im obigen Beispiel also muss  $Re(B_1) = 0$  für  $x = 0$  und  $x = a$ . Mit (6.48) folgt

$$\ell = n_x \cdot \frac{\pi}{a}, \quad n_x = 0, 1, 2, \dots \quad (6.51)$$

Für den allgemeinen Fall müssen analoge Randbedingungen auch auf den Deckflächen  $y = 0$  und  $y = b$  erfüllt sein, also

$$m = n_y \cdot \frac{\pi}{b}, \quad n_y = 0, 1, 2, \dots \quad (6.52)$$

Die elektromagnetische Welle mit  $(n_x, n_y) = (1, 0)$  ist in Fig. 6.10 abgebildet. Sie wird als  $TE_{10}$  Mode bezeichnet. Dies ist die Grundmode. Für  $TE_{10}$  sind die Randbedingungen für das E-Feld auf allen Flächen bereits erfüllt. Da in  $TE_{10}$  die elektrische Feldstärke  $E_2$  auf den Deckflächen  $y = 0$  und  $y = b$  nicht verschwindet, muss sich dort eine Ladungsbelegung befinden, die sich verbunden mit der elektromagnetischen Welle fortpflanzt, wie dies bereits bei der Lecherleitung beobachtet wurde (Fig. 6.8). Dies führt wegen des zwar geringen, aber nicht verschwindenden Ohmschen Widerstands des Hohlleitermaterials zu Verlusten.

Aus (6.49) und (6.50) folgt, dass die Länge der  $TE_{10}$  Welle im Hohlleiter,  $\lambda_H$ , *nicht* gleich der Wellenlänge der elektromagnetischen Welle,  $\lambda$ , ist, sondern dass für  $TE_{10}$  gilt:

$$\omega = c \cdot \sqrt{\frac{\pi^2}{a^2} + k^2} = c \cdot \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{\lambda_H}\right)^2} = c \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \quad (6.53)$$

woraus folgt:

$$\lambda_H = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}} \quad (6.54)$$

Die Länge der Wellen im Hohlleiter,  $\lambda_H$ , ist also grösser als die Wellenlänge der fundamentalen elektromagnetischen Wellen,  $\lambda$ . Das ist so zu verstehen, dass die Hohlleiterwelle  $TE_{10}$  durch die Überlagerung zweier in  $x$ -Richtung entgegengesetzt laufenden Wellen

mit  $\vec{k}_+ = (1, 0, k)$  und  $\vec{k}_- = (-1, 0, k)$  und gleicher Frequenz entsteht, so dass zwischen  $x = 0$  und  $x = a$  eine *in x-Richtung stehende Welle* resultiert, wie bereits in Fig. 6.5 abgebildet.

Die Phase der Hohlleiterwelle breitet sich daher mit der Geschwindigkeit  $c_H = (c/\lambda) \cdot \lambda_H$  aus. Diese ist *grösser* als die Lichtgeschwindigkeit. Da Information jedoch mit der Gruppengeschwindigkeit der Welle  $c_{gr} = \partial\omega / \partial k$  transportiert wird und aus (6.49)  $c_{gr} < c$  folgt, ist das natürlich im Einklang mit der Relativitätstheorie.

Einsetzen von (6.51) und (6.52) in (6.49) und Auflösen nach der z-Komponente  $k$  des Wellenzahlvektors  $\vec{k}$ , ergibt

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n_x^2 \cdot \pi^2}{a^2} - \frac{n_y^2 \cdot \pi^2}{b^2}} . \quad (6.55)$$

Damit sich die Welle in z-Richtung ausbreiten kann, muss  $k$  in (6.55) reell sein. Das heisst, dass für eine bestimmte Frequenz nur eine endliche Anzahl Moden der elektromagnetischen Welle im Hohlleiter existiert. Für die Mode  $(n_x, n_y)$  muss die Frequenz grösser sein als die zugehörige Grenzfrequenz

$$\frac{\omega}{2\pi} = \nu > \nu_G(n_x, n_y) = \frac{c}{2} \cdot \sqrt{\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2}} . \quad (6.56)$$

Die Grenzfrequenz hängt also von der Geometrie des Hohlleiters ab. Nach (6.56) gibt es für jede Geometrie unendlich viele Moden. In der Praxis werden aber die Hohlleiter in der Grundmode betrieben.

Damit die nutzbare Bandbreite für die Signalübertragung möglichst gross ist, sollte die Differenz der Frequenz zwischen der Grundmode und der nächst höheren Mode möglichst gross sein. Deshalb werden nicht runde, sondern rechteckige Hohlleiter mit  $a : b \approx 2 : 1$  bevorzugt.

In der Praxis gibt es viele Geometrien, die entsprechend den Frequenzbereichen der Mikrowellen eingesetzt werden. Ein häufig verwendeter Hohlleiter wird als WR 90 bezeichnet, der für Frequenzen von 8.2 bis 12.4 GHz eingesetzt wird. Der WR 90 Hohlleiter wird auch für die in dieser Vorlesung gezeigten Experimente mit Mikrowellen ( $\nu = 9.3$  GHz) verwendet.

Die inneren Dimensionen des rechteckigen WR 90 Hohlleiters sind  $a = 2.286$  cm (= 90/100 inch) und  $b = 1.016$  cm. Damit können die Grenzfrequenzen für die einzelnen Moden für WR 90 aus (6.56) berechnet werden.

$n_x$	$n_y$	$\nu_G$ [GHz]
1	0	6.56
2	0	13.11
0	1	14.75
1	1	16.14

Grenzfrequenzen der ersten TE Moden für einen WR 90 Hohlleiter

Eine bedeutende und weit verbreitete Anwendung von Mikrowellen ist das Haushaltgerät und der Radar. Der Mikrowellenofen im Haushalt operiert bei  $\nu = 2.45$  GHz. Der Radar einer Bodenüberwachungsstation für den Luftverkehr arbeitet bei ca.  $\nu = 1$  GHz, und die Wetterradarstationen der Meteo Schweiz bei  $\nu = 5.43$  bis  $5.45$  GHz.

Mikrowellen werden sowohl aktiv (Aussenden eines Mikrowellensignals) wie auch passiv (Messung des Mikrowellenbereichs der natürlichen Strahlung) für die Erd-Fernerkundung eingesetzt. Sie bilden ein wichtiges Werkzeug in der Klima- und Atmosphärenforschung zur Messung von klimatisch relevanten Grössen von Satelliten aus, wie z.B. der Wasserdampf in der Atmosphäre ( $\nu = 22.2$  GHz, Absorptionsbande des  $\text{H}_2\text{O}$  Moleküls), oder die Meereisbedeckung (Kombination der Information aus  $\nu = 19$  GHz und  $37$  GHz).

## 6.12 Elektromagnetische Wellen im Hohlraumresonator

Wenn nun der Hohlleiter in Fig. 6.9 oder 6.10 auch noch in  $z$ -Richtung leitend abgeschlossen wird, so entsteht ein *elektromagnetischer Hohlraumresonator*. Dieser dient zur Erzeugung von Mikrowellen.

Es muss dann auch eine zu (6.51) und (6.52) entsprechende Randbedingung an den Deckflächen normal zur  $z$ -Richtung erfüllt sein.

In einem Quader der geometrischen Ausdehnung  $a_x, a_y, a_z$  sind deshalb nur folgende Eigenfrequenzen elektromagnetischer Schwingungen möglich:

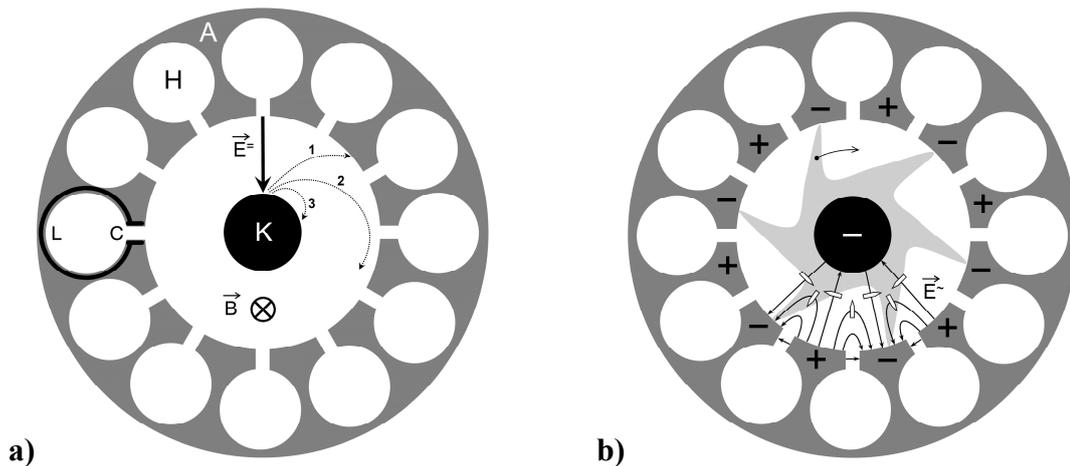
$$\omega = \pi \cdot c \cdot \sqrt{\frac{n_x^2}{a_x^2} + \frac{n_y^2}{a_y^2} + \frac{n_z^2}{a_z^2}} \quad n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.55)$$

wobei  $(0, 0, 0)$  natürlich wegfällt. Im Hohlraumresonator befinden sich stehende elektromagnetische Wellen. Generell wirkt jede geschlossene Leiterfläche als Hohlraumresonator mit den entsprechenden Eigenfrequenzen. Für die Weiterverwendung der elektromagnetischen Wellen müssen diese vom Resonator in einen Hohlleiter eingekoppelt werden.

Hohlraumresonatoren sind heute weit verbreitet: sie werden als Quellen elektromagnetischer Wellen in jedem Mikrowellengerät (Magnetron) und in jedem Radar (Klystron) eingesetzt.

Wir erklären hier in verkürzter Form die komplexe Funktionsweise des *Magnetrons*, das 1940 entwickelt wurde und Mikrowellen mit hoher Leistung erzeugt. Das Magnetron besteht aus einem massiven Cu-Zylinder, in den eine bestimmte Anzahl Hohlräume gefräst sind, die mit dem inneren Hohlraum verbunden sind. In Fig. 6.11 ist eine Anordnung von 12 kreisförmigen Hohlräumen (H) dargestellt. Sie bilden die Anode (A). In der Zylinderachse befindet sich eine Glühkathode (K), die Elektronen liefert. An der oberen und unteren Deckfläche des Cu-Zylinders befindet sich je ein ringförmiger Permanentmagnet in Helmholtz-Anordnung, die ein homogenes B-Feld entlang der Zylinderachse erzeugen.

Magnetrone können sehr kompakt gebaut werden. In Fig. 6.11 ist ein schematischer Schnitt durch ein Magnetron dargestellt. Als Beispiel seien typische Dimensionen betrachtet: die Durchmesser von A (ausser) und H sind  $12$  cm, bzw.  $2$  cm, die Höhe  $7$  cm. Die Verbindung



**Figur 6.11:** Aufsicht auf ein Magnetron bestehend aus einer Glühkathode (K) und einer ringförmigen Anode (A) aus Cu, in die 12 zylinderförmige Hohlraumresonatoren H gefräst sind. **(a):** Zwischen K und A liegt eine Spannung  $U$  von einigen kV; im ringförmigen Innenraum bildet sich ein konstantes radiales Feld  $E^{\perp}$ . Zwei Permanentmagneten auf den Deckflächen des Zylinders sind in Helmholtzordnung und erzeugen ein nahezu konstantes  $B$ -Feld im Hohlraum, das in die Ebene hineinzeigt. Elektronen  $e^{-}$  verlassen K und werden im Feld  $E^{\perp}$  beschleunigt. Die Lorentzkraft zwingt die  $e^{-}$  auf gekrümmte Bahnen (Epizykloiden). Je nach Feldstärke  $B$  treffen die  $e^{-}$  auf A oder auf K auf (1 und 3), oder fliegen möglichst lange im ringförmigen Zwischenraum (2). Jeder der 12 Hohlräume stellt einen elementaren LC-Schwingkreis dar mit dem Spalt als Kapazität und der kreisförmigen Innenfläche als eine Spulenwindung. **(b):** Magnetron im Betrieb mit alternierender Ladungsbelegung auf der inneren Mantelfläche: die Vorzeichen schwingen mit der Eigenfrequenz  $\omega$ . Diese erzeugen ein Wechselfeld  $E^{\sim}$ , das dem konstanten Feld  $E^{\perp}$  überlagert ist und die Bahnkurven der  $e^{-}$  beeinflussen. Im Wechselfeld drifteten die  $e^{-}$  in Richtung der offenen Pfeile. Dabei gibt es Zonen der Konvergenz und der Divergenz von  $e^{-}$ , es bildet sich eine sternförmige Ladungswolke (hellgraue Fläche) aus. Die oszillierende Ladungsbelegung auf A führt zu einer Rotation der Wolke im Uhrzeigersinn mit der Kreisfrequenz  $\omega/6$ .

von H zum Innenraum ist ein Spalt mit Länge 0.5 cm und Breite 3 mm. Der einzelne Hohlraum mit Spalt wirkt als elementarer LC-Schwingkreis: die Oberflächen des Spalts stellen eine Kapazität  $C$  dar, die innere Oberfläche wirkt als Spule mit einer Windung, entlang der ein Kreisstrom fließt. Die Spule hat die Induktivität  $L$ . Die Dimension des Magnetrons bestimmt die Eigenfrequenz des LC-Schwingkreises. Eine grobe Abschätzung ergibt:

$$C = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d} = 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 7 \cdot 10^{-2}}{3 \cdot 10^{-3}} \text{ F} = 1.03 \cdot 10^{-12} \text{ F} \quad ,$$

$$L = \mu_0 \cdot \frac{N^2 A}{\ell} = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{1 \cdot \pi \cdot (1 \cdot 10^{-2})^2}{7 \cdot 10^{-2}} \text{ H} = 5.64 \cdot 10^{-9} \text{ H} \quad ,$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}} = 2.1 \cdot 10^9 \text{ Hz} = 2.1 \text{ GHz} \quad .$$

Zwischen A und K liegt eine Spannung  $U$  von einigen kV. Wird K aufgeheizt, lösen sich Elektronen  $e^{-}$  ab und beschleunigen sich im konstanten  $E^{\perp}$  Feld. Die Lorentzkraft zwingt die  $e^{-}$  auf gekrümmte Bahnen (Epizykloiden), so dass je nach Feldstärke  $B$  und Anfangsgeschwindigkeit die  $e^{-}$  auf A oder K treffen, bzw. im ringförmigen Zwischenraum auf eine Umlaufbahn gelangen (Fig. 6.11a, Bahnen 1, 2, 3). Fliegen die  $e^{-}$  nahe an einem Spalt vorbei (Bahn 2), so werden dort Ladungsverteilungen induziert, die den LC-Schwingkreis in H auf

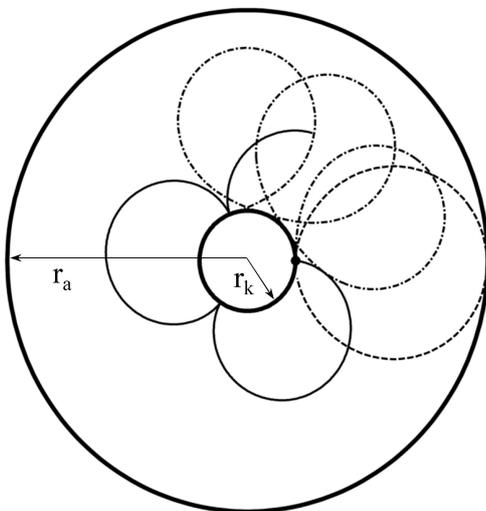
der Resonanzfrequenz  $\omega$  anregen. Zwar ist der spezifische Widerstand von Cu sehr klein, trotzdem ist der angeregte Schwingkreis natürlich gedämpft. Die Verluste werden durch Abgabe kinetischer Energie der  $e^-$  aus der Kathode ausgeglichen.

Schwingt ein einzelner H, werden aufgrund des um H fließenden Kreisstroms die unmittelbar benachbarten LC-Kreise ebenfalls zur Schwingung angeregt. Nach dem Einschwingvorgang der 12 Hohlräume befinden sich diese in Phase, und es bilden sich oszillierende Oberflächenladungen an den Anodenstegen. Zum Zeitpunkt, der in Fig. 6.11b gezeigt ist, sind die Kapazitäten C voll aufgeladen, welche im Zwischenraum ein zusätzliches Wechselfeld  $\vec{E}^-$  mit der Frequenz  $\omega$  verursachen. Das  $\vec{E}^-$ -Feld moduliert die  $e^-$ -Bahnen. Im Ruhesystem des Elektrons stellt sich, unter Vernachlässigung der Trägheitskräfte, ein Gleichgewicht  $\vec{E}^- + (\vec{v}_D \times \vec{B}) = 0$  ein. Das heisst,  $\vec{E}^-$  verursacht eine zusätzliche Drift  $\vec{v}_D$  der Elektronen in Richtung der offenen Pfeile in Fig 6.11b. Diese Drift führt lokal zur Ansammlung, bzw. Ausdünnung der Elektronen: es bildet sich eine sternförmige Elektronenwolke mit 6 Armen (grau in Fig. 6.11b). Aufgrund der resonanten Schwingungen in H mit der Frequenz  $\omega$  oszilliert auch  $\vec{E}^-$  mit  $\omega$ . Damit rotiert die Elektronenwolke mit  $\omega/6$  im Uhrzeigersinn.

Die Kreisströme in H verursachen auch ein  $\vec{B}^-$ , das zusammen mit  $\vec{E}^-$  eine elektromagnetische Schwingung bildet. Diese kann nun aus den Hohlraumresonatoren H ausgekoppelt und in einen Hohlleiter geführt werden, entlang welchem sich dann eine elektromagnetische Welle fortpflanzt. Das Magnetron ist die Quelle dieser Welle und gibt Energie ab. Die Mikrowelle breitet sich dann entlang des Hohlleiters aus und wird zum Beispiel ins Innere eines Mikrowellenofens, bzw. auf eine Radarantenne geleitet.

Hauptsächlich für Studierende der Physik:

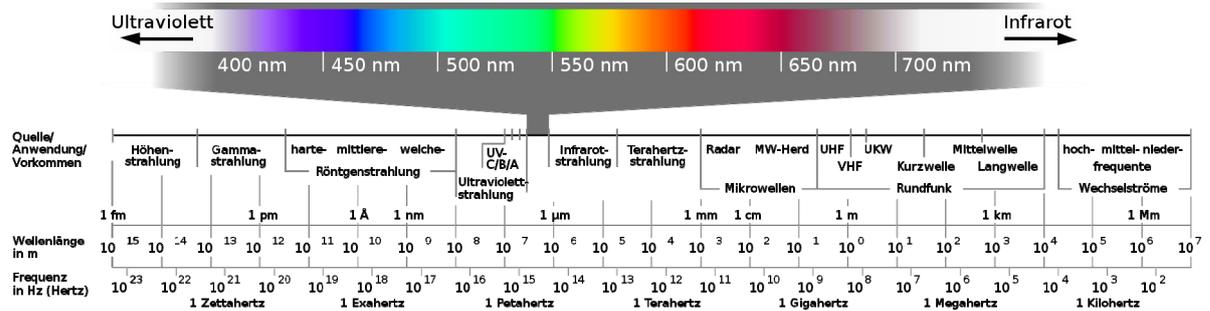
**Challenge:** Die Bahnkurve eines  $e^-$  soll im zylinderförmigen Zwischenraum des Magnetrons ohne H berechnet werden. Dabei sind  $r_k = 1$  cm, und  $r_a = 5$  cm,  $B = 0.01$  T, und U variabel. Das  $e^-$  startet bei  $r_k$  mit  $v_0$  in Richtung  $\alpha = \pi/2$ . Es wirken einzig das radiale  $\vec{E}^-$ -Feld und das homogene  $\vec{B}$ -Feld wie in Fig. 6.11. Die Trajektorien ergeben sich aus der Lösung der Bewegungsgleichung  $m \cdot \ddot{\vec{r}} = e^- \cdot \vec{E}^- + e^- \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{B})$ . Einige Bahnkurven sind in Fig. 6.12 gezeigt.



**Figur 6.12:** Bahnen der Elektronen im Magnetron sind Epizykloiden, falls die Wirkung der Wechselfelder der Hohlraumresonatoren H nicht berücksichtigt wird. Feste Linie:  $U = 5$  kV,  $v_0 = 0$  m/s, gestrichelt:  $U = 5$  kV,  $v_0 = 22.5 \cdot 10^6$  m/s, Strich-punkt:  $U = 2$  kV,  $v_0 = 23 \cdot 10^6$  m/s. Es treten unterschiedlichste Bahnen auf. Gestrichelte Kreisbahn; die Strich-punkt Bahn verläuft retrograd.

### 6.13 Das Spektrum elektromagnetischer Wellen

Das Spektrum elektromagnetischer Wellen erstreckt sich von niederfrequenten Wechselströmen, über Radiowellen mit Wellenlängen im Meterbereich, über sichtbares Licht im Bereich von einigen hundert Nanometern, bis zu Gamma- und Höhenstrahlen mit Wellenlängen von  $10^{-12}$  bis  $10^{-15}$  m. Das Spektrum ist in Figur 6.13 dargestellt.



**Figur 6.13:** Spektrum der elektromagnetischen Wellen. Radio- und Radarwellen werden häufig durch die Frequenz angegeben. Mikrowellen, Infrarot und sichtbares Licht ( $\lambda = 360 - 780$  nm) werden üblicherweise durch die Wellenlänge charakterisiert. Bei Röntgen- und Gammastrahlen wird die Energie der einzelnen Photonen nach der Beziehung  $E = h \cdot \nu$  ( $h$  ist das Planck'sche Wirkungsquantum) angegeben. Bildquelle: [de.wikipedia.org/wiki/Elektromagnetisches\\_Spektrum](http://de.wikipedia.org/wiki/Elektromagnetisches_Spektrum).