Estudio numérico de números de rotación y variacionales de familias paramétricas de difeomorfismos del círculo

Alejandro Luque, Jordi Villanueva

Dpto. de Matemática Aplicada I, Univ. Polit. Cataluña

alejandro.luque@upc.edu, jordi.villanueva@upc.edu

Resumen

Un parámetro importante para estudiar la dinámica de curvas invariantes (y más en general, toros invariantes) es el número de rotación (resp. vector de frecuencias). Es por ello que en los últimos años se han desarrollado diversos métodos numéricos para su aproximación (ver [1, 2, 3, 4]). Recientemente, en [5] se ha presentado una nueva forma de calcular números de rotación con alta precisión y bajo coste computacional, siendo una alternativa al análisis de frecuencias. El método requiere que la dinámica sobre la curva invariante induzca un difeomorfismo del círculo conjugado a un rotación rígida de forma suficientemente regular y, básicamente, consiste en promediar de forma adecuada los iterados del difeomorfismo y hacer extrapolación de Richardson.

En este trabajo se presenta una extensión del método para considerar familias multiparamétricas de difeomorfismos del círculo. Se obtiene así un método muy eficiente para calcular derivadas del número de rotación respecto a parámetros. Además, se ha elaborado un procedimiento para obtener desarrollos asintóticos de subvariedades (p.e. curvas invariantes) de número de rotación constante.

Tras presentar el método, se ilustrará su aplicación mediante el estudio de la familia de Arnold

$$\begin{array}{rcl} f_{\alpha,\epsilon} : \mathbb{T} & \longrightarrow & \mathbb{T} \\ x & \longmapsto & x + \alpha + \epsilon \sin(x), \end{array}$$

donde $(\alpha, \epsilon) \in [0, 2\pi) \times [0, 1)$ son parámetros tales que $f_{\alpha,\epsilon}$ es un difeomorfismo analítico del círculo. Las lenguas de Arnold se definen como el conjunto $T_\theta = \{(\alpha, \epsilon) : \rho(\alpha, \epsilon) = \theta\}$ para cualquier $\theta \in [0, 2\pi)$. Si θ es diofántico, entonces T_θ es una curva analítica que es el grafo de $\epsilon \mapsto \alpha_\theta(\epsilon)$, con $\alpha_\theta(0) = \theta$. El método elaborado nos permite approximar numéricamente los coeficientes del desarrollo de Taylor de $\alpha_\theta(\epsilon)$ para distintos valores de θ (diofánticos) hasta orden 19 con una precisión de 10^{-50}.

Finalmente, se comentarán también otras aplicaciones: estudio de curvas invariantes de simplectomorfismos planos, análisis de frequencias y generalización a dimensión superior (toros KAM).

Sección en el CEDYA 2007: AN

Referencias

[1] H. Broer y C. Simo. *Hill's equation with quasi-periodic forcing: resonance tongues, instability pockets and global phenomera.* Bol. Soc. Brasil. Mat. (S.N.) 29 (2) 253-293, 1998.

[2] R. de la Llave y N. Petrov. *Regularity of conjugacies between critical circle maps: an experimental study.* Exp. Math. 11 (2), 219-241, 2002.

[3] G. Gómez, J.M. Mondelo y C. Simó. *Refined Fourier analysis: procedures, error estimates and applications.* http://www.maia.ub.es/dsg/2001/index.html, 2001 (preprint).

[4] J. Laskar, C. Froeschlé y A. Celletti. *The measure of chaos by the numerical analysis of the fundamental frequencies. Application to the standard mapping.* Physica D, 56 (2-3), 253-269, 1992.

[5] T. M-Seara y J. Villanueva. *On the numerical computation of Diophantine rotation numbers of analytic circle maps.* Physica D, 107-120, 2006.