ARTÍCULO

RELACIONES ENTRE EL PENSAMIENTO ADITIVO Y MUTIPLICATIVO EN ESTUDIANTES DE EDUCACION PRIMARIA. EL CASO DE LA CONSTRUCCIÓN DE LA IDEA DE RAZÓN

Relationships between additive and multiplicative thinking in primary school students. The construction of the meaning of ratio

Ceneida Fernández Verdú[1] y Salvador Llinares Cisca[2]

[1]Facultad de Educación, Campus San Vicente del Raspeig, Universidad de Alicante, Apdo. Correos 99, 03080, Alicante, España. ceneida.fernandez@ua.es
[2]Facultad de Educación, Campus San Vicente del Raspeig, Universidad de Alicante, Apdo. Correos 99, Alicante, España. sllinares@ua.es

Resumen

El objetivo de esta investigación es estudiar la relación entre el pensamiento aditivo y el multiplicativo en estudiantes de educación primaria en el contexto de la construcción del significado de la idea de razón. Para ello, se ha categorizado las estrategias usadas por estudiantes de educación primaria cuando resuelven diferentes problemas proporcionales y problemas con una estructura aditiva, y se ha realizado un análisis estadístico implicativo para identificar las relaciones entre las estrategias. Los resultados muestran que los estudiantes de primaria no son capaces de discriminar las situaciones con estructura aditiva de las situaciones proporcionales y que el desarrollo inicial del significado de la idea de razón está vinculado al desarrollo de procesos constructivos considerando las relaciones de covariación. Este hecho fue mostrado porque los estudiantes empleaban métodos aditivos erróneos en los problemas proporcionales y, al mismo tiempo, métodos proporcionales erróneos en los problemas con estructura aditiva.

PALABRAS CLAVE: Estructura multiplicativa, estructura aditiva, métodos proporcionales, métodos aditivos.

Abstract

The aim of this research is to study the relationships between primary school students' additive and multiplicative thinking, in the context of the construction of the meaning of ratio. We have categorized and carried out an implicative analysis of primary school students' strategies when solving problems with multiplicative and additive structure. Findings indicate that primary school students are not able to discriminate proportional from additive. This finding indicates that the meaning of ratio is linked to the development of constructive methods considering relationships of covariation. This fact was shown because students used incorrect additive methods in proportional problems and, at the same time, erroneous proportional methods in additive problems.

KEYWORDS: Multiplicative structure, additive structure, proportional methods, additive methods.

Recibido: 28/02/10 Aceptado: 10/05/10

INTRODUCCIÓN

Durante varias décadas algunas investigaciones se han centrado en el desarrollo del razonamiento multiplicativo y, en particular, en la transición del pensamiento aditivo al pensamiento multiplicativo en los estudiantes de educación primaria. Las estructuras multiplicativas tienen algunos aspectos en común con la estructura aditiva, por ejemplo la multiplicación como "suma repetida", pero también tienen su propia especificidad que no es reducible a aspectos aditivos (Clark y Kamii, 1996). Por ejemplo, el producto Cartesiano en problemas del tipo "*Con 6 pantalones y 4 camisetas, ¿cuántas combinaciones posibles se pueden hacer?*" o la idea de razón como un índice comparativo que no se deriva de la estructura aditiva (ver ejemplo a continuación). En este sentido, la construcción del significado de la idea de razón requiere un cambio cualitativo en los esquemas cognitivos de los estudiantes de educación primaria en la transición del pensamiento aditivo al pensamiento multiplicativo para manejar estas nuevas situaciones (Fischbein, Deri, Sainati-nello, y Sciolis-marino, 1985; Greer, 1994; Nunes y Bryant, 1996).

Un hecho que muestra las dificultades de los estudiantes en desarrollar este cambio cualitativo es la dificultad en diferenciar situaciones de estructura multiplicativa de situaciones con estructura aditiva puesta de manifiesto por el uso de métodos aditivos erróneos para resolver situaciones proporcionales (Hart, 1981; Tourniaire y Pulos, 1985) y, al mismo tiempo, por el uso de métodos multiplicativos erróneos para resolver situaciones aditivas (Fernández y Llinares, 2009; Fernández, Llinares y Valls, 2008; Fernández, et al 2009). La diferencia entre estos dos tipos de situaciones y el comportamiento de los estudiantes al intentar resolverlas constituyen un contexto idóneo para el estudio del proceso de construcción del significado de razón como un aspecto característico de la transición al pensamiento multiplicativo. Las situaciones aditivas y proporcionales se pueden ejemplificar de la siguiente manera:

- *"Dos coches C y A están corriendo a la misma velocidad alrededor de un circuito. El coche C empezó antes y cuando ha recorrido 8 vueltas el coche A ha recorrido 4 vueltas. Si el coche A ha recorrido 6 vueltas, ¿cuántas vueltas ha recorrido el C?".* La relación entre las cantidades viene determinada por la diferencia entre las vueltas recorridas por C y A, 8 – 4 = 4 vueltas y, como los dos van a la misma velocidad, entonces cuando A ha recorrido 6 vueltas, C habrá recorrido 4 vueltas más (es decir, 6 + 4 vueltas).
- *"Marta y Sofía quieren pintar sus habitaciones exactamente del mismo color. Marta mezcla 4 botes de pintura amarilla y 6 botes de pintura roja. Sofía ha usado 7 botes de pintura amarilla. ¿Cuántos botes de pintura roja necesitará?".* Esta situación está caracterizada por la relación entre los botes de pintura amarilla y los botes de pintura roja ("4 es a 6") que es una razón (como un índice comparativo). Pero esta razón debe constituirse cognitivamente para construir otra relación igual a partir de 7 botes amarillos que tiene Sofía.

El objetivo de esta investigación es caracterizar la relación entre el pensamiento aditivo y el multiplicativo en estudiantes de educación primaria en el contexto de la construcción del significado de la idea de razón

MARCO CONCEPTUAL

En investigaciones recientes se ha empezado a identificar un fenómeno relevante para la caracterización de la transición del pensamiento aditivo al pensamiento multiplicativo en el contexto del razonamiento proporcional. Este fenómeno es la relación entre el uso por parte de los estudiantes de estrategias aditivas erróneas en situaciones proporcionales y el uso de estrategias de proporcionalidad erróneas en situaciones aditivas. Van Dooren, De Bock, Gillard y Verschaffel (2009) usando problemas con estructura proporcional y con estructura aditiva en formato de valor perdido con estudiantes de primaria (3º, 4º 5º y 6º curso) obtuvieron que mientras disminuía el uso de la estrategia aditiva errónea en los problemas de proporcionales aumentaba el uso de estrategias proporcionales en problemas aditivos. Los resultados obtenidos indicaban que hubo un desarrollo desde aplicar métodos aditivos en "cualquier sitio" en los primeros años de educación primaria a aplicar métodos proporcionales "en cualquier sitio" en los últimos años de educación primaria. Otro de los resultados obtenidos fue que el tipo de razón (entera o no entera) influía en este comportamiento. Así, muchos estudiantes en los cursos intermedios (4º y 5º) usaban más estrategias aditivas cuando las razones o relaciones multiplicativas entre las cantidades eran no enteras, pero también usaban más estrategias proporcionales cuando las razones o relaciones multiplicativas entre las cantidades eran enteras.

Una manera de explicar este comportamiento es considerar la propuesta de Modestou y Gagatsis (2010) como un modelo general desde el que entender el desarrollo del razonamiento proporcional que implica habilidades con respecto a la resolución de problemas proporcionales (de valor perdido, comparación numérica y comparación cualitativa) (Cramer y Post, 1993) e integra aspectos del razonamiento analógico con aspectos de carácter meta-cognitivo. En particular, el carácter meta-cognitivo implica la habilidad de los estudiantes de discriminar situaciones proporcionales de situaciones no proporcionales. Este marco global permite situar determinados comportamientos de los estudiantes cuando resuelven problemas con estructura proporcional y aditiva desde referencias más generales. Estas referencias ayudan a generar explicaciones sobre dichos comportamientos teniendo en cuenta como los estudiantes empiezan a dotar de sentido a la covariación entre las cantidades. De esta manera la comprensión que podemos obtener sobre estos aspectos aporta información sobre posibles propuesta didácticas.

Desde este modelo general del desarrollo del razonamiento proporcional es necesario aportar información sobre cómo los estudiantes dotan de sentido a la idea de razón como un elemento que les permita diferenciar las situaciones aditivas y proporcionales. En particular, es necesario considerar qué tipo de interferencias se generan entre el esquema aditivo y la construcción del significado de la idea de razón para comprender mejor las relaciones entre el pensamiento aditivo y el multiplicativo en los estudiantes de educación primaria. Para ello, nos centramos en las estrategias empleadas por los estudiantes en la resolución de problemas aditivos y proporcionales identificando relaciones entre ellas.

METODOLOGÍA

3.1. Participantes y contexto

Los participantes de la investigación fueron 197 estudiantes de educación primaria de tres centros públicos diferentes: 65 estudiantes de 4º curso, 68 estudiantes de 5º curso y 64 estudiantes de 6º curso. Los centros están situados en ciudades donde las familias son de clase media y alta. Los principales sectores son la industria y los servicios.

3.2. Instrumento de recogida de datos

Teniendo en cuenta el modelo de

razonamiento proporcional descrito por Modestou y Gagatsis (2010) hemos elaborado un cuestionario formado por problemas con estructura multiplicativa y con estructura aditiva. El cuestionario está formado por 12 problemas: 4 problemas proporcionales, 4 problemas aditivos y 4 problemas "distractores". Usamos el término *problemas aditivos* (Van Dooren et al., 2005) para designar a situaciones no proporcionales modeladas como $f(x) = x + b$, con $b \neq 0$, ya que la relación entre las cantidades que definen la situación es aditiva. Los problemas "distractores" fueron incluidos para variar las tareas propuestas y evitar los efectos de aprendizaje y respuestas estereotipadas.

En primer lugar, para la creación del cuestionario se pensó 8 situaciones que implicaran cantidades discretas y 8 situaciones que implicaran cantidades continuas. A continuación, se creó la versión proporcional y aditiva para cada situación manipulando únicamente una frase. Por ejemplo, *"Fabrican a la misma velocidad pero David empezó antes"* en los problemas aditivos y "*Empezaron al mismo tiempo pero Ana es más lenta*" en los problemas proporcionales. De esta manera teníamos 16 problemas.

Finalmente consideramos como variables las relaciones multiplicativas enteras o no enteras entre los números y la naturaleza de las cantidades (discreta o continua) creando de esa manera 64 problemas. Con estos 64 problemas se diseñó un total de 8 cuestionarios diferentes al que se incorporaron los problemas distractores. Por tanto, 2 de los 4 problemas proporcionales (P) y 2 de los 4 problemas aditivos (A) tenían cantidades discretas (D) (uno con razones internas y externas enteras [I], D-I, y otro con razones internas y externas no enteras [N], D-N). Los otros 4 problemas (2 proporcionales y 2 aditivos) tenían cantidades continuas(C) (de nuevo, 2 con razones enteras, C-I, y 2 con razones no enteras, C-N). La Tabla 1 ejemplifica la manipulación de las variables.

Tabla1. Ejemplo de problemas considerando la naturaleza de las cantidades (versiones D y C) y el tipo de relación multiplicativa entre los números (versiones I y N)

Ejemplos	
(P1) Ana y David están fabricando muñecas. Empezaron al mismo tiempo pero Ana es más lenta. Cuando Ana ha fabricado 40 muñecas, David ha fabricado 160 muñecas. Si Ana ha fabricado 80 muñecas, ¿cuántas muñecas ha fabricado David? (PDI)	(P2) Ana y David están fabricando muñecas. Empezaron al mismo tiempo pero Ana es más lenta. Cuando Ana ha fabricado 40 muñecas, David ha fabricado 100 muñecas. Si Ana ha fabricado 60 muñecas, ¿cuántas muñecas ha fabricado David? (PDN)
(P3) Ana y Raquel están patinando. Empezaron al mismo tiempo pero Raquel es más rápida. Cuando Ana ha patinado 150 metros, Raquel ha patinado 300 metros. Si Ana ha patinado 600 metros, ¿cuántos metros ha patinado Raquel? (PCI)	(P4) Ana y Raquel están patinando. Empezaron al mismo tiempo pero Raquel es más rápida. Cuando Ana ha patinado 80 metros, Raquel ha patinado 120 metros. Si Ana ha patinado 200 metros, ¿cuántos metros ha patinado Raquel? (PCN)

(P5) Ana y David están fabricando muñecas. Fabrican a la misma velocidad pero David empezó antes. Cuando Ana ha fabricado 40 muñecas, David ha fabricado 160 muñecas. Si Ana ha fabricado 80 muñecas, ¿cuántas muñecas ha fabricado David? (ADI)	(P6) Ana y David están fabricando muñecas. Fabrican a la misma velocidad pero David empezó antes. Cuando Ana ha fabricado 40 muñecas, David ha fabricado 100 muñecas. Si Ana ha fabricado 60 muñecas, ¿cuántas muñecas ha fabricado David? (ADN)
(P7) Ana y Raquel están patinando. Patinan a la misma velocidad pero Raquel empezó antes. Cuando Ana ha patinado 150 metros, Raquel ha patinado 300 metros. Si Ana ha patinado 600 metros, ¿cuántos metros ha patinado Raquel? (ACI)	(P8) Ana y Raquel están patinando. Patinan a la misma velocidad pero Raquel empezó antes. Cuando Ana ha patinado 80 metros, Raquel ha patinado 120 metros. Si Ana ha patinado 200 metros, ¿cuántos metros ha patinado Raquel? (ACN)

Los estudiantes resolvieron los 12 problemas durante el transcurso de su clase habitual de matemáticas, con lo que dispusieron aproximadamente de 50 minutos para completar el cuestionario. Fueron los propios profesores de matemáticas de cada centro los que pasaron los cuestionarios tras haber recibido las indicaciones oportunas por parte de los investigadores. Podían utilizar calculadoras, pero se indicó que no olvidaran escribir las operaciones.

3.3. Estrategia de análisis

Las estrategias usadas por los estudiantes para resolver los diferentes problemas fueron categorizadas en 5 grupos teniendo en cuenta cómo los estudiantes consideraban las relaciones entre las cantidades en cada situación: estrategia aditiva, estrategia constructiva, uso de razones, uso del algoritmo de la regla de tres y otras estrategias.

- La estrategia aditiva es correcta en los problemas aditivos pero incorrecta en los problemas proporcionales. Las estrategias constructivas, uso de las razones y la regla de tres (estrategias proporcionales) son correctas en los problemas proporcionales pero incorrectas en los problemas aditivos. Describimos a continuación estas 5 categorías en relación al problema proporcional P1 (PDI, tabla 1) Estrategia aditiva (SAdd). El estudiante relaciona aditivamente las muñecas fabricadas por David (160) con las muñecas fabricadas por Ana (40). Cuantifican esta relación aditiva por sustracción y esta diferencia la aplican a la segunda cantidad. Por ejemplo: "Como la diferencia entre las muñecas fabricadas por Ana y David es 160 – 40 = 120 muñecas, entonces si Ana ha fabricado 80 muñecas, David habrá fabricado 80 + 120 = 200 muñecas".
- Estrategia constructiva (SBU). El estudiante relaciona la cantidad de muñecas fabricadas por Ana y David considerando una relación proporcional entre las dos magnitudes. Por cada 40 muñecas fabricas por Ana, David Fabrica 160. Así, cuando Ana fabrique 40+40, entonces David habrá fabricado 160+160. En esta estrategia aunque se usen adiciones para alcanzar la cantidad pedida, reflejan la relación de proporcionalidad entre las cantidades puesta de manifiesto en considerar la relación entre "40 muñecas" de Ana y "160

muñecas" construidas por David.

- Uso de las razones (interna o externa; SR). Esta estrategia consiste en la identificación de la razón externa o interna y su uso para el cálculo de la cantidad desconocida. Por ejemplo: "Como David fabrica el cuádruple (160 : 40) de muñecas que Ana, entonces si Ana ha fabricado 80 muñecas, David habrá fabricado 80 × 4 = 320 muñecas".
- Regla de tres (SRT). El estudiante aplica el algoritmo de la regla de tres aplicando la aritmética de fracciones para despejar la incógnita 40/160 = 80/x
- Otras estrategias incorrectas (SOth).

El uso por parte de los estudiantes de cada una de estas estrategias en los diferentes problemas fue identificado poniendo el número del problema junto al código de la estrategia. Por ejemplo el uso de la estrategia aditiva en el problema P1 se codificó como SAdd1 y el uso de la regla de tres en el problema P4 se codificó como SRT4.

El uso de una estrategia en un determinado problema fue asignado como 1 y el no uso como 0. De este modo, para cada problema se codificaron la presencia o ausencia de cada estrategia teniendo un total de 40 variables (8 problemas × 5 categorías). Con esta codificación, se llevó a cabo un análisis estadístico implicativo mediante el uso del software CHIC (Gras, Suzuki, Guillet y Spagnolo, 2008). Este análisis nos proporciona diagramas implicativos. Las relaciones implicativas describen relaciones del tipo: "el uso de la estrategia A en el problema Z implica el uso de la estrategia A o B en el problema Y".

RESULTADOS

La figura 1 muestra el diagrama implicativo al 90% de significación de las estrategias usadas por los estudiantes de educación primaria en los diferentes problemas. Se pueden identificar 2 cadenas que relacionan 19 de las 40 variables consideradas.

Una cadena está formada por las variables que hacen referencia al uso de la estrategia aditiva en los diferentes problemas, tanto aditivos como proporcionales excepto en el problema P3, (PCI). La relación entre las estrategias aditivas usadas por los estudiantes en 7 de los 8 problemas indica que, en cierta manera, los estudiantes de educación primaria usaron de manera sistemática las estrategias aditivas en todos los problemas, sin discriminar las situaciones proporcionales de las situaciones aditivas. En esta cadena implicativa, la identificación y uso correcto de las relaciones aditivas entre las cantidades en los problemas aditivos cuya relación era entera (SAdd7 y SAdd5) y la aplicación de relaciones aditivas erróneas en el problema proporcional con razones enteras son precursores de la identificación y uso correcto de las relaciones aditivas en las situaciones aditivas cuando las relaciones multiplicativas eran no enteras (SAdd6 y SAdd8) y del uso de relaciones aditivas erróneas en los problemas proporcionales con razones no enteras (SAdd4 y SAdd2).

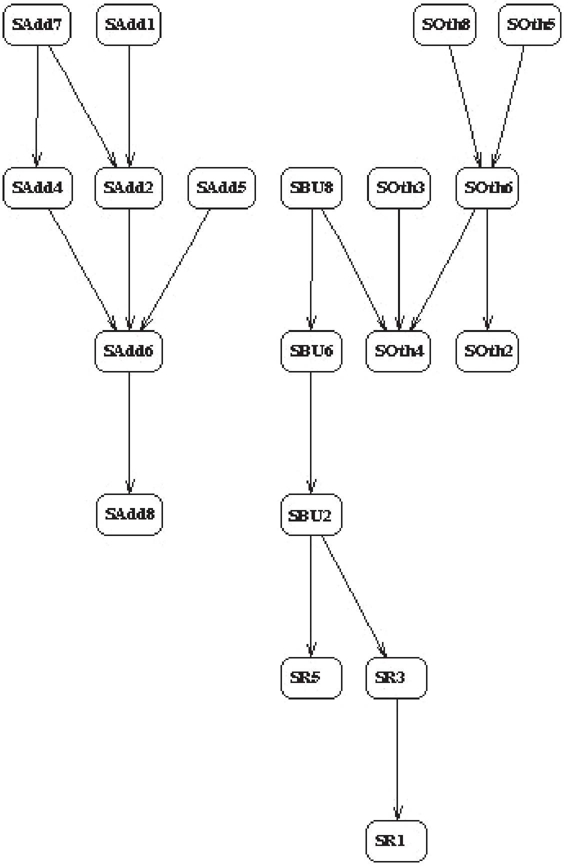

Figura 1. Diagrama implicativo de las estrategias usadas por los estudiantes de educación primaria

Luego, en esta cadena implicativa, juega un papel importante el tipo de relación multiplicativa entre los números (entera o no entera) hecho que se justifica porque aparece en el inicio de la cadena las variables SAdd7, SAdd1 y SAdd5 (que corresponden al uso de la estrategia aditiva en las situaciones aditivas con relaciones enteras ACI y ADI, y la situación proporcional con razones enteras PDI). Esto puede ser interpretado en el sentido de que si el estudiante emplea una estrategia aditiva en los problemas con relaciones multiplicativas enteras, empleará esta estrategia en los problemas con relaciones multiplicativas no enteras.

La segunda cadena está formada por el uso de otras estrategias incorrectas, el uso de la estrategia constructiva y el uso de las razones, agrupando 12 variables de las cuales sólo 3 reflejan estrategias correctas (la estrategia constructiva en algunos problemas proporcionales con razones no enteras y el uso de las razones en los problemas proporcionales en los que las razones eran enteras. El resto de las 9 variables corresponden al uso incorrecto de estrategias, pero relacionando el uso de "otras estrategias erróneas" en los problemas proporcionales y aditivos con el uso incorrecto de la estrategias constructivas en los problemas aditivos cuando la relación multiplicativa entre las cantidades es no entera. En esta cadena se observa que si los estudiantes utilizan otras estrategias erróneas en el problema aditivo con cantidades discretas y relaciones enteras (SOth5) y en el problema aditivo con cantidades continuas y relaciones no enteras (SOth8), entonces emplean también otras estrategias erróneas en el problema aditivo con cantidades discretas y relaciones no enteras (SOth6). Además, si emplean otras estrategias erróneas en el problema aditivo con cantidades continuas y relaciones no enteras (SOth6) y en el problema proporcional con cantidades continuas y razones enteras (SOth3), entonces emplearan otras estrategias erróneas en los problemas proporcionales con razones no enteras (SOth2 y SOth4).

El carácter aditivo o lineal del problema influye en el uso de "otras estrategias erróneas" ya que se generan relaciones implicativas entre estas aproximaciones erróneas en los problemas aditivos y en los proporcionales (ver SOth8, SOth 6 y SOth5 que corresponden a los problemas aditivos ADI, ACN y ADN y su relación con las estrategias SOth3, SOth4, y SOth2 usadas en los problemas proporcionales).
Por otra parte, si el estudiante emplea estrategias constructivas en el problema aditivo con cantidades continuas y relaciones no enteras (SBU8), empleará esta estrategia en el problema aditivo con cantidades discretas y relaciones no enteras (SBU6) y también en el problema proporcional con cantidades discretas y razones no enteras (SBU2). Sin embargo, empleará las razones en los problemas proporcionales con razones enteras (SR1 y SR3) pero también los usará de manera errónea en el problema aditivo con cantidades discretas y razones enteras (SR5).

Esta última implicación aporta información sobre la manera en la que los estudiantes llegan a dotar de significado la idea de razón ya que las implicaciones indican que cuando los estudiantes usan la estrategia constructiva en la situación proporcional con razón no entera, identifican y usan las razones en los problemas proporcionales cuando las relaciones multiplicativas entre los números son enteras (SR3 y SR1). Por ejemplo en el problema P2 (PDN, tabla 1), los estudiantes identifican una "relación" entre 40 muñecas de Ana y las 100 muñecas de David que les permite trasladarla y crear la relación entre 20 muñecas de Ana y 50 muñecas de David, para finalmente poder establecer la "relación" entre 40+20 muñecas de Ana, y 100+50 muñecas de David. Identificar y manejar estas relaciones entre las cantidades pone de manifiesto un significado implícito de la idea de razón (en este caso "40 a 100"). Sin embargo en el problema P1 (PDI, tabla 1), la estrategia constructiva anterior apoyada sobre la identificación de "una determinada relación entre las muñecas de Ana y las muñecas de David" es identificada, ahora, como una relación multiplicativa (40 muñecas de Ana x 4 = 160 muñecas de David). O por otra parte, la identificación de una relación entre "40 muñecas de Ana y 80 muñecas de Ana" (40 x 2 = 80) se traslada al caso de David (160 muñecas de David x 2 = 320), por lo que multiplicar por 2 en este caso o por 4 en la otra aproximación muestran la manera en la que los estudiantes "identifican y trasladan" las relaciones de una magnitud a la otra. Esta manera de proceder muestra que en este tipo de problemas los estudiantes sí pueden visualizar la relación entre las dos magnitudes a través de una relación multiplicativa.

Sin embargo, el hecho de que el uso de la estrategia constructiva en las situaciones proporcionales (SBU2) también conlleve la identificación y uso erróneo de alguna razón en los problemas aditivos con relaciones enteras y cantidades discretas (SR5), por ejemplo en el problema P5 (ADI, tabla 1) indica que en este caso la relación aditiva entre las 40 muñecas de Ana y las 160 muñecas de David que organizan la situación no se vincula a la idea de que los dos llevan la misma velocidad, por lo que hace que los estudiantes usen una razón posiblemente desde la perspectiva de una relación multiplicativa al ser la relación entre los números entera de la misma forma como se ha descrito en el problema P3 con la estrategia SR3.

De esta manera, globalmente, esta cadena implicativa muestra el papel importante desempeñado por el tipo de razón (o relación multiplicativa entre las cantidades). Las relaciones implicativas nos indican que si el estudiante emplea estrategias constructivas en los problemas con relaciones multiplicativas no enteras, empleará las razones en los problemas con relaciones multiplicativas enteras. Este hecho muestra que los estudiantes emplean la razón interna o externa cuando las relaciones multiplicativas son enteras, por ejemplo, cuando identifican relaciones como "el doble", "el triple", etc. Pero, ante la dificultad de identificar la razón en los problemas con relaciones multiplicativas no enteras, los estudiantes emplean estrategias constructivas.

CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN

El objetivo de esta investigación es caracterizar cómo los estudiantes de educación primaria dotan de sentido a la idea de razón en un contexto de resolución de problemas proporcionales y aditivos mediante el análisis de las diferentes estrategias empleadas. La construcción del significado de la idea de razón es clave en la relación entre el pensamiento aditivo y el pensamiento multiplicativo y en particular en el desarrollo del razonamiento proporcional. En este sentido, identificar y usar una razón entre dos cantidades de manera significativa en una determinada situación implica ser capaz de reconocer las relaciones de covariación entre cantidades de magnitudes proporcionales.

El análisis implicativo entre las estrategias usadas por los estudiantes en los diferentes problemas ha permitido identificar tres ideas relevantes en relación a la manera en que los estudiantes dotan de sentido a la idea de razón, y por tanto a la idea de covariación, y sobre las características de las interferencias entre el pensamiento aditivo y multiplicativo en este proceso.

En primer lugar, el uso de las estrategias aditivas en los diferentes problemas, tanto si eran correctas o erróneas, agrupadas en una estructura implicativa indica que la "búsqueda de relaciones aditivas entre las cantidades" que pueden ser usadas para su resolución influye en el pensamiento de los estudiantes de educación primaria. Como consecuencia, los estudiantes tienden a usar estrategias aditivas de manera sistemática. Es decir, cuando un estudiante emplea la estrategia aditiva en un problema tiende a emplearla en todos los demás sin discriminar su carácter aditivo o lineal.

En segundo lugar, hay que resaltar que las estrategias erróneas usadas tanto en los problemas proporcionales como en los aditivos se han relacionado entre si en una parte de la segunda estructura implicativa generada. Este hecho pone de manifiesto que cuando los estudiantes no identificaban las relaciones aditivas entre las cantidades de los problemas aditivos y generaban otro tipo de aproximación errónea tampoco identificaban las relaciones multiplicativas en las situaciones proporcionales.

En tercer lugar, resulta interesante para el objetivo de esta investigación, la relación entre el uso de estrategias constructivas erróneas en los problemas aditivos cuando los números no son múltiplos entre sí, con el uso correcto de la estrategia constructiva en los problemas proporcionales con razones no enteras. Esta relación muestra los intentos de los estudiantes de identificar algún tipo de relación entre las cantidades. En particular, estas relaciones implicativas puestas de manifiesto en la segunda estructura implicativa identificada evidencian los intentos de los estudiantes de educación primaria para identificar una relación entre las cantidades de la situación que tenga en cuenta la idea de covariación. Un reconocimiento inicial de la covariación entre las cantidades de una situación proporcional está en el origen de la estrategia constructiva aplicada en las situaciones proporcionales (SBU2). Este hecho indica que el significado de la idea de razón está vinculado al reconocimiento de que los cambios en una magnitud deben corresponder ciertos cambios en la otra.

Consideradas conjuntamente las dos ideas derivadas de las estructuras implicativas entre las estrategias podemos indicar que el significado de razón en los estudiantes de primaria parece construirse de la consideración de ciertas aproximaciones que se manifiestan con el uso de estrategias constructivas en los problemas proporcionales cuando los números usados no son múltiplos enteros unos de otros, y por las restricciones que el pensamiento aditivo impone a veces haciendo que los estudiantes busquen y apliquen sistemáticamente relaciones aditivas entre los números, independientemente de si son o no correctas estas relaciones.

Estos resultados implican la necesidad de centrar la atención, en la enseñanza, sobre el análisis de las relaciones multiplicativas y aditivas entre las cantidades. Los estudiantes aparentemente aplican procedimientos, que al menos parcialmente, se basan en asociaciones superficiales del problema. Luego la instrucción de primaria debiera prestar atención a las relaciones entre las cantidades para prevenir el uso de estrategias basadas en asociaciones superficiales. En este sentido, Kaput y West (1994) sugirieron que el currículo necesitaba presentar tanto situaciones proporcionales como no proporcionales (por ejemplo aditivas) y proporcionar a los estudiantes, de este modo, la oportunidad de discriminar ambos tipos de situaciones. El uso de las diferentes tipos de situaciones por parte del profesor en la enseñanza debería considerar el papel que desempeñan las relaciones enteras o no enteras de los números usados como variables de tarea. De esta manera la integración en la planificación de la enseñanza de los problemas aditivos y proporcionales y usando números con relaciones multiplicativas enteras y no enteras puede ayudar a caracterizar las trayectorias de aprendizaje necesarias para que los estudiantes doten de sentido a la idea de covariación como soporte de la noción de razón. Posiblemente, el uso de situaciones reales puede apoyar a los estudiantes en la identificación y reconocimiento de estas relaciones multiplicativas y de este modo discriminar las situaciones proporcionales de las aditivas. En este sentido, el uso desde la educación primaria de tablas de números proporcionales y no proporcionales en contextos reales puede ayudar a los estudiantes a poner de manifiesto el comportamiento de las relaciones entre los números (Lamon, 1993; Singer, Kohn y Resnick, 1997).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cramer, K. y Post, T. (1993). Connecting research to teahing proportional reasoning. Mathematics Teacher, 86(5), 404-407.

Clark, F. B. y Kamii, C. (1996). Identification of multiplicative thinking in children in grades 1-5. *Journal for Research in Mathematics Education,* 27, 41-51.

Fernández, C. y Llinares, S. (2009). Understanding additive and multiplicative structures: The effect of number structure and nature of quantities on primary school students' performance. En A. Gagatsis; A. Kuzniak, E. Deliyianni y L. Vivier (eds.), *First French-Cypriot Conference of Mathematics Education* (pp. 1-18). Nicosia-Paris: University of Cyprus- University Paris Diderot 7.

Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2008). Implicative analysis of strategies in solving proportional and non-proportional problems. En O. Figueras y A. Sepúlveda (Eds.). *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, and the XXX North American* (vol. 3. pp. 1-8) Morelia, México: PME.

Fernández, C., Llinares, S., Van Dooren, W., De Bock, D. y Verschaffel, L. (2009). Effect of the number structure and the quality nature on secondary school students' proportional reasoning. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, y C. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp.25-32). Thessaloniki, Greece: PME.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S. y Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education,* 16, 3-17.

Gras, R., Suzuki, E., Guillet, F. y Spagnolo, F. (F.) (eds.) (2008). *Statistical Implicative analysis. Theory and Applications.* London: Springer

Greer, B. (1994). Extending the meaning of multiplication and division. En G. Harel y J. Confrey (Eds.). *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 61-85). New York: State University press.

Hart, K. (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16.* London: Murray.

Kaput, J. y West, M. M. (1994). Missing-value proportional reasoning problems: Factors affecting informal reasoning patterns. En G. Harel y J. Confrey (eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (pp. 235-287). New York: State University of New York Press.

Lamon, S. (1993). Ratio and proportion: Connecting content and children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education,* 24(1), 41-61.

Modestou, M. y Gagatsis, A. (2010). Cognitive and meta-cognitive aspects of proportional reasoning. *Mathematical Teaching and Learning*, 12(1), 36-53.

Nunes, T. y Bryant, P. (1996). *Children doing mathematics.* Oxford: Wiley.

Singer, J., Kohn, A. y Resnick, L. (1997). Knowing about proportions in different contexts. En T. Nunes y P. Bryant (eds.), *Learning and Teaching Mathematics. An International Perspective* (pp.115-132). London: Psychology Press Ltd. Publishers.

Tourniaire, F. y Pulos, S. (1985). Proportional reasoning. A review of literature. *Educational Studies in Mathematics*, 16(2), 181-204.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities of overgeneralization. *Cognition and Instruction* 23(1), 57-86.

Van Dooren, W., De Bock, D., Gillard, E. y Verschaffel, L. (2009). Add? Or multiply? A study on the development of primary school students' proportional reasoning skills. En M. Tzekaki,

M. Kaldrimidou, y C. Sakonidis, (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 5, pp.281-288). Thessaloniki, Greece: PME.